数字图像处理

第三讲

灰度变换与空间滤波

提纲

- 背景知识
- 基本灰度变换函数
- 直方图处理
- 空间滤波基础
- 平滑空间滤波器
- 锐化空间滤波器
- 混合空间增强法

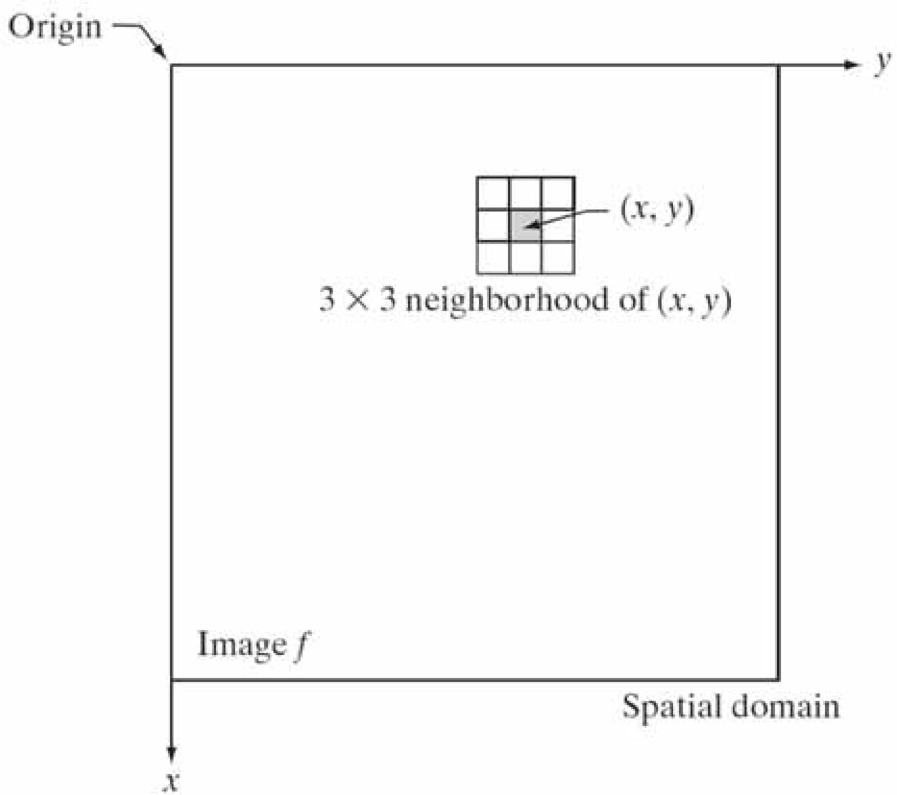
背景知识

- 空间域
  - 指图像平面本身
- 空间域处理
  - 直接操作图像内的像素
  - 更加简单、高效

1. 灰度变换
   - 单像素操作（对比度操作、阈值处理）
2. 空间滤波
   - 邻域操作（图像平滑、锐化）

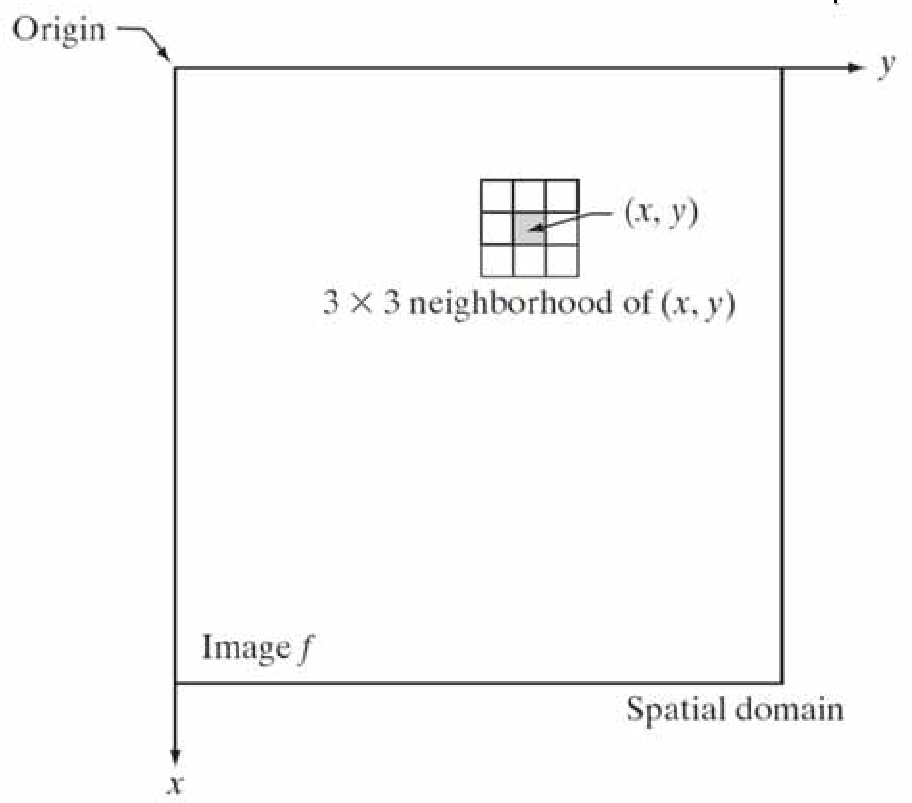
空间域处理

- 一般形式 $$g(x, y) = T[f(x, y)]$$
  - 单图像、多图像



空间处理流程

- 邻域原点移动
- 应用算子T
  - 比如计算均值
- 产生输出



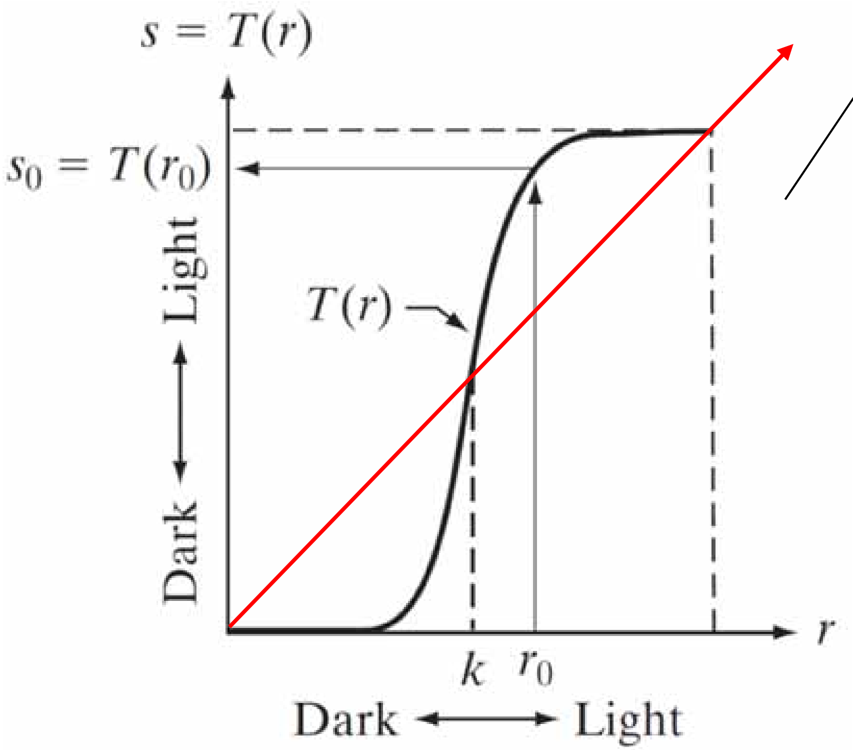
- 边界怎么办？
  - 忽略外部、填充

灰度变换

- 邻域为1 × 1的空间处理

$$g(x, y) = T[f(x, y)] \Rightarrow s = T(r)$$

  - r是输入灰度，s是输出灰度



- 灰度大于k的变得更亮
- 灰度小于k的变得更暗

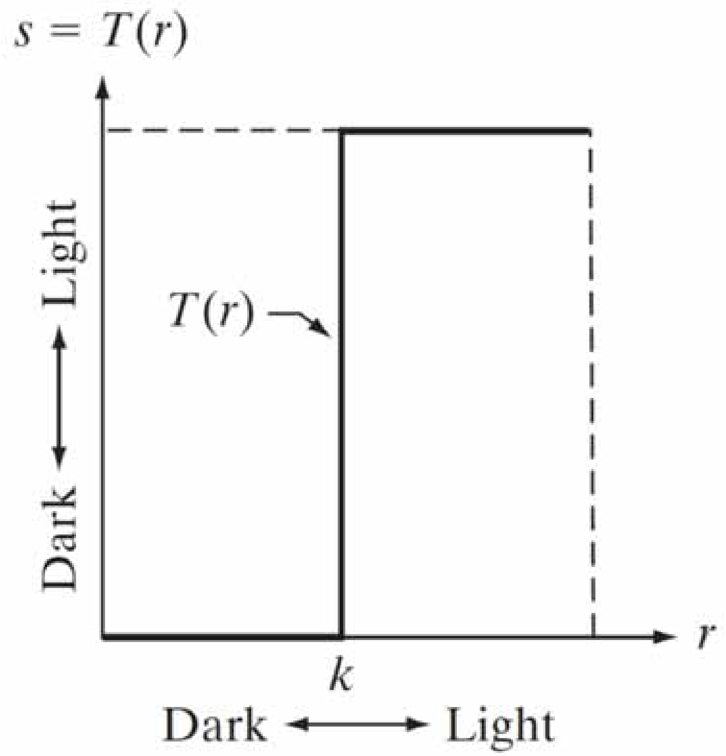
对比度拉伸

灰度变换

- 邻域为1 × 1的空间处理

$$s = T(r)$$

  - r是输入灰度，s是输出灰度



图像增强

- 对图像进行处理，使其比原始图像更适合于特定应用
  - 图像增强是面向问题的
  - 没有通用的理论和技术

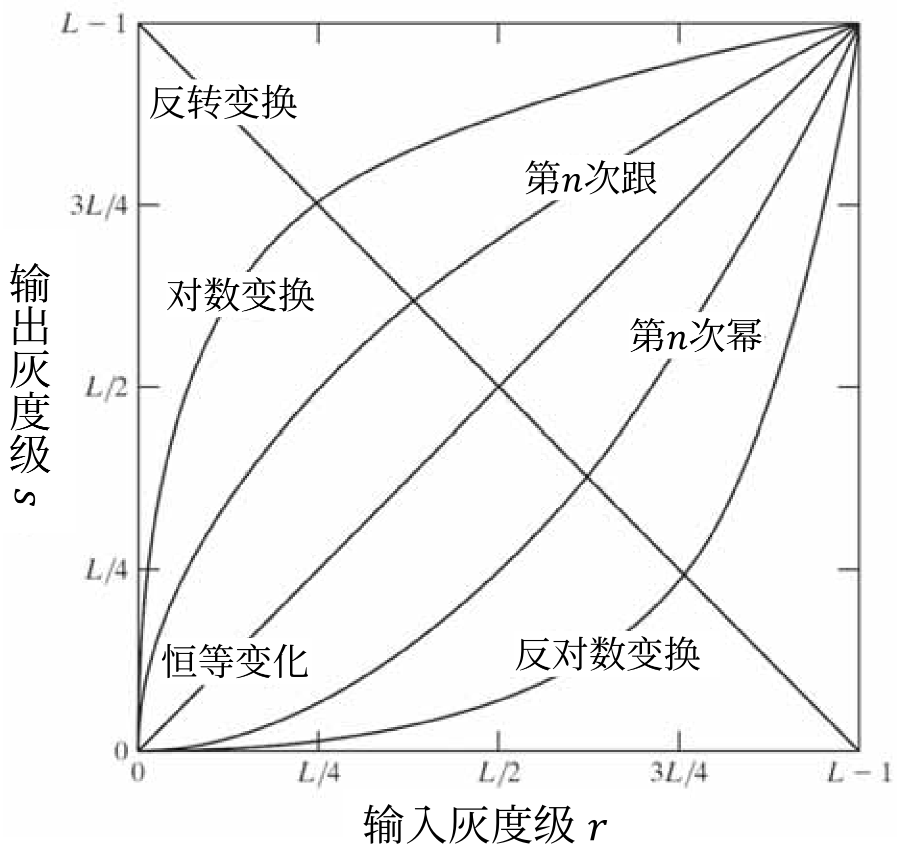
提纲

- 背景知识
- 基本灰度变换函数
- 直方图处理
- 空间滤波基础
- 平滑空间滤波器
- 锐化空间滤波器
- 混合空间增强法

基本灰度变换函数

- 线性函数、对数函数、幂律函数

$$s = T(r)$$

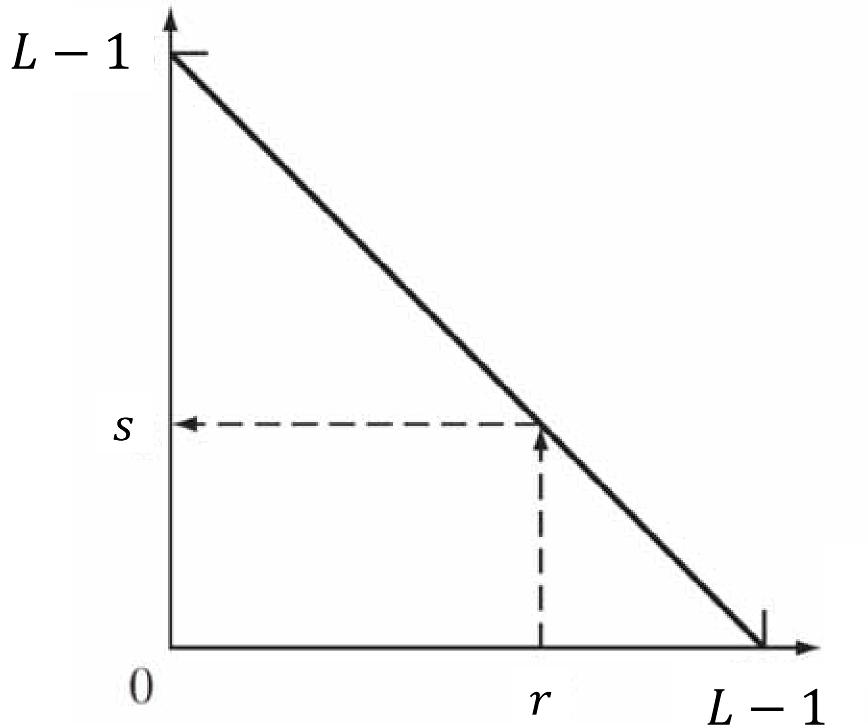


图像反转

- 计算公式

$$s = L - 1 - r$$

  - 增强嵌入在暗区域中的白色或灰色细节

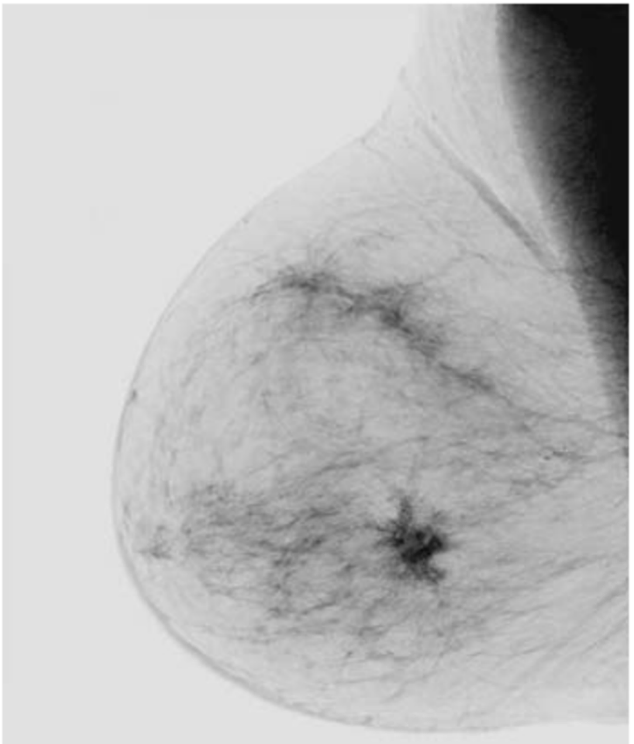


图像反转

- 计算公式

$$s = L - 1 - r$$

X射线图像



反转图像

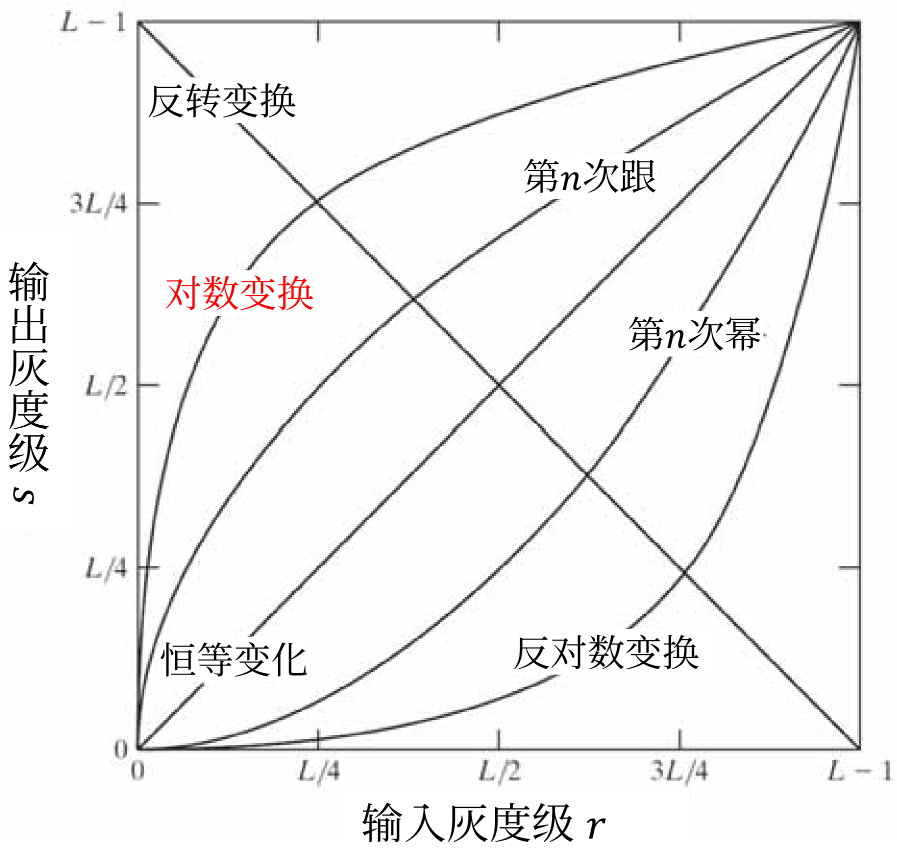
对数变换

- 计算公式

$$s = c\log(1 + r)$$

  - c是常数

  - 低灰度值扩展
  - 高灰度值压缩



对数变换

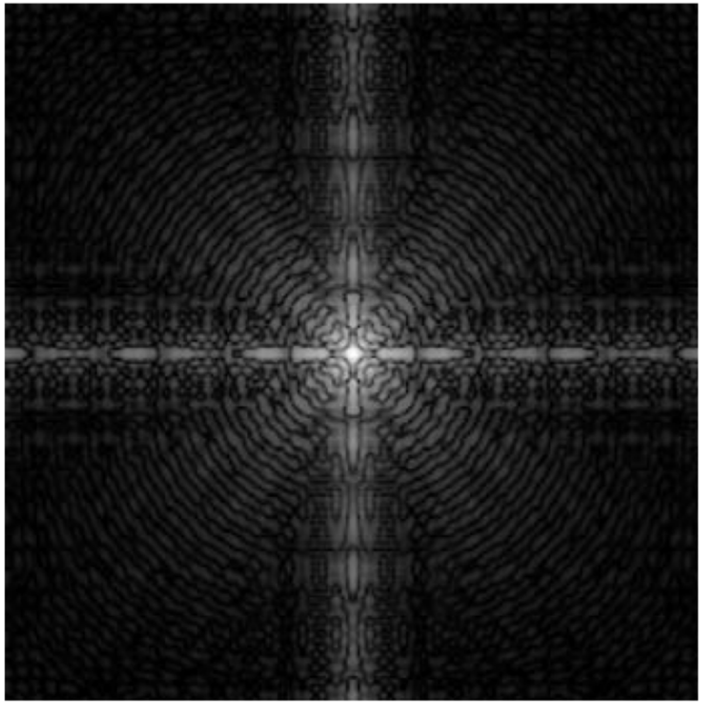
- 计算公式

$$s = c\log(1 + r)$$

显示了暗色中隐藏的细节

- 压缩灰度范围：$0\sim1.5\times10^6 \rightarrow 0\sim6.2$

傅里叶频谱



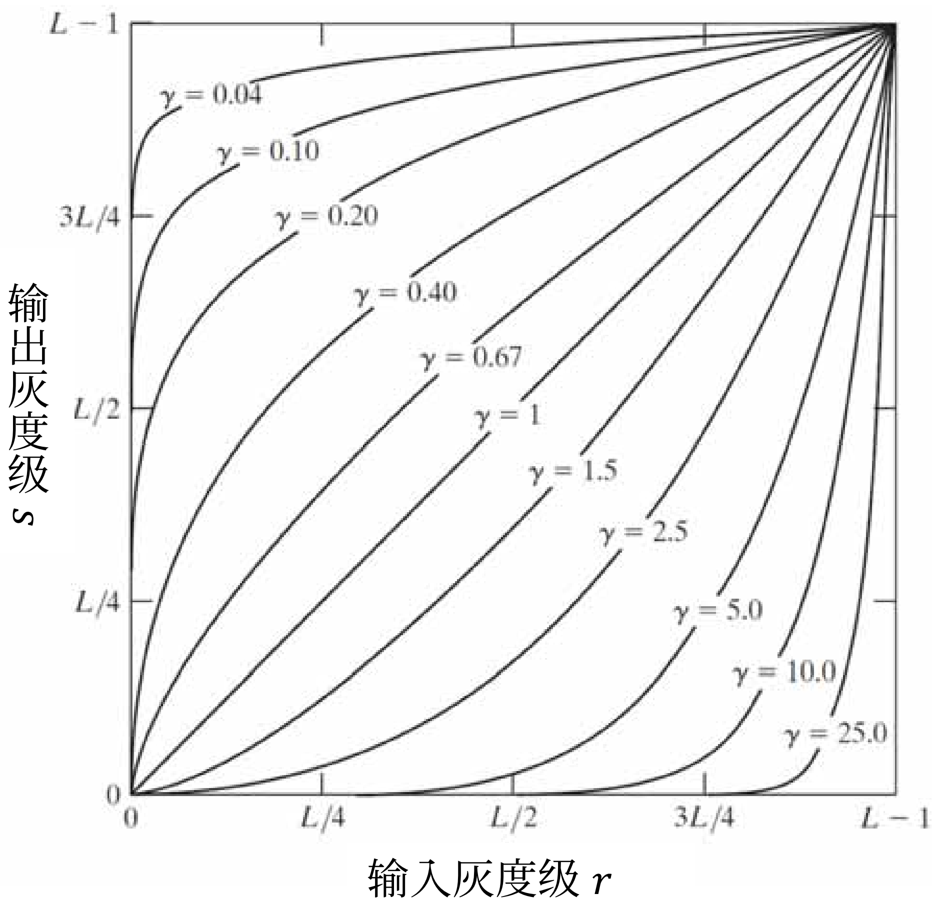
对数变换后的结果

幂律变换（伽马变换）

- 计算公式

$$s = cr^{\gamma}$$

  - c和γ是正常数
  - $\gamma < 1$
    - 低灰度值扩展
    - 高灰度值压缩

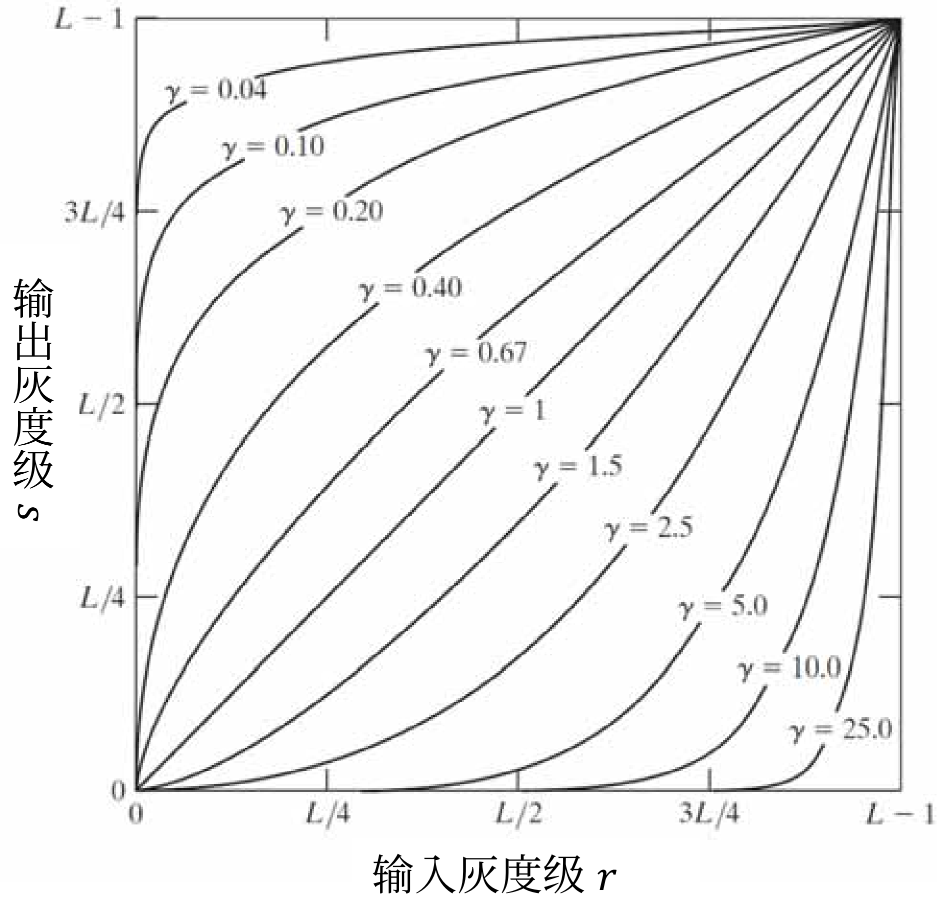


幂律变换（伽马变换）

- 计算公式

$$s = cr^{\gamma}$$

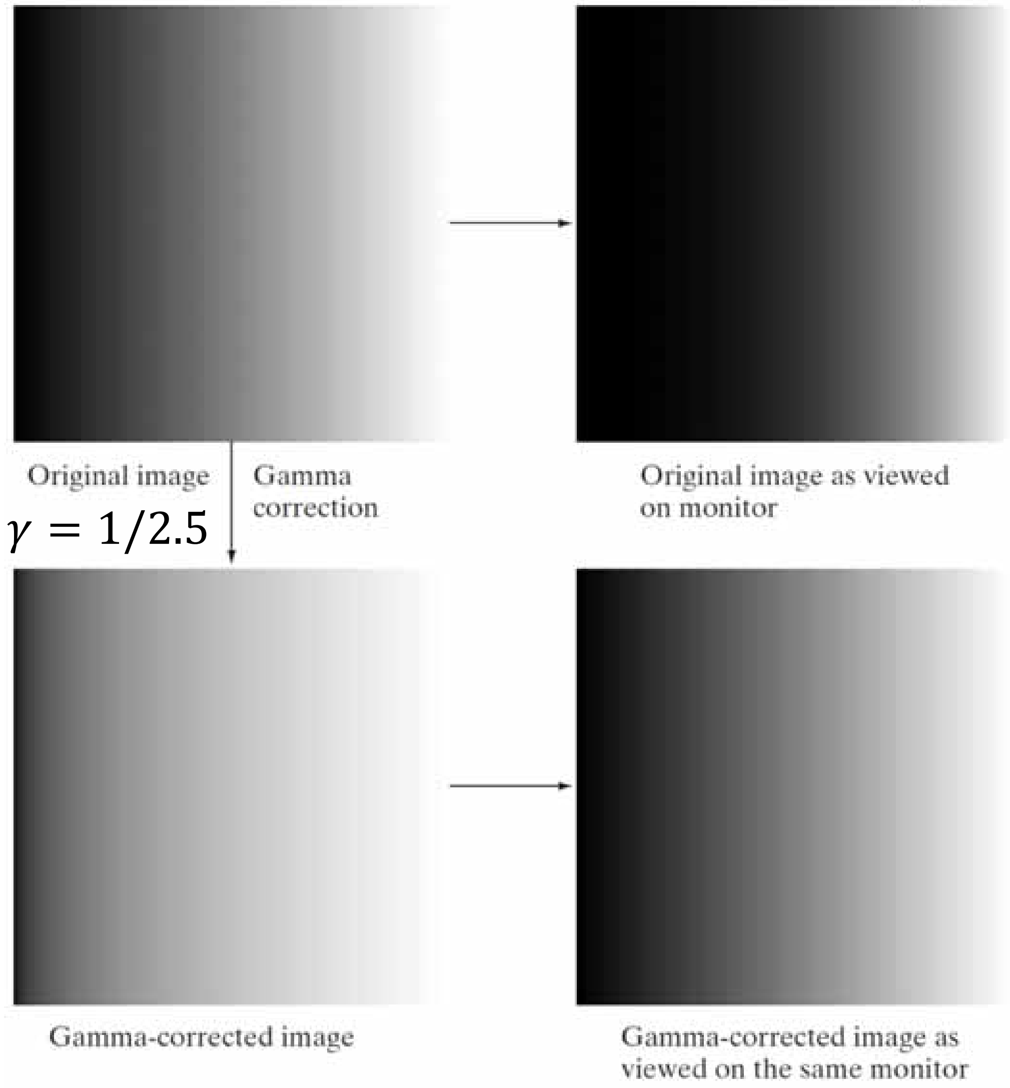
  - c和γ是正常数
  - $\gamma > 1$
    - 低灰度值压缩
    - 高灰度值扩展



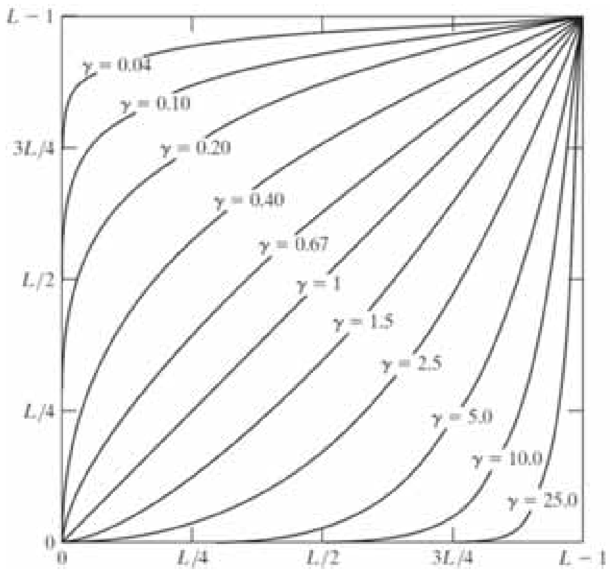
幂律变换（伽马变换）

- 伽马校正
  - 显示设备依据幂律来响应
  - 处理图像来校正幂律响应

$\gamma = 2.5$

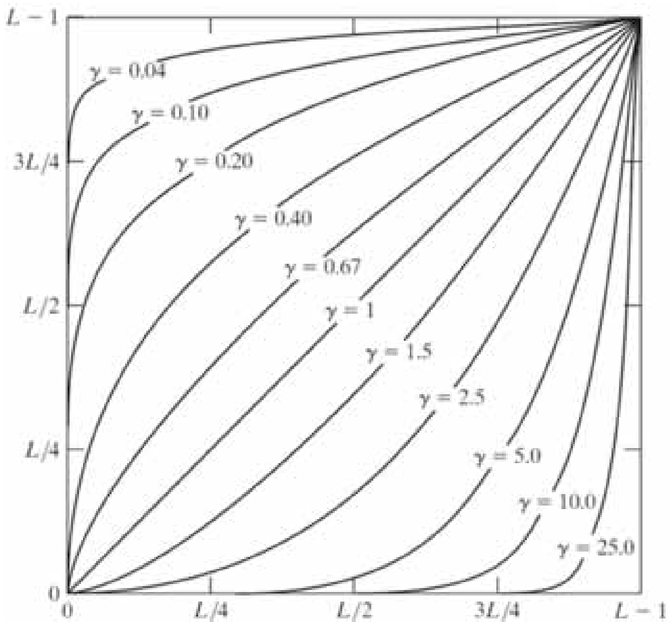


$\gamma = 1/2.5$



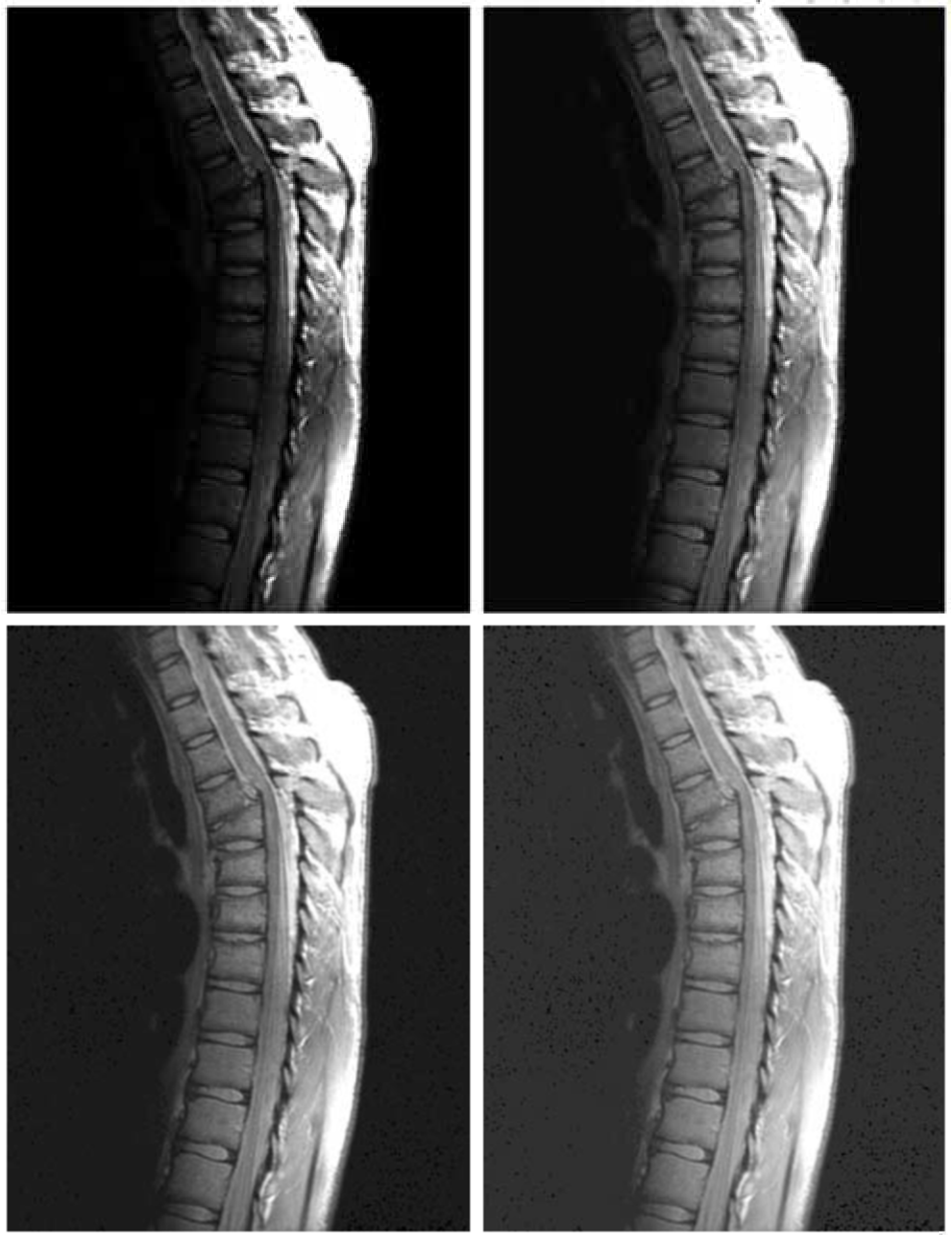
举例

- $\gamma < 1$
  - 低灰度值扩展
  - 高灰度值压缩



  - γ太小，对比度降低

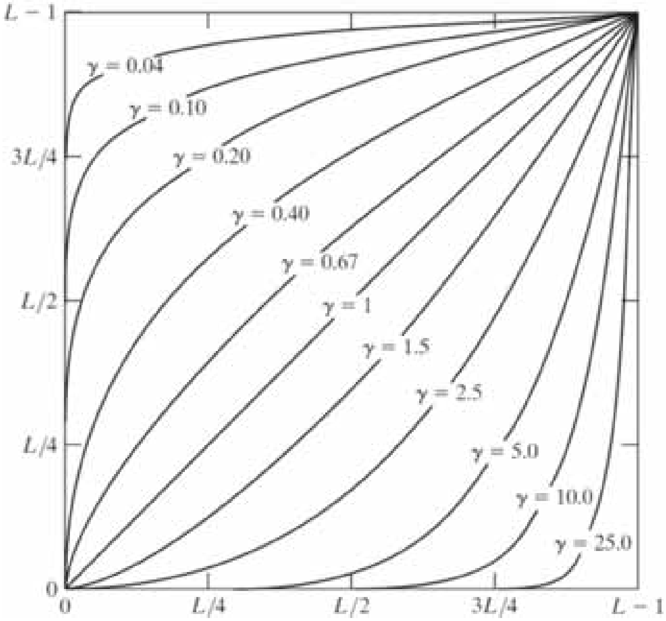
核磁共振图像 $\gamma = 0.6$



$\gamma = 0.4$ $\gamma = 0.3$

举例

- $\gamma > 1$
  - 低灰度值压缩
  - 高灰度值扩展



  - γ太大，细节丢失

航拍图像 $\gamma = 3$

$\gamma = 4$ $\gamma = 5$

基本变换函数的扩展

- 如果对不同的灰度级别有不同的处理需求，怎么办?
- 分段线性变换函数
  - 形式可以是任意复杂
  - 需要人工设计

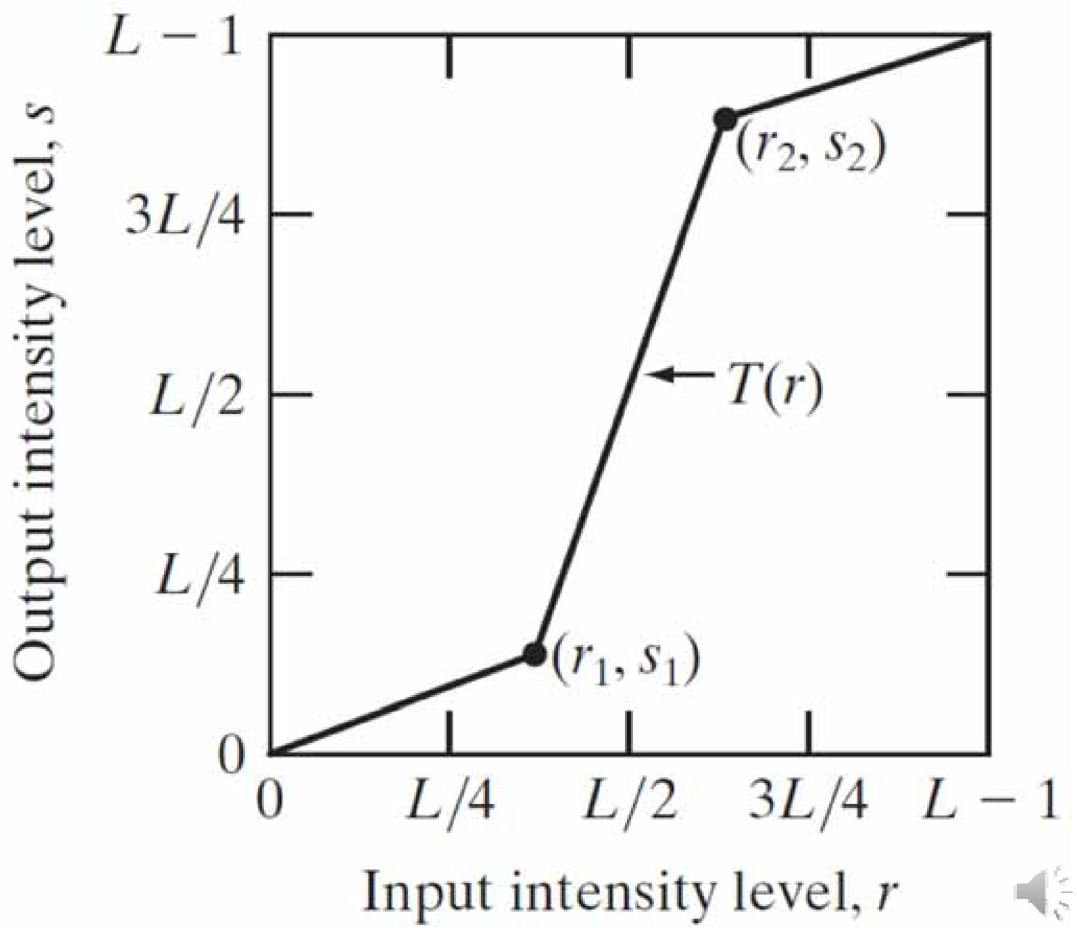
1. 对比度拉伸
2. 灰度级分层
3. 比特平面分层

对比度拉伸变换

- 一般是单调递增

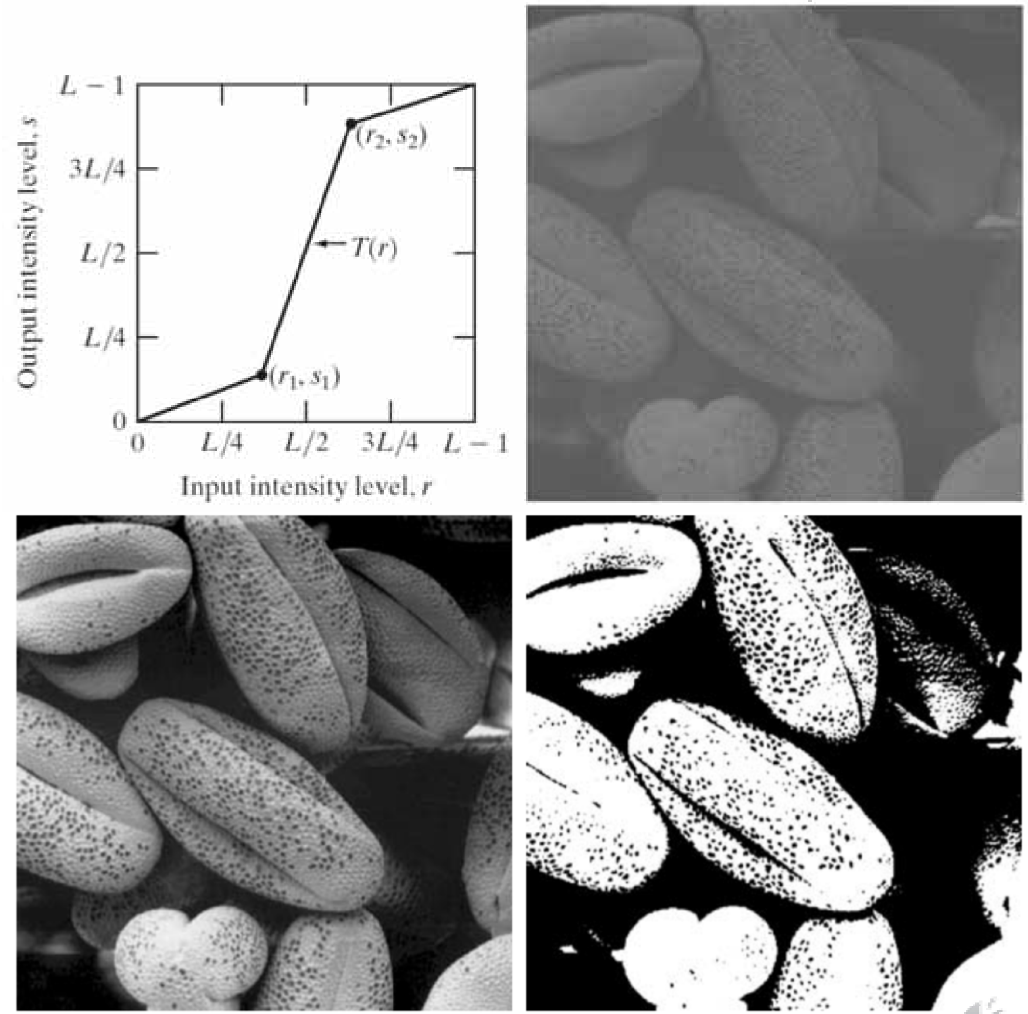
- 线性函数
  - $r_1 = s_1, r_2 = s_2$

- 阈值处理函数
  - $r_1 = r_2, s_1 = 0$
  - $s_2 = L - 1$



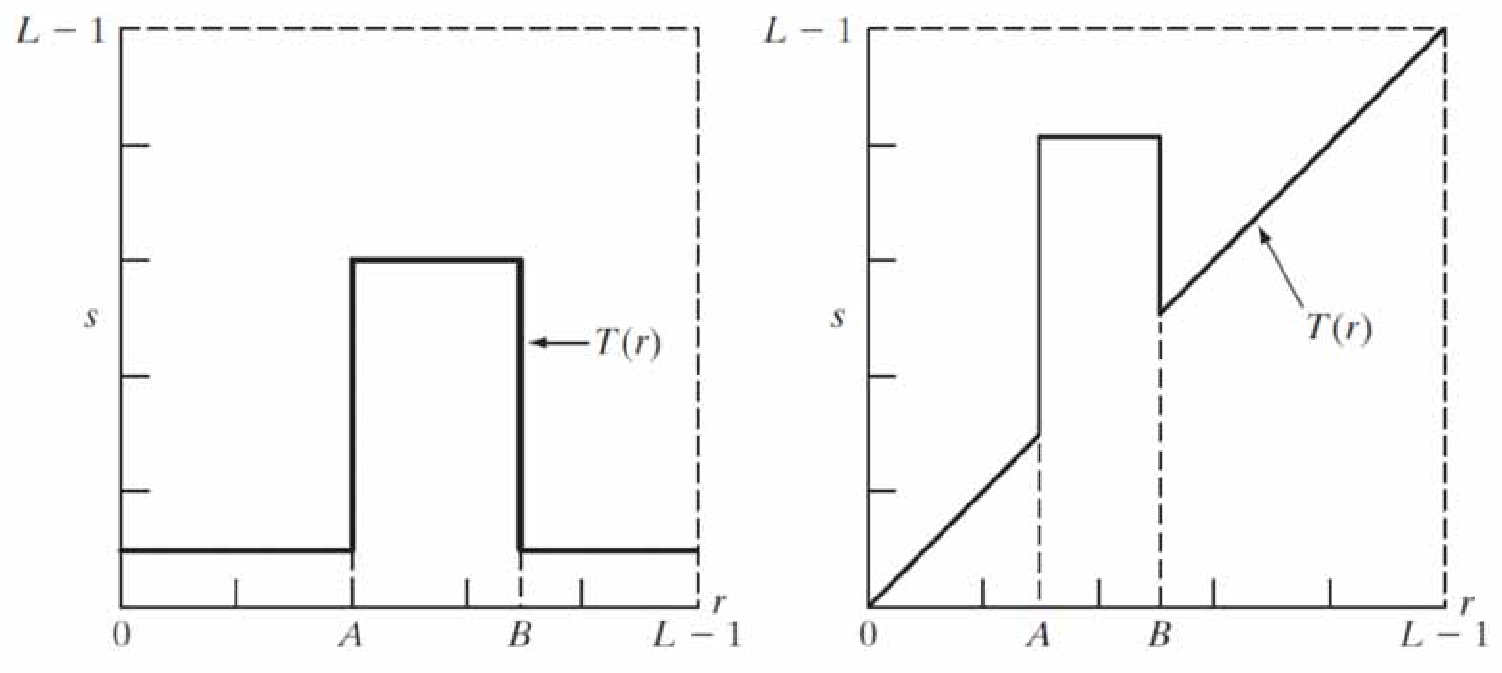
举例

- 线性拉伸
  - $(r_1, s_1) = (r_{\min}, 0)$
  - $(r_2, s_2) = (r_{\max}, L-1)$
- 阈值处理
  - $(r_1, s_1) = (m, 0)$
  - $(r_2, s_2) = (m, L-1)$



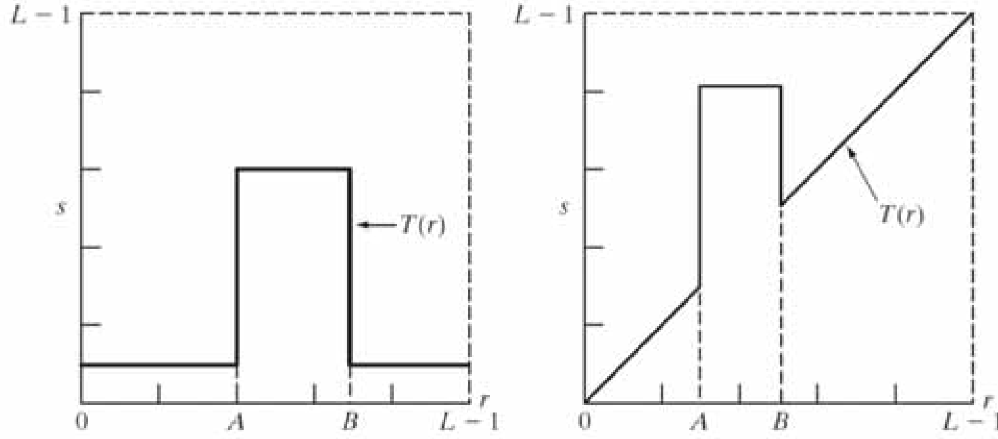
灰度级分层

- 突出特定的灰度范围



举例

- 医学图像处理



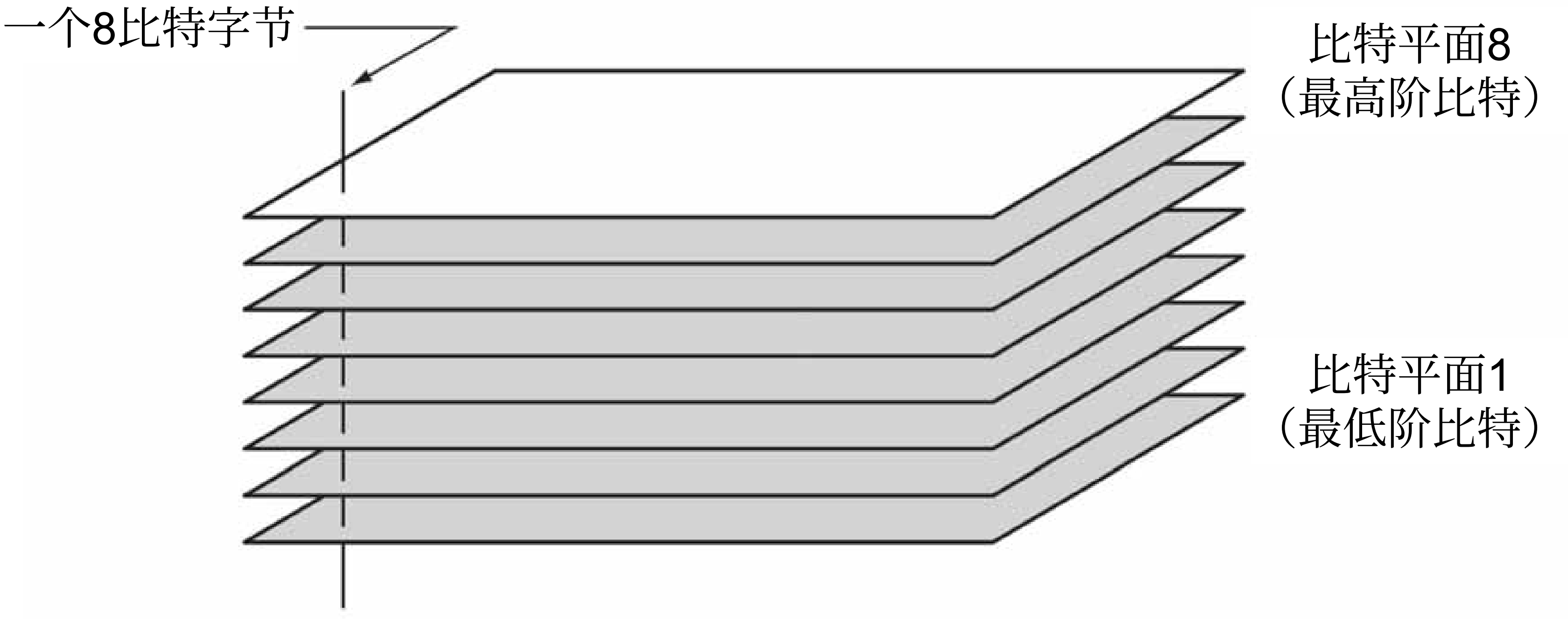
大动脉血管造影

把感兴趣的变成白色
把不感兴趣的变成黑色

把不感兴趣的变成黑色

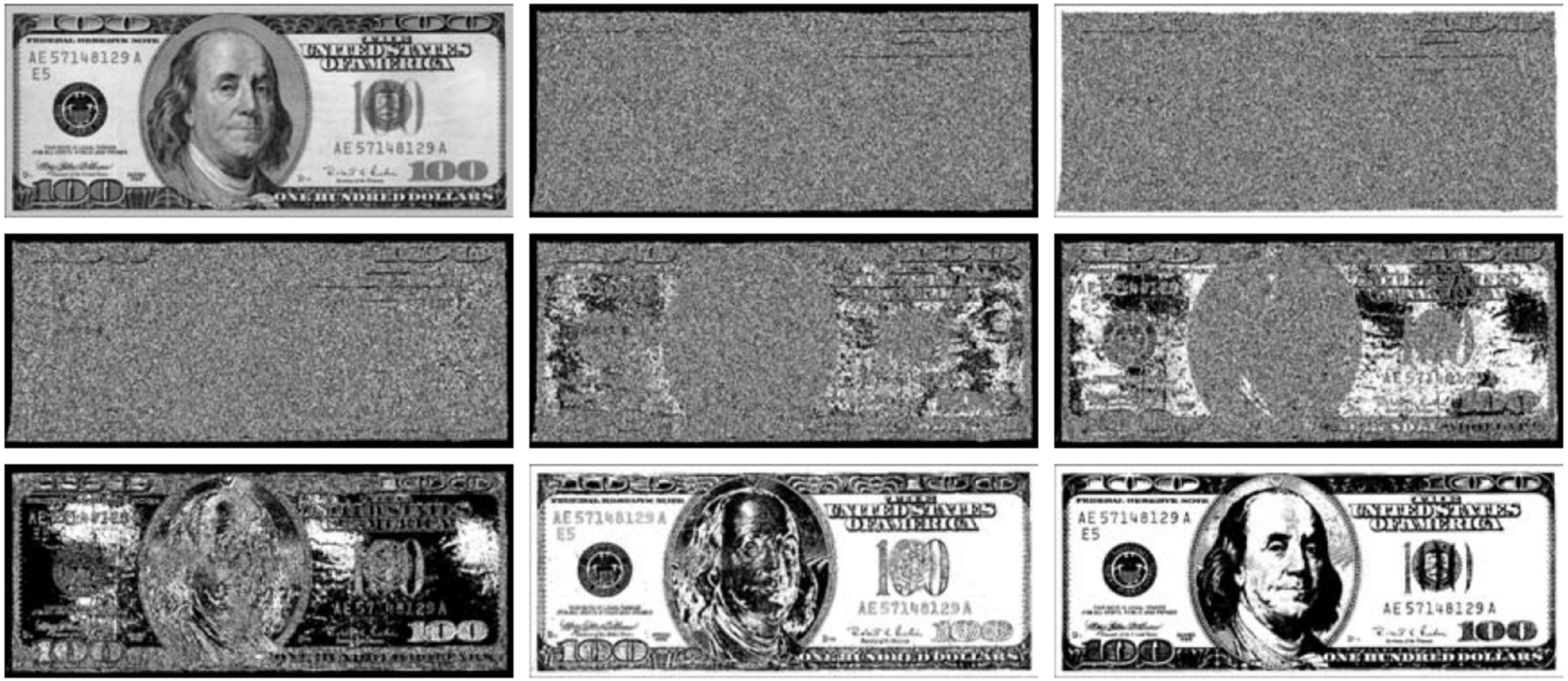
比特平面分层

- 突出特定比特的作用
  - 8比特图像可认为由8个1比特平面组成



举例

- 高阶比特平面包含视觉上重要的数据
- 低阶比特平面贡献了更精细的灰度细节



边框灰度值194: 11000010

函数实现

- 第8个比特
  - $[0,127] \rightarrow 0,\ [128,255] \rightarrow 255$

其他比特位呢？

应用

- 确定量化该图像比特数的充分性

- 图像压缩

伪轮廓

8、7

8、7、6

8、7、6、5

提纲

- 背景知识
- 基本灰度变换函数
- 直方图处理
- 空间滤波基础
- 平滑空间滤波器
- 锐化空间滤波器
- 混合空间增强法

直方图处理（子目录）

- 灰度直方图
- 直方图均衡
- 直方图匹配
- 局部直方图处理
- 在图像增强中使用直方图统计

灰度直方图

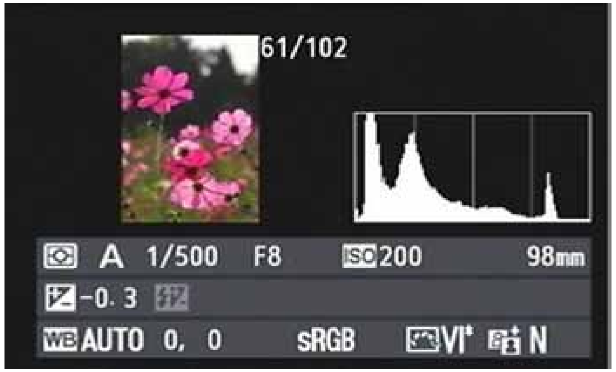
- 直方图

$$h(r_k) = n_k$$

  - $r_k \in [0, L-1]$表示图像的第k个灰度值
  - n_k表示r_k在图像中出现的次数

- 归一化直方图

$$p(r_k) = \frac{n_k}{MN}$$



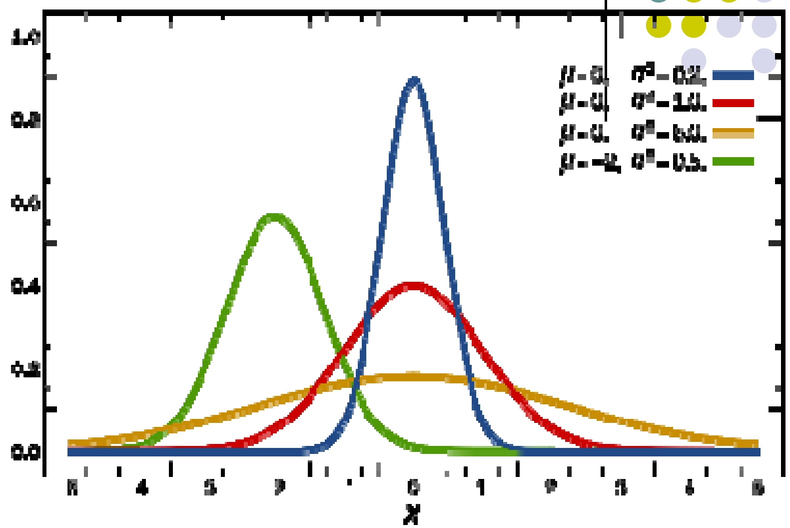
  - 表示r_k在图像中出现的概率
  - 显然

$$\sum_{k=0}^{L-1} p(r_k) = 1$$

概率

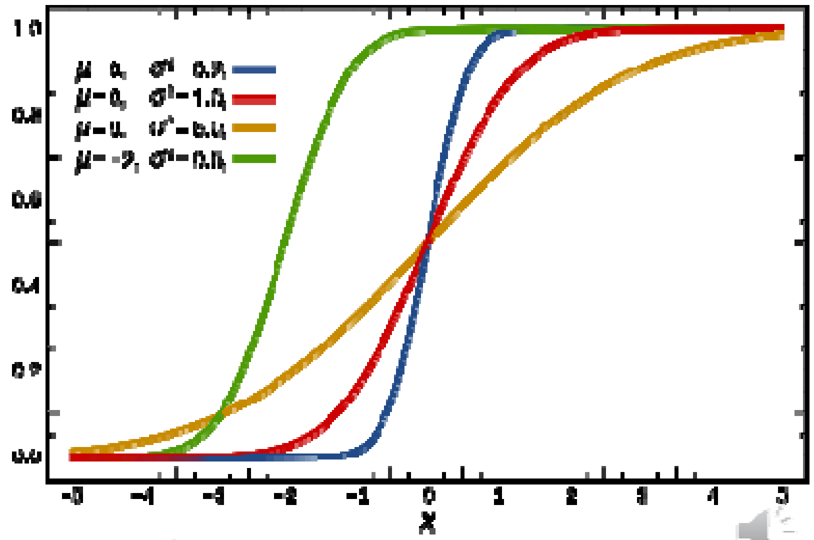
- 概率密度函数（PDF）

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$



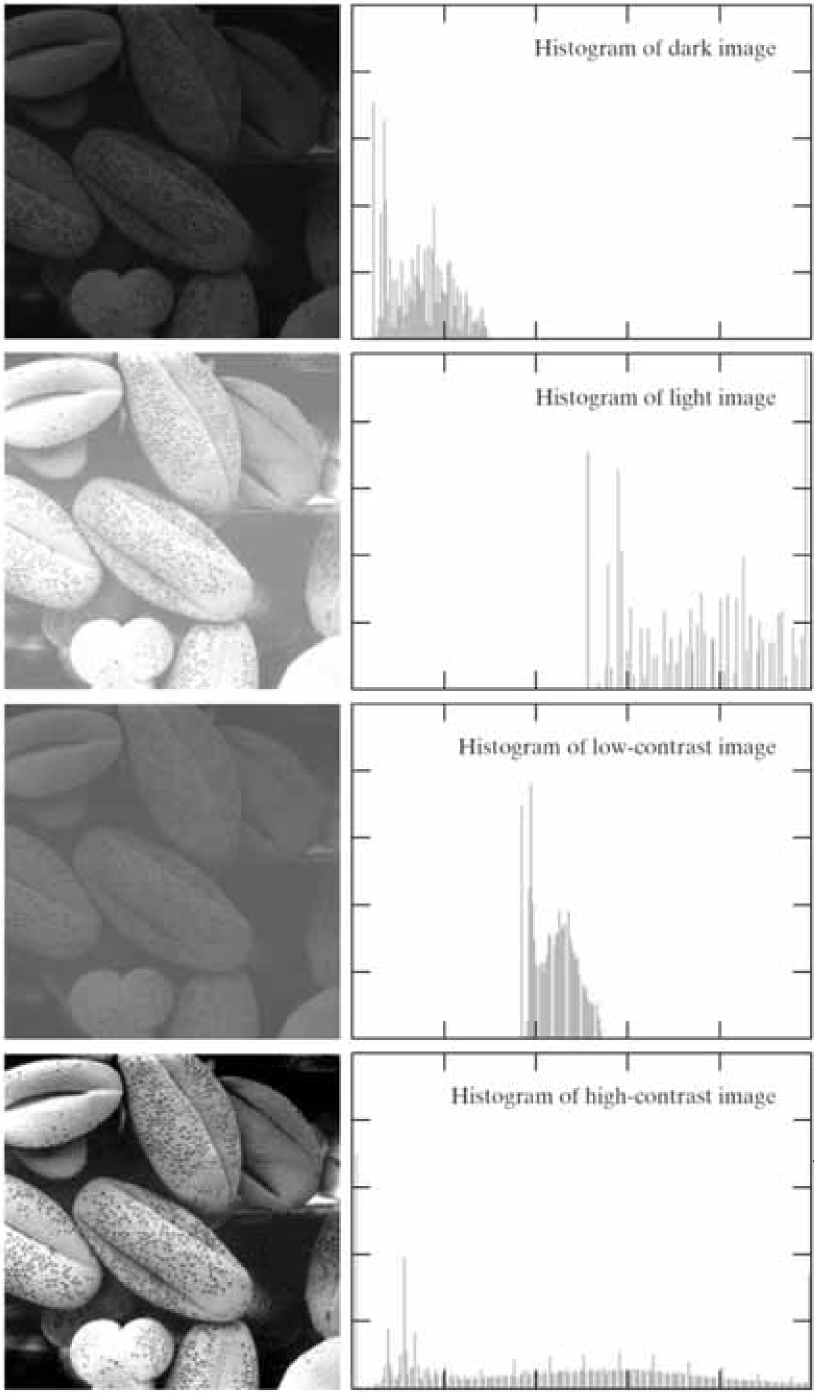
- 累计分布函数（CDF）

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$



https://en.wikipedia.org/wiki/Cumulative_distribution_function

举例



暗图像

亮图像

什么是理想的
直方图形状？

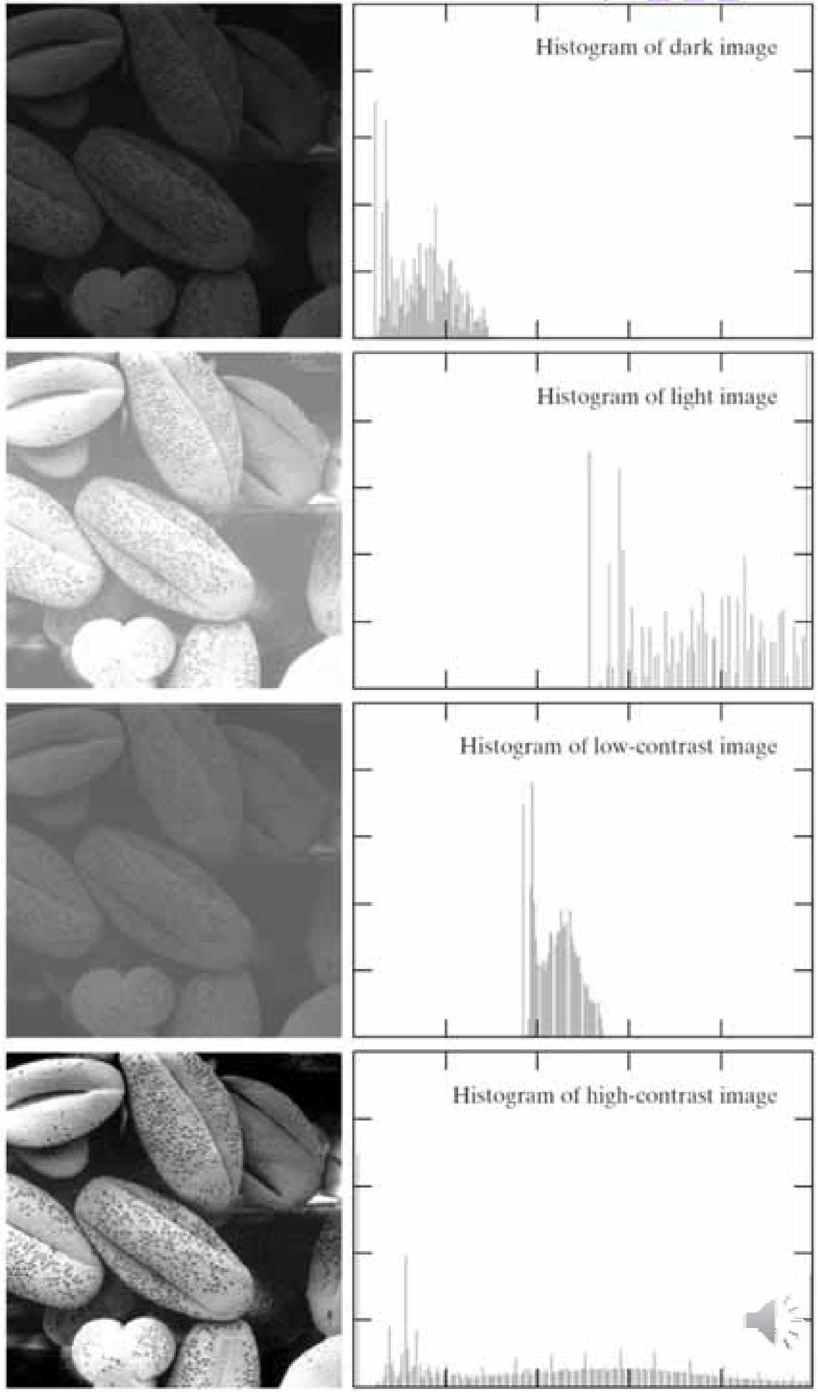
低对比度

均衡的直方图

高对比度

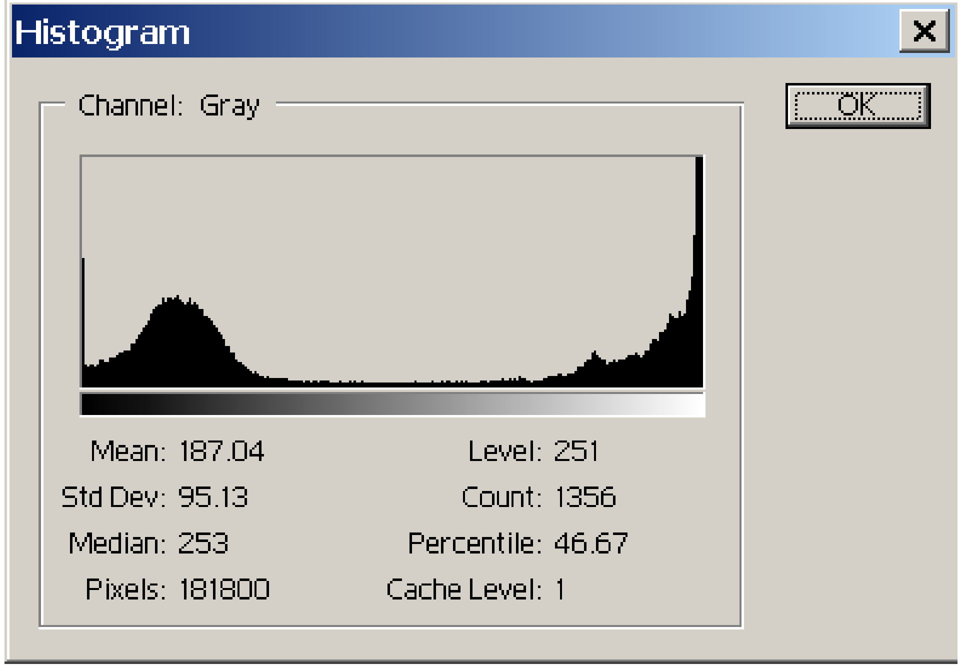
直方图的简单应用

- 检测图像的质量
  - 检查灰度范围
  - 计算方差
  - 计算与均匀分布的距离



直方图的简单应用

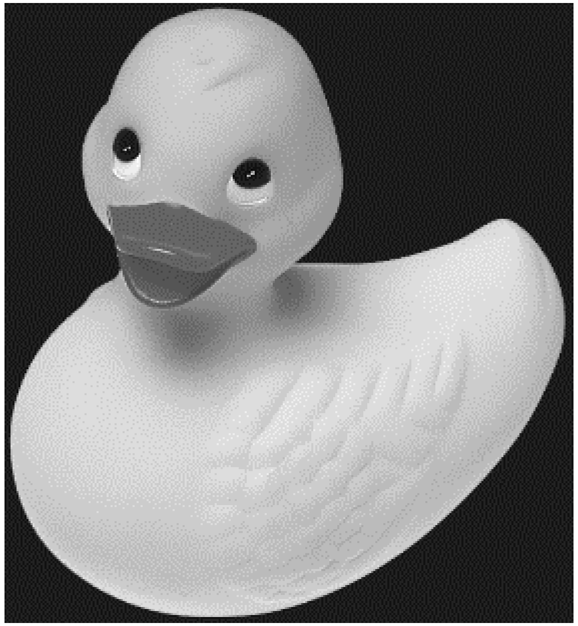
- 分割图像前景和背景

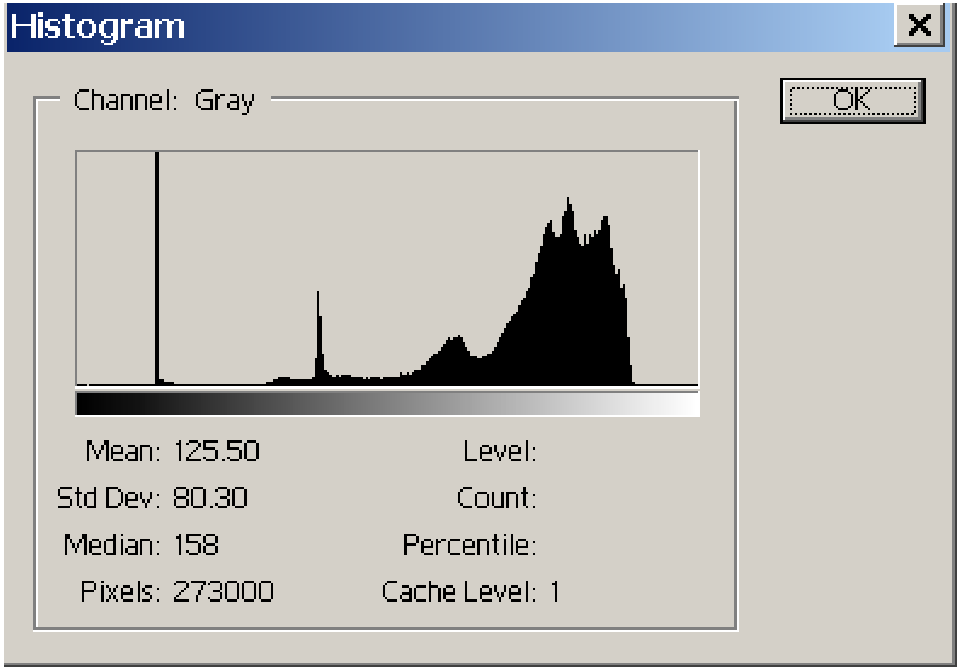


- 从直方图内寻找合适的阈值

直方图的简单应用

- 计算物体面积





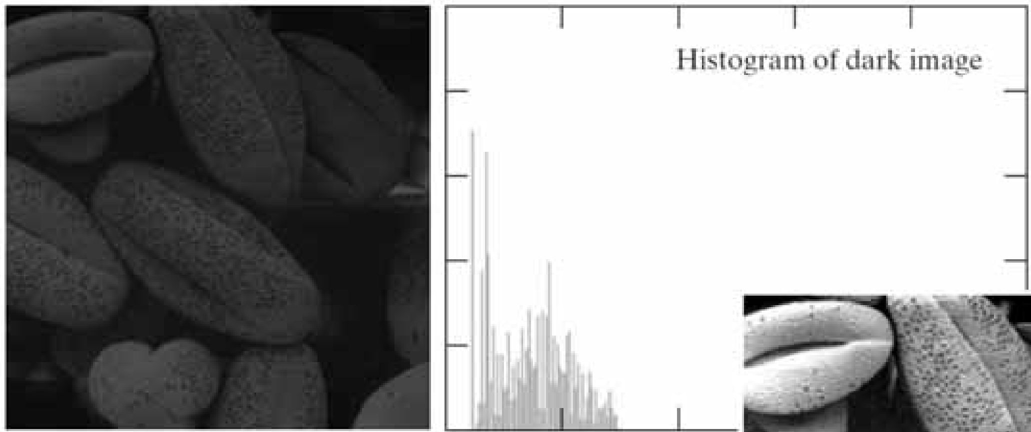
- 对直方图进行积分

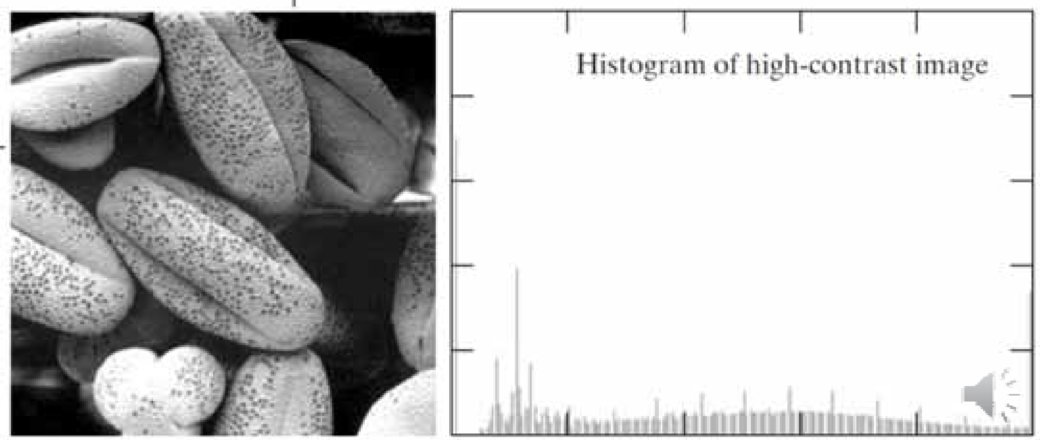
直方图均衡

- 通过灰度变换

$$s = T(r)$$

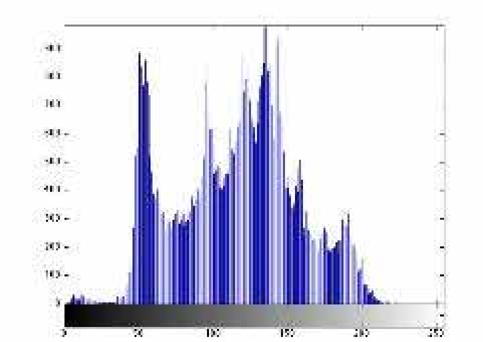
得到均衡的直方图



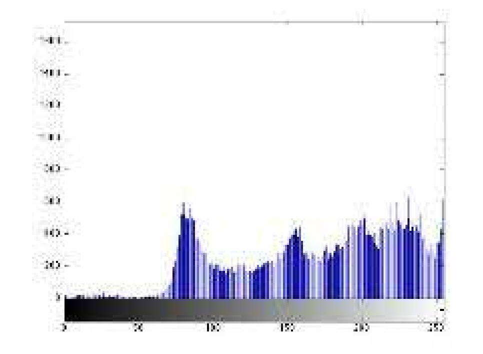


线性变换

原图

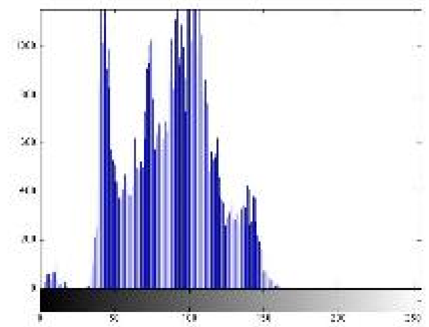


$s = 1.5 \times r$



$$s = T(r)$$
$$= a \times r + b$$

$s = 0.8 \times r$



核心问题

- 刻画灰度变换函数与直方图的关系
  - 假设有一幅输入图像A，经过灰度变换函数$s = T(r)$，产生了输出图像B
  - 输入图像的直方图$p_r(r)$和灰度变换函数T，如何计算输出图像B的直方图$p_s(s)$
- 单调递增变换函数
  - $r_2 > r_1 \Rightarrow T(r_2) \geq T(r_1)$
- 严格单调递增变换函数
  - $r_2 > r_1 \Rightarrow T(r_2) > T(r_1)$

单调连续函数

- $r \in [0, L-1]$

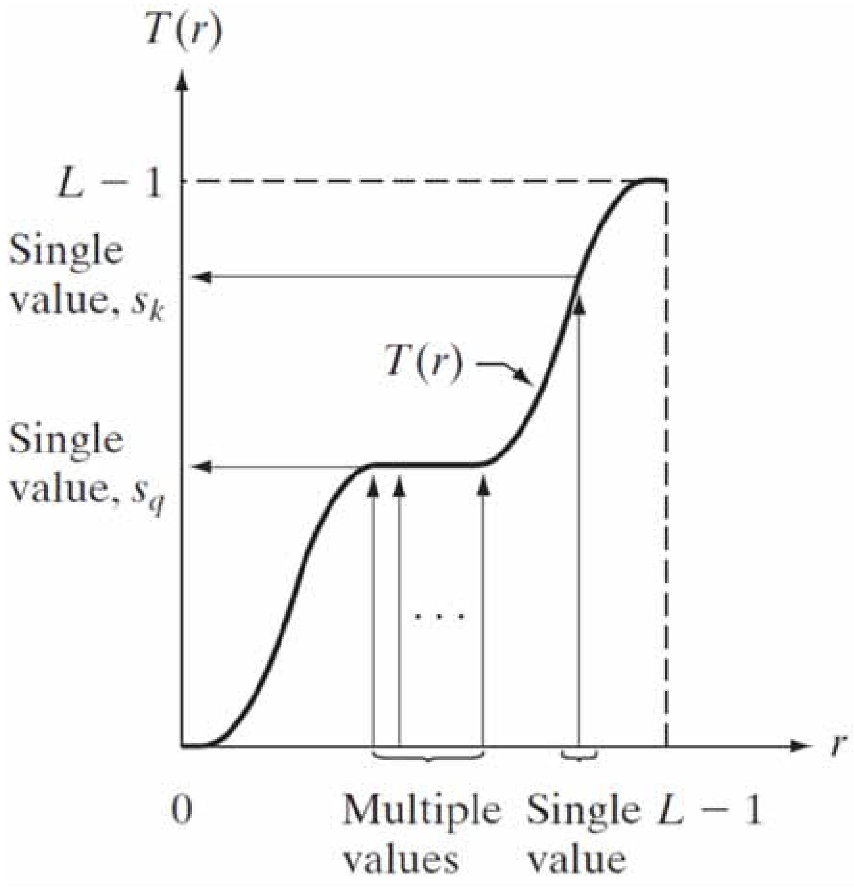
$$s = T(r)$$

  - $T(r)$在区间$[0, L-1]$为单调递增函数
  - 当$0 \le r \le L-1$时， $0 \le T(r) \le L-1$

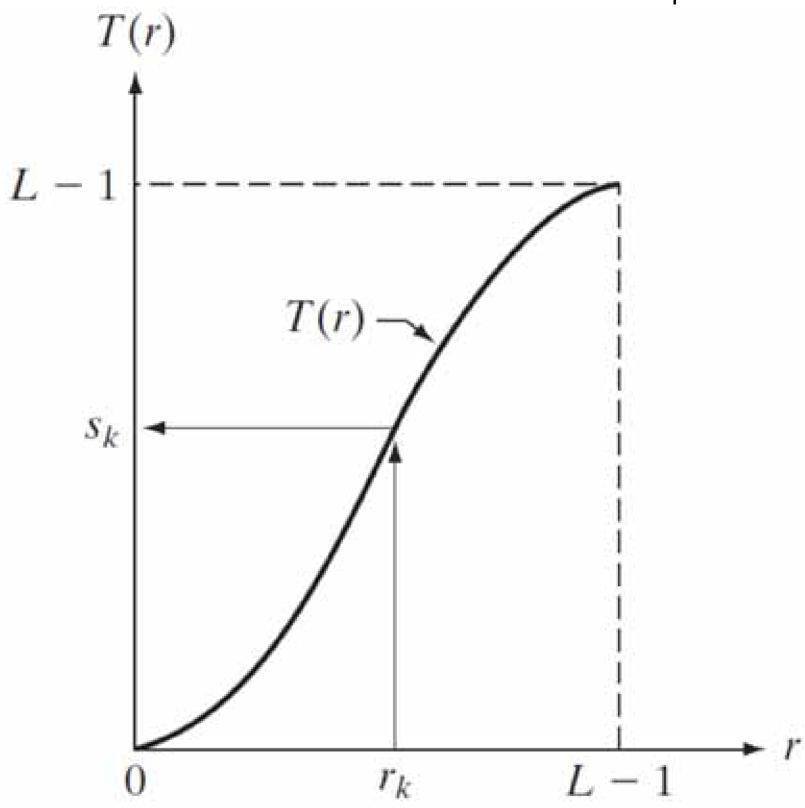
- 更强的假设
  - $T(r)$在区间$[0, L-1]$为严格单调递增函数

$$r = T^{-1}(s)$$

举例



单调递增



严格单调递增

概率密度公式

- 输入图像灰度值概率密度$p_r(r)$
- 变换函数$s = T(r)$
- 输出图像灰度值概率密度$p_s(s)$?

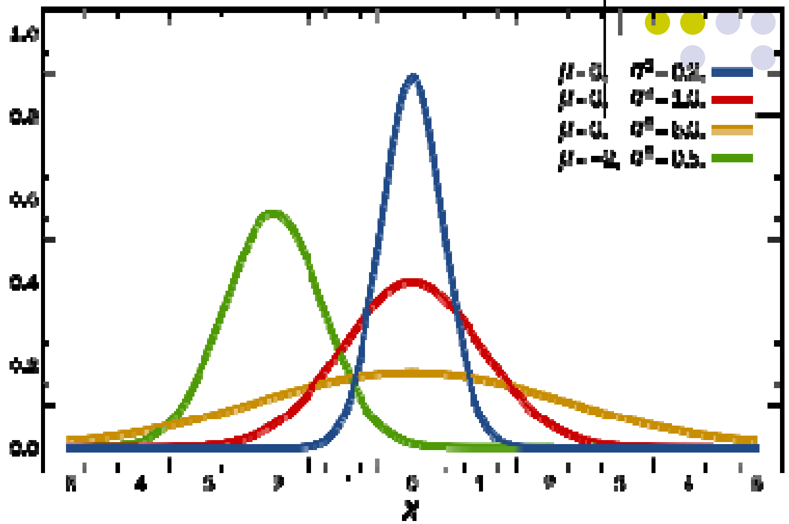
$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right| = p_r(r)\left|\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right)^{-1}\right|$$

$$= p_r\left(T^{-1}(s)\right)\frac{1}{\left|T'\left(T^{-1}(s)\right)\right|}$$

概率

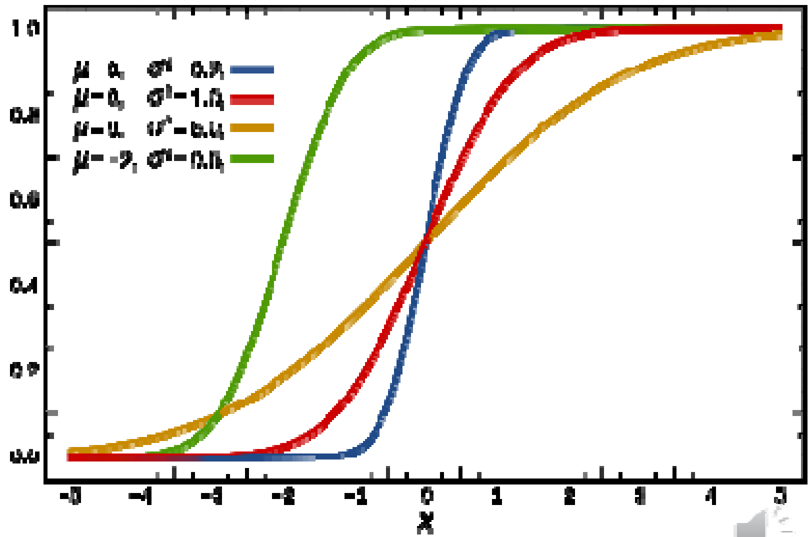
- 概率密度函数（PDF）

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$



- 累计分布函数（CDF）

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$



https://en.wikipedia.org/wiki/Cumulative_distribution_function

证明过程 $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

- https://en.wikibooks.org/wiki/Probability/Transformation_of_Probability_Densities
  - 单调递增

$$p_s(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P[S \le s] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P[T(R) \le s]$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P[R \le T^{-1}(s)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P[R \le r]$$

$$= \frac{\mathrm{d}P[R \le r]}{\mathrm{d}r} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = p_r(r) \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$$

  - 单调递减

小测试

线性运算

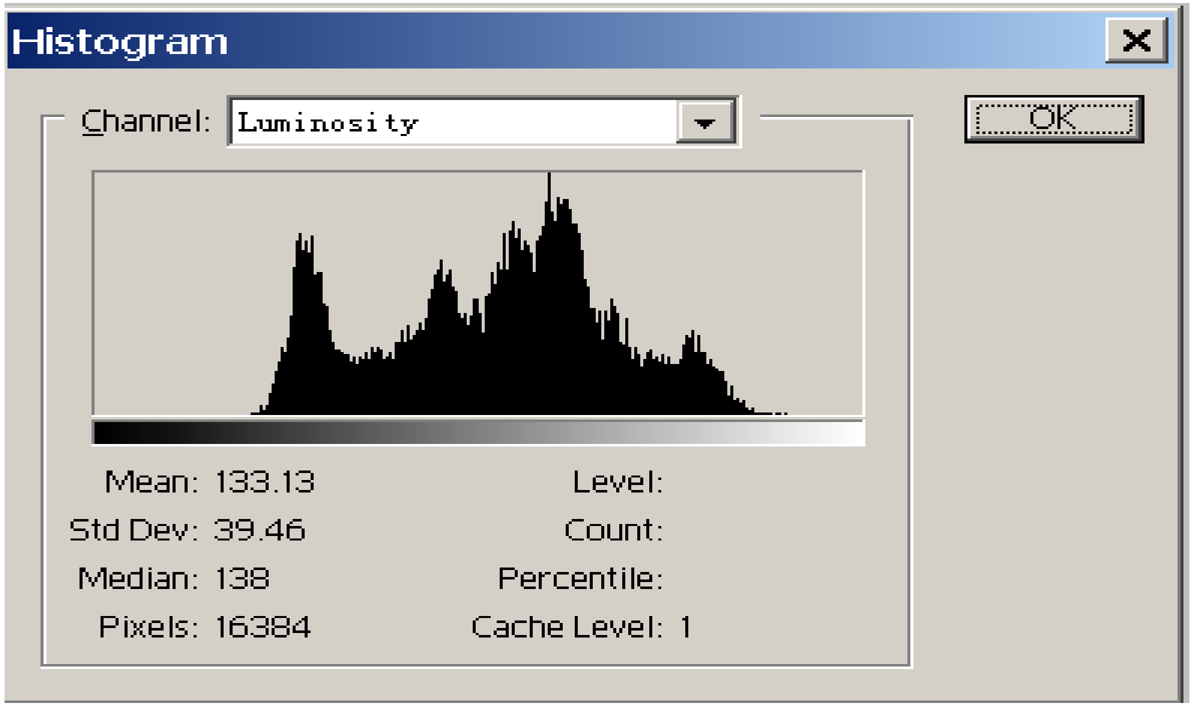
$$s = T(r) = a \times r + b$$

计算$p_r(r)$经线性运算后的直方图$p_s(s)$:

$$p_s(s) = p_r\left(T^{-1}(s)\right)\frac{1}{\left|T'\left(T^{-1}(s)\right)\right|} = \frac{1}{a}p_r\left(\frac{s-b}{a}\right)$$

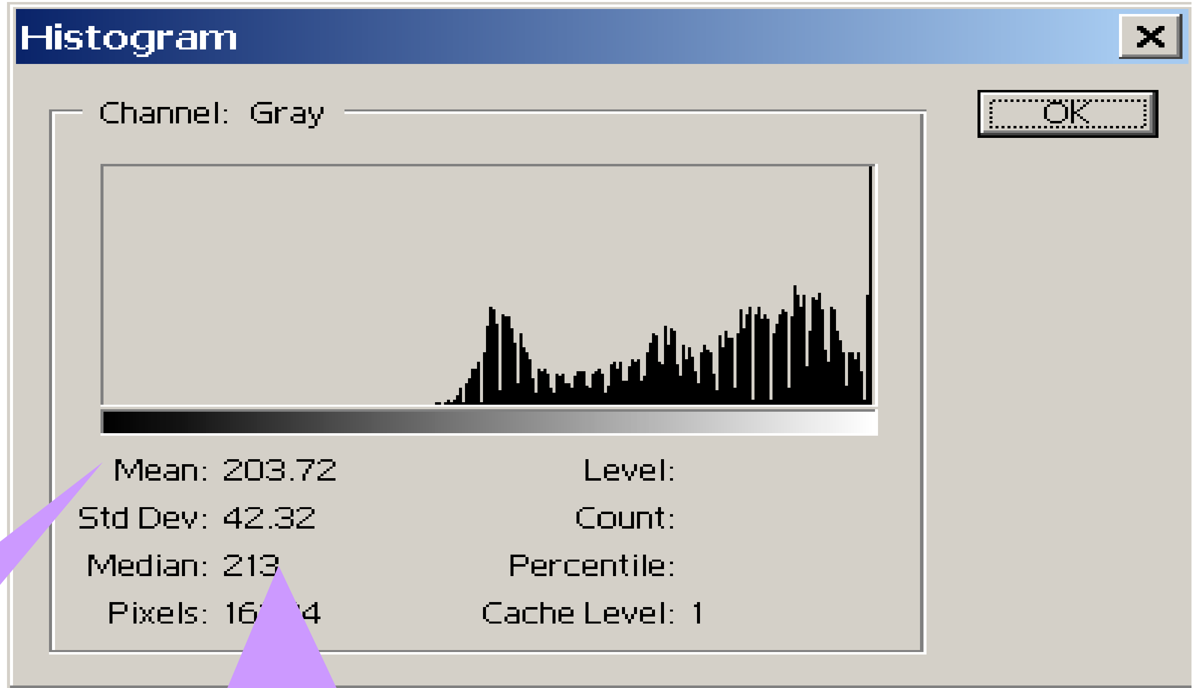
举例

$$s = T(r) = 1.2 \times r + 50$$



举例

$$s = T(r) = 1.2 \times r + 50$$



均值：203.72 ≈ 1.2*133.13+50

中值：213≈1.2*138+50

直方图均衡化

- 输入图像灰度值概率密度$p_r(r)$
- 变换函数$s = T(r)$
- 输出图像灰度值概率密度$p_s(s)$

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right| = p_r(r)\left|\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right)^{-1}\right|$$

- 如何设计$T(r)$使得$p_s(s)$成为均匀分布？

直方图均衡化

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

- 变换函数

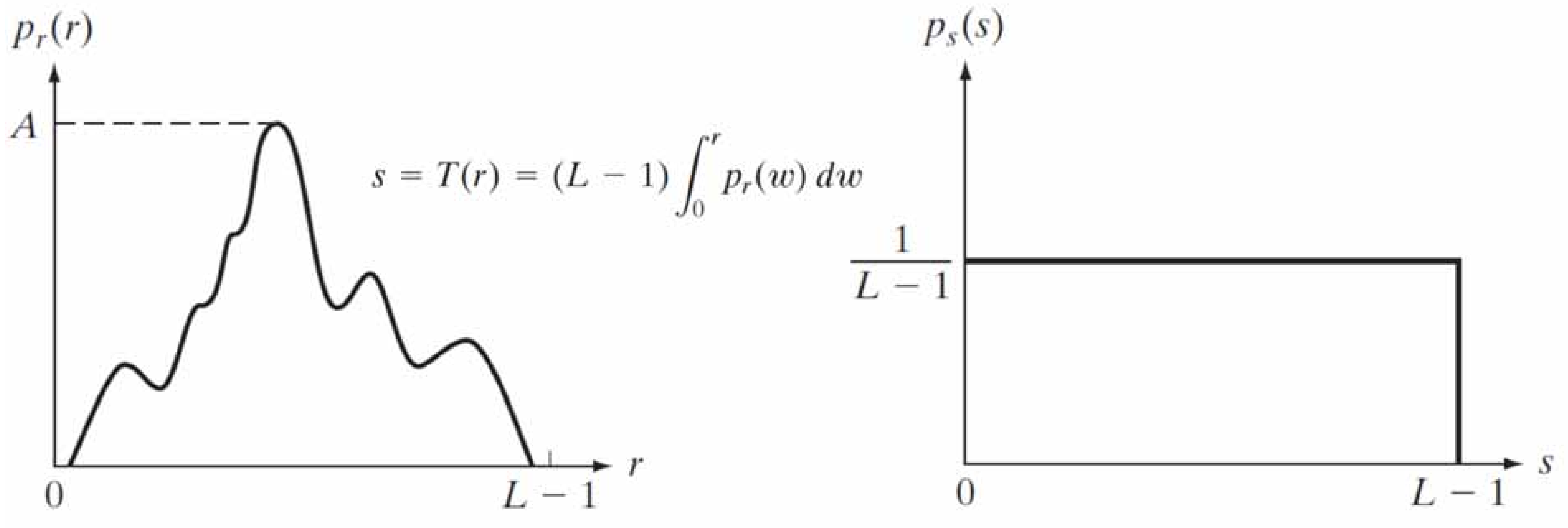
$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,dw$$

  - 单调递增
  - 属于区间$[0, L-1]$
- 效果

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dr} &= \frac{dT(r)}{dr} \\ &= (L-1)\frac{d}{dr}\left[\int_0^r p_r(w)\,dw\right] \\ &= (L-1)p_r(r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_s(s) &= p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right| \\ &= p_r(r)\left|\frac{1}{(L-1)p_r(r)}\right| \\ &= \frac{1}{L-1} \qquad 0 \le s \le L-1\end{aligned}$$

图形示意



举例

- 输入图像灰度值的概率密度

$$p_r(r) = \begin{cases} \dfrac{2r}{(L-1)^2} & \text{for } 0 \le r \le L-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 变换函数

$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,dw = \frac{2}{L-1}\int_0^r w\,dw = \frac{r^2}{L-1}$$

- 输出图像灰度值的概率密度

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right| = \frac{2r}{(L-1)^2}\left|\left[\frac{ds}{dr}\right]^{-1}\right| = \frac{2r}{(L-1)^2}\left|\left[\frac{d}{dr}\frac{r^2}{L-1}\right]^{-1}\right|$$

$$= \frac{2r}{(L-1)^2}\left|\frac{(L-1)}{2r}\right| = \frac{1}{L-1}$$

离散直方图

$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,dw$$

- 输入图像灰度级r_k的概率近似为

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{MN} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, L-1$$

- 离散变换函数（直方图均衡）

$$s_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{j=0}^{k} p_r(r_j)$$

$$= \frac{(L-1)}{MN}\sum_{j=0}^{k} n_j \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, L-1$$

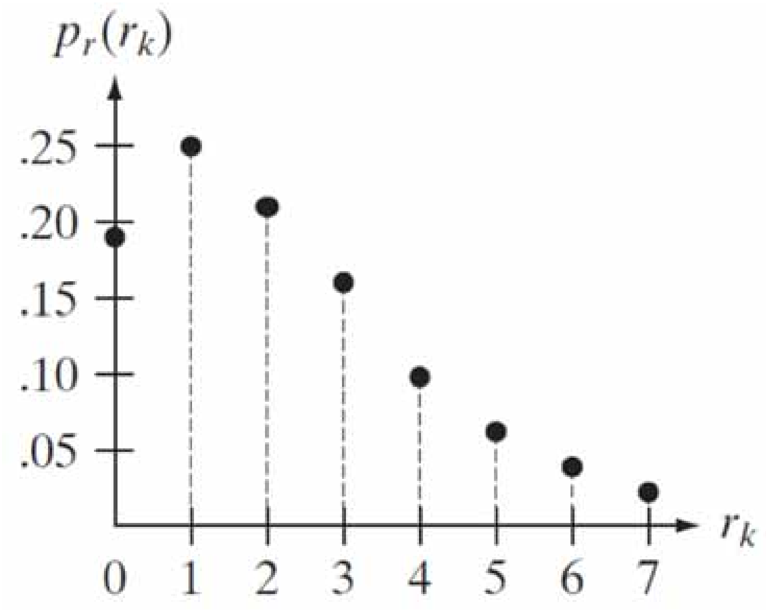
  - 反变换

$$r_k = T^{-1}(s_k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, L-1$$

举例

- 3比特数字图像的灰度分布和直方图值

r_k	n_k	$p_r(r_k) = n_k/MN$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1$	1023	0.25
$r_2 = 2$	850	0.21
$r_3 = 3$	656	0.16
$r_4 = 4$	329	0.08
$r_5 = 5$	245	0.06
$r_6 = 6$	122	0.03
$r_7 = 7$	81	0.02



举例

$$s_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{j=0}^{k} p_r(r_j)$$

- 变换函数

$$s_0 = T(r_0) = 7\sum_{j=0}^{0} p_r(r_j) = 7p_r(r_0) = 1.33$$

$$s_1 = T(r_1) = 7\sum_{j=0}^{1} p_r(r_j) = 7p_r(r_0) + 7p_r(r_1) = 3.08$$

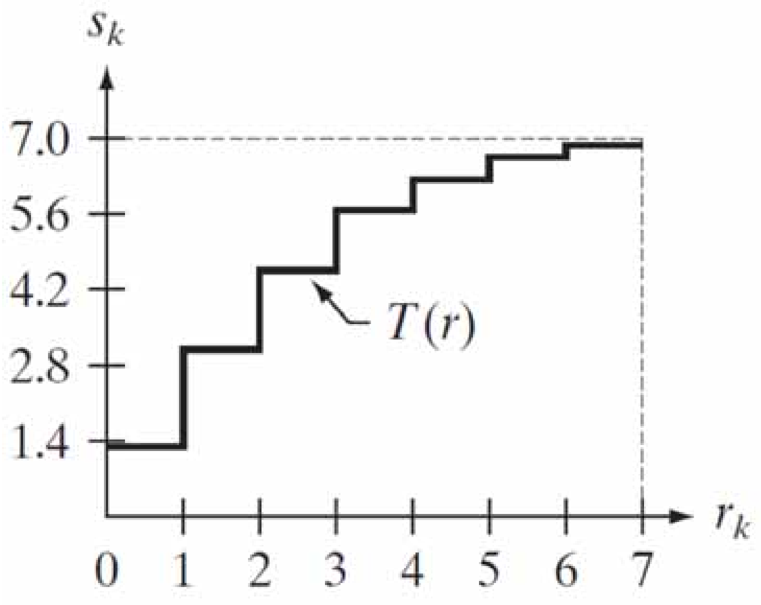
$$s_2 = 4.55,\ s_3 = 5.67,\ s_4 = 6.23$$

$$s_5 = 6.65,\ s_6 = 6.86,\ s_7 = 7.00$$

举例

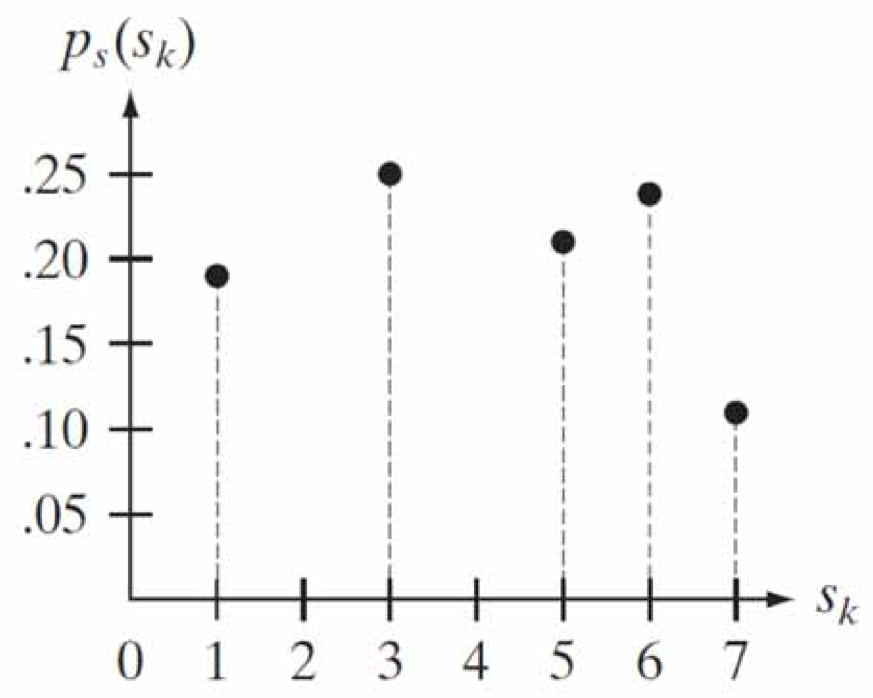
- 变换函数

$$s_0 = 1.33 \to 1 \qquad s_4 = 6.23 \to 6$$
$$s_1 = 3.08 \to 3 \qquad s_5 = 6.65 \to 7$$
$$s_2 = 4.55 \to 5 \qquad s_6 = 6.86 \to 7$$
$$s_3 = 5.67 \to 6 \qquad s_7 = 7.00 \to 7$$

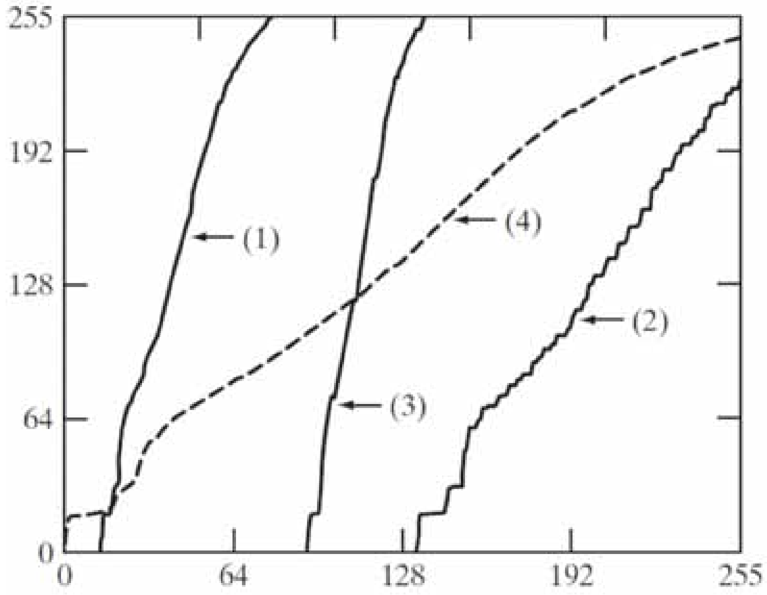


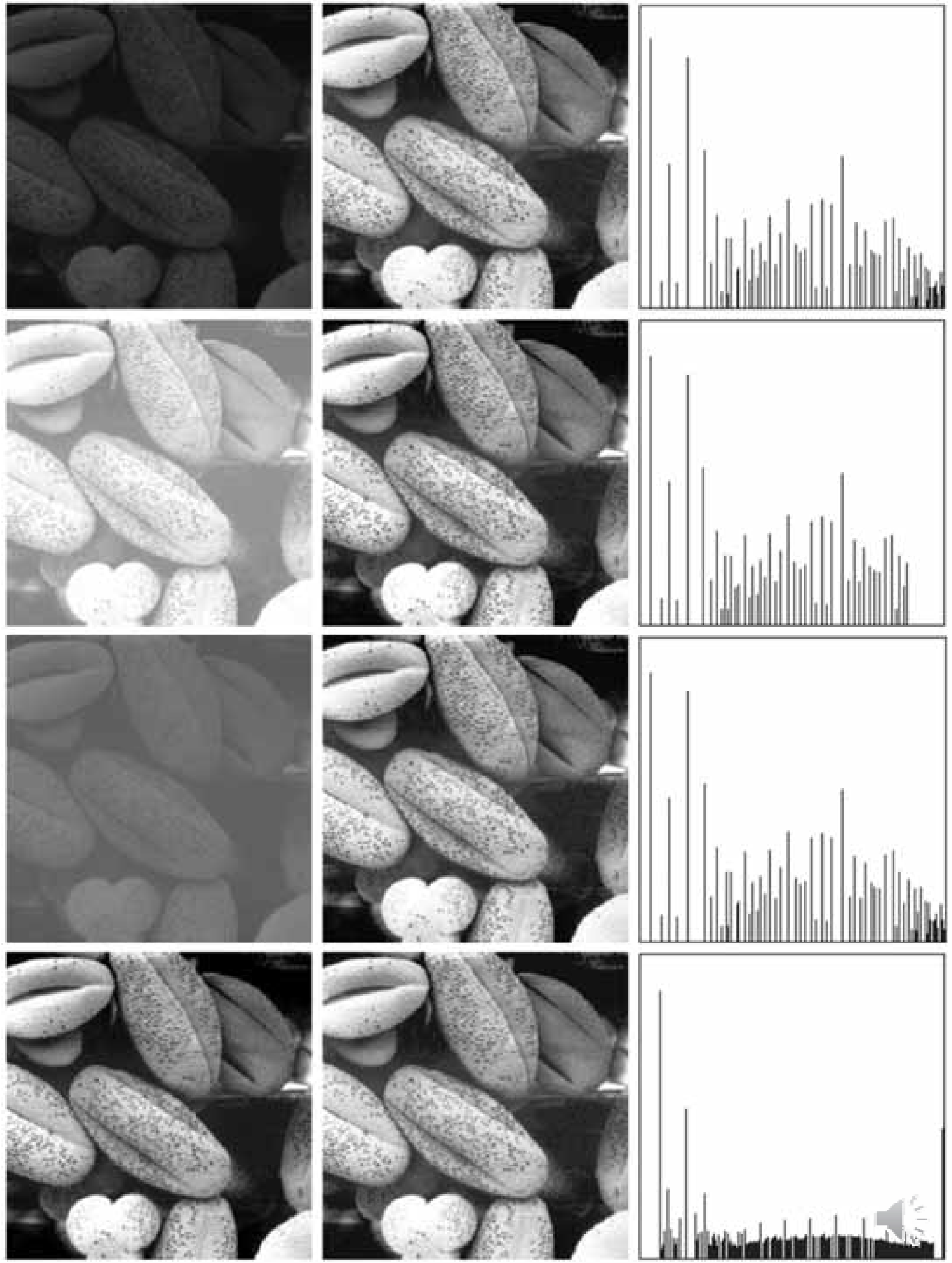
举例

- 均衡后的直方图



举例





更明显的例子

原图

直方图均衡

直方图匹配（规定化）

- 对某些应用，均匀直方图不是最好的方法
- 有时候希望输出图像具有指定的直方图

输出直方图要求为某个特定分布

灰度变换函数$T(r)$

输入

输出

直方图匹配

- 输入图像灰度值概率密度$p_r(r)$
- 指定灰度值概率密度$p_z(z)$
- 如何设计变换函数使得输出图像概率密度为$p_z(z)$？

核心思想

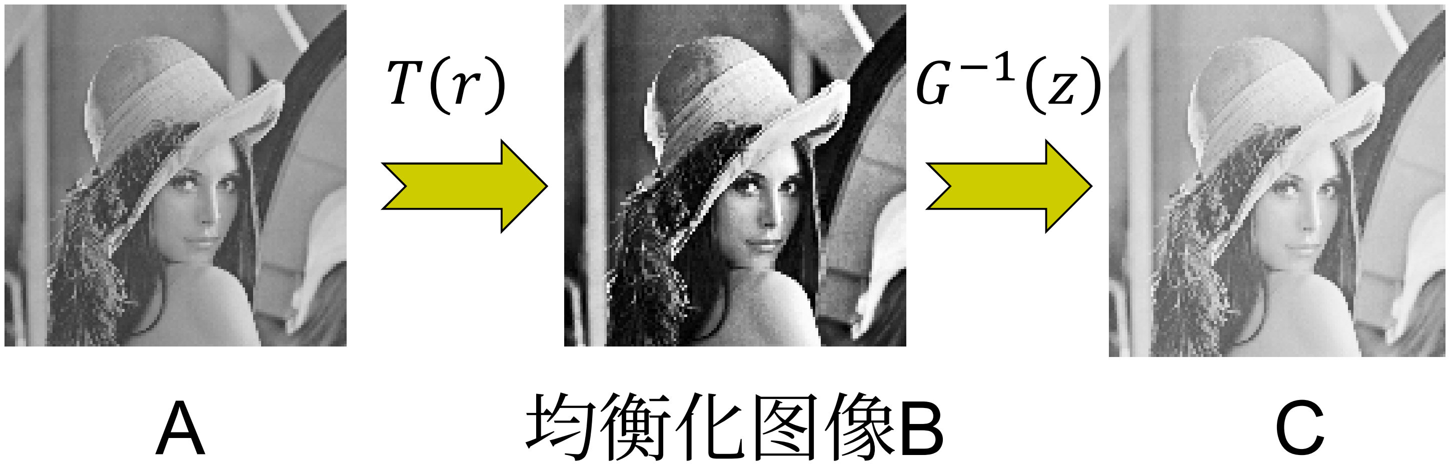
- 以均衡化直方图图像为桥梁

A　　均衡化图像B　　C

- 直方图均衡：A到B
- 直方图均衡：C到B

核心思想

- 以均衡化直方图图像为桥梁



- 直方图均衡：A到B
- 直方图均衡的反函数：B到C

实现方式

- 输入图像灰度值概率密度$p_r(r)$

$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,\mathrm{d}w$$

- 指定灰度值概率密度$p_z(z)$

$$G(z) = (L-1)\int_0^z p_z(t)\,\mathrm{d}t = s$$

- 反函数唯一

$$z = G^{-1}(s) = G^{-1}\big(T(r)\big)$$

具体步骤

1. 由输入图像计算$p_r(r)$
2. 根据下面的公式计算s

$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,\mathrm{d}w$$

3. 根据$p_z(z)$，计算变换函数$G(z)$

$$G(z) = (L-1)\int_0^z p_z(t)\,\mathrm{d}t$$

4. 计算反变换函数$z = G^{-1}(s)$
5. 将反变换函数作用到所有的s

举例

- 输入概率密度$p_r(r) = 2r/(L-1)^2$

$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,dw = \frac{2}{(L-1)}\int_0^r w\,dw = \frac{r^2}{(L-1)}$$

- 指定概率密度$p_z(z) = 3z^2/(L-1)^3$

$$G(z) = (L-1)\int_0^z p_z(w)\,dw = \frac{3}{(L-1)^2}\int_0^z w^2\,dw = \frac{z^3}{(L-1)^2}$$

$$z = \left[(L-1)^2 s\right]^{1/3}$$

离散直方图

- 离散情况更加简单
- 输入离散直方图$p_r(r_k)$

$$s_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{j=0}^{k} p_r(r_j)$$

$$= \frac{(L-1)}{MN}\sum_{j=0}^{k} n_j \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, L-1$$

- 指定离散直方图$p_z(z_q)$

$$G(z_q) = (L-1)\sum_{i=0}^{q} p_z(z_i) = s_k$$

  - 查表实现 $z_q = G^{-1}(s_k)$

具体步骤

1. 计算输入图像直方图$p_r(r)$，并计算s_k，并四舍五入
2. 依据给定直方图$p_z(z)$，计算变化函数G的所有值，并四舍五入，存储表中
3. 对于每一个s_k，通过查表，找到对应的z_q
   - $G(z_q)$最接近s_k
   - 结果不唯一时，选择最小的z_q

举例

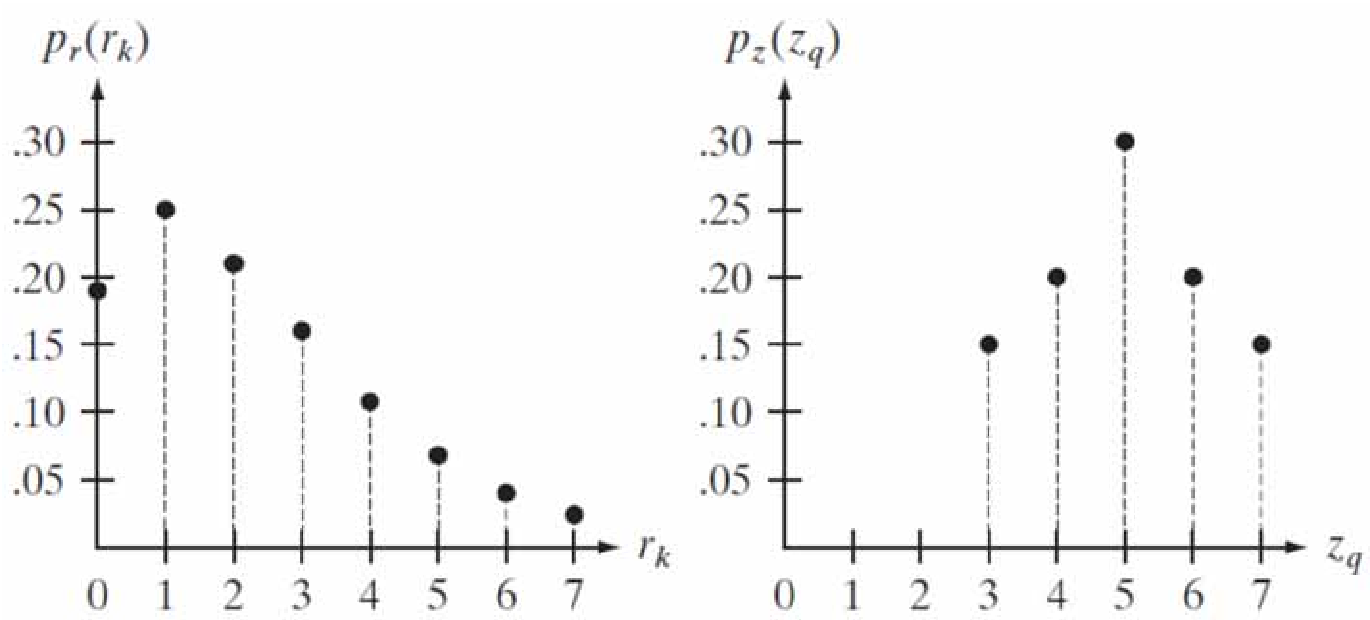
- 3比特数字图像、指定直方图

r_k	n_k	$p_r(r_k) = n_k/MN$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1$	1023	0.25
$r_2 = 2$	850	0.21
$r_3 = 3$	656	0.16
$r_4 = 4$	329	0.08
$r_5 = 5$	245	0.06
$r_6 = 6$	122	0.03
$r_7 = 7$	81	0.02

z_q	Specified $p_z(z_q)$
$z_0 = 0$	0.00
$z_1 = 1$	0.00
$z_2 = 2$	0.00
$z_3 = 3$	0.15
$z_4 = 4$	0.20
$z_5 = 5$	0.30
$z_6 = 6$	0.20
$z_7 = 7$	0.15

举例

- 3比特数字图像、指定直方图



举例

- 对输入图像计算执行直方图均衡

$$s_0 = 1.33 \rightarrow 1 \qquad s_4 = 6.23 \rightarrow 6$$
$$s_1 = 3.08 \rightarrow 3 \qquad s_5 = 6.65 \rightarrow 7$$
$$s_2 = 4.55 \rightarrow 5 \qquad s_6 = 6.86 \rightarrow 7$$
$$s_3 = 5.67 \rightarrow 6 \qquad s_7 = 7.00 \rightarrow 7$$

- 对指定直方图执行直方图均衡

$$G(z_0) = 7\sum_{j=0}^{0} p_z(z_j) = 0.00$$

$$G(z_1) = 7\sum_{j=0}^{1} p_z(z_j) = 7\left[p(z_0) + p(z_1)\right] = 0.00$$

举例

- 对输入图像计算执行直方图均衡

$$
\begin{aligned}
s_0 &= 1.33 \rightarrow 1 & \qquad s_4 &= 6.23 \rightarrow 6 \\
s_1 &= 3.08 \rightarrow 3 & \qquad s_5 &= 6.65 \rightarrow 7 \\
s_2 &= 4.55 \rightarrow 5 & \qquad s_6 &= 6.86 \rightarrow 7 \\
s_3 &= 5.67 \rightarrow 6 & \qquad s_7 &= 7.00 \rightarrow 7
\end{aligned}
$$

- 对指定直方图执行直方图均衡

$$
\begin{aligned}
G(z_0) &= 0.00 \rightarrow 0 & \qquad G(z_4) &= 2.45 \rightarrow 2 \\
G(z_1) &= 0.00 \rightarrow 0 & \qquad G(z_5) &= 4.55 \rightarrow 5 \\
G(z_2) &= 0.00 \rightarrow 0 & \qquad G(z_6) &= 5.95 \rightarrow 6 \\
G(z_3) &= 1.05 \rightarrow 1 & \qquad G(z_7) &= 7.00 \rightarrow 7
\end{aligned}
$$

举例

- 获得G的逆映射

$$s_0 = 1.33 \rightarrow 1 \qquad s_4 = 6.23 \rightarrow 6$$
$$s_1 = 3.08 \rightarrow 3 \qquad s_5 = 6.65 \rightarrow 7$$
$$s_2 = 4.55 \rightarrow 5 \qquad s_6 = 6.86 \rightarrow 7$$
$$s_3 = 5.67 \rightarrow 6 \qquad s_7 = 7.00 \rightarrow 7$$

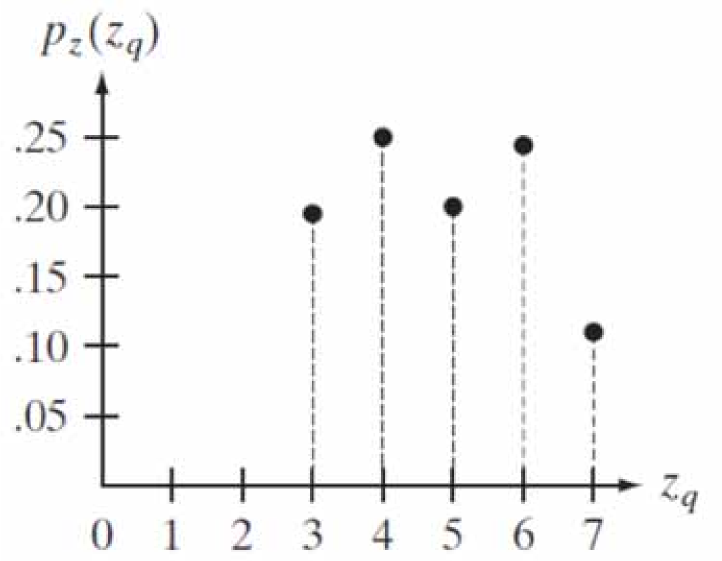
z_q	$G(z_q)$
$z_0 = 0$	0
$z_1 = 1$	0
$z_2 = 2$	0
$z_3 = 3$	1
$z_4 = 4$	2
$z_5 = 5$	5
$z_6 = 6$	6
$z_7 = 7$	7

s_k	$\rightarrow$	z_q
1	$\rightarrow$	3
3	$\rightarrow$	4
5	$\rightarrow$	5
6	$\rightarrow$	6
7	$\rightarrow$	7

举例

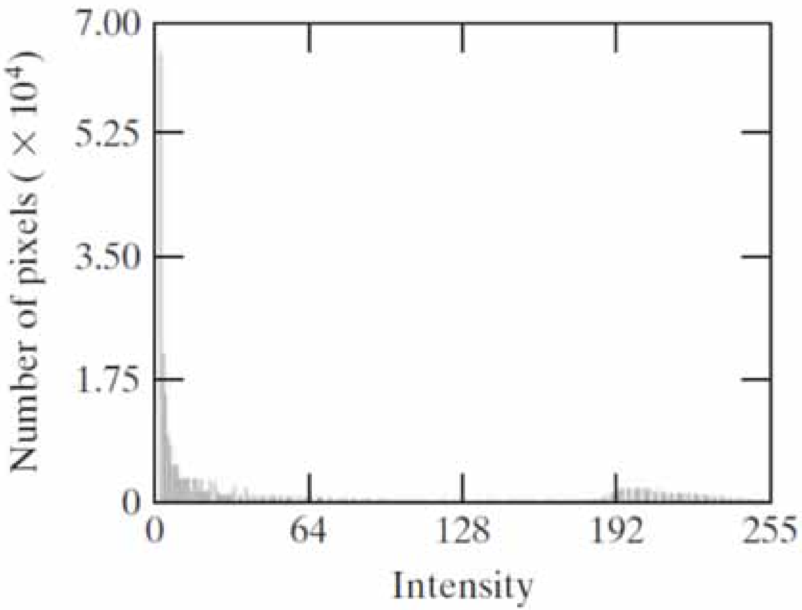
- 最终结果

z_q	Specified $p_z(z_q)$	Actual $p_z(z_k)$
$z_0 = 0$	0.00	0.00
$z_1 = 1$	0.00	0.00
$z_2 = 2$	0.00	0.00
$z_3 = 3$	0.15	0.19
$z_4 = 4$	0.20	0.25
$z_5 = 5$	0.30	0.21
$z_6 = 6$	0.20	0.24
$z_7 = 7$	0.15	0.11



举例

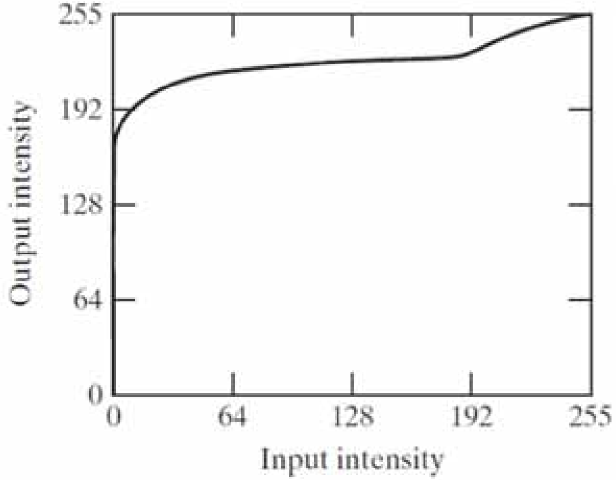
- 火星卫星图像

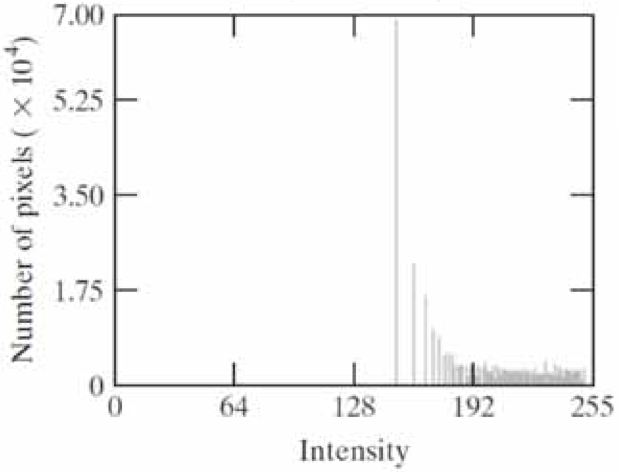


7.00
5.25
3.50
1.75
0
Number of pixels (× 10^4)
0
64
128
192
255
Intensity

举例

- 直方图均衡



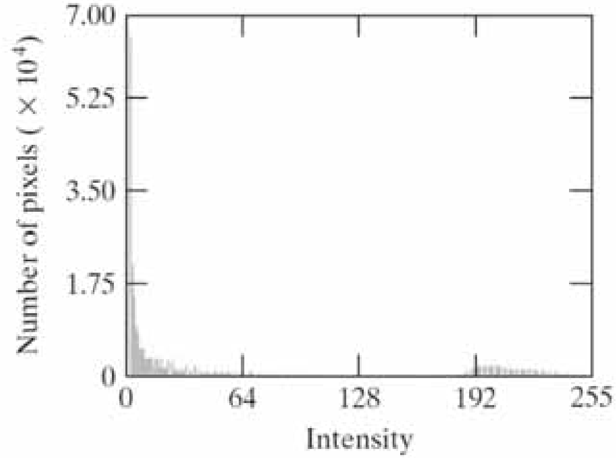


图像变得更亮，
但是对比度并
没有明显改善！

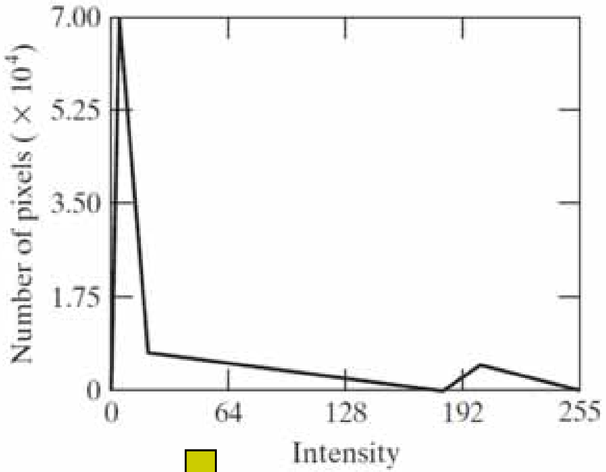
$$s_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{j=0}^{k} p_r(r_j)$$

举例

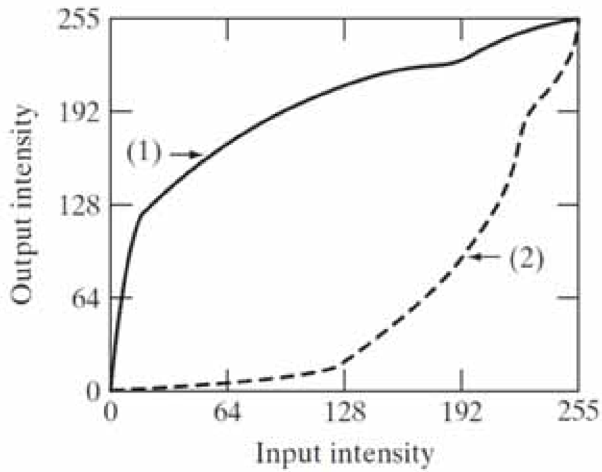
- 直方图匹配



7.00
5.25
3.50
1.75
0
Number of pixels (× 10⁴)
0
64
128
192
255
Intensity



7.00
5.25
3.50
1.75
0
Number of pixels (× 10⁴)
0
64
128
192
255
Intensity

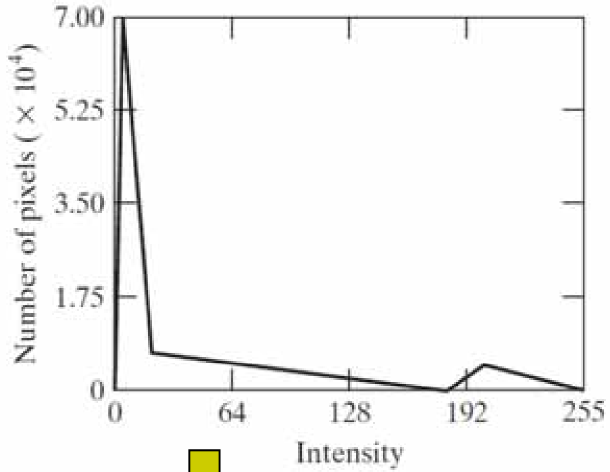


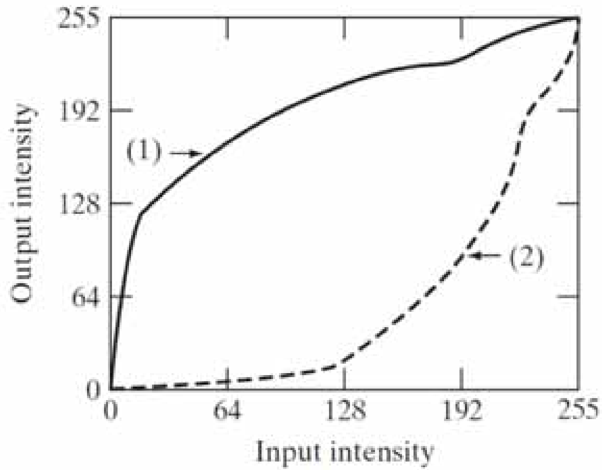
255
192
128
64
0
Output intensity
(1)
(2)
0
64
128
192
255
Input intensity

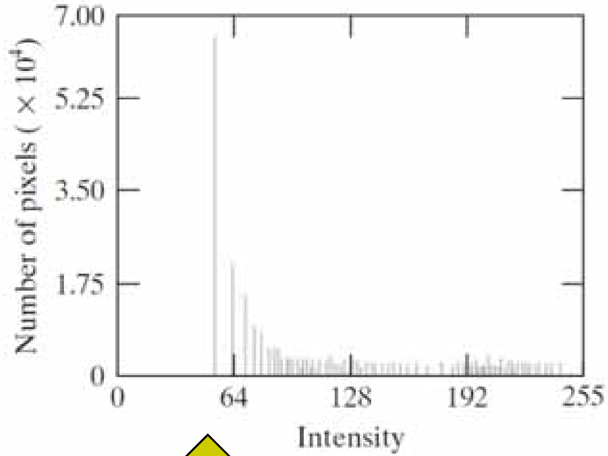
举例

指定直方图
是关键！

- 直方图匹配







局部直方图处理

- 直方图均衡/匹配是全局性的
  - 中小区域的细节容易被忽略

- 如果不希望对整体图像增强，想对局部进行增强怎么办？

- 以图像中每个像素的邻域中灰度分布为基础设计变换函数

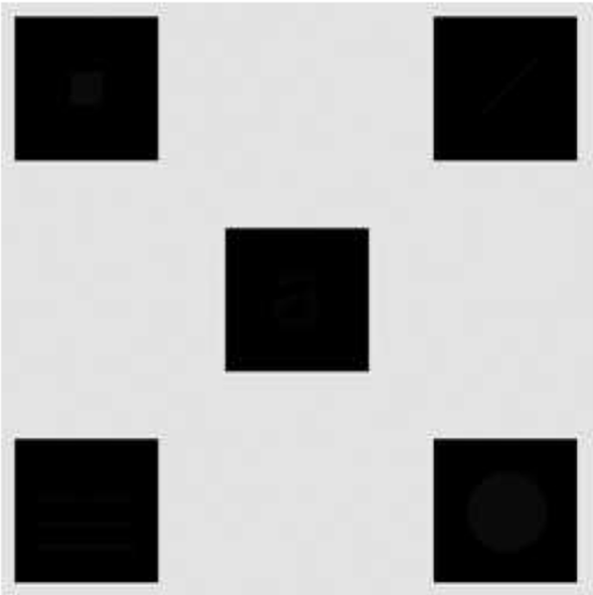
步骤

- 定义一个领域，并不断平移中心位置

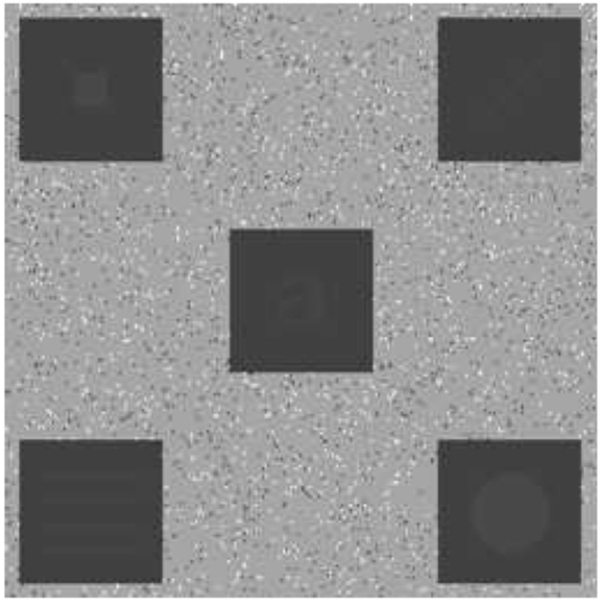
1. 在每一个位置，计算该邻域中像素的直方图
   - 许多元素为0
2. 利用直方图均衡或直方图匹配得到变换函数
3. 将变换函数作用到邻域中心像素

- 移动重复上述过程

举例



原图



全局直方图均衡

3×3
局部直方图均衡

在图像增强中使用直方图统计

- 灰度值$r_i = 0,1,\ldots,L-1$出现的概率

$$p(r_i) = \frac{n_i}{MN}$$

- 平均灰度/均值

$$m = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p(r_i)$$

- 灰度的n阶矩

$$\mu_n(r) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^n p(r_i)$$

- 灰度的2阶矩
  - 灰度方差

$$\mu_2(r) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^2 p(r_i)$$

采样

- 采样均值

$$m = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

- 采样方差

$$\sigma^2 = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[f(x, y) - m\right]^2$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$m = \frac{1}{25}\sum_{x=0}^{4}\sum_{y=0}^{4} f(x, y)$$

$$= 1.44$$

$$\sigma^2 = 1.1264$$

在图像增强中使用直方图统计

- 均值和方差常用于局部增强
- 局部均值和局部方差

$$m_{S_{xy}} = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p_{S_{xy}}(r_i)$$

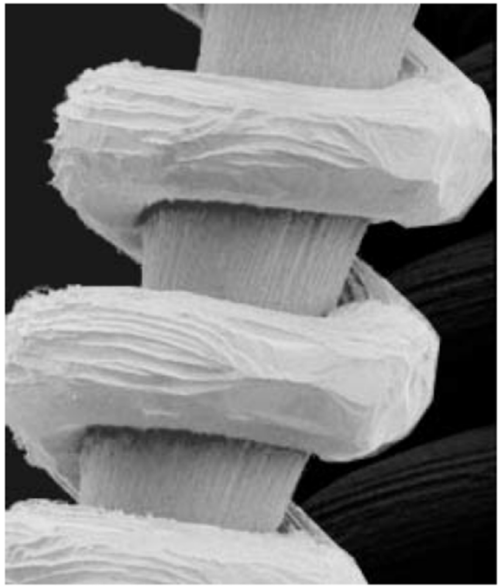
$$\sigma^2_{S_{xy}} = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m_{S_{xy}})^2 p_{S_{xy}}(r_i)$$

  - S_{xy}表示像素(x, y)的近邻集合
  - 许多灰度值频率为0

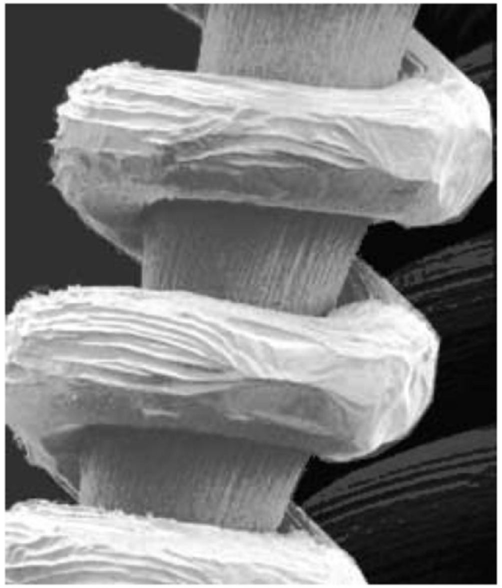
在图像增强中使用直方图统计

- 使用局部直方图统计增强

$$g(x,y) = \begin{cases} E \cdot f(x,y) & \text{if } m_{S_{xy}} \le k_0 m_G \text{ AND } k_1\sigma_G \le \sigma_{S_{xy}} \le k_2\sigma_G \\ f(x,y) & \text{otherwise} \end{cases}$$



原图



全局直方图均衡

局部直方图统计

讨论

- 直方图均衡一大好处：不需要更多的参数，完全“自动化” ✔
- 离散形式下，直方图均衡的概率分布是完全均匀的 ✖
- 直方图均衡有时候会失效 ✔

提纲

- 背景知识
- 基本灰度变换函数
- 直方图处理
- 空间滤波基础
- 平滑空间滤波器
- 锐化空间滤波器
- 混合空间增强法

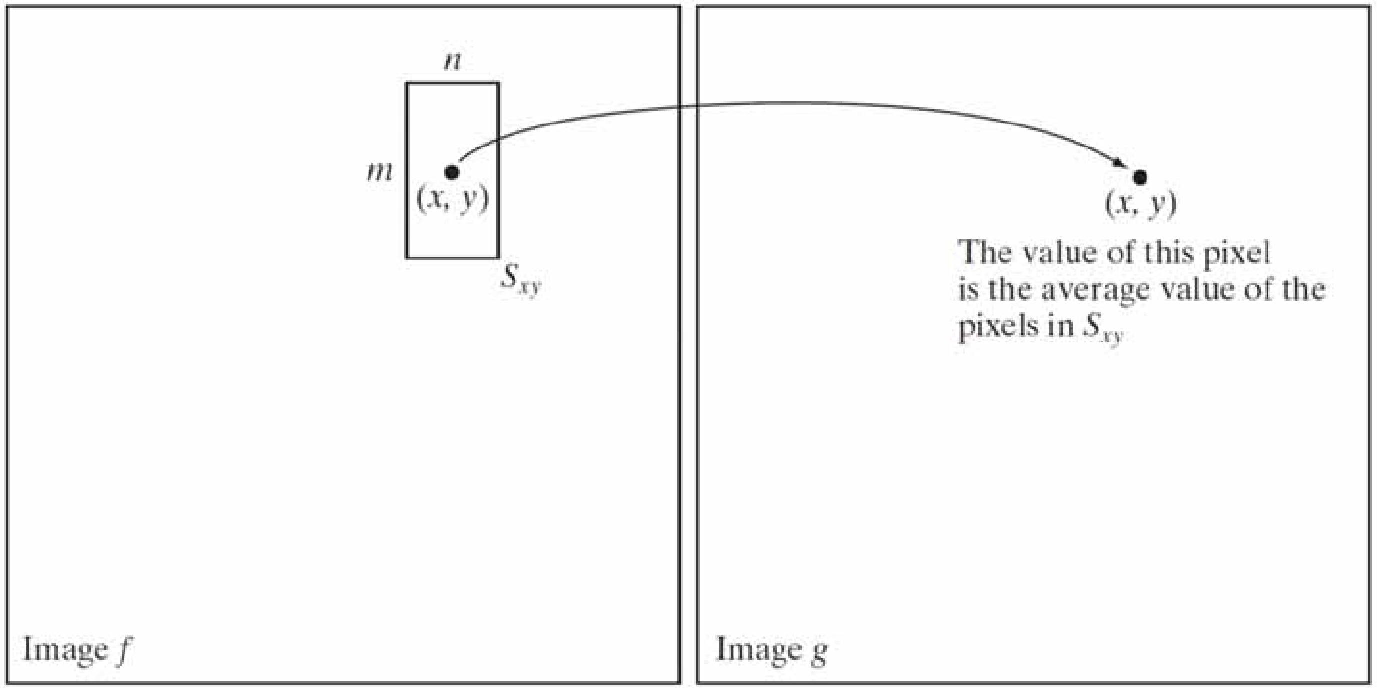
空间滤波

- 一种重要的图像处理工具
  - 用于图像增强等应用中
- 滤波（filter）
  - 频率域中图像处理的概念
  - 通过或拒绝某个频率分量

- 线性空间滤波
  - 与频率域处理一一对应
- 非线性空间滤波

空间滤波机理

- 空间滤波器
  - 邻域（矩形）、预定义的操作

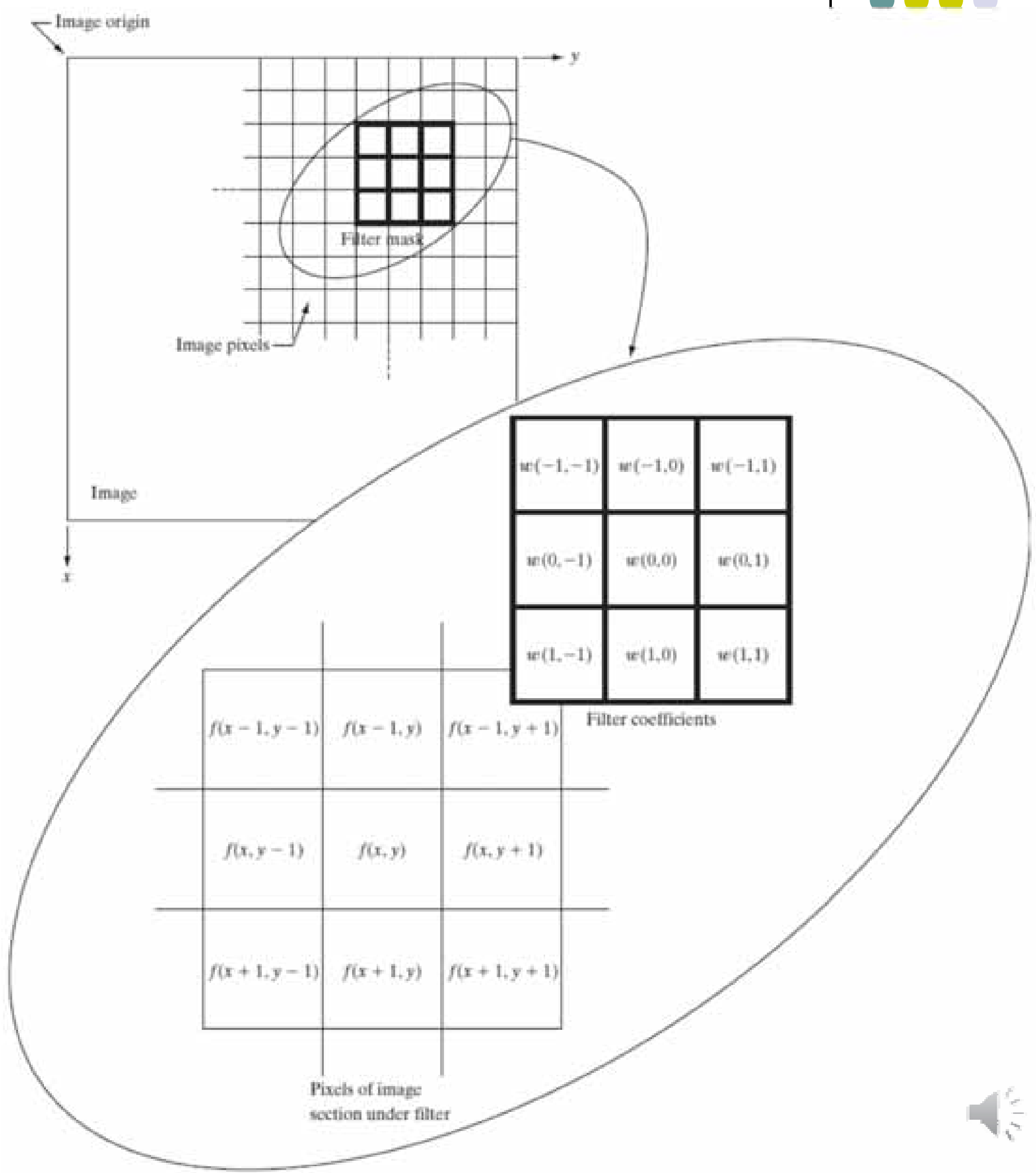


  - 线性空间滤波、非线性空间滤波

空间滤波机理

- 线性空间滤波
  - 滤波器模板

$$g(x,y)=w(-1,-1)f(x-1,y-1)$$
$$+w(-1,0)f(x-1,y)$$
$$+\cdots$$
$$+w(0,0)f(x,y)$$
$$+\cdots$$
$$+w(1,1)f(x+1,y+1)$$



空间滤波机理

- $m \times n$的模板
  - $m = 2a + 1$，$n = 2b + 1$
  - 最小为3×3

- 线性空间滤波

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s, t) f(x + s, y + t)$$

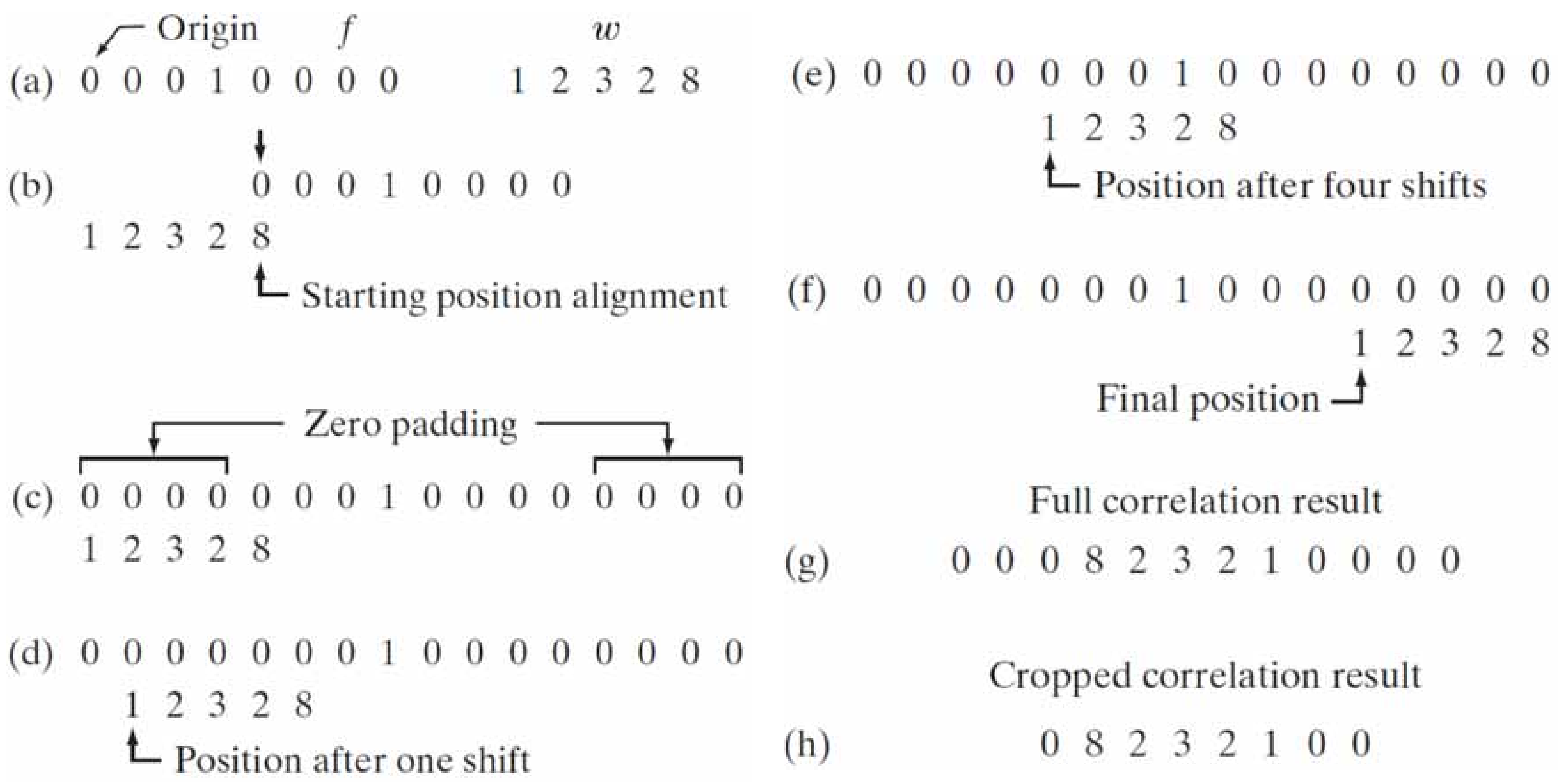
  - x和y是可变的

空间相关与卷积

- 相关（Correlation）
  - 平移滤波器模板，计算每个位置乘积之和
- 卷积（Convolution）
  - 与相关相似，但滤波器要旋转180度
- 实际中未必严格区分

相关

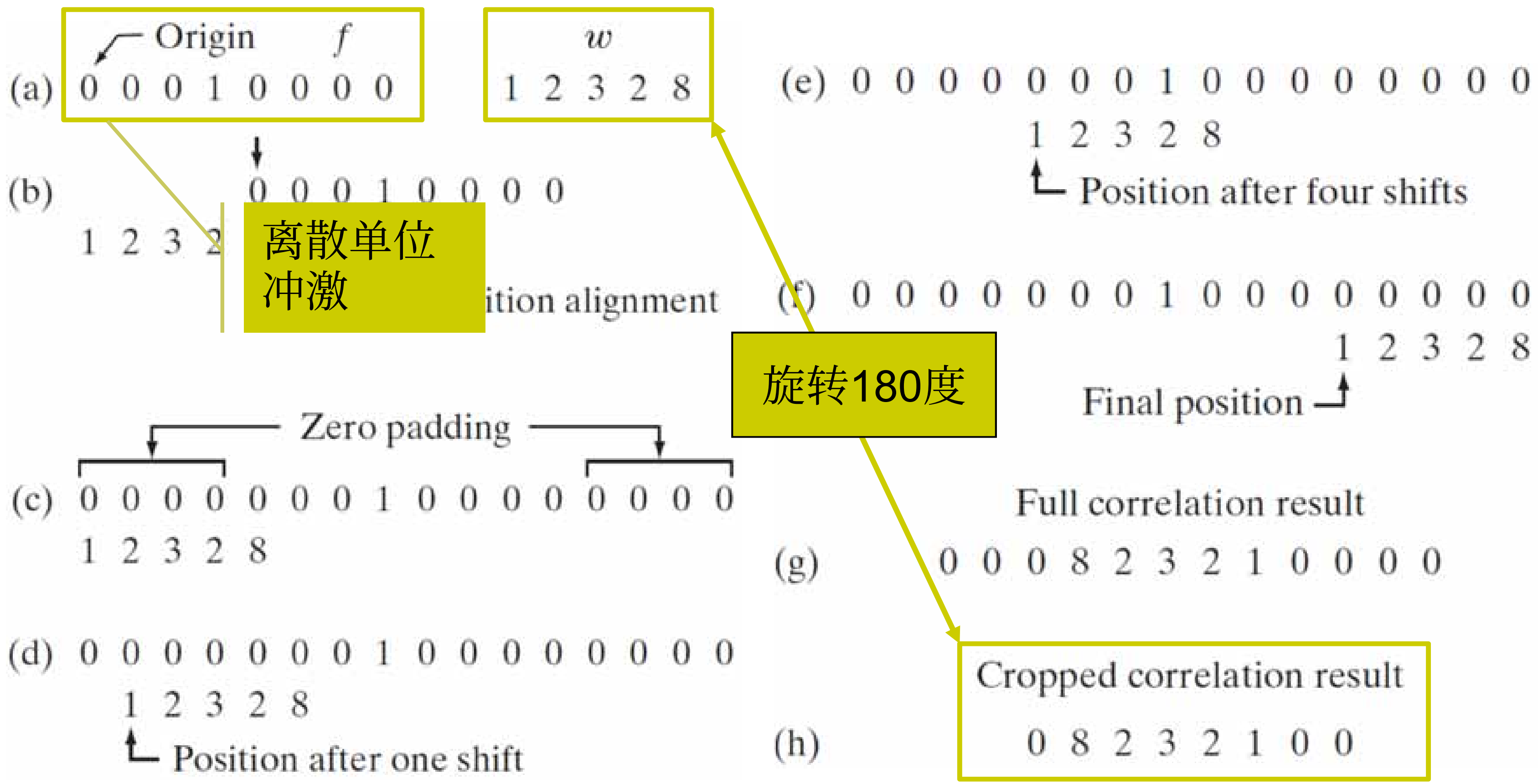
- 补零、计算、滑动、裁剪



Origin
f
w
(a) 0 0 0 1 0 0 0 0   1 2 3 2 8
(b) 0 0 0 1 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Starting position alignment
Zero padding
(c) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
(d) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Position after one shift
(e) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Position after four shifts
(f) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Final position
Full correlation result
(g) 0 0 0 8 2 3 2 1 0 0 0 0
Cropped correlation result
(h) 0 8 2 3 2 1 0 0

相关

- 补零、计算、滑动、裁剪



Origin
f
(a) 0 0 0 1 0 0 0 0
w
1 2 3 2 8
(b) 0 0 0 1 0 0 0 0
1 2 3 2
离散单位冲激
ition alignment
Zero padding
(c) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
(d) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Position after one shift
(e) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Position after four shifts
(f) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Final position
旋转180度
Full correlation result
(g) 0 0 0 8 2 3 2 1 0 0 0 0
Cropped correlation result
(h) 0 8 2 3 2 1 0 0

卷积

- 旋转、补零、计算、滑动、裁剪

Origin　　f　　w rotated 180°

0 0 0 1 0 0 0 0　　8 2 3 2 1　　(i)

0 0 0 1 0 0 0 0　　(j)

8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0　(k)

8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0　(l)

8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0　(m)

8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0　(n)

8 2 3 2 1

Full convolution result

0 0 0 1 2 3 2 8 0 0 0 0　　(o)

Cropped convolution result

0 1 2 3 2 8 0 0　　(p)

矩阵形式

- 上下填充
- 左右填充

Origin $f(x, y)$

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$w(x, y)$

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(a)

Padded f

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

(b)

Initial position for w

1	2	3	0	0	0	0	0	0
4	5	6	0	0	0	0	0	0
7	8	9	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

(c)

Full correlation result

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	9	8	7	0	0	0
0	0	0	6	5	4	0	0	0
0	0	0	3	2	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

(d)

Cropped correlation result

0	0	0	0	0
0	9	8	7	0
0	6	5	4	0
0	3	2	1	0
0	0	0	0	0

(e)

Rotated w

9	8	7	0	0	0	0	0	0
6	5	4	0	0	0	0	0	0
3	2	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

(f)

Full convolution result

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	2	3	0	0	0
0	0	0	4	5	6	0	0	0
0	0	0	7	8	9	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

(g)

Cropped convolution result

0	0	0	0	0
0	1	2	3	0
0	4	5	6	0
0	7	8	9	0
0	0	0	0	0

(h)

小结

- $m \times n$的滤波器与图像做相关操作

$$w(x, y) \star f(x, y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s, t) f(x + s, y + t)$$

  - 图像f已经填充、寻找匹配

- $m \times n$的滤波器与图像做卷积操作

$$w(x, y) \bigstar f(x, y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s, t) f(x - s, y - t)$$

  - 图像f已经填充、$-$反映旋转
  - 傅里叶变换、卷积定理

- 不严格区分相关和卷积

线性滤波的向量表示

- 把滤波器和灰度值拉成向量

$$R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \cdots + w_{mn} z_{mn} = \sum_{k=1}^{mn} w_k z_k = \mathbf{w}^\top \mathbf{z}$$

  - $\mathbf{w}$是$m \times n$的滤波器系数
  - $\mathbf{z}$为相应图像的灰度值

w_1	w_2	w_3
w_4	w_5	w_6
w_7	w_8	w_9

$$\begin{aligned} R &= w_1 z_1 + w_2 z_2 + \ldots + w_9 z_9 \\ &= \sum_{k=1}^{9} w_k z_k \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{z} \end{aligned}$$

空间滤波器模板

- 计算平均灰度

$$R = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} z_i$$

- 两变量的连续函数（高斯）

$$h(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

  - $w_1 = h(-1,-1), w_2 = h(-1,0), \cdots, w_9 = h(1,1)$

- 非线性滤波器
  - 更加强大

提纲

- 背景知识
- 基本灰度变换函数
- 直方图处理
- 空间滤波基础
- 平滑空间滤波器
- 锐化空间滤波器
- 混合空间增强法

平滑线性滤波器

- 均值滤波器/低通滤波器
  - 优点：降低噪声
    - 比如去除伪轮廓
  - 缺点：边缘模糊

$$R=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} z_i$$

$$\frac{1}{9}\times\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1\\ \hline 1 & 1 & 1\\ \hline 1 & 1 & 1\\ \hline\end{array}$$

  - 先求和，再归一化

平滑线性滤波器

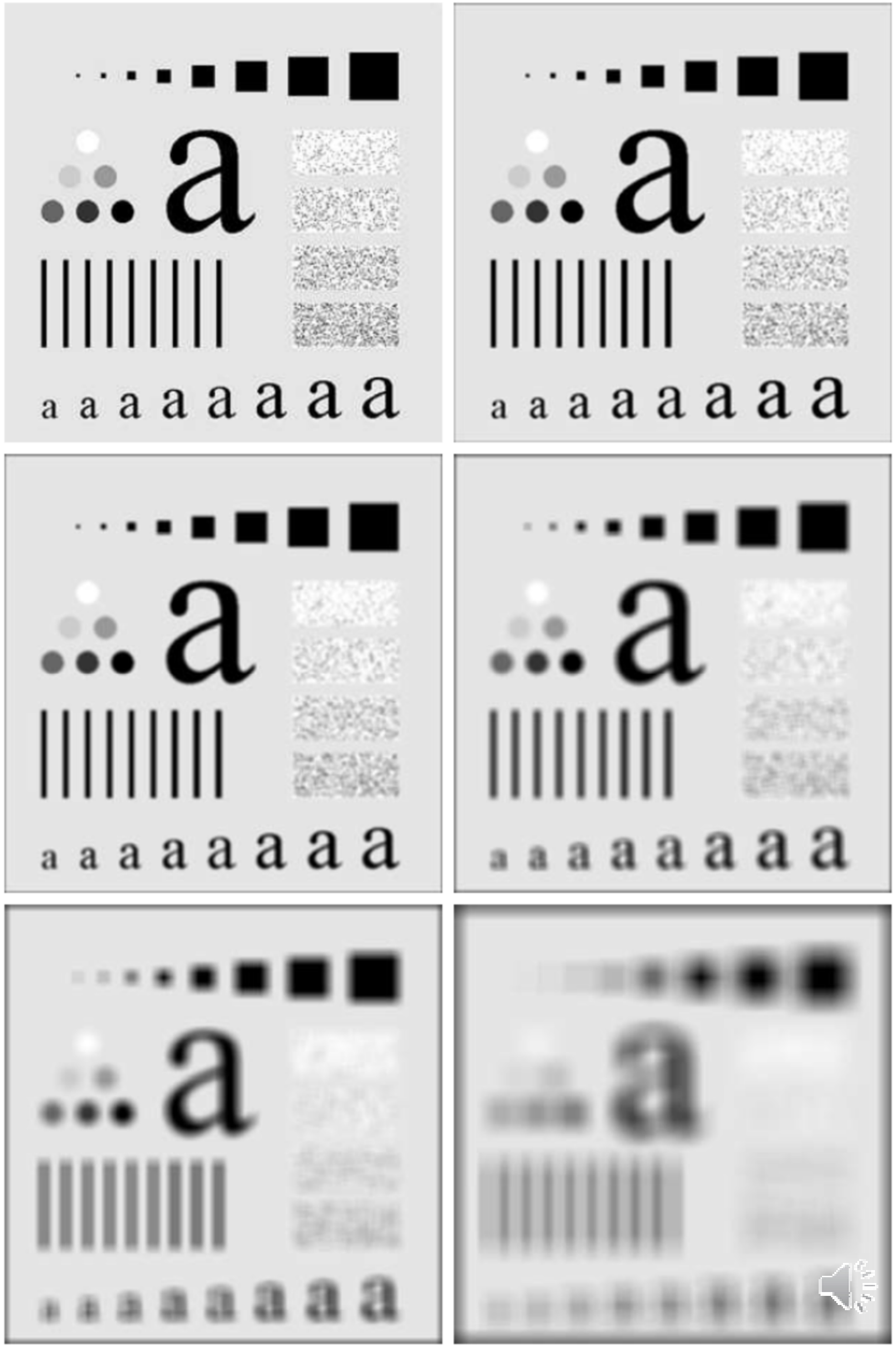
- 加权线性滤波器
  - 非均匀权重
  - 降低模糊

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s, t) f(x+s, y+t)}{\sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s, t)}$$

$$\frac{1}{16} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

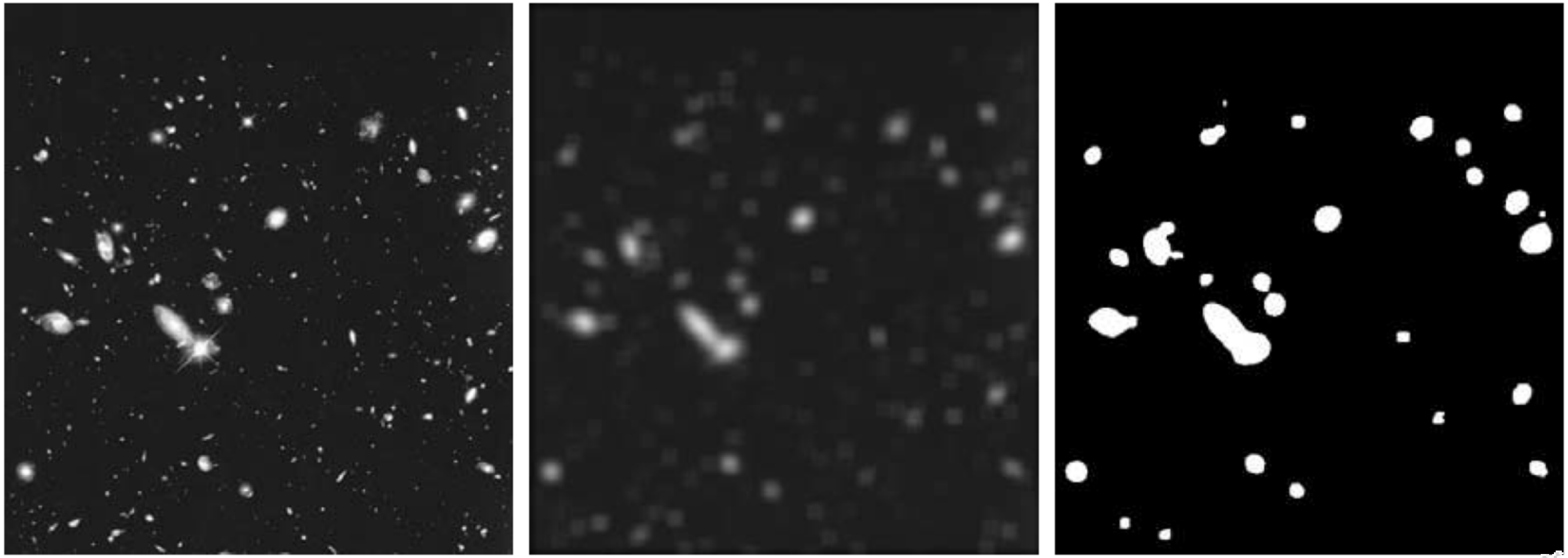
效果展示

- 3、5、9、15、35的方形均值滤波
  - 小物体
  - 边缘
  - 边界



实际应用

- 哈勃望远镜照片
  - 15 × 15均值滤波器
  - 阈值处理（最高亮度25%）

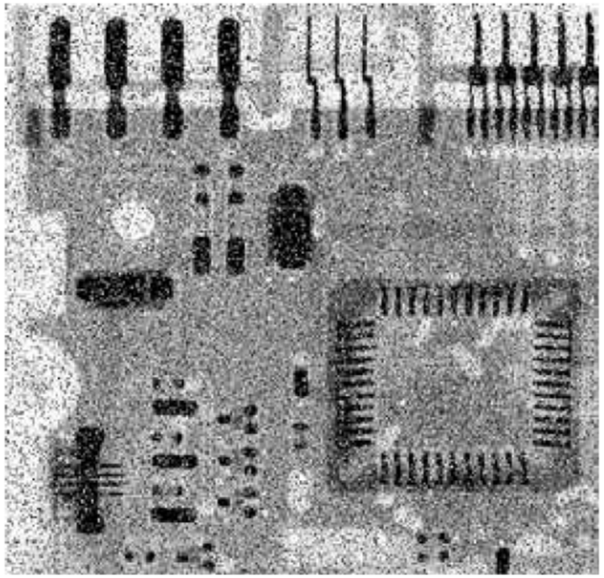


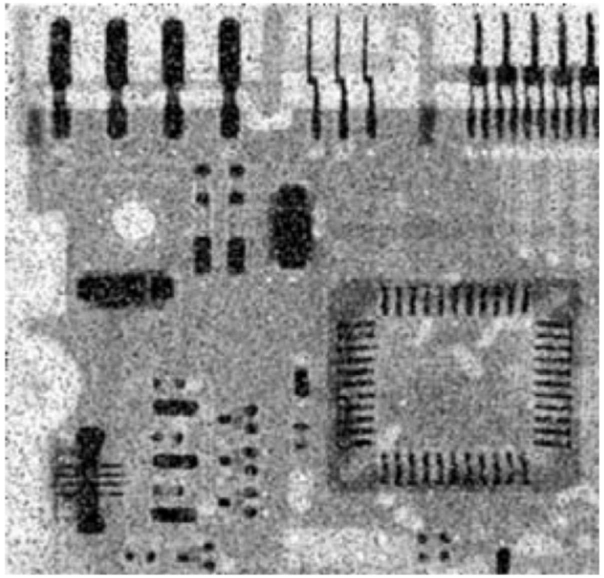
统计排序滤波器

- 非线性滤波器
  - 对滤波器覆盖的像素排序
  - 用排序决定的值替代中心像素
- 中值滤波器
  - 10、15、20、20、20、20、20、25、100
- 最大值滤波器
  - max
- 最小值滤波器
  - min

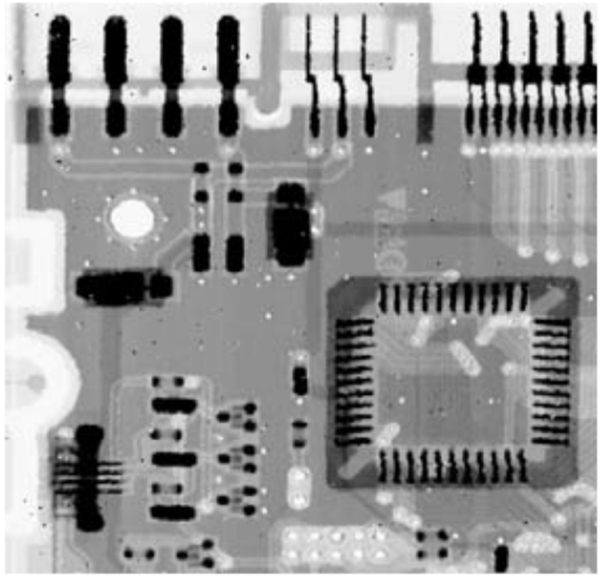
效果展示

- 电路板的X射线图像





3×3均值滤波



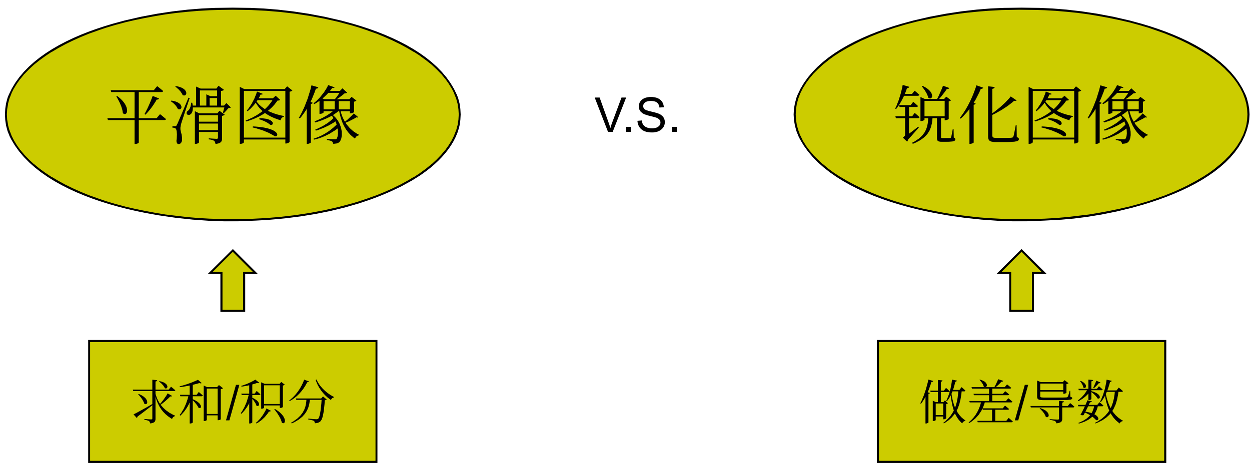
3×3中值滤波

提纲

- 背景知识
- 基本灰度变换函数
- 直方图处理
- 空间滤波基础
- 平滑空间滤波器
- 锐化空间滤波器
- 混合空间增强法

锐化处理

- 目的
  - 突出灰度的过渡部分
- 应用广泛
  - 电子印刷、医学成像、工业检测、制导



数学基础

- 一阶导数的性质
  - 在恒定灰度区域为零
  - 在突变（斜坡、台阶）的起点非零
  - 沿着斜坡非零

- 二阶导数的性质
  - 在恒定灰度区域为零
  - 在突变（斜坡、台阶）的起点和终点非零
  - 沿着恒定斜率斜坡为零

数学基础

- 一维函数$f(x)$
  - 一阶导数

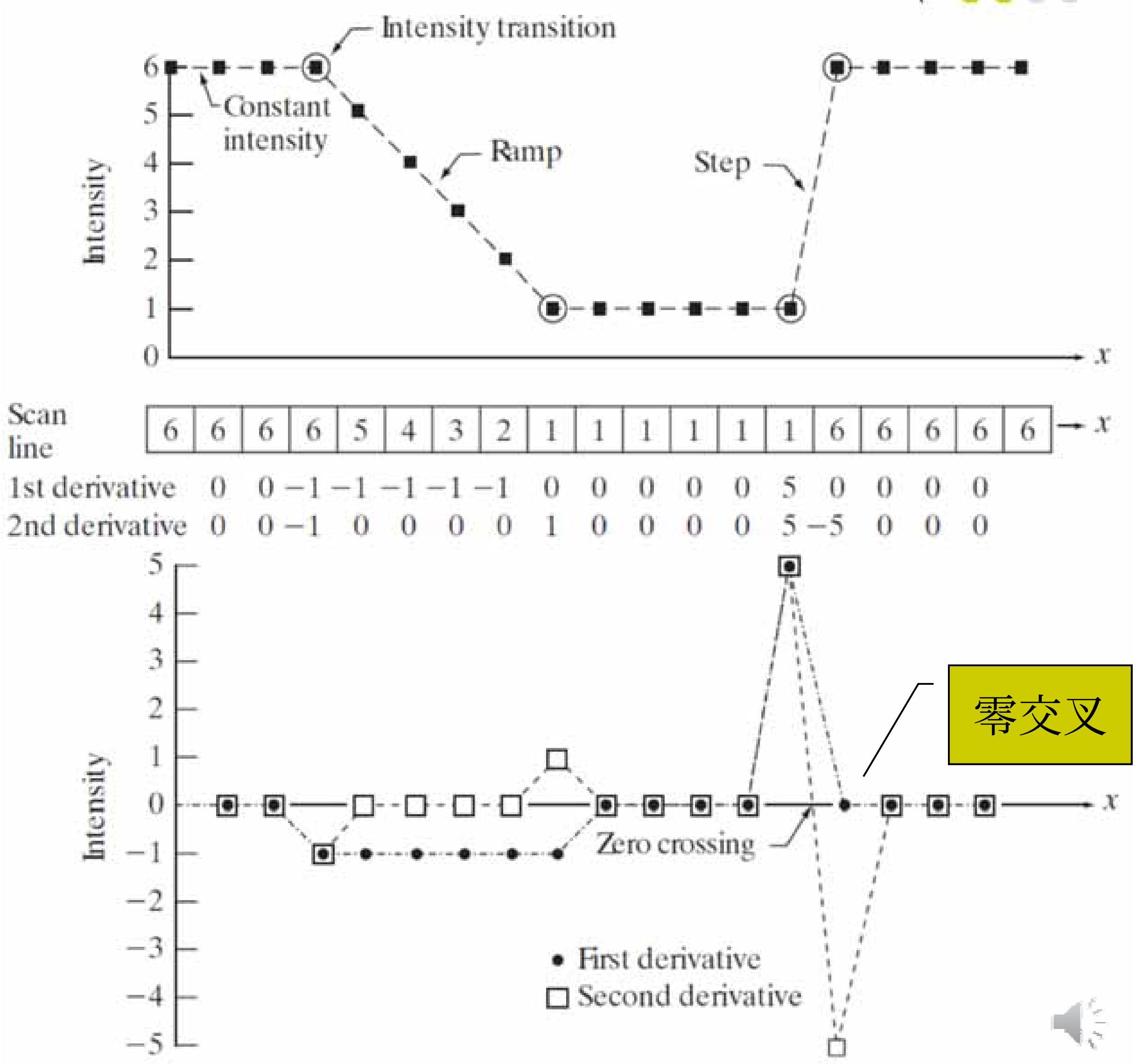
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x+1) - f(x)$$

  - 二阶导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)$$

一阶和二阶导数的对比

- 恒定区域
- 斜坡
- 恒定区域
- 台阶
- 恒定区域



直观的结论

- 数字图像的边缘类似于斜坡
- 一阶导数产生较粗的边缘
  - 沿斜坡的导数一直非零
- 二阶导数产生两个有间距的双边缘
  - 由零分开、单像素宽
- 二阶导数在增强细节方面比一阶导数好！

使用二阶导数对图像锐化

- 各向同性滤波器
  - 旋转图像→滤波 = 滤波→旋转结果
- 拉普拉斯算子

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

  - 线性算子
- 离散拉普拉斯算子

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y)$$

拉普拉斯算子

- 标准形式

$$\nabla^2 f(x,y) = f(x+1,y) + f(x-1,y)$$
$$+f(x,y+1) + f(x,y-1)$$
$$-4f(x,y)$$

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

90度增量
各向同性

- 对角线形式

1	1	1
1	−8	1
1	1	1

45度增量
各向同性

使用二阶导数对图像锐化

- 拉普拉斯算子结果叠加到图像中

$$g(x, y) = f(x, y) + c\left[\nabla^2 f(x, y)\right]$$

- 采用负的中心系数，$c = -1$
- 采用正的中心系数，$c = 1$

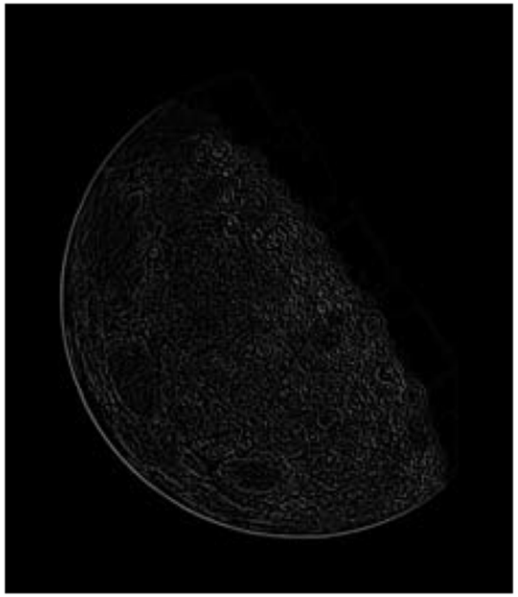
0	−1	0
−1	4	−1
0	−1	0

−1	−1	−1
−1	8	−1
−1	−1	−1

举例

- 月球图像

拉普拉斯滤波后结果



标准拉普拉斯锐化

对角版本拉普拉斯锐化

非锐化掩蔽

- 从原图像减去一幅非锐化版本
  1. 模糊原图像
  2. 从原图像减去模糊图像，得到模板
  3. 将模板加到原图像
- 具体公式

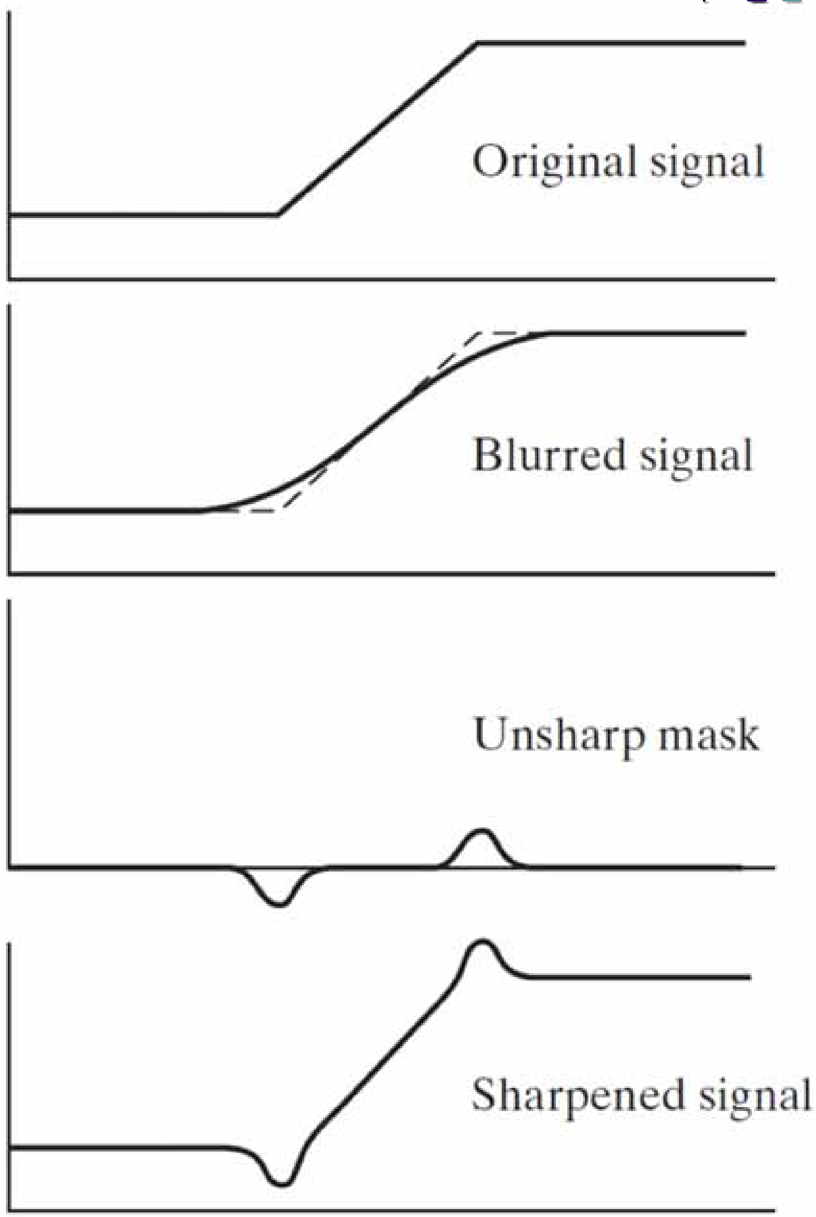
$$g_{\text{mask}}(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y)$$

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{\text{mask}}(x, y)$$

  - 模糊图像$\bar{f}(x,y)$
  - 非锐化掩蔽$k = 1$；高提升滤波$k > 1$

举例

- 非锐化模板
- 二阶导数



举例

- 文本增强

高斯滤波

非锐化模板

非锐化掩蔽

高提升滤波，$k = 4.5$

使用一阶导数对图像锐化

- 利用梯度的大小
  - 梯度：最大变化率的方向
    - 线性算子
    - 非旋转不变

$$\nabla f \equiv \operatorname{grad}(f) \equiv \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

  - 大小
    - 非线性
    - 旋转不变

$$M(x, y) = \operatorname{mag}(\nabla f) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$

  - 近似计算
    - 非旋转不变

$$M(x, y) \approx |g_x| + |g_y|$$

梯度的离散近似

- 最简单的近似

$$g_x = z_8 - z_5$$

$$g_y = z_6 - z_5$$

- 交叉差分

$$g_x = z_9 - z_5$$

$$g_y = z_8 - z_6$$

$$M(x, y) = \left[(z_9 - z_5)^2 + (z_8 - z_6)^2\right]^{1/2}$$

$$M(x, y) \approx |z_9 - z_5| + |z_8 - z_6|$$

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

−1	0
0	1

0	−1
1	0

罗伯特交叉梯度算子

梯度的离散近似

- 对称模板

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)$$

$$g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)$$

中间权重大、和为零

−1	−2	−1
0	0	0
1	2	1

−1	0	1
−2	0	2
−1	0	1

Soble算子

梯度的离散近似

- 对称模板

$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)$$

$$g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)$$

  - 计算大小

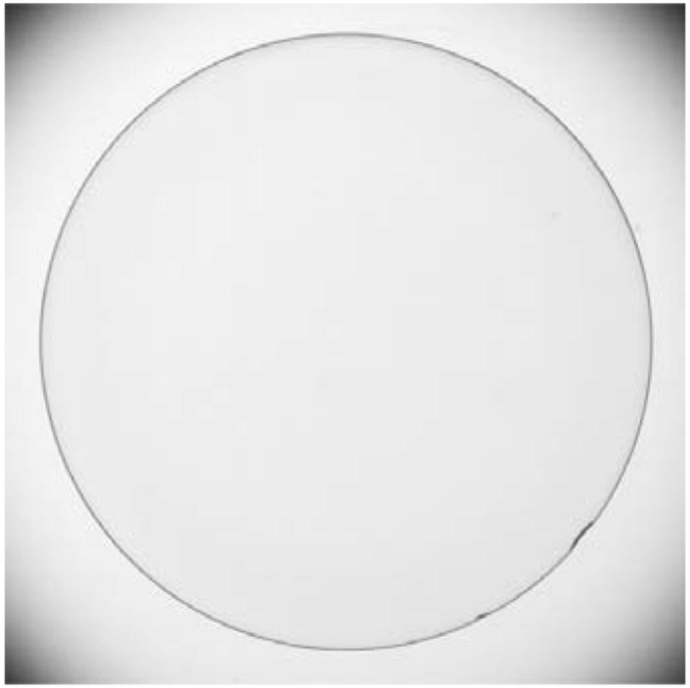
$$M(x, y) \approx |(z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)| + |(z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)|$$

举例

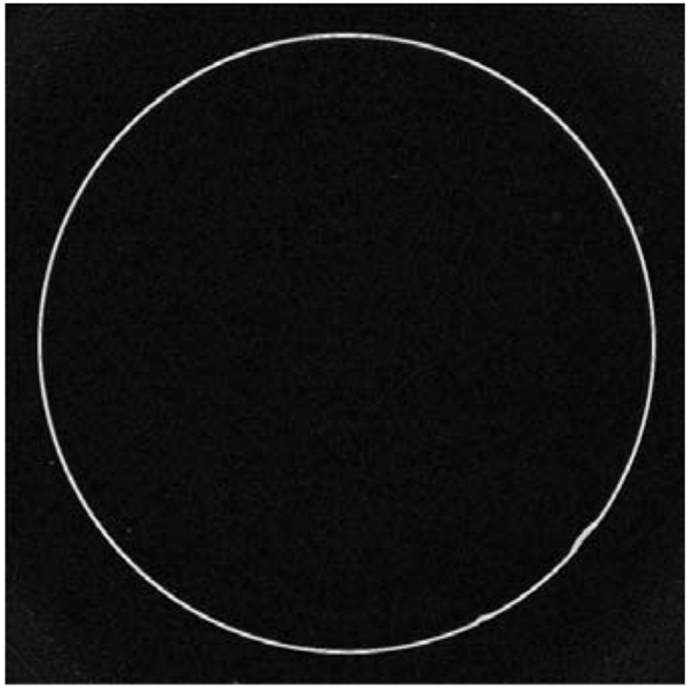
- 隐形眼镜光学图像

−1	−2	−1
0	0	0
1	2	1

−1	0	1
−2	0	2
−1	0	1



原图



Sobel梯度图像

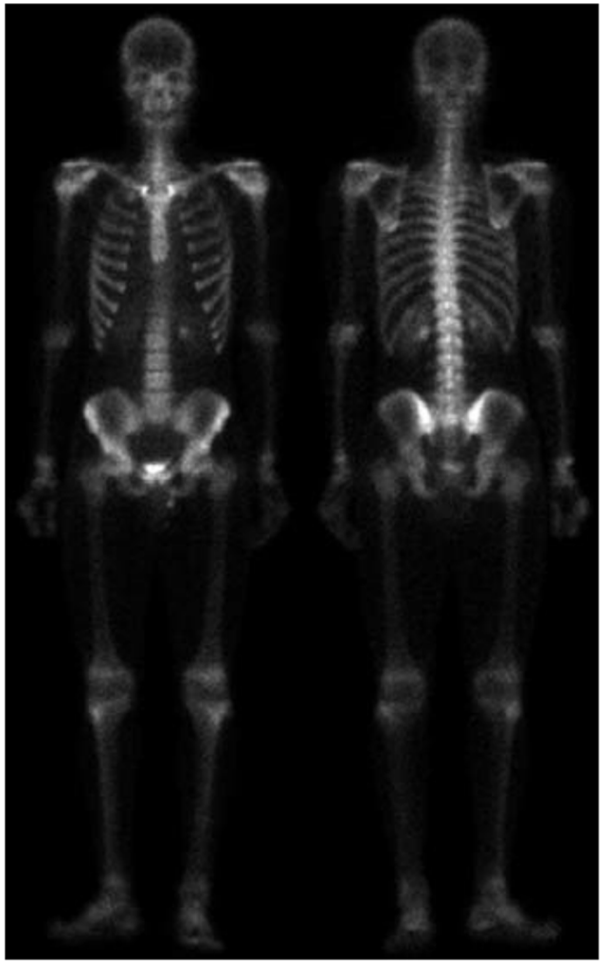
提纲

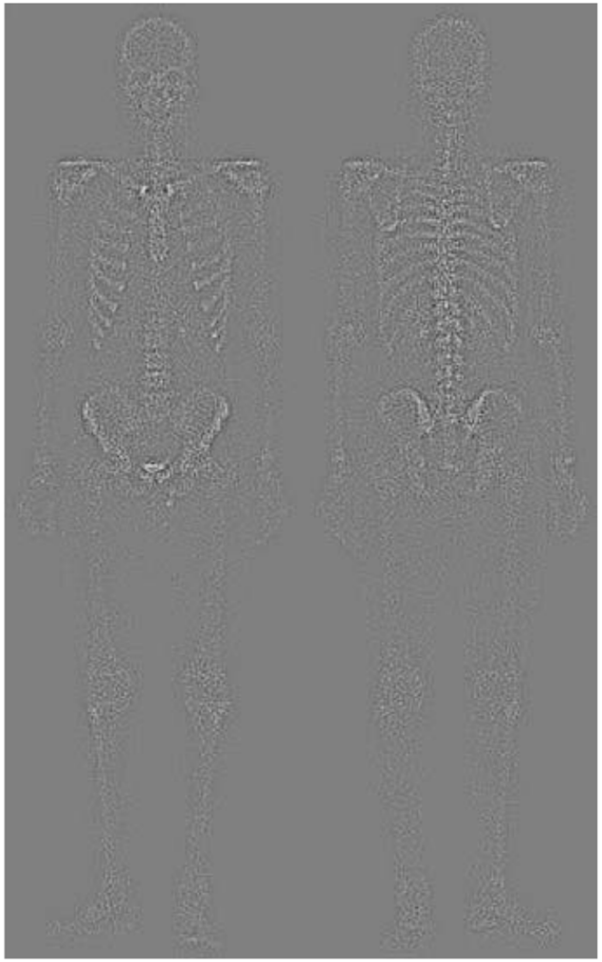
- 背景知识
- 基本灰度变换函数
- 直方图处理
- 空间滤波基础
- 平滑空间滤波器
- 锐化空间滤波器
- 混合空间增强法

利用多种图像增强方法

- 人体骨骼扫描图像

原图

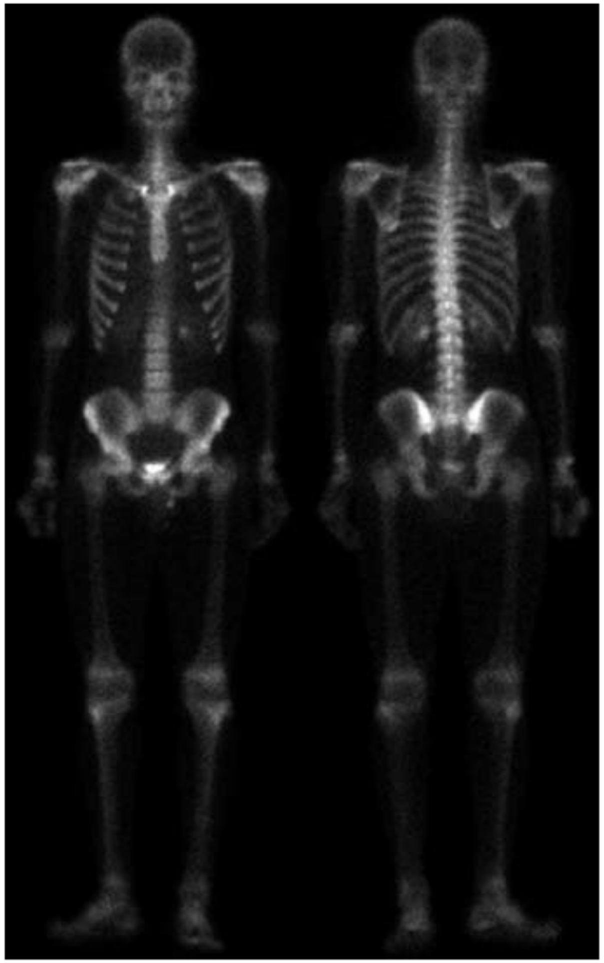




拉普拉斯
滤波

利用多种图像增强方法

- 人体骨骼扫描图像
  - 拉普拉斯突出细节
  - 梯度突出边缘
  - 灰度变换增强对比度

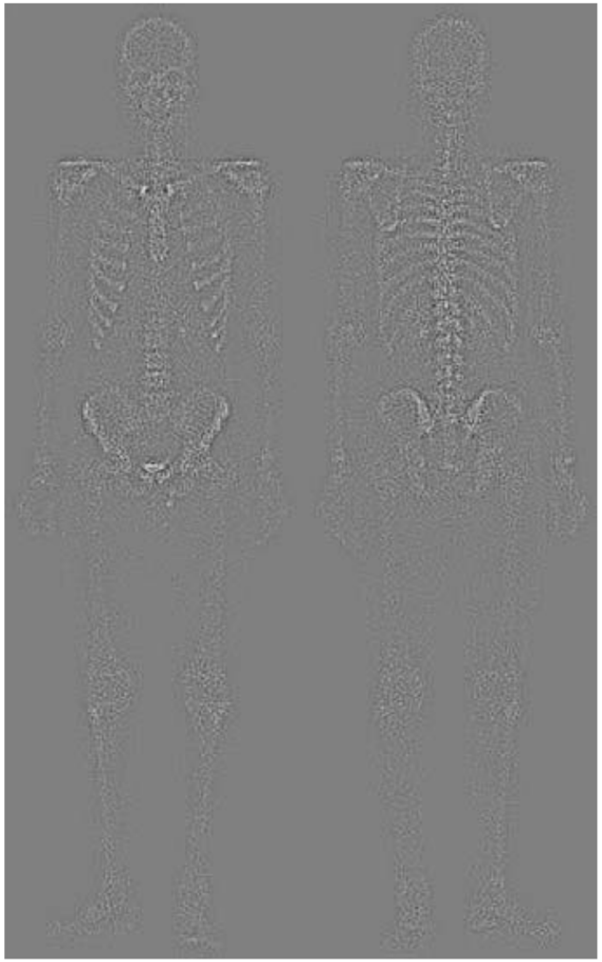


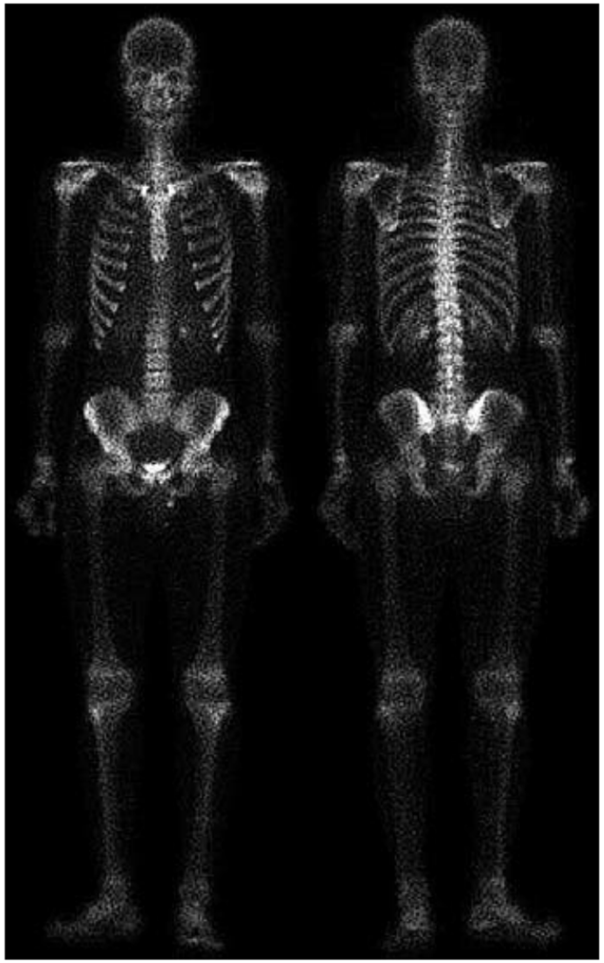
利用多种图像增强方法

噪声过多

- 拉普拉斯锐化

拉普拉斯滤波

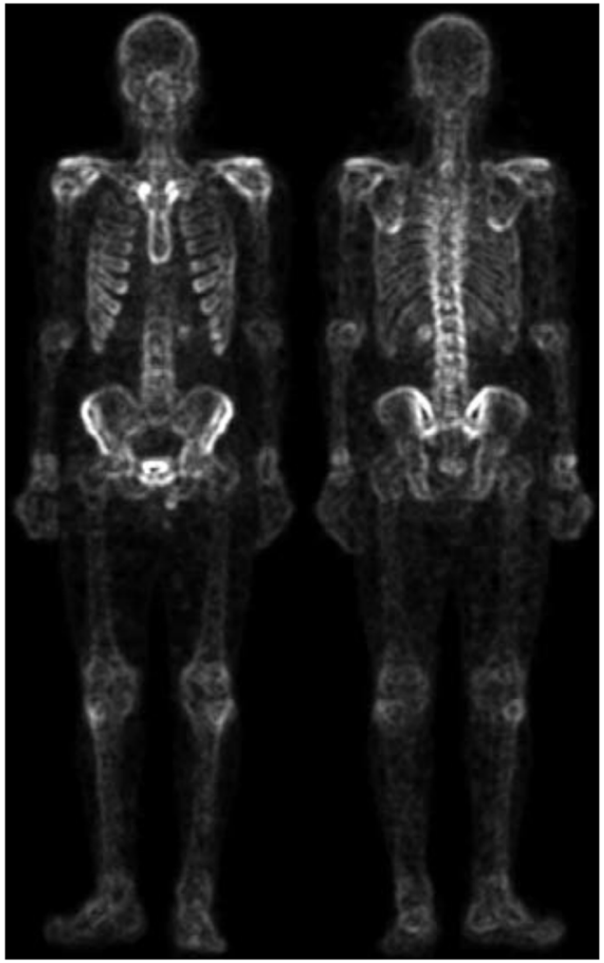




利用多种图像增强方法

- 梯度锐化（对变化响应强，细节响应弱）

Sobel梯度
操作

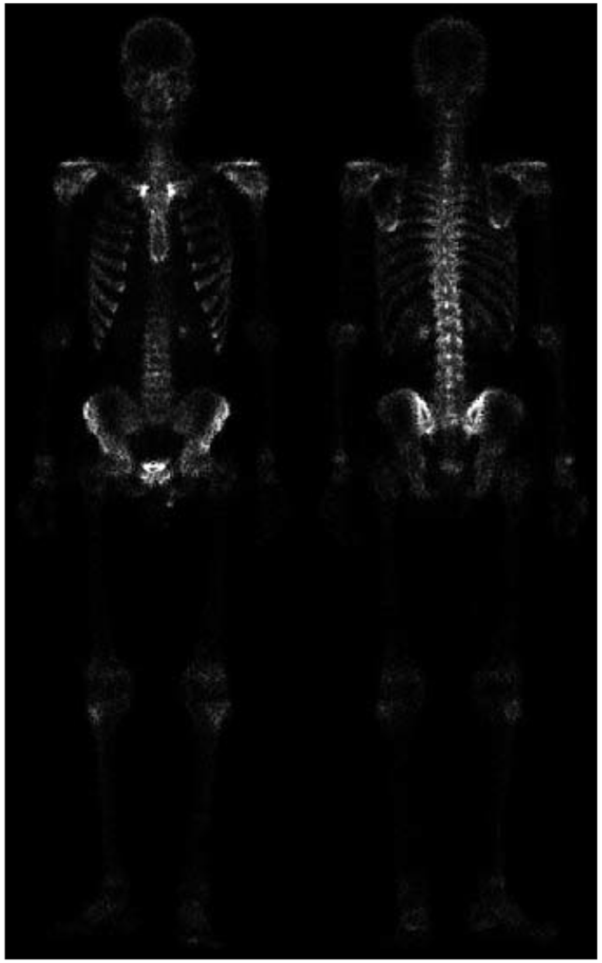


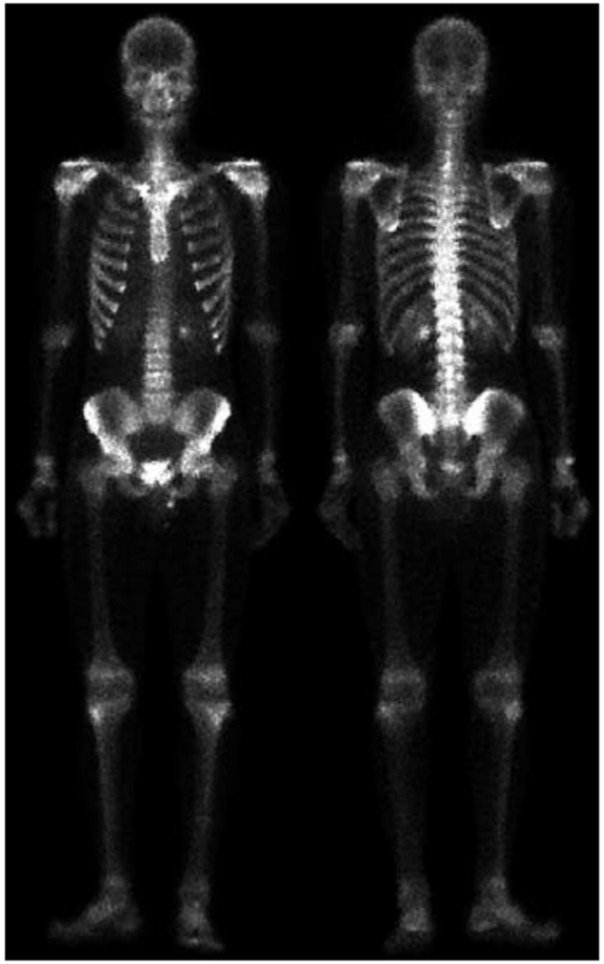
5 × 5
均值滤波

利用多种图像增强方法

- 结合拉普拉斯锐化和梯度锐化

拉普拉斯图像
平滑梯度图像
的乘积

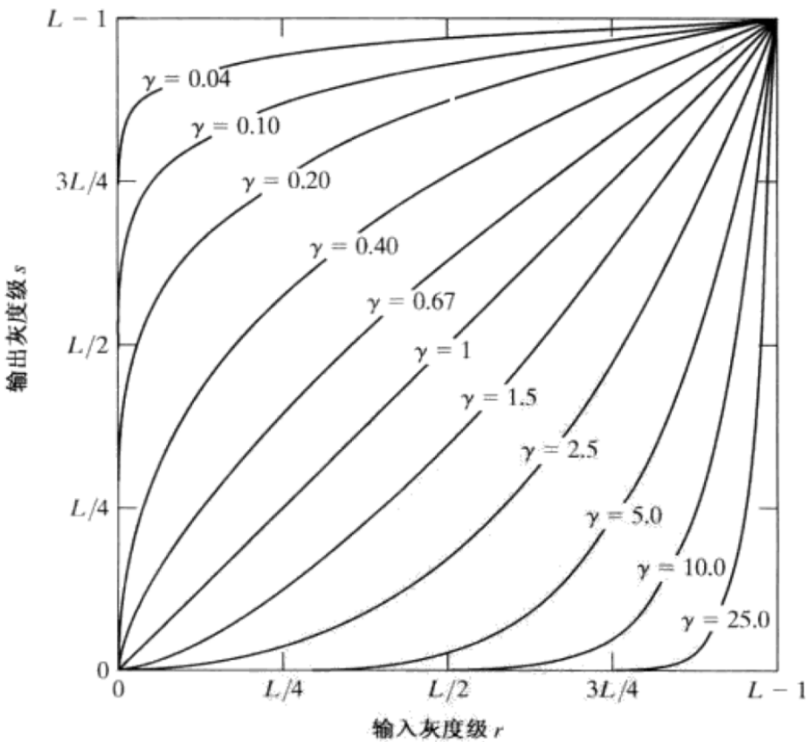




与原图
叠加

利用多种图像增强方法

- 幂律变换（$\gamma = 0.5$）



利用多种图像增强方法

- 幂律变换（$\gamma = 0.5$）