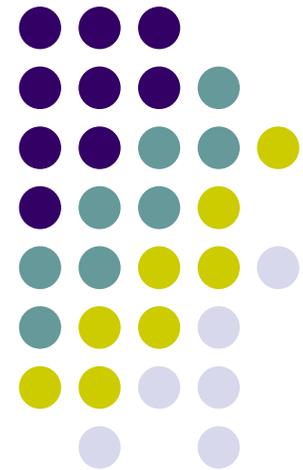


# 数字图像处理

## 第五讲 图像复原



# 提纲



- 图像退化/复原建模
- 噪声模型
- 仅有噪声的图像复原
- 频域滤波消除周期噪声
- 线性、位置不变的退化
- 估计退化函数
- 逆滤波

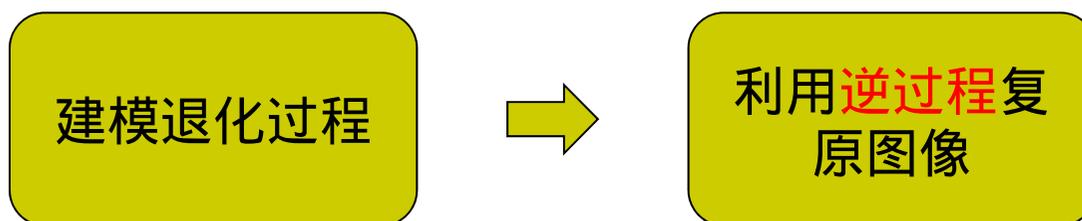




# 引言

- 图像复原

- 以预先制定的目标改善图像，客观
- 对模糊图像去模糊
- 利用退化现象的先验知识来恢复图像



- 图像增强

- 由人的主观感受来评判，主观
- 对比度拉伸



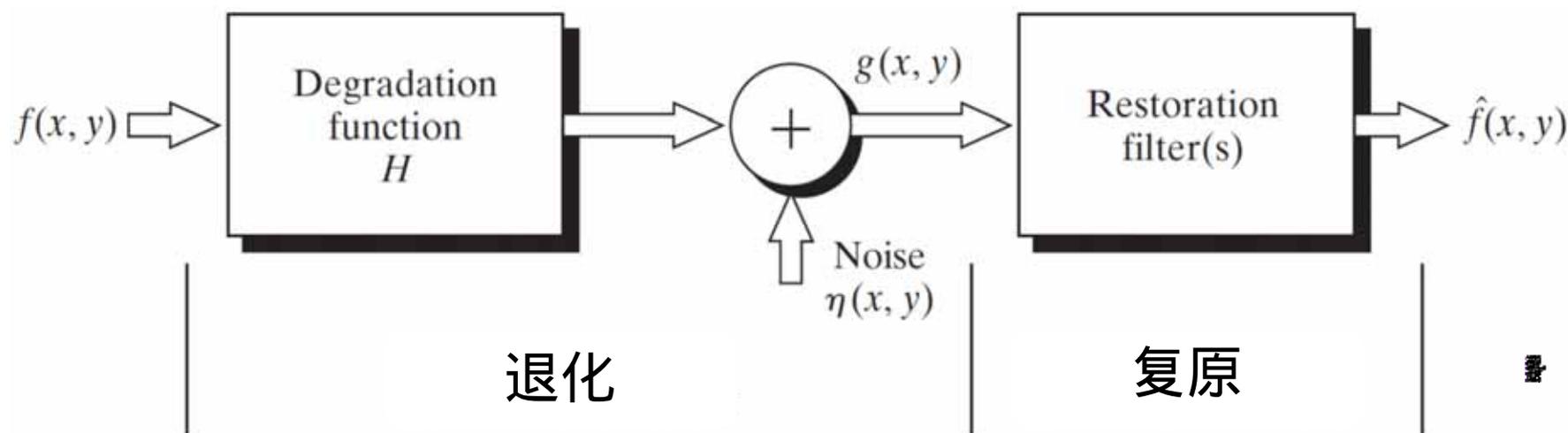
# 图像退化/复原建模



- 输入  $f(x, y)$
- 退化函数  $H$
- 加性噪声  $\eta(x, y)$
- 复原滤波器
- 输出  $\hat{f}(x, y)$

目标

$$f(x, y) \approx \hat{f}(x, y)$$





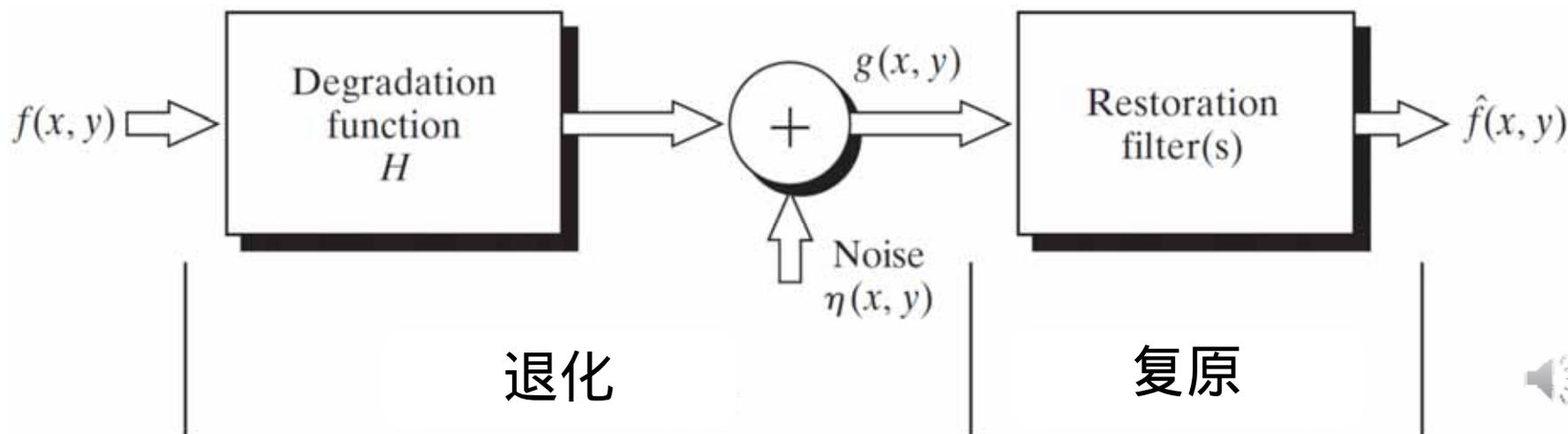
# 图像退化/复原建模

- $H$ 为线性、位置不变

$$g(x, y) = h(x, y) \star f(x, y) + \eta(x, y)$$

- $h(x, y)$ 是退化函数的空间表示
- 频率域表示

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$



# 提纲

- 图像退化/复原建模
- **噪声模型**
- 仅有噪声的图像复原
- 频域滤波消除周期噪声
- 线性、位置不变的退化
- 估计退化函数
- 逆滤波



# 噪声



- 当 $H = I$ 时

$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

- 噪声来源

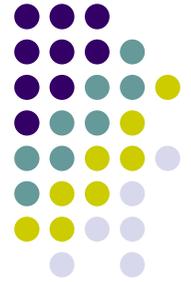
- 图像获取：环境条件、传感器质量
- 图像传输：无线信号被干扰

- 刻画噪声

- 空间域和频率域特点
  - 白噪声：傅里叶变换后为常数
- 噪声是否和图像相关



# 噪声类型



- 噪声的空间表示
  - 概率密度函数 ( PDF )
- 高斯噪声
- 瑞利噪声
- 爱尔兰 ( 伽马 ) 噪声
- 指数噪声
- 均匀噪声
- 脉冲 ( 椒盐 ) 噪声



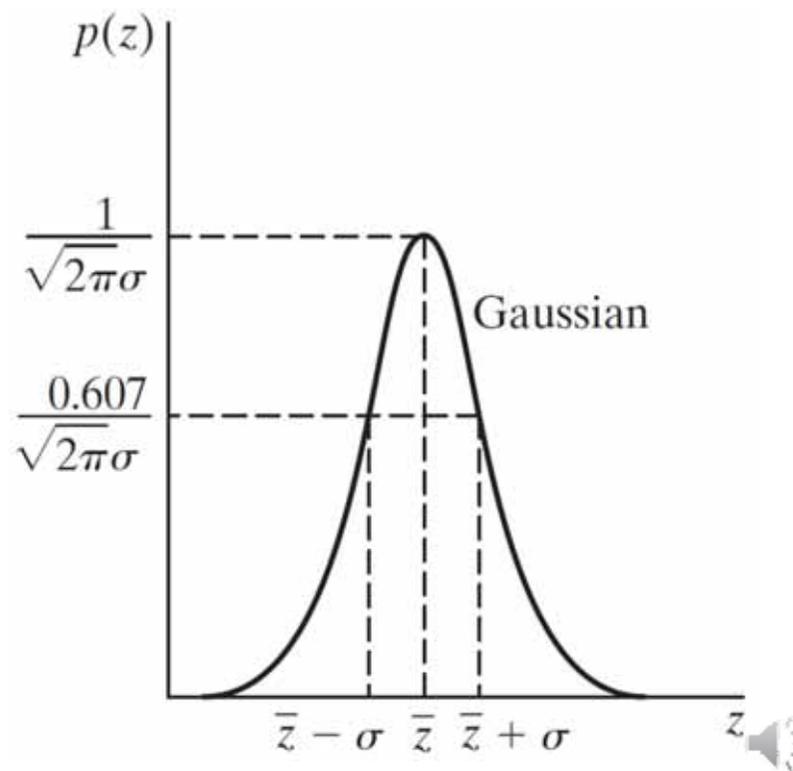
# 高斯噪声



- 概率密度函数

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-\bar{z})^2/2\sigma^2}$$

- $\bar{z}$ 为均值、 $\sigma$ 为标准差
- $\sigma^2$ 为方差
  
- $[\bar{z} - \sigma, \bar{z} + \sigma]$ 占70%
- $[\bar{z} - 2\sigma, \bar{z} + 2\sigma]$ 占90%



# 瑞利噪声



- 概率密度函数

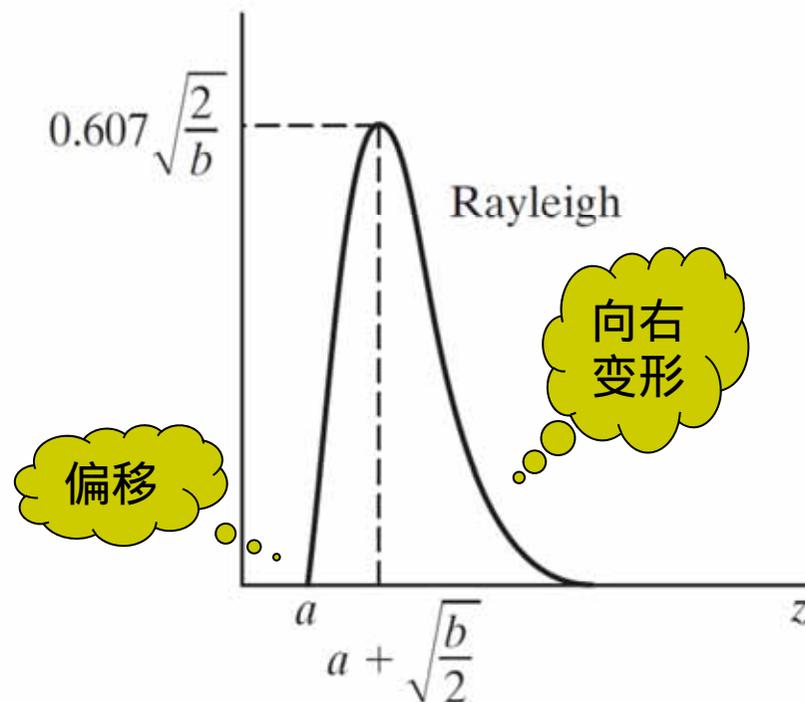
$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z - a)e^{-(z-a)^2/b} & \text{for } z \geq a \\ 0 & \text{for } z < a \end{cases}$$

- 均值

$$\bar{z} = a + \sqrt{\pi b/4}$$

- 方差

$$\sigma^2 = \frac{b(4 - \pi)}{4}$$



# 爱尔兰（伽马）噪声



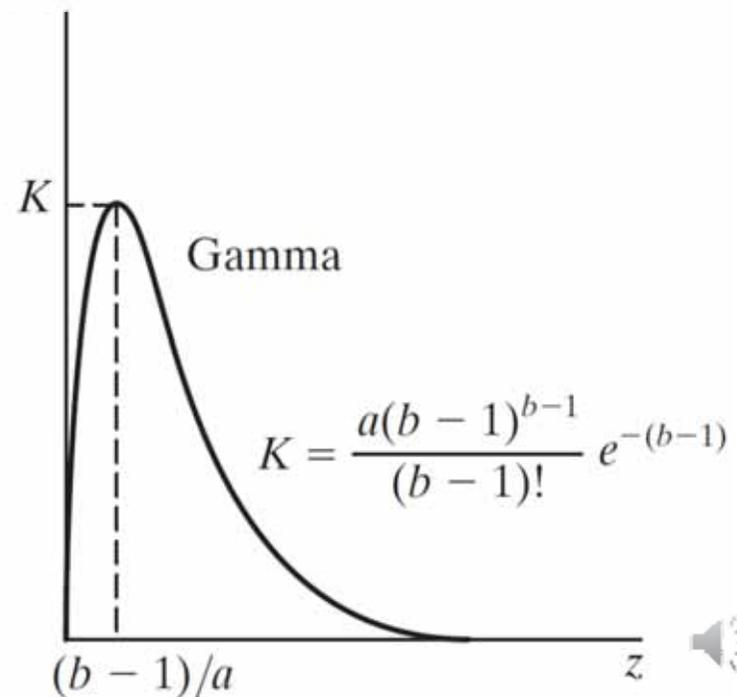
- 概率密度函数

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & \text{for } z \geq 0 \\ 0 & \text{for } z < 0 \end{cases}$$

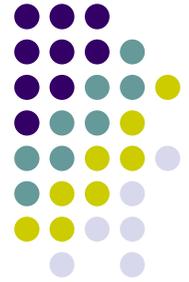
- $a > 0$  ,  $b$  正整数

- 均值和方差

$$\bar{z} = \frac{b}{a} \quad \sigma^2 = \frac{b}{a^2}$$



# 指数噪声



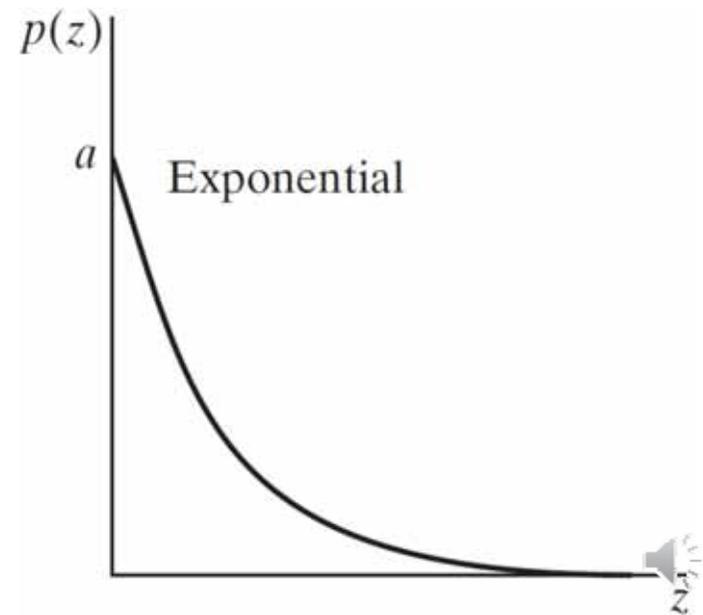
- 概率密度函数

$$p(z) = \begin{cases} ae^{-az} & \text{for } z \geq 0 \\ 0 & \text{for } z < 0 \end{cases}$$

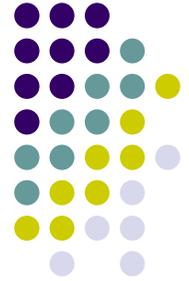
- $b = 1$ 时的爱尔兰噪声

- 均值和方差

$$\bar{z} = \frac{1}{a} \quad \sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$



# 均匀噪声



- 概率密度函数

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} \\ 0 \end{cases}$$

if  $a \leq z \leq b$

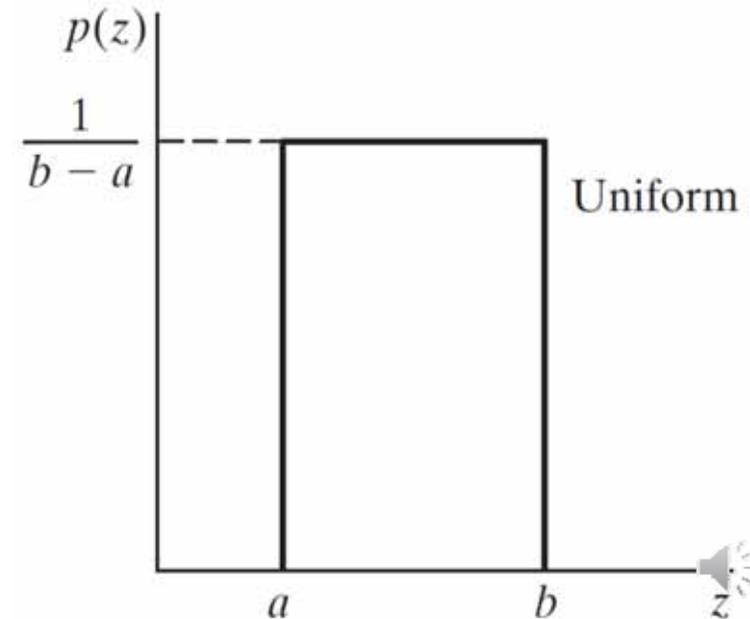
otherwise

- 均值

$$\bar{z} = \frac{a + b}{2}$$

- 方差

$$\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$$



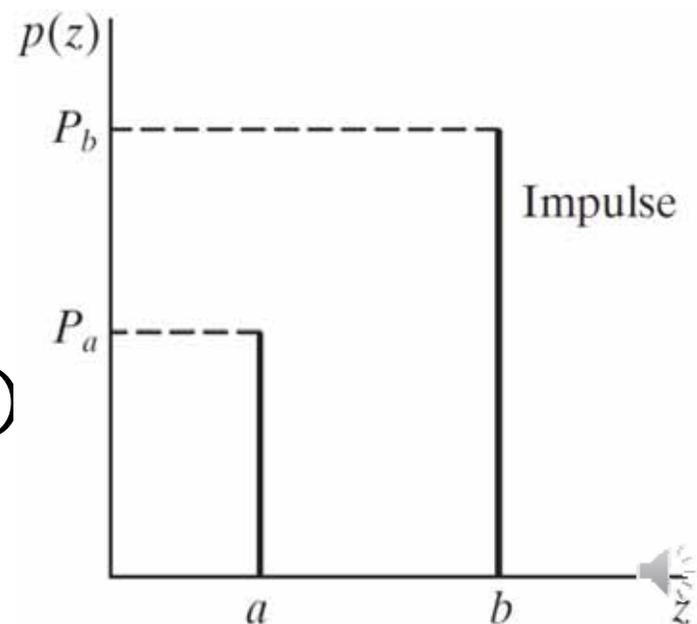
# 脉冲（椒盐）噪声



- 概率密度函数

$$p(z) = \begin{cases} P_a & \text{for } z = a \\ P_b & \text{for } z = b \\ 1 - P_a - P_b & \text{for } z = 0 \end{cases}$$

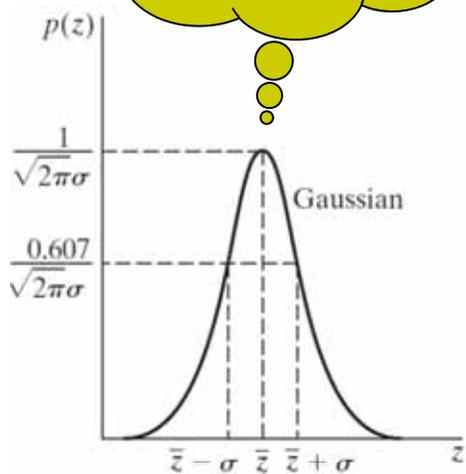
- $P_a$  或  $P_b$  为 0，单极脉冲
- 都不为 0，双极脉冲
- 可正可负
  - 盐（白色）、胡椒（黑色）



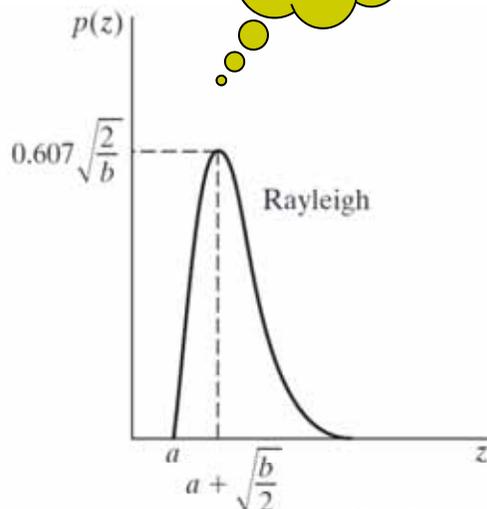
# 比较



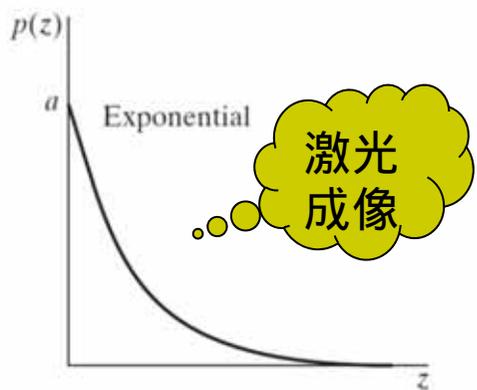
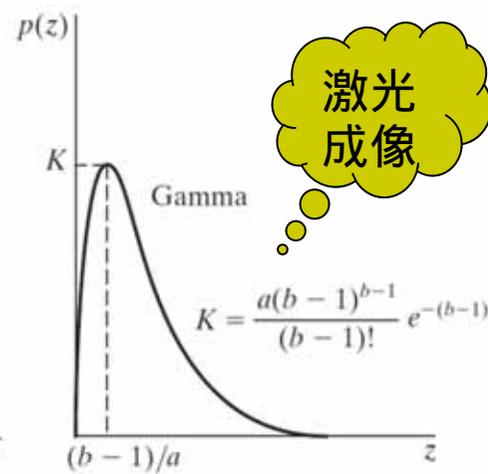
电路噪声  
传感器噪声



范围  
成像

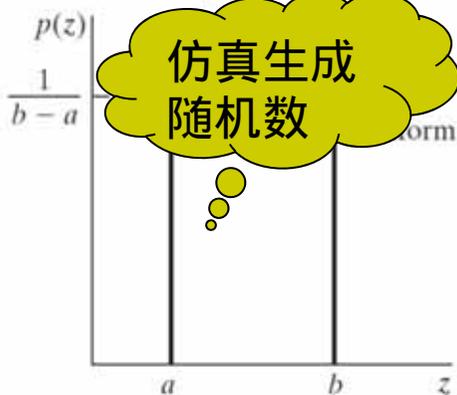


激光  
成像

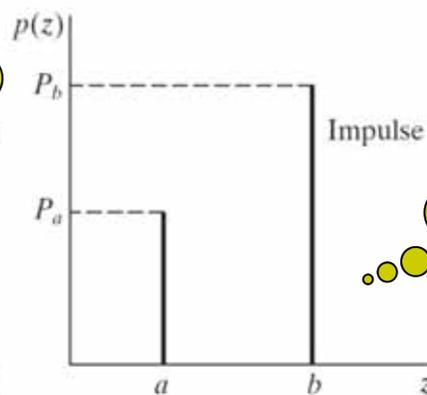


激光  
成像

仿真生成  
随机数

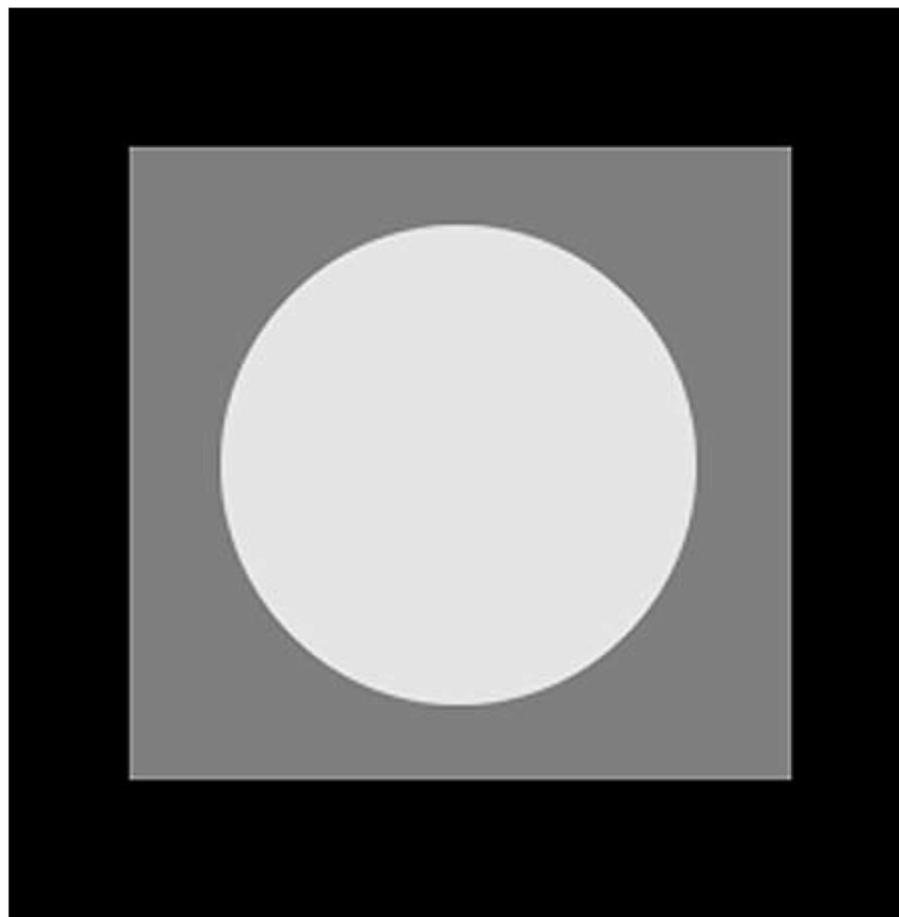


快速  
过渡

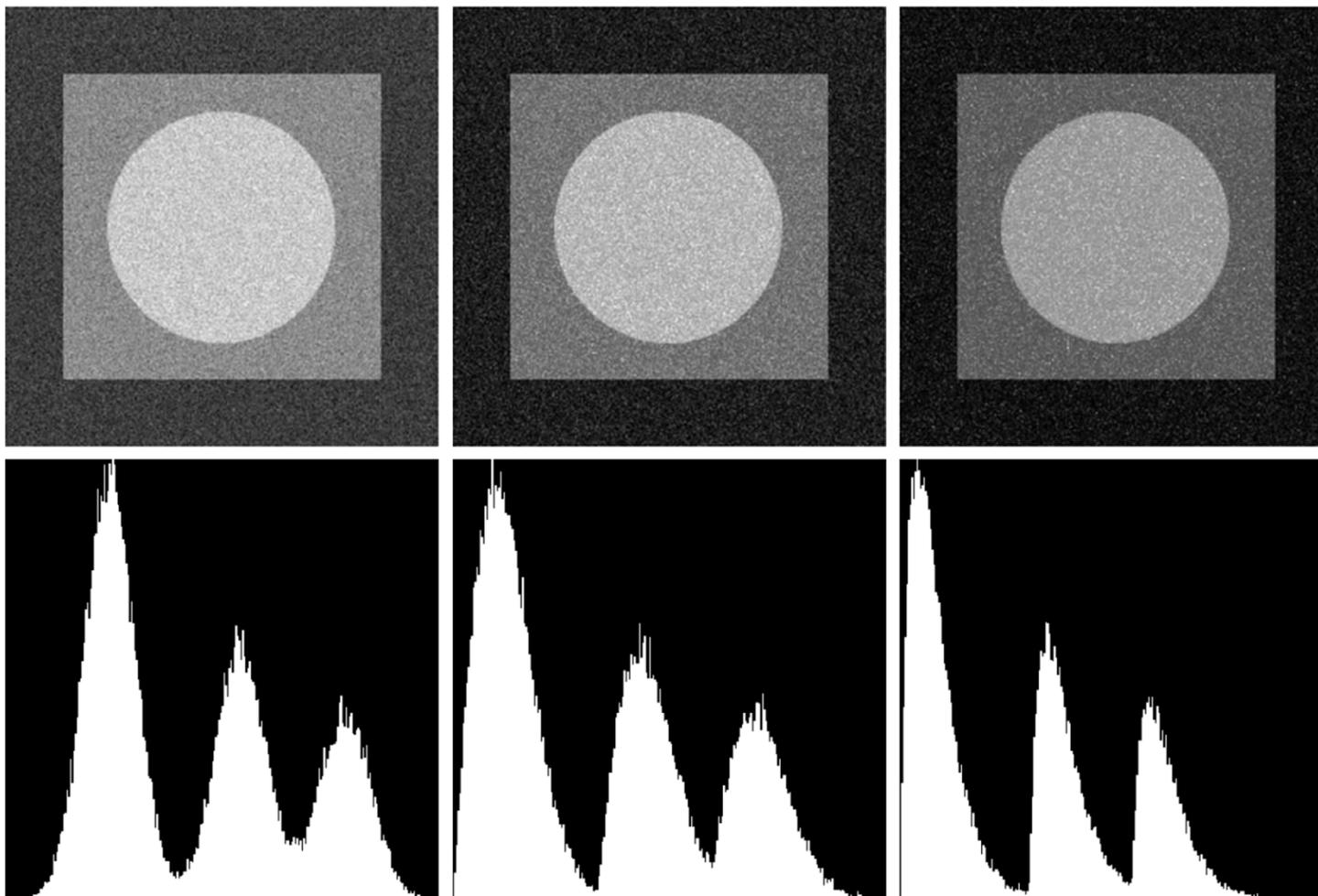


# 举例

- 原图



# 举例—加噪声



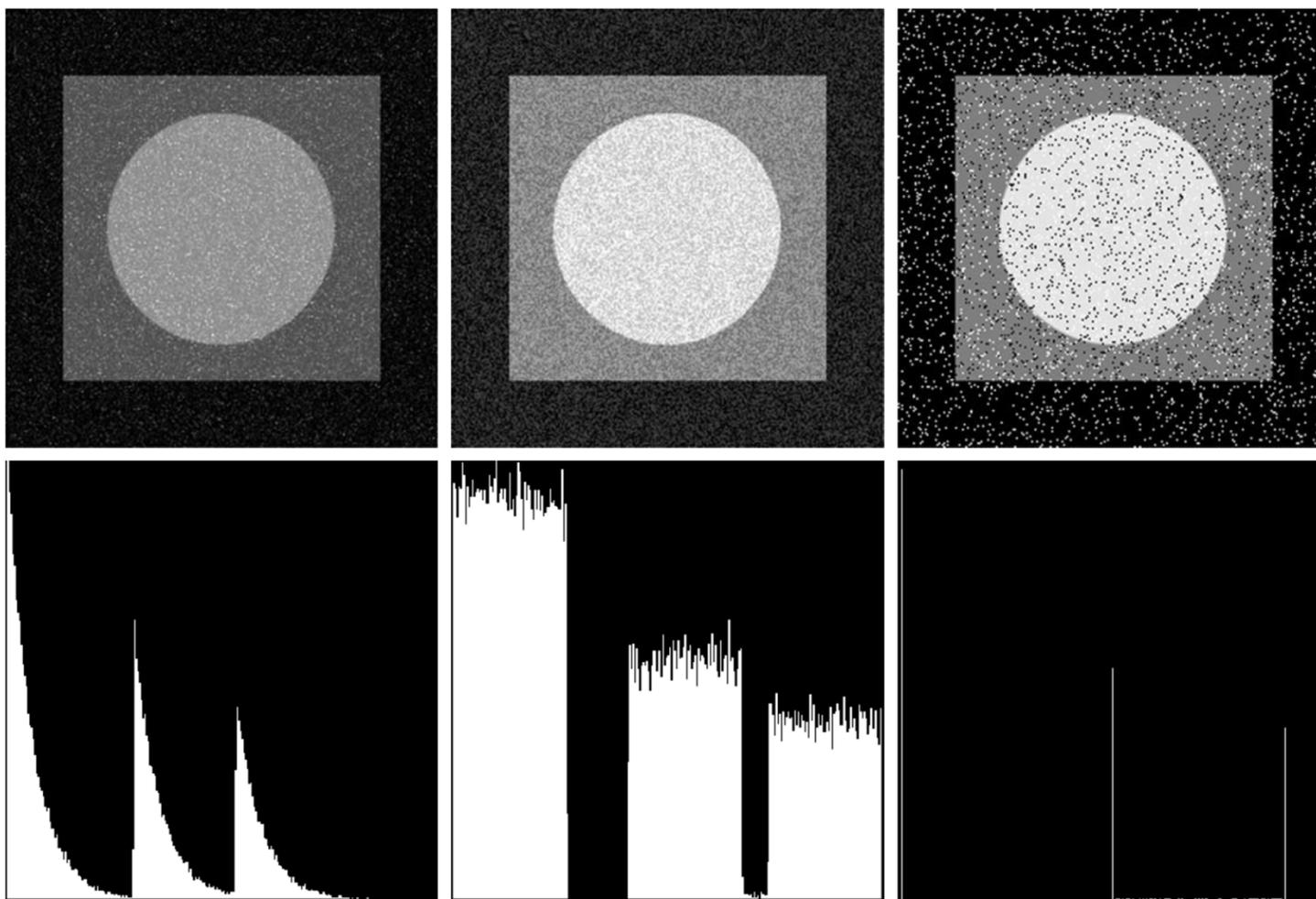
高斯

瑞利

爱尔兰



# 举例—加噪声



指数

均匀

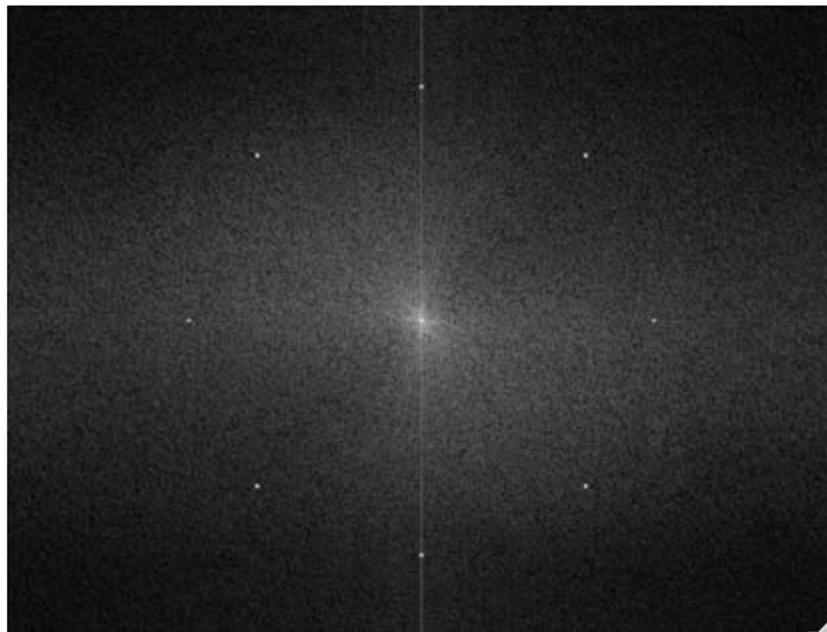
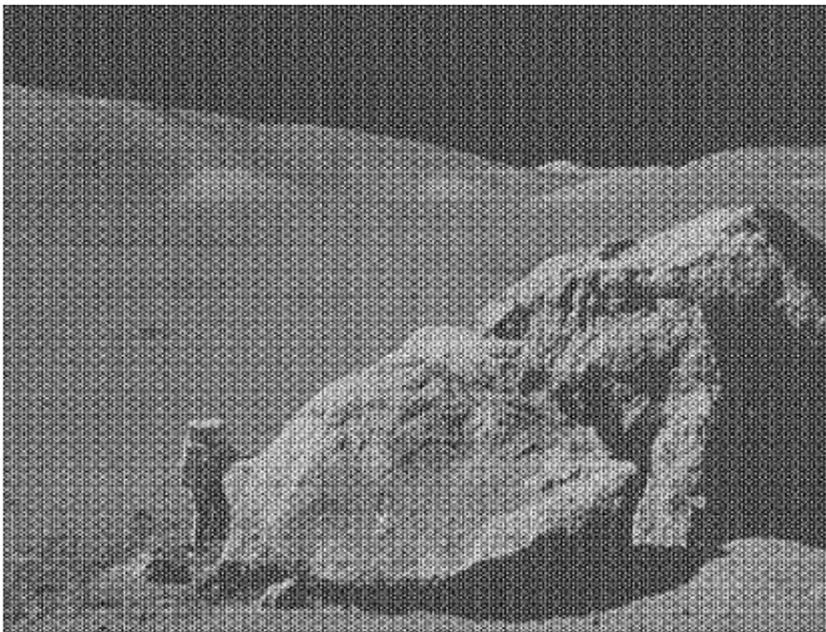
脉冲





# 周期噪声

- 通常由电力或机电干扰产生
- 噪声与空间位置有关
- 可以通过频域率滤波复原



# 噪声参数估计



- 周期噪声
  - 通过检查傅里叶谱、图像本身（简单情况）
- 一般噪声的PDF
  - 查看传感器说明书
  - 主动成像去估计参数，如拍摄纯色的物体
  - 从图像的局部稳定区域来估计噪声

$$\bar{z} = \sum_{i=0}^{L-1} z_i p_S(z_i) \quad \sigma^2 = \sum_{i=0}^{L-1} (z_i - \bar{z})^2 p_S(z_i)$$

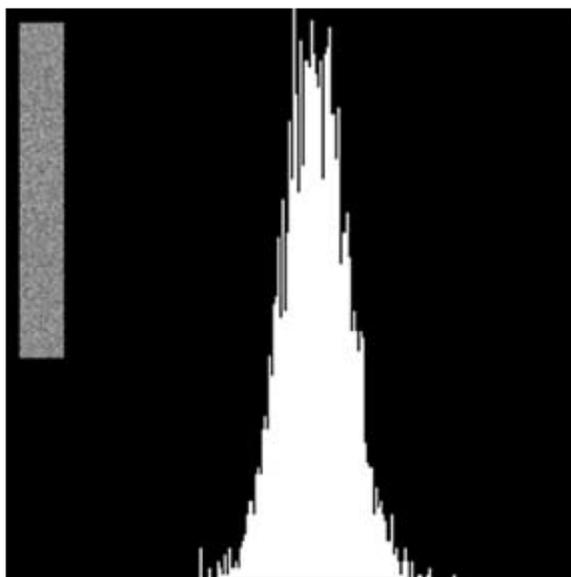
- $p_S(\cdot)$ 表示区域S内的概率估计



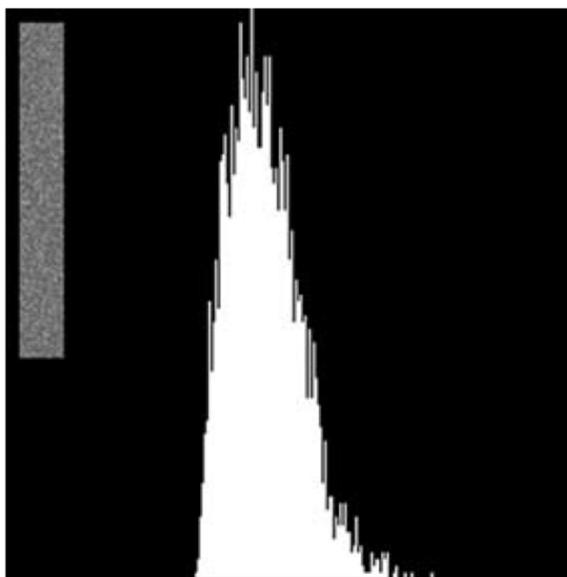
# 噪声参数估计



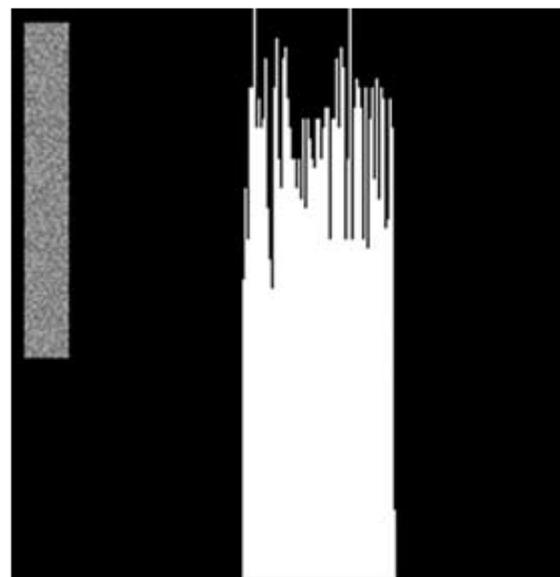
- 1 根据形状识别PDF的类型
- 2(a) 根据均值和方差来计算具体参数
- 2(b) 脉冲噪声则直接估计概率



高斯



瑞利



均匀



# 提纲

- 图像退化/复原建模
- 噪声模型
- 仅有噪声的图像复原
- 频域滤波消除周期噪声
- 线性、位置不变的退化
- 估计退化函数
- 逆滤波

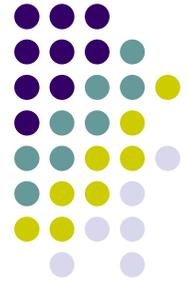


# 仅有噪声的图像复原



- 仅有噪声的图像退化
  - 空间域  $g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$
  - 频率域  $G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$
- 周期噪声
  - 从  $G(u, v)$  估计  $N(u, v)$  , 直接减去噪声
- 一般加性噪声
  - 空间滤波





# 均值滤波器

- 算数均值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t)$$

- $S_{xy}$ 表示以 $(x, y)$ 为中心的区域
  - 区域大小为 $m \times n$
  - 空间滤波器，系数为 $1/mn$
- 
- 平滑图像中的局部变化



# 均值滤波器



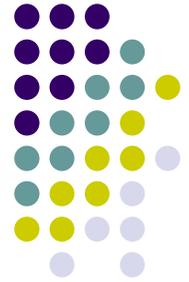
- 几何均值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \left[ \prod_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t) \right]^{\frac{1}{mn}}$$

- $S_{xy}$ 表示以 $(x, y)$ 为中心的区域
- 区域大小为 $m \times n$
- 丢失的细节少



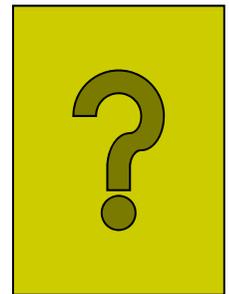
# 均值滤波器



- 谐波均值滤波器 ( Harmonic mean )

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s, t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s, t)}}$$

- $S_{xy}$  表示以  $(x, y)$  为中心的区域
- 区域大小为  $m \times n$
- 适用于盐粒噪声，不适用于胡椒噪声



# 均值滤波器



- 逆谐波均值滤波器 ( Contraharmonic mean )

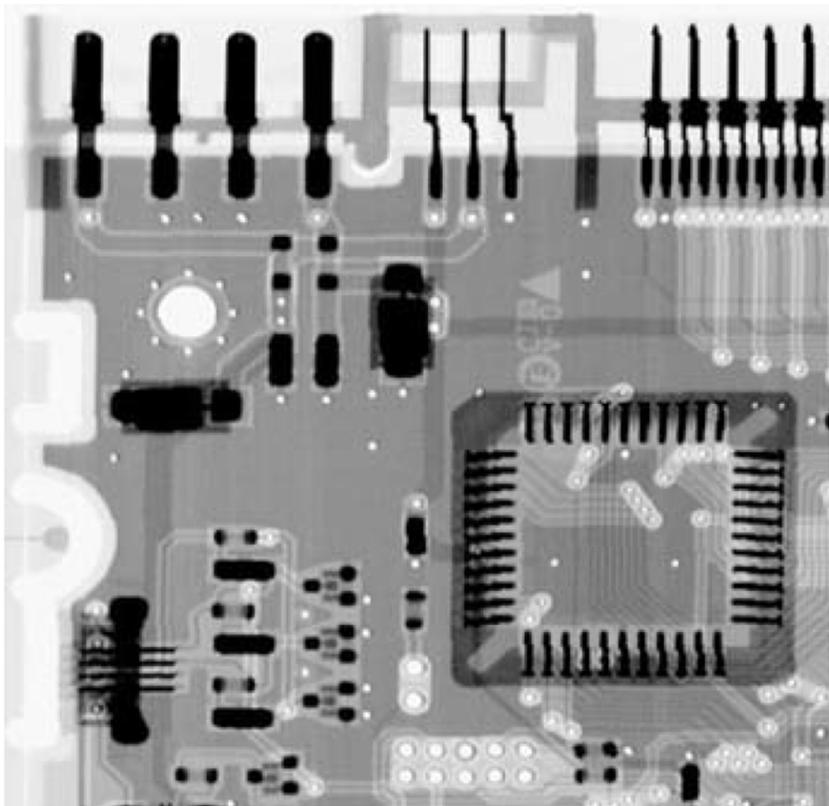
$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t)^{Q+1}}{\sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q}$$

- $Q$  表示阶数
- $Q > 0$  , 消除胡椒噪声
- $Q = 0$  , 算数均值滤波器
- $Q < 0$  , 消除盐粒噪声
- $Q = -1$  , 谐波均值滤波器



# 举例

- 高斯噪声

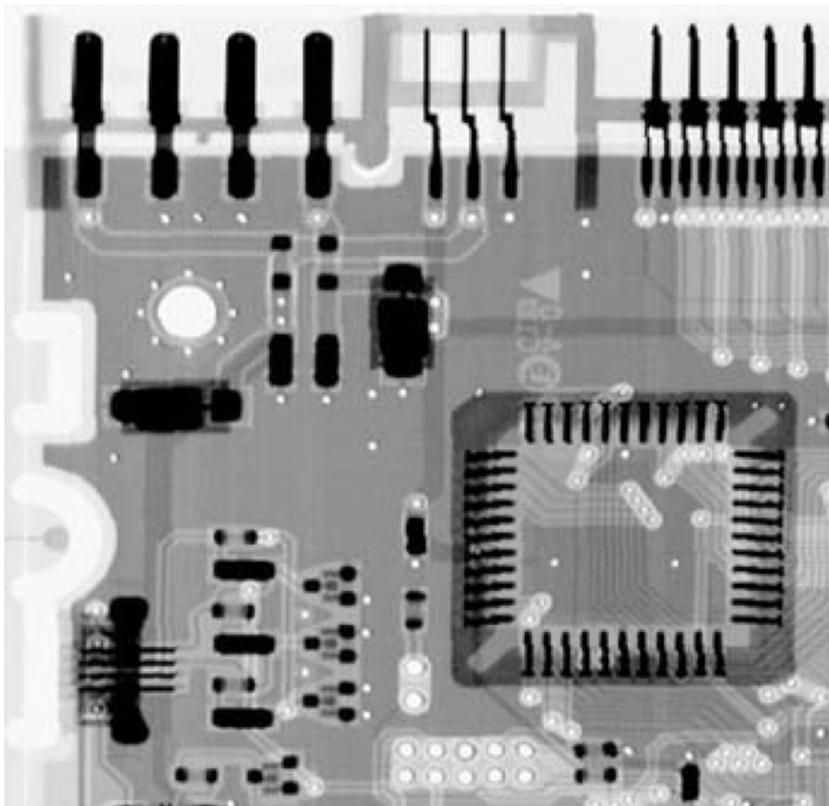


原图

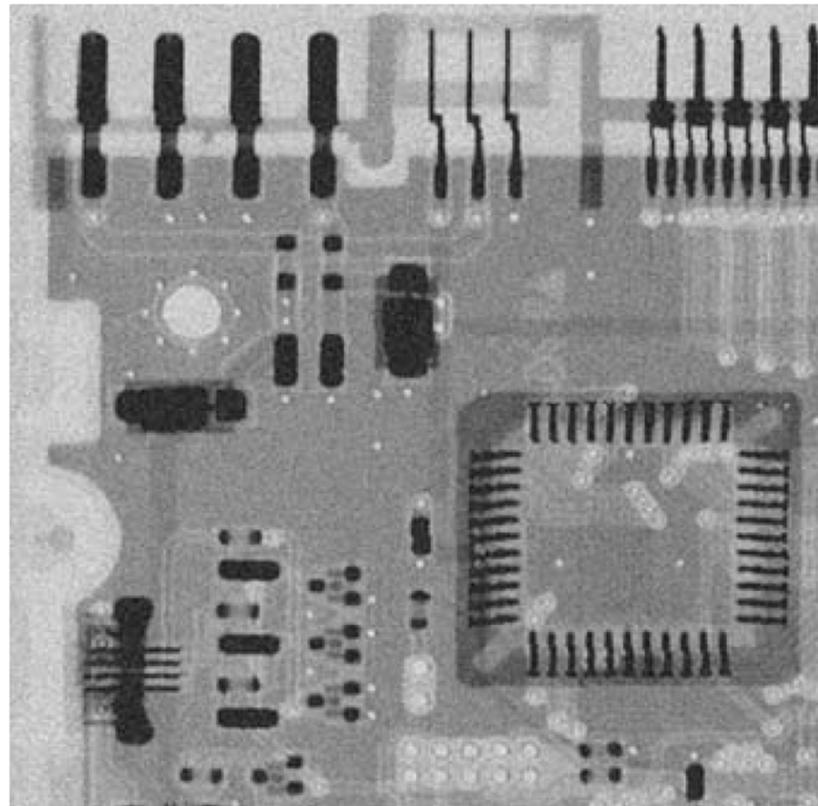


# 举例

- 高斯噪声



原图



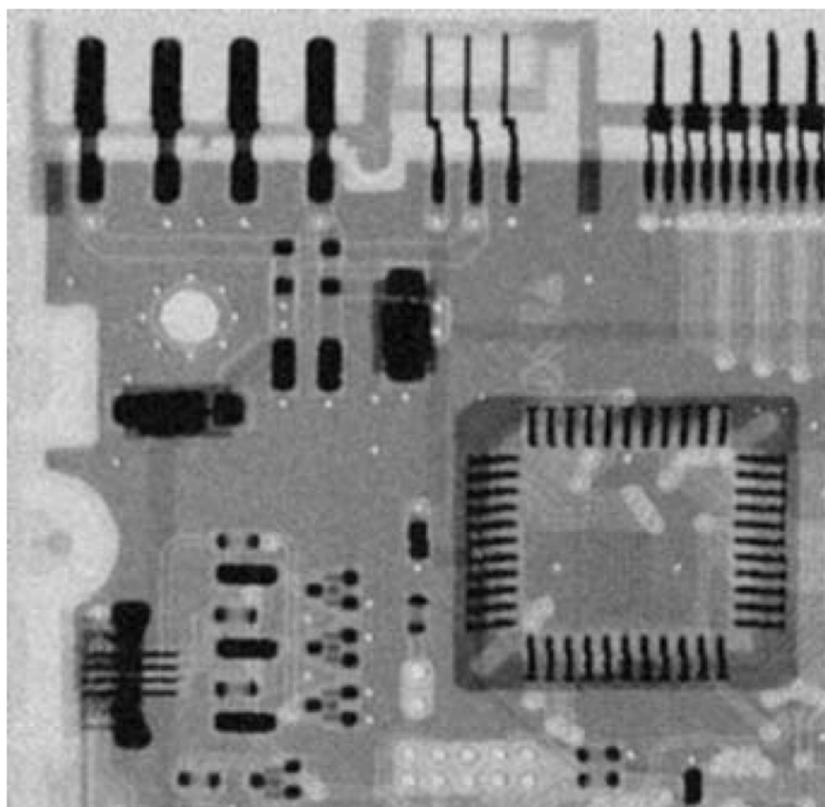
高斯噪声污染



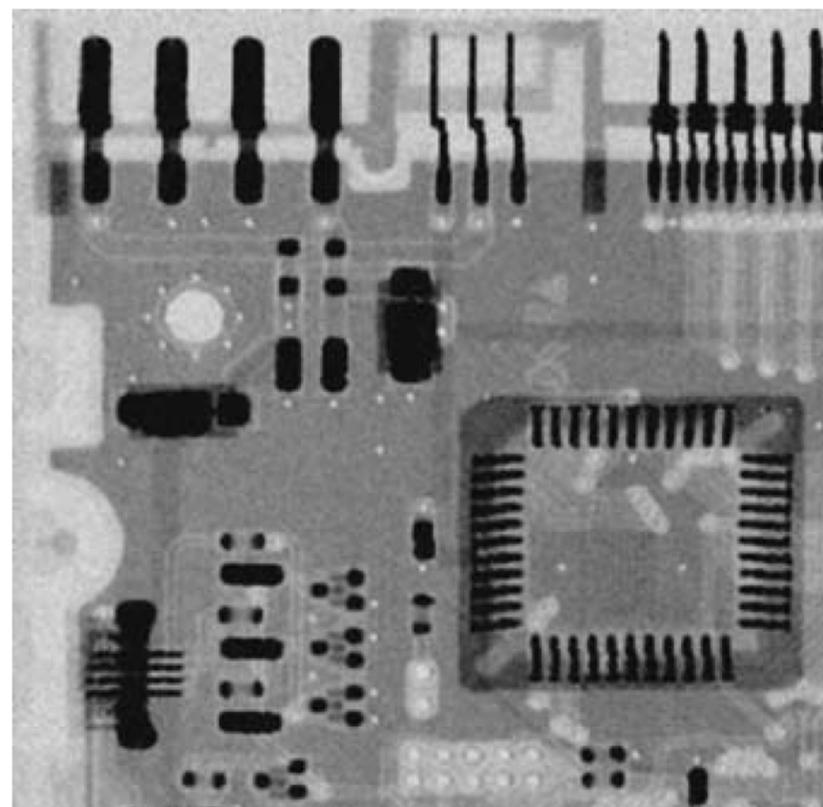
# 举例

- 高斯噪声

更清晰



$3 \times 3$  算术均值滤波器



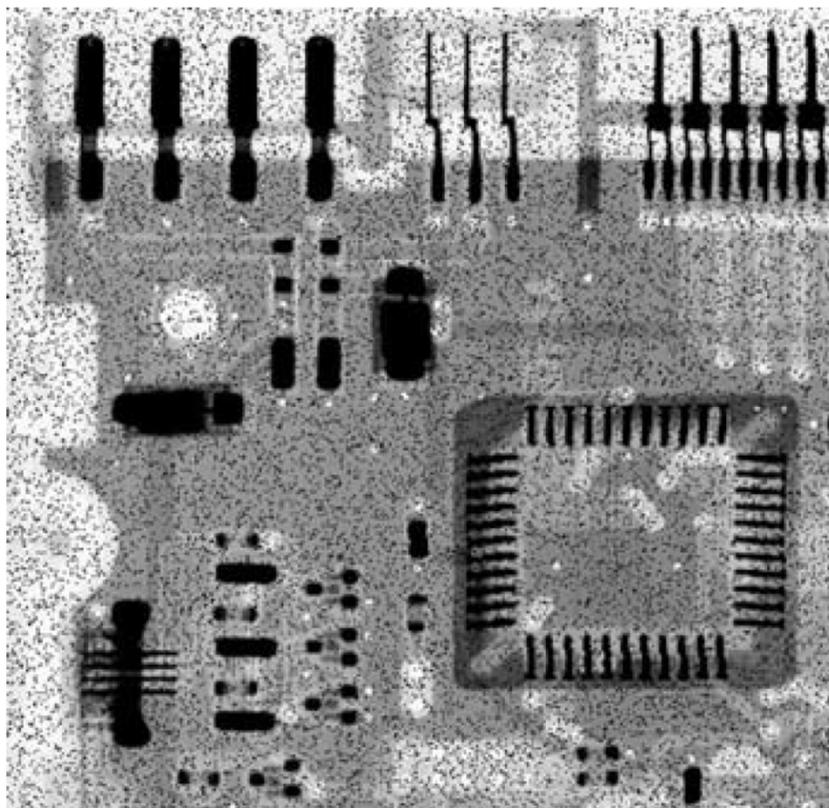
$3 \times 3$  几何均值滤波器



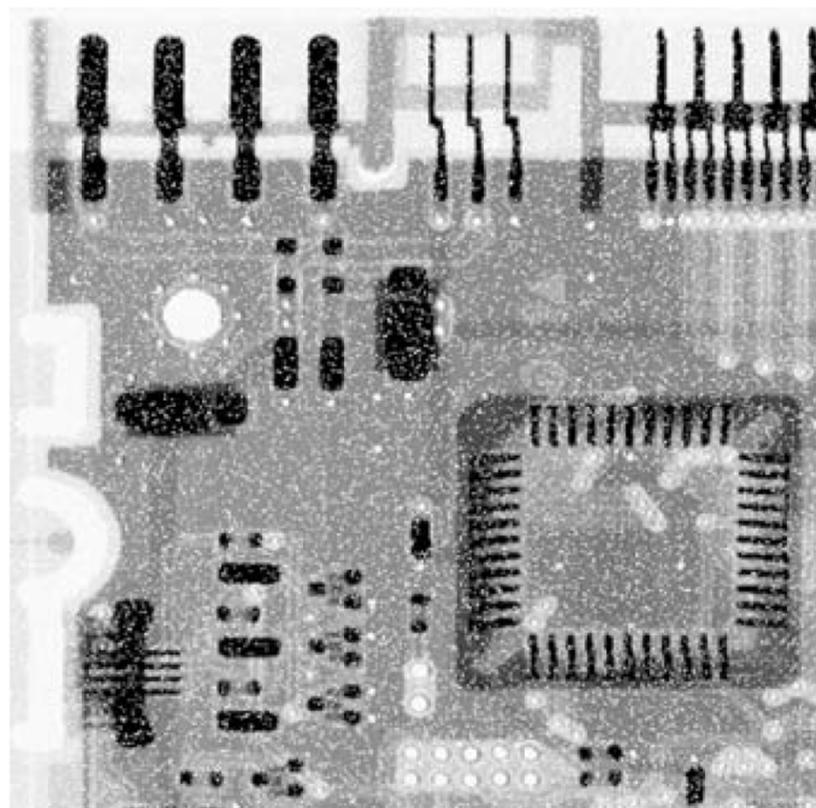
# 举例



- 椒盐噪声



概率为0.1的胡椒噪声



概率为0.1的盐粒噪声

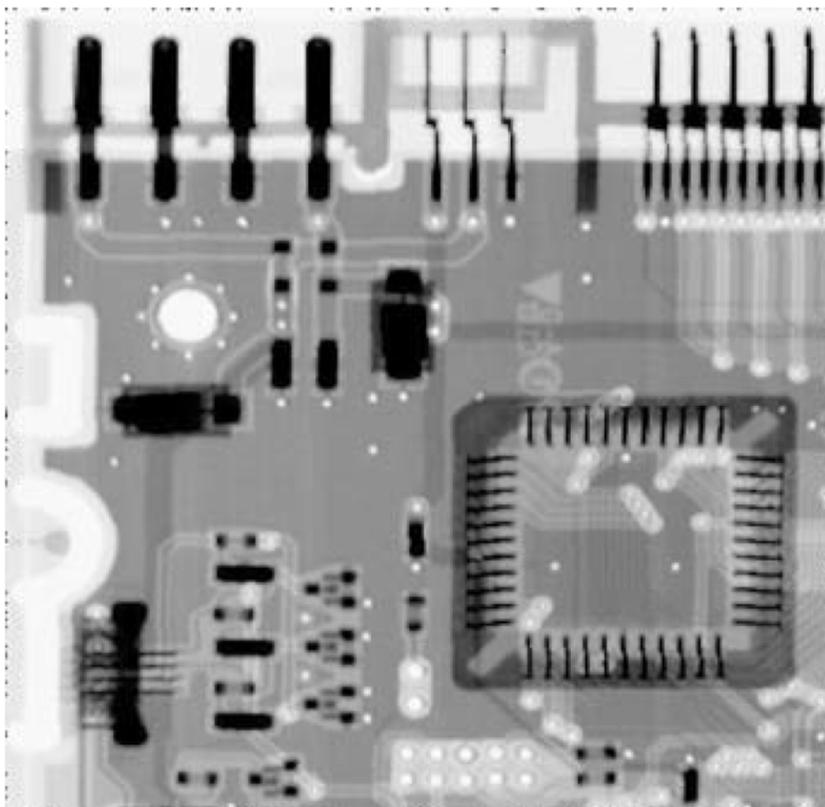


# 举例

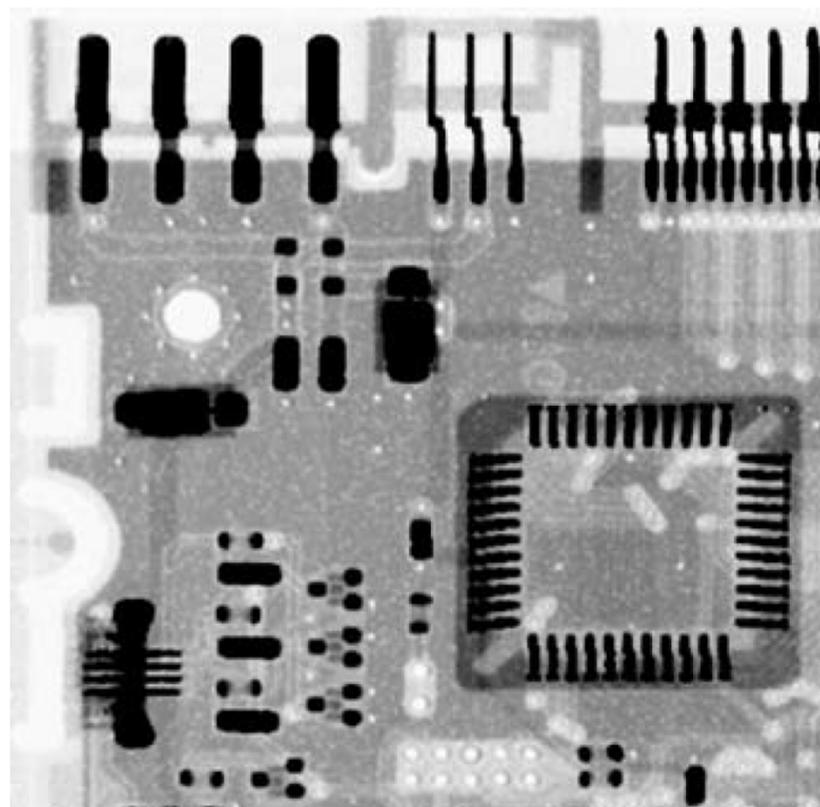
- 椒盐噪声

黑暗区域变窄

黑暗区域变宽



$Q = 1.5$ 的逆谐波均值滤波器

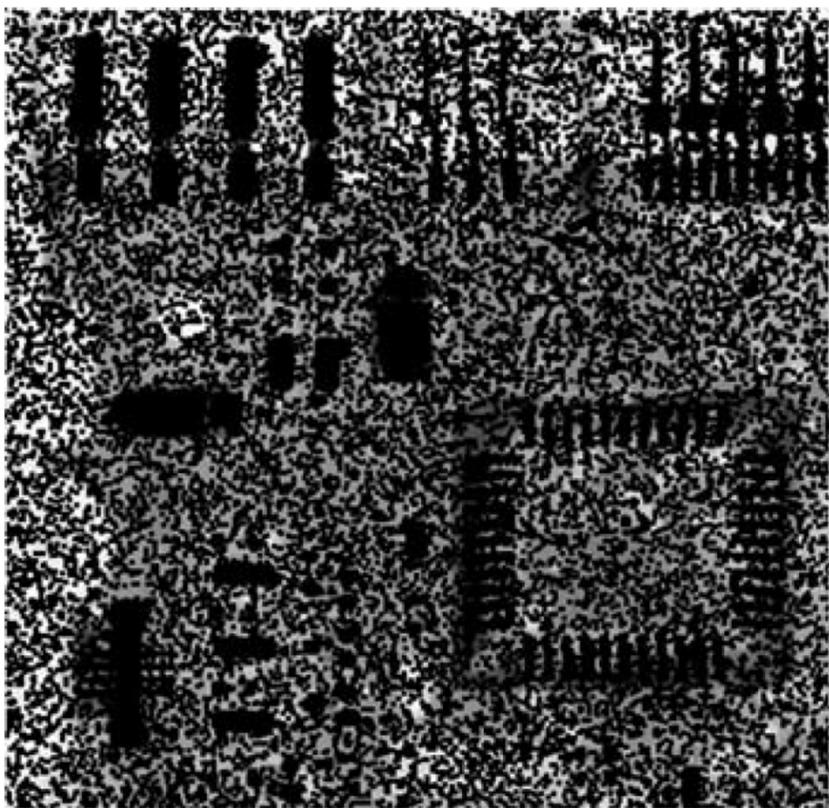


$Q = -1.5$ 的逆谐波均值滤波器

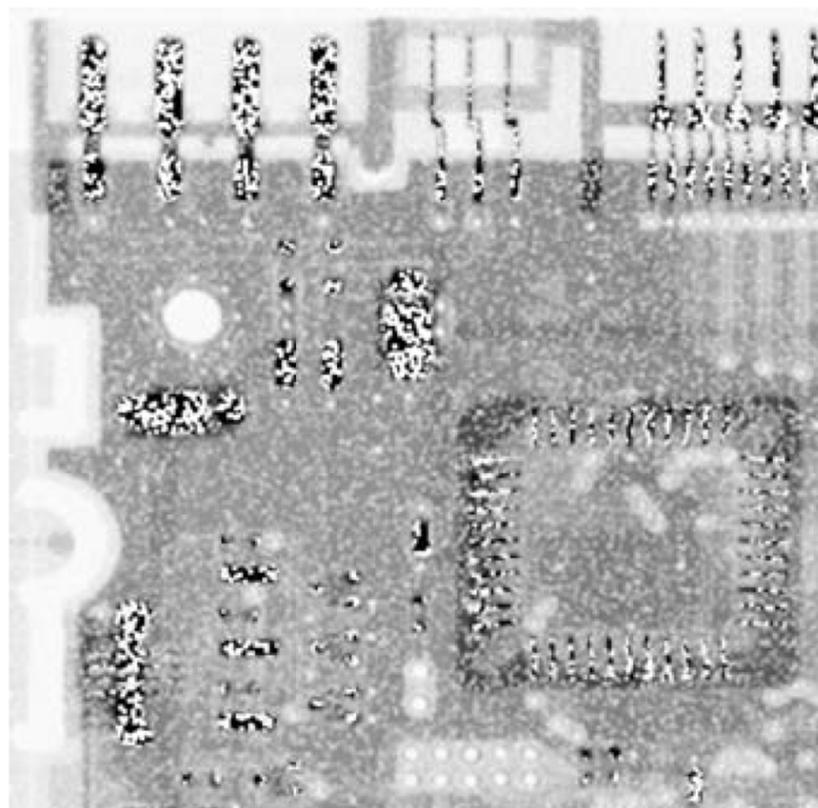


# 举例

- 椒盐噪声



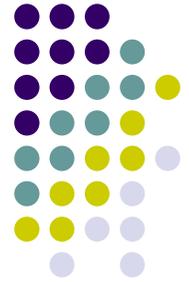
$Q = -1.5$ 的逆谐波均值滤波器



$Q = 1.5$ 的逆谐波均值滤波器

$Q$ 的符号很重要！





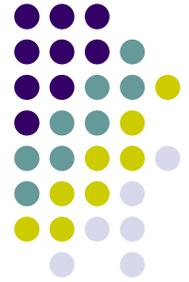
# 统计排序滤波器

- 非线性滤波器
  - 对滤波器覆盖的像素排序
  - 用排序决定的值替代中心像素
- 中值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \operatorname{median}_{(s, t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$$

- $(x, y)$ 处的像素值也参与计算
- 良好的去噪能力，并且模糊少
- 尤其适用于单极或双极的脉冲信号





# 统计排序滤波器

- 最大值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \max_{(s, t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$$

- 寻找图像中的亮点
- 降低胡椒噪声

- 最小值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \min_{(s, t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$$

- 寻找图像中的暗点
- 降低盐粒噪声



# 统计排序滤波器

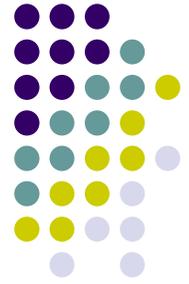


- 中点滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} \left[ \max_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} + \min_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} \right]$$

- 最大值和最小值的中点
- 结合了统计排序和求平均
- 适用于随机噪声
  - 高斯噪声、均匀噪声





# 统计排序滤波器

- $\alpha$ 截断的均值滤波
  - 去掉 $S_{xy}$ 中灰度最低的 $d/2$ 个像素
  - 去掉 $S_{xy}$ 中灰度最高的 $d/2$ 个像素

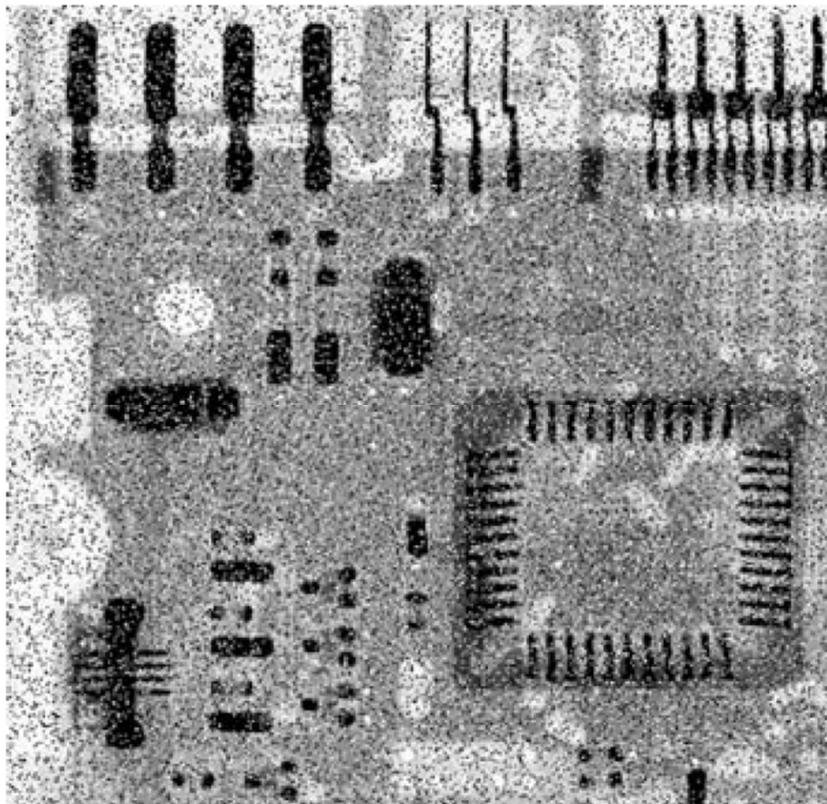
$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn - d} \sum_{(s, t) \in S_{xy}} g_r(s, t)$$

- 适用于存在多种噪声的情况
  - 高斯噪声、椒盐噪声混合
- $d = 0$  , 算数均值滤波器
- $d = mn - 1$  , 中值滤波器



# 举例

- 椒盐噪声

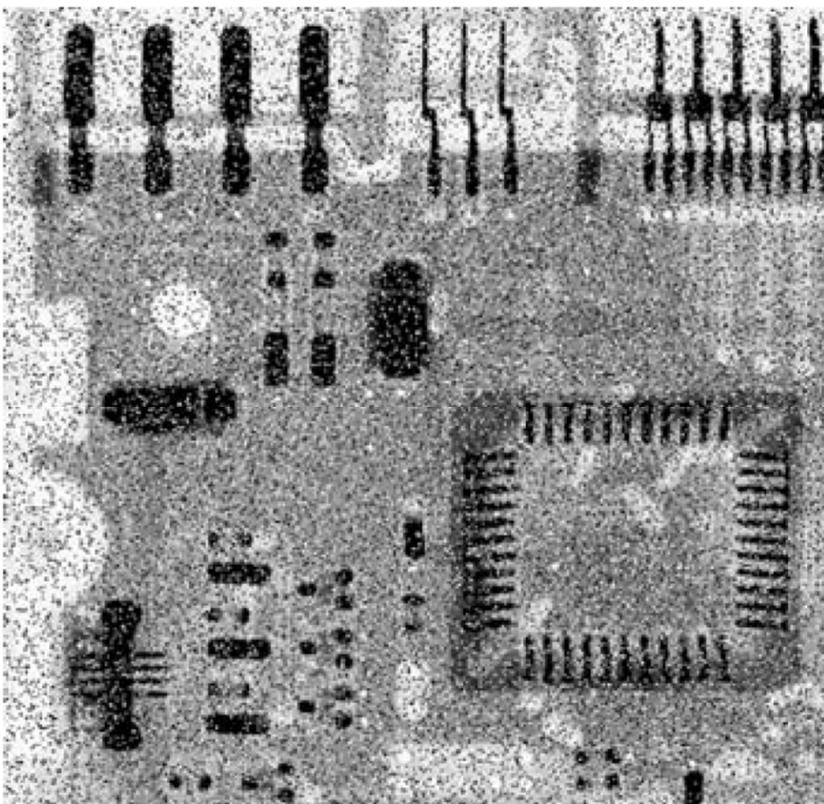


$P_a = P_b = 0.1$ 的椒盐噪声污染

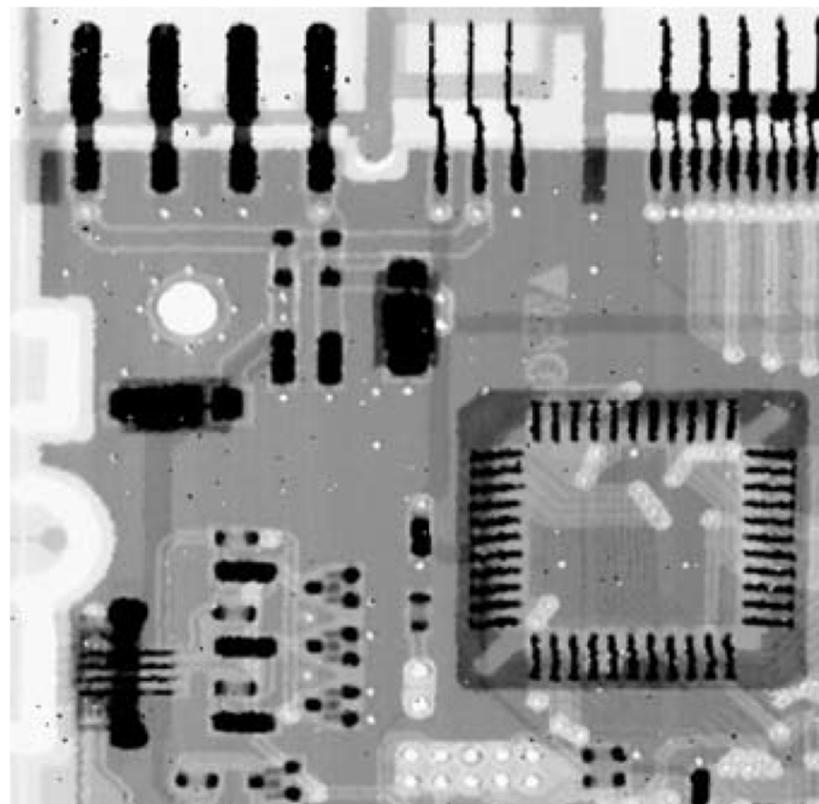


# 举例

- 椒盐噪声



$P_a = P_b = 0.1$ 的椒盐噪声污染



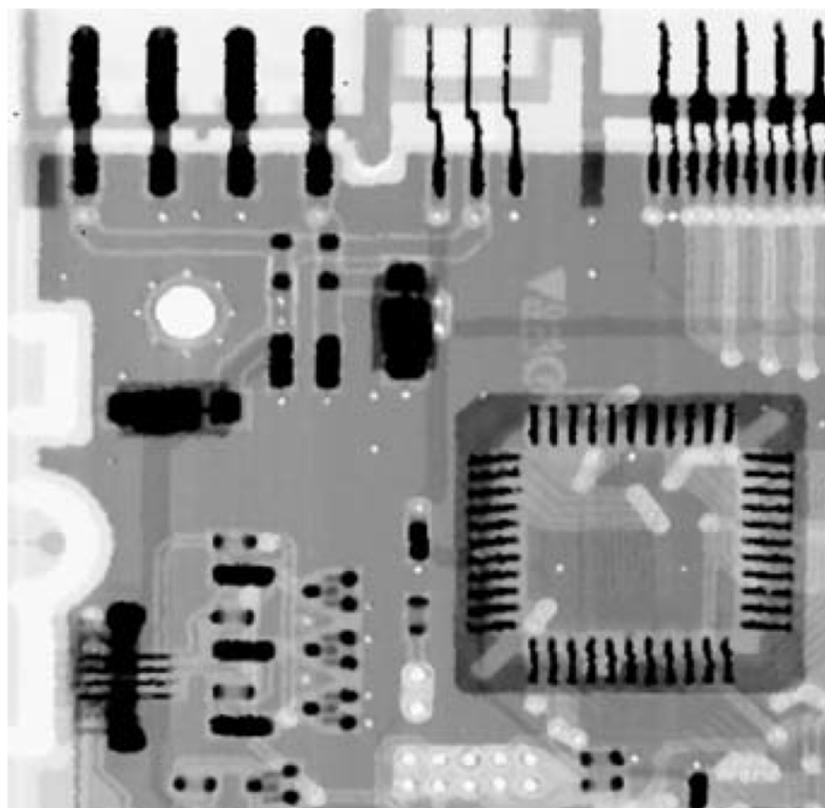
$3 \times 3$ 的中值滤波器 (第一次)



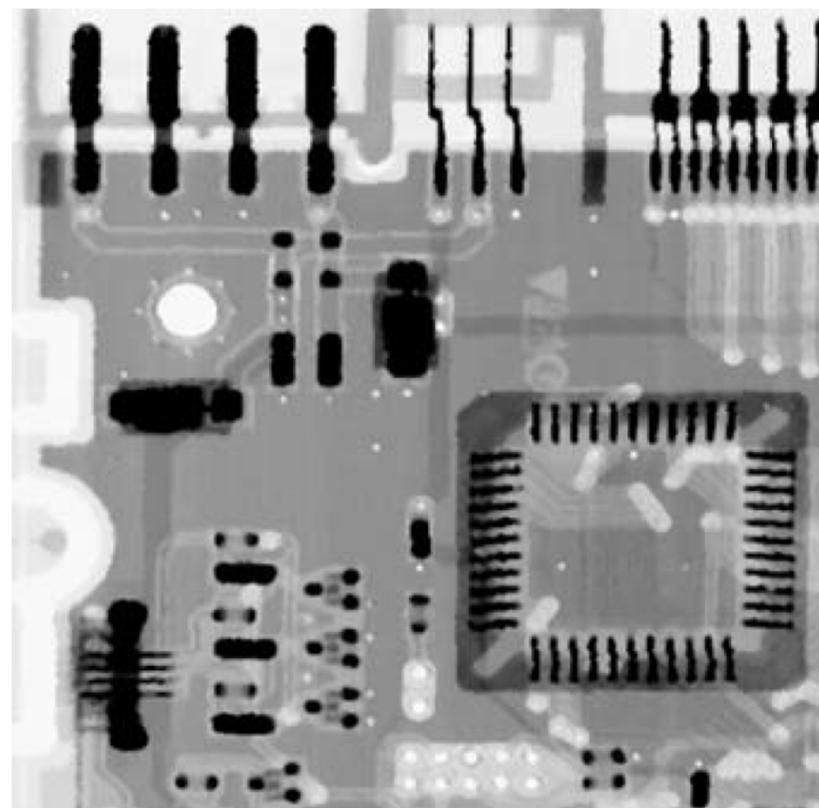
# 举例

- 椒盐噪声

次数太多，图像会变模糊



3 × 3的中值滤波器（第二次）



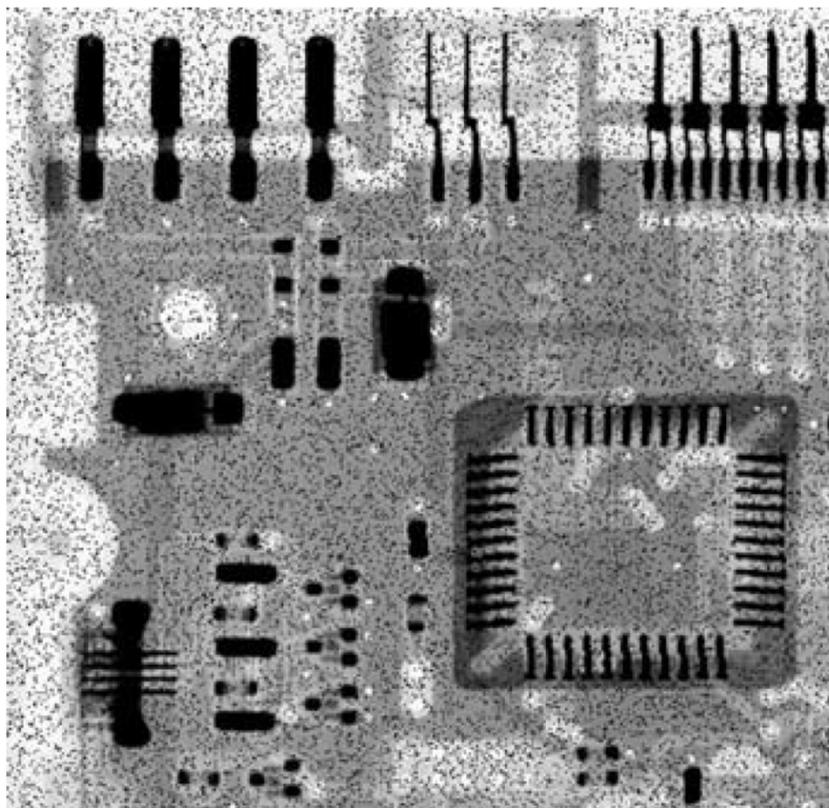
3 × 3的中值滤波器（第三次）



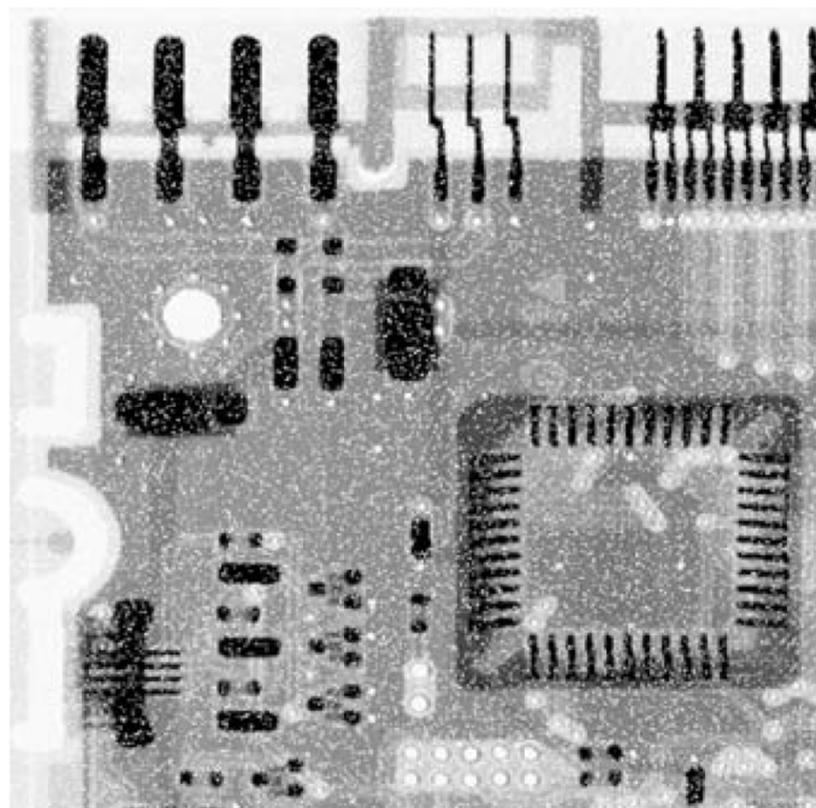
# 举例



- 椒盐噪声



概率为0.1的胡椒噪声



概率为0.1的盐粒噪声

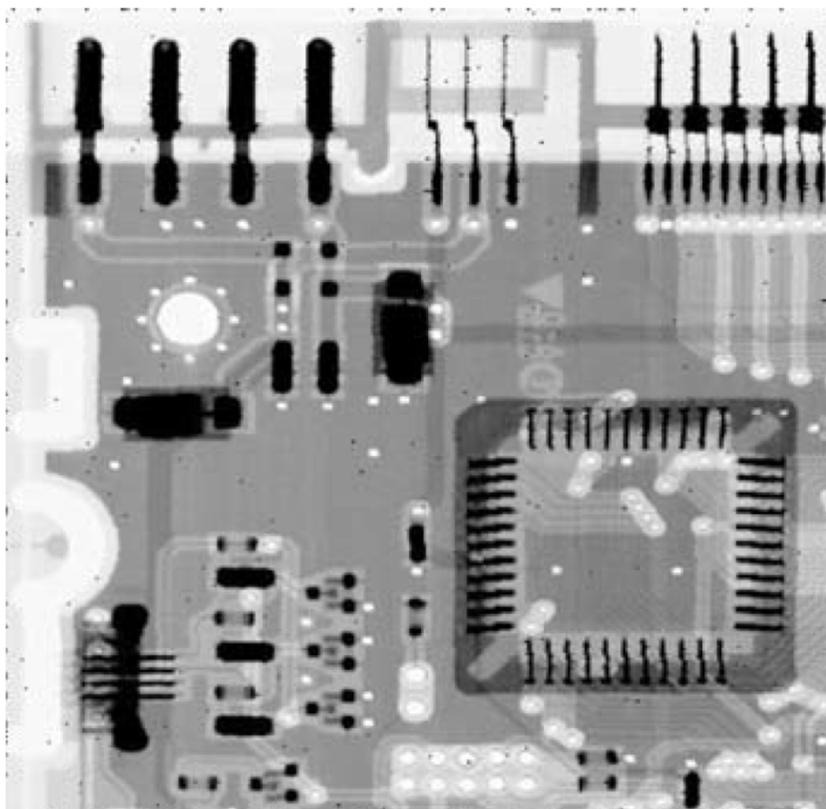


# 举例

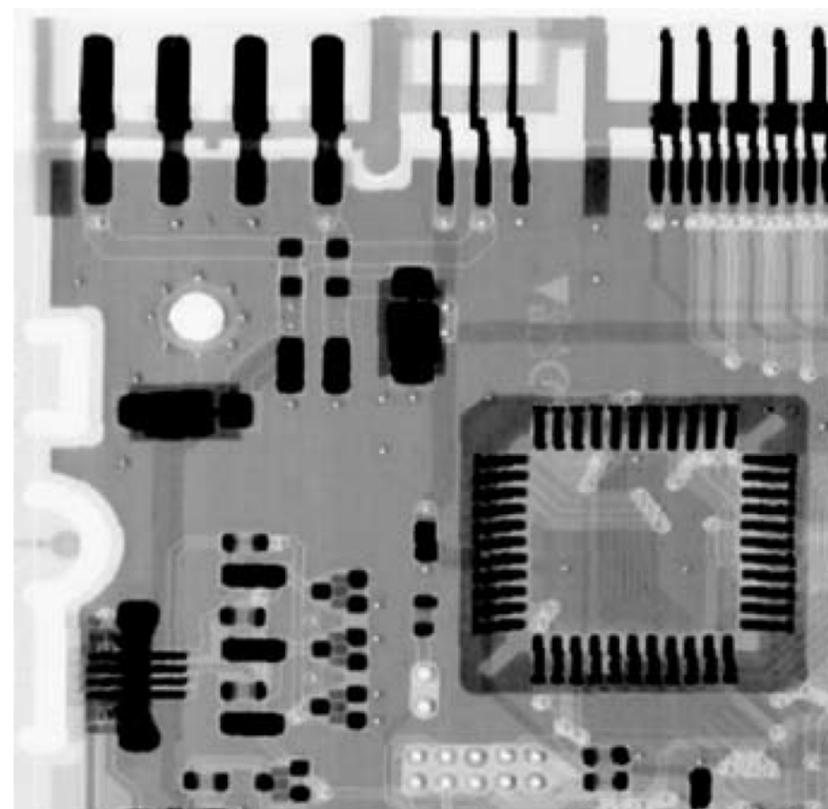
- 椒盐噪声

黑暗区域变窄

黑暗区域变宽



$3 \times 3$ 最大值滤波器

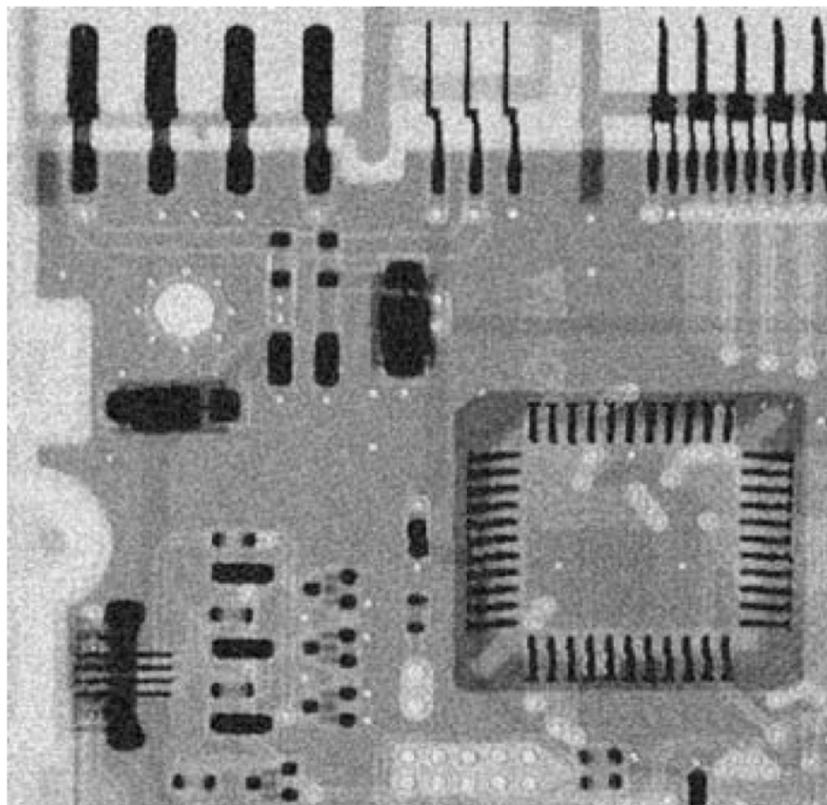


$3 \times 3$ 最小值滤波器

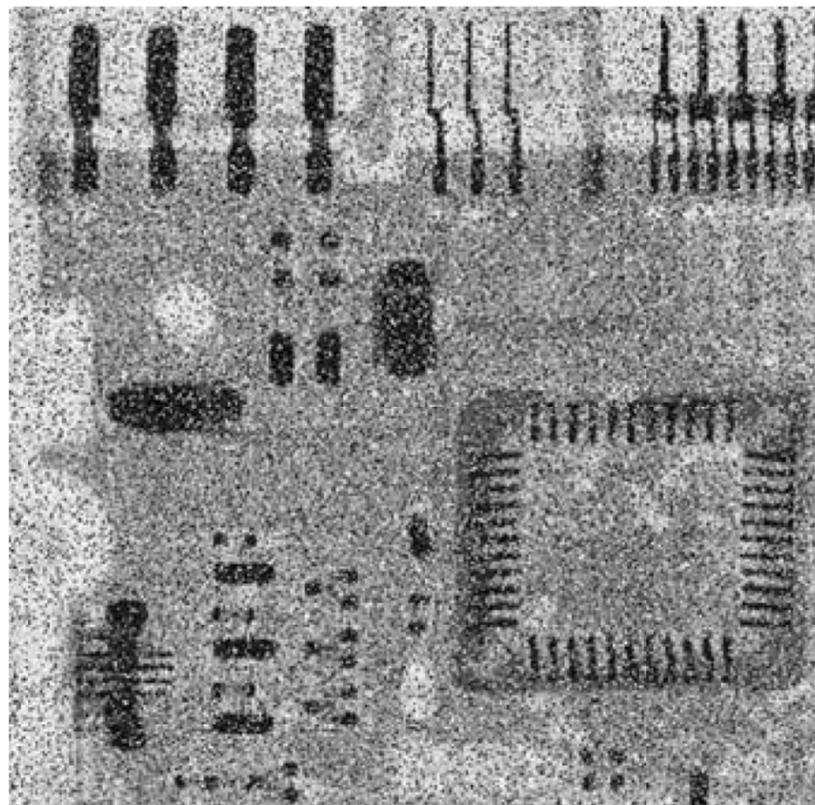


# 举例

- 均匀噪声&椒盐噪声



均匀噪声

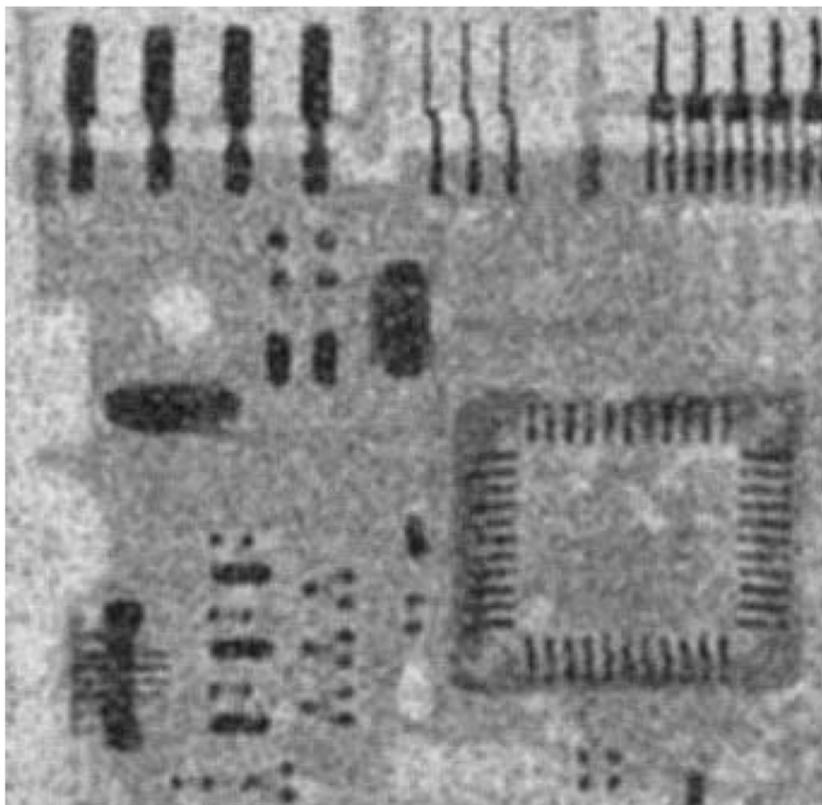


均匀噪声&椒盐噪声

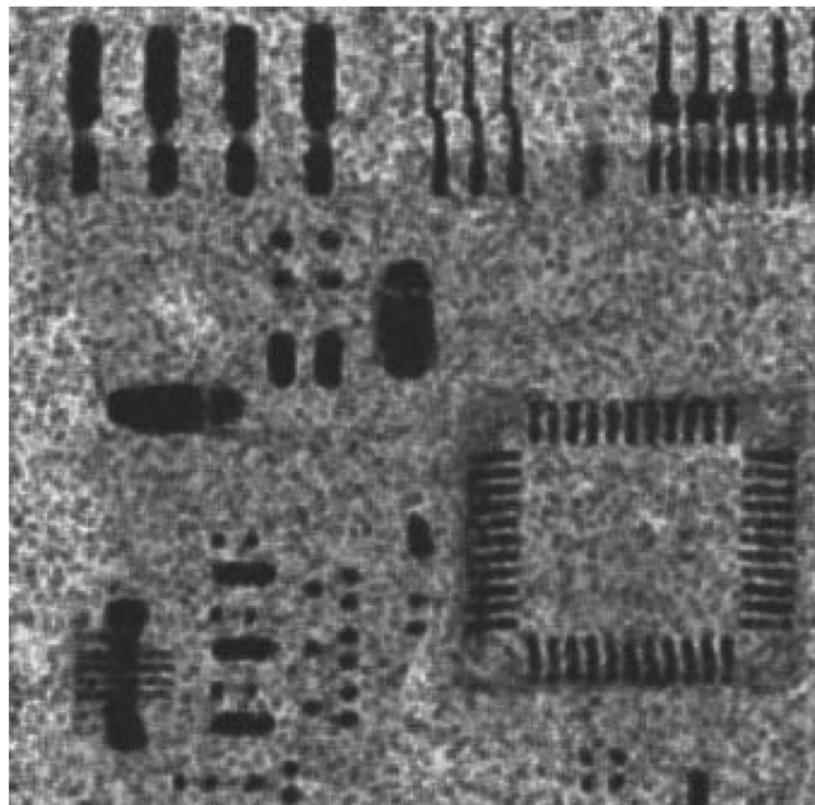


# 举例

- 均匀噪声&椒盐噪声



算术均值滤波



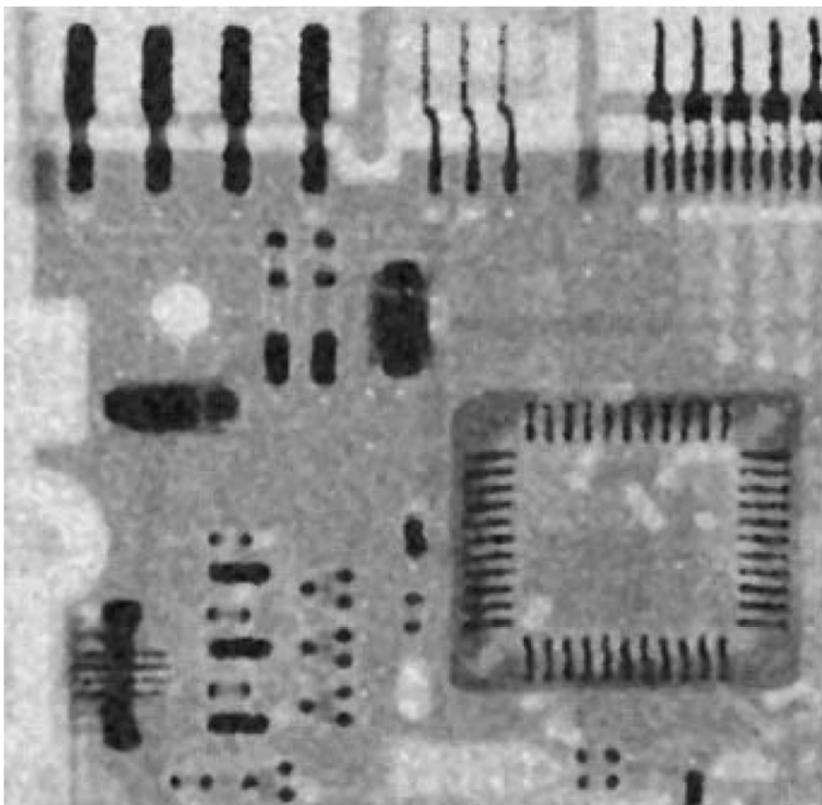
几何均值滤波



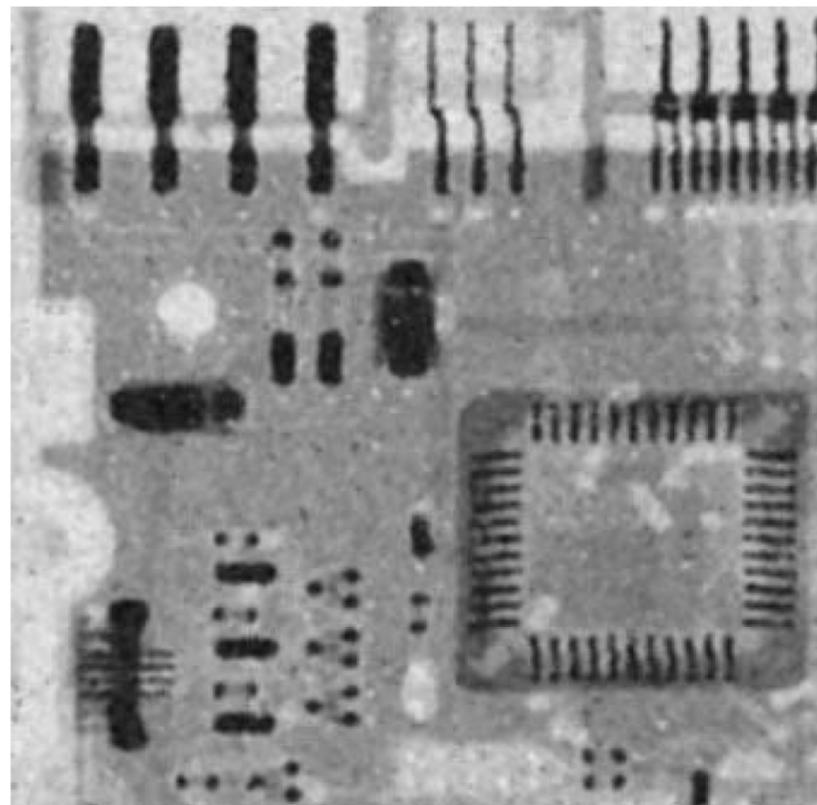
# 举例



- 均匀噪声&椒盐噪声



中值滤波



$\alpha$ 截断的均值滤波 ( $d = 6$ )



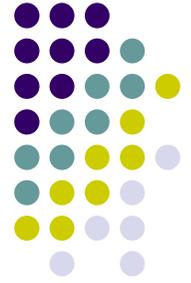
# 自适应滤波器



- 之前假定所有像素点采用相同的滤波器
  - 忽略了每个像素的特性
- 自适应滤波器
  1. 自适应局部降噪滤波器
  2. 自适应中值滤波器
  - 复杂度更高



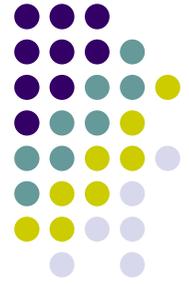
# 自适应局部降噪滤波器



- 均值——体现平均灰度
- 方差——反映了对比度
  
- 利用如下四个度量
  - 含噪声的灰度值 $g(x, y)$
  - 噪声的方差 $\sigma_{\eta}^2$
  - $S_{xy}$ 内的局部均值 $m_L$
  - $S_{xy}$ 内的局部方差 $\sigma_L^2$



# 自适应局部降噪滤波器



- 整体思路

1. 如果 $\sigma_\eta^2$ 为零，则滤波器应该直接返回 $g(x, y)$ 的值。在零噪声情况下 $g(x, y)$ 等于 $f(x, y)$ 。
2. 如果局部方差比 $\sigma_\eta^2$ 大，则滤波器返回 $g(x, y)$ 的一个近似值。高局部方差与边缘相关，因此需要保持这些信息。
3. 如果两个方差相等，我们则希望滤波器返回 $S_{xy}$ 中像素的算术均值。这种情况发生在局部区域与整个图像有相同特性的条件下，并且局部噪声将通过简单地求平均来降低。



# 自适应局部降噪滤波器



- 具体公式

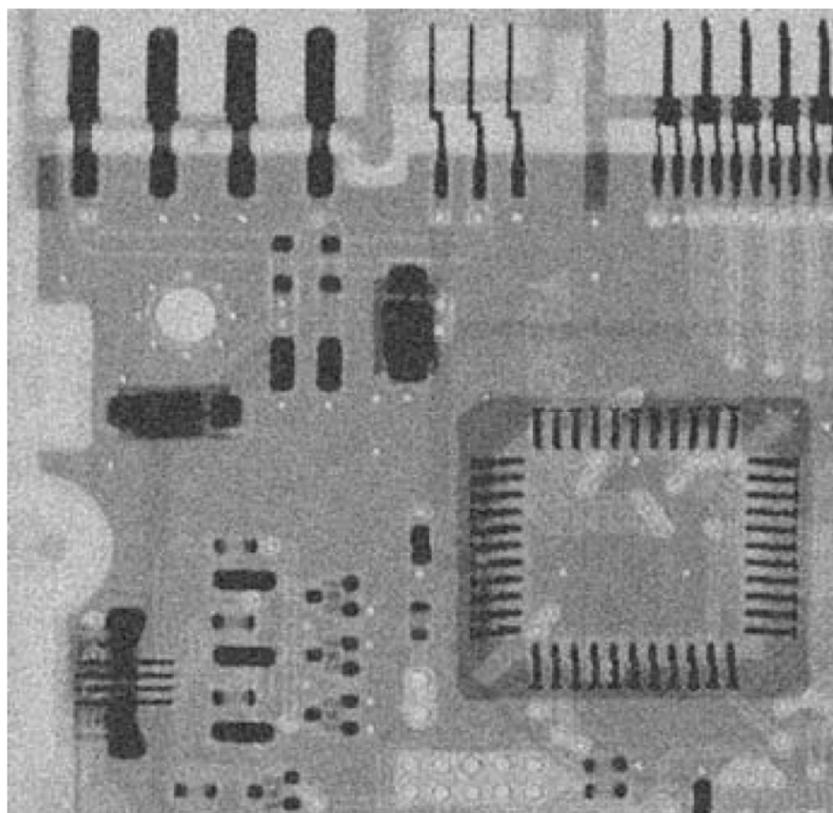
$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - \frac{\sigma_{\eta}^2}{\sigma_L^2} [g(x, y) - m_L]$$

- $\sigma_{\eta}^2$  需要估计，因此通常不准确
- 其他值可以直接计算
- 假设  $\sigma_{\eta}^2 \leq \sigma_L^2$
- 如果遇到  $\sigma_{\eta}^2 > \sigma_L^2$ ，将系数强制设为1

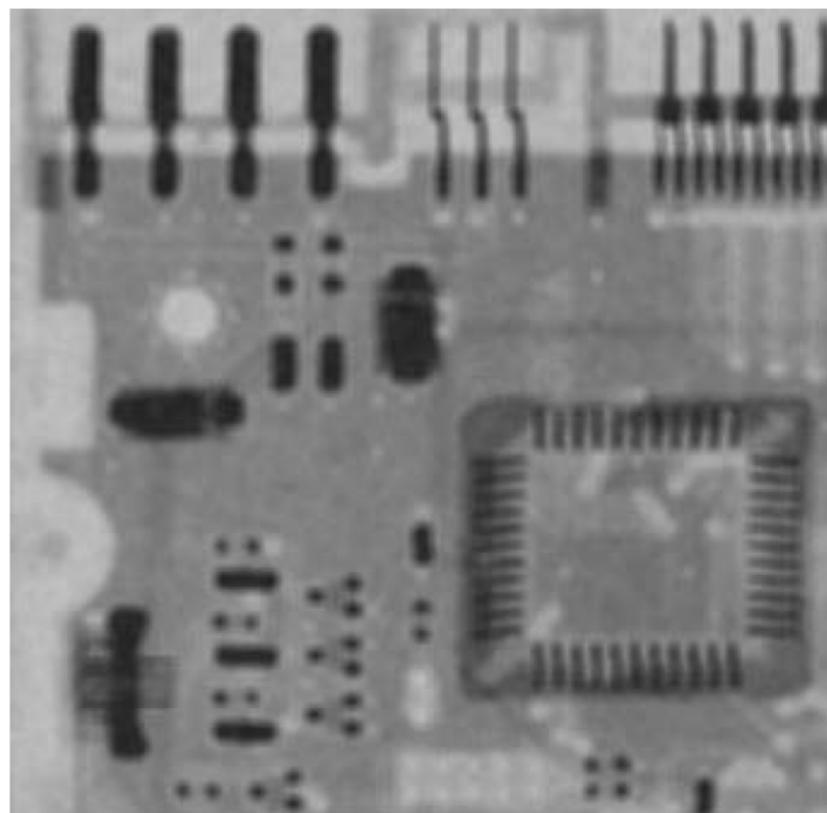


# 举例

- 滤波器对比



高斯噪声



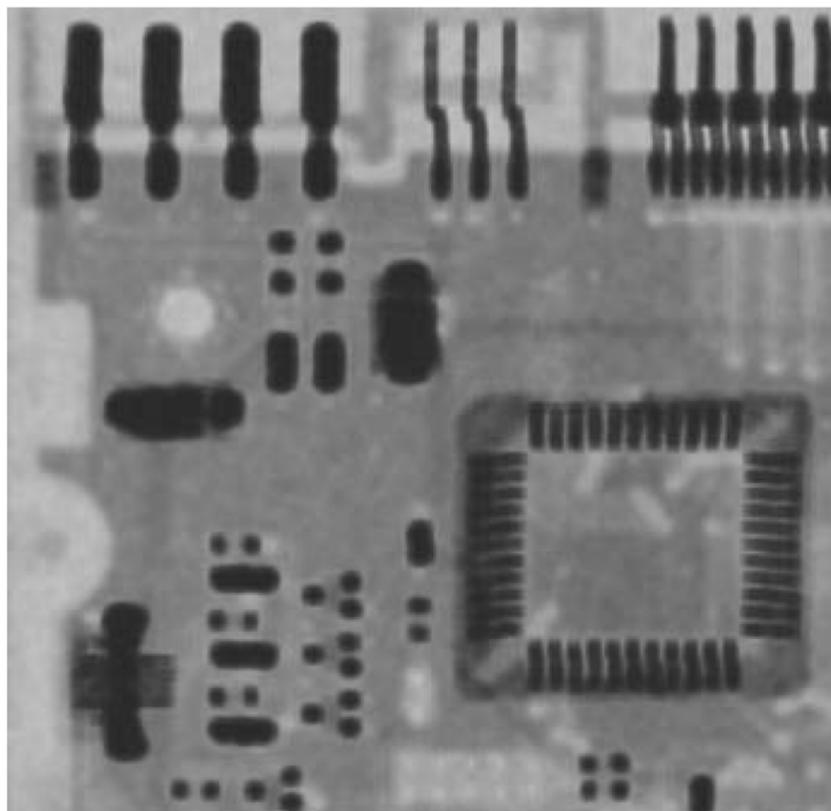
$7 \times 7$ 算术均值滤波器



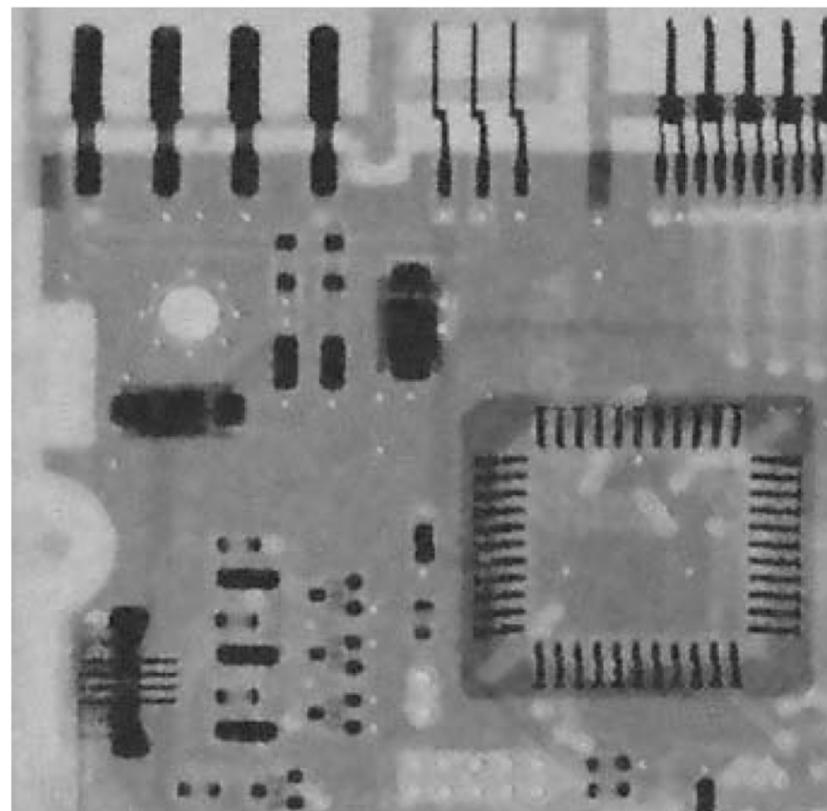
# 举例



- 滤波器对比



$7 \times 7$ 几何均值滤波器



自适应局部降噪滤波器



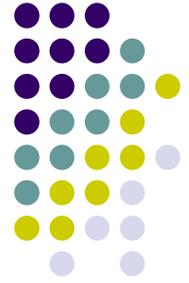
# 自适应中值滤波器



- 传统中值滤波器
  - 针对脉冲噪声概率较小的情况，低于0.2
- 自适应中值滤波器
  - 处理更大的噪声概率
  - 平滑非脉冲噪声时，保持细节
  - 矩形 $S_{xy}$ 的大小动态变化



# 自适应中值滤波器



- 考虑如下符号
  - $z_{\min} = S_{xy}$  中的最小灰度值
  - $z_{\max} = S_{xy}$  中的最大灰度值
  - $z_{\text{med}} = S_{xy}$  中灰度值的中值
  - $z_{xy}$  = 坐标  $(x, y)$  处的灰度值
  - $S_{\max} = S_{xy}$  允许的最大尺寸



# 自适应中值滤波器



## ● 阶段A

$$A1 = z_{\text{med}} - z_{\text{min}}$$

$$A2 = z_{\text{med}} - z_{\text{max}}$$

如果  $A1 > 0$  并且  $A2 < 0$ ，进入阶段B，否则增大滤波器的尺寸

如果滤波器尺寸小于  $S_{\text{max}}$ ，重复阶段A，否则输出  $z_{\text{med}}$

## ● 阶段B

$$B1 = z_{xy} - z_{\text{min}}$$

$$B2 = z_{xy} - z_{\text{max}}$$

如果  $B1 > 0$  并且  $B2 < 0$ ，输出  $z_{xy}$ ，否则输出  $z_{\text{med}}$



# 自适应中值滤波器



- 阶段A

$$A1 = z_{\text{med}} - z_{\text{min}}$$

$$A2 = z_{\text{med}} - z_{\text{max}}$$

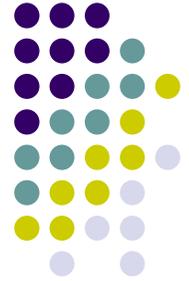
如果  $A1 > 0$  并且  $A2 < 0$  ，进入阶段B ，否则增大滤波器的尺寸

如果滤波器尺寸小于  $S_{\text{max}}$  ，重复阶段A ，否则输出  $z_{\text{med}}$

- 判断  $z_{\text{med}}$  是否为脉冲噪声
- 如果否 ，转向阶段B
- 如果是 ，增加窗口



# 自适应中值滤波器



- 阶段B

$$B1 = z_{xy} - z_{\min}$$

$$B2 = z_{xy} - z_{\max}$$

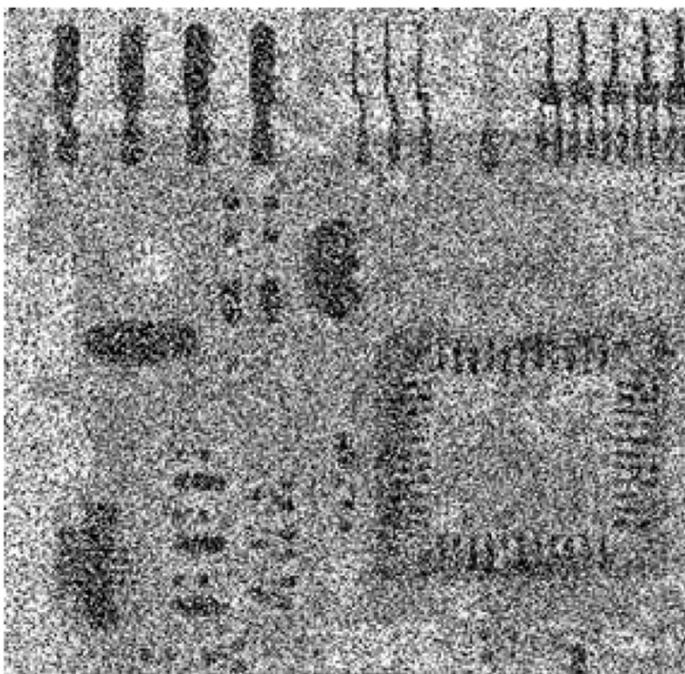
如果 $B1 > 0$  并且  $B2 < 0$  , 输出 $z_{xy}$  , 否则输出  $z_{\text{med}}$

- 判断 $z_{xy}$ 是否为脉冲噪声
- 如果否 , 输出 $z_{xy}$  ( 减少失真 )
- 如果是 , 输出 $z_{\text{med}}$  ( 中值滤波 )



# 举例

- 大概率椒盐噪声

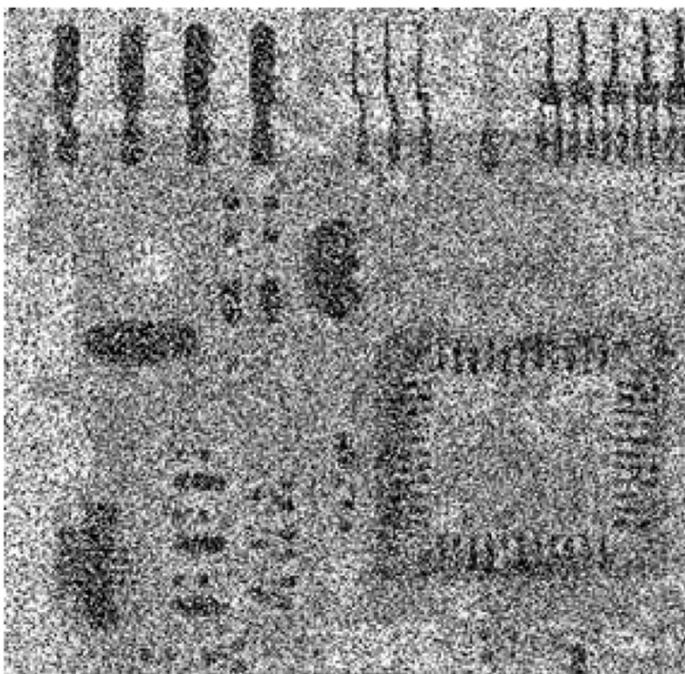


$P_a = P_b = 0.25$ 的椒盐噪声

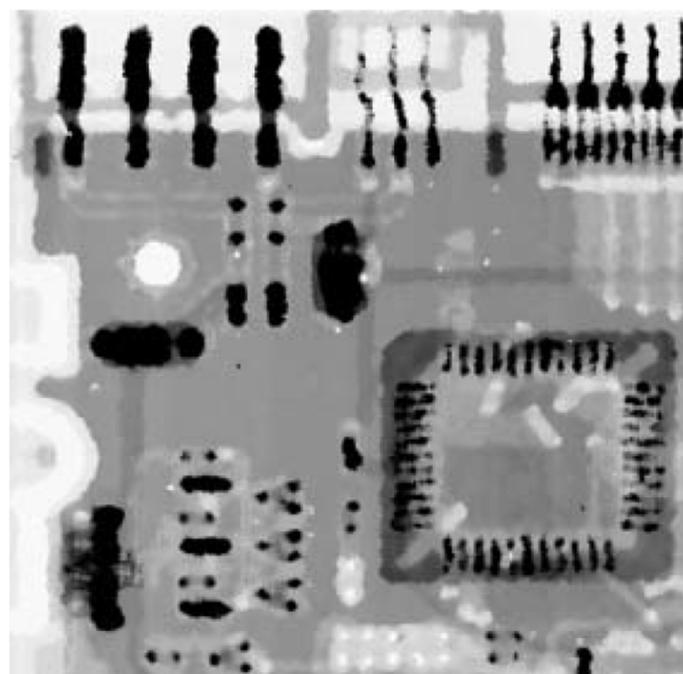


# 举例

- 大概率椒盐噪声



$P_a = P_b = 0.25$ 的椒盐噪声

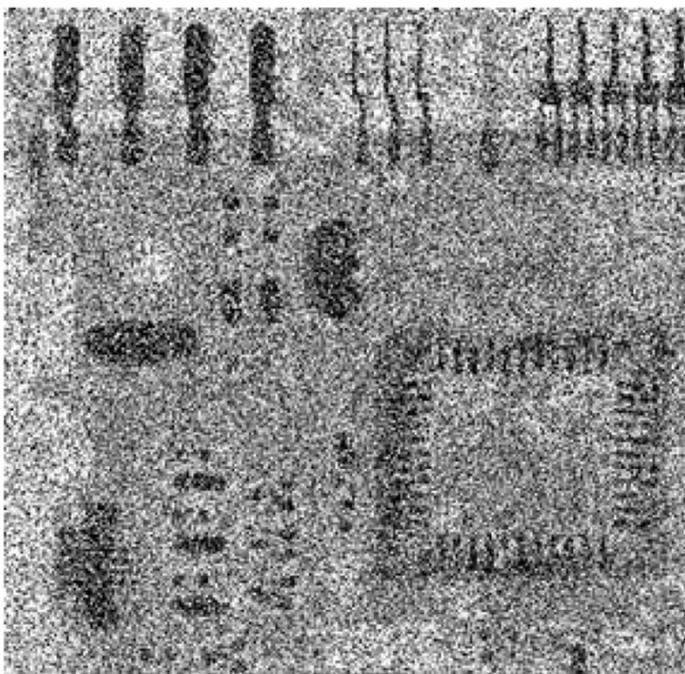


$7 \times 7$ 中值滤波器

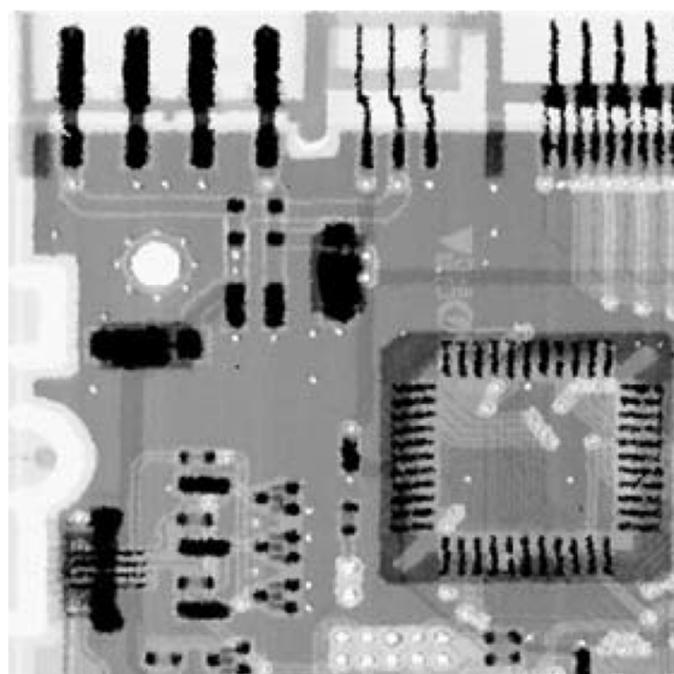


# 举例

- 大概率椒盐噪声



$P_a = P_b = 0.25$ 的椒盐噪声



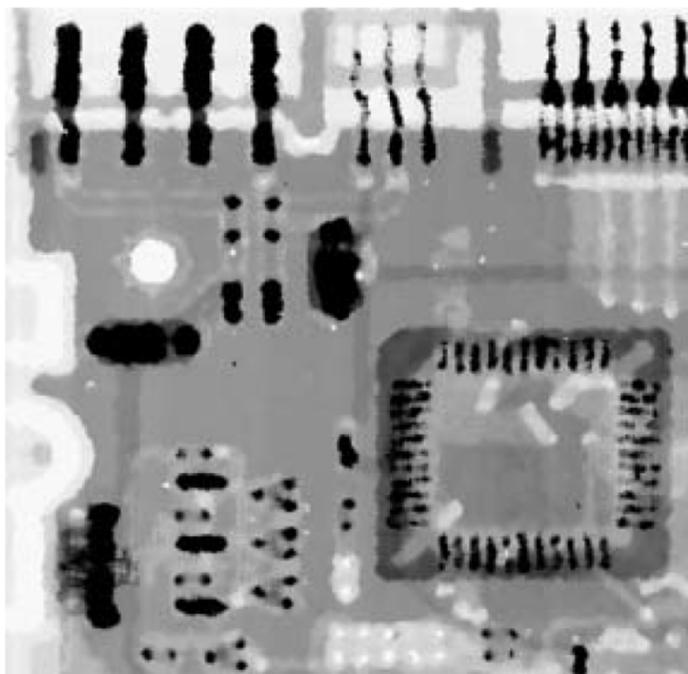
$s_{\max} = 7$ 的自适应中值滤波器



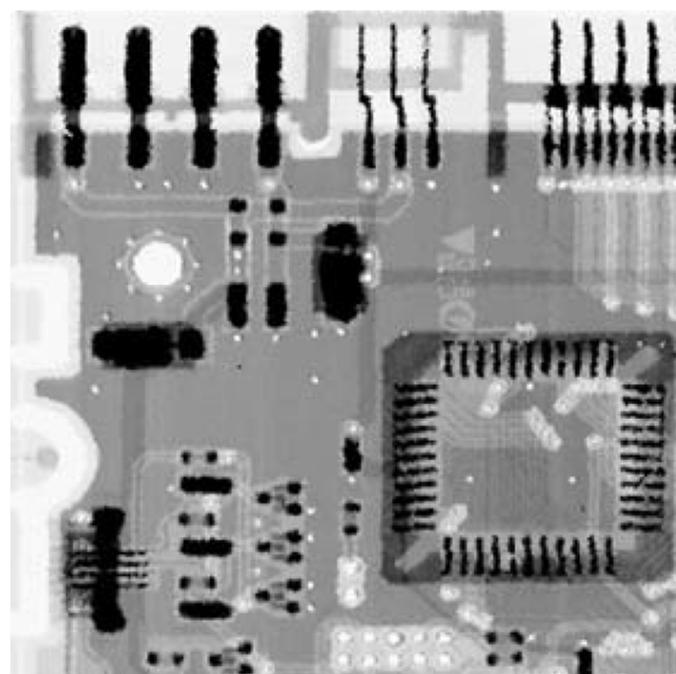
# 举例



- 大概率椒盐噪声



$7 \times 7$  中值滤波器



$S_{\max} = 7$  的自适应中值滤波器



# 提纲

- 图像退化/复原建模
- 噪声模型
- 仅有噪声的图像复原
- 频域滤波消除周期噪声
- 线性、位置不变的退化
- 估计退化函数
- 逆滤波



# 频域滤波消除周期噪声



- 傅里叶变换之后可以识别周期噪声
  - 周期性噪声以能量脉冲出现
  - 利用选择性滤波器去掉噪声
- 1. 带阻滤波器
- 2. 带通滤波器
- 3. 陷波滤波器
- 4. 最佳陷波滤波器





# 带阻滤波器

- 理想带阻滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 巴特沃斯带阻滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{DW}{D^2 - D_0^2} \right]^{2n}}$$

- 高斯带阻滤波器

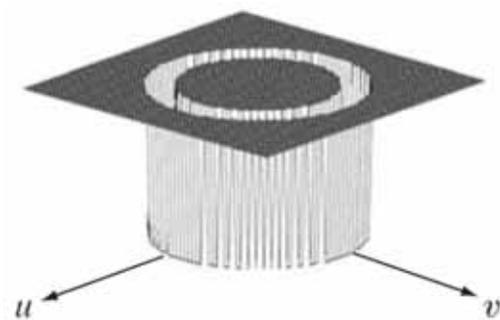
$$H(u, v) = 1 - e^{-\left[ \frac{D^2 - D_0^2}{DW} \right]^2}$$



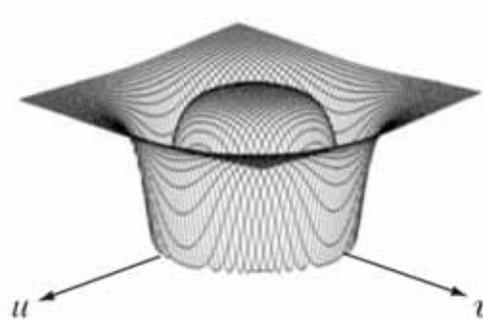
# 带阻滤波器



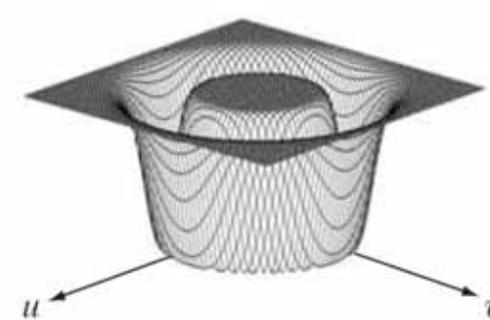
- 透视图



理想带阻滤波器



巴特沃斯带阻滤波器

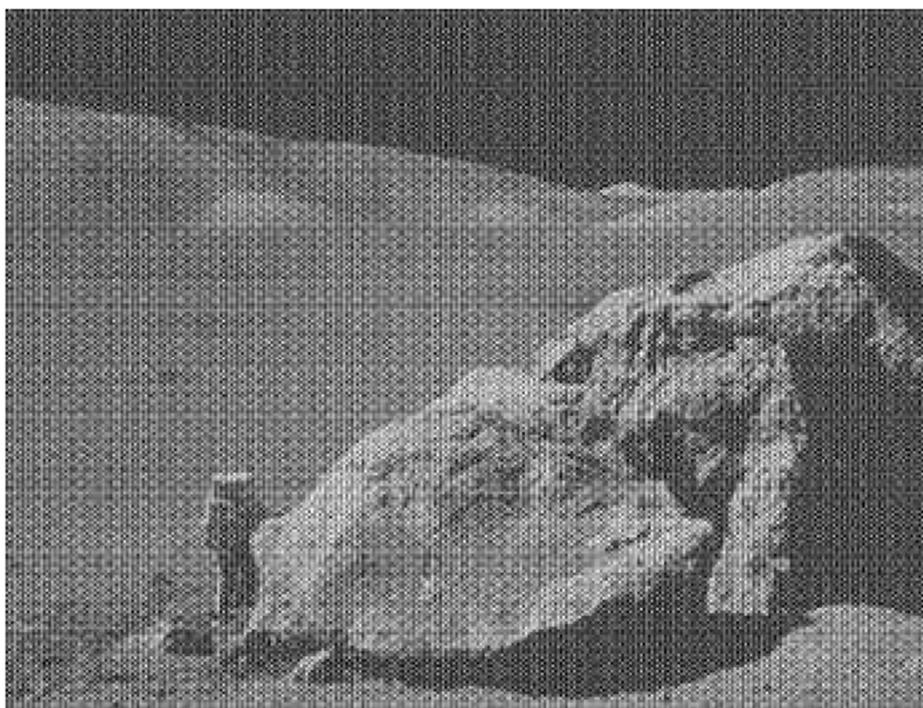


高斯带阻滤波器

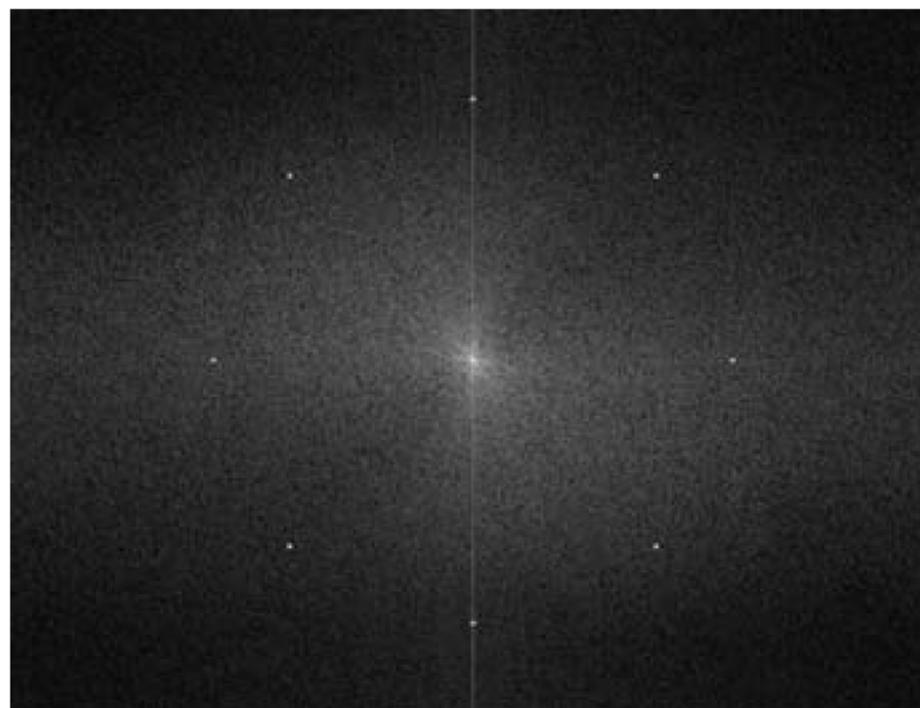


# 举例

- 周期性噪声的傅里叶变换



被正弦信号污染的图像

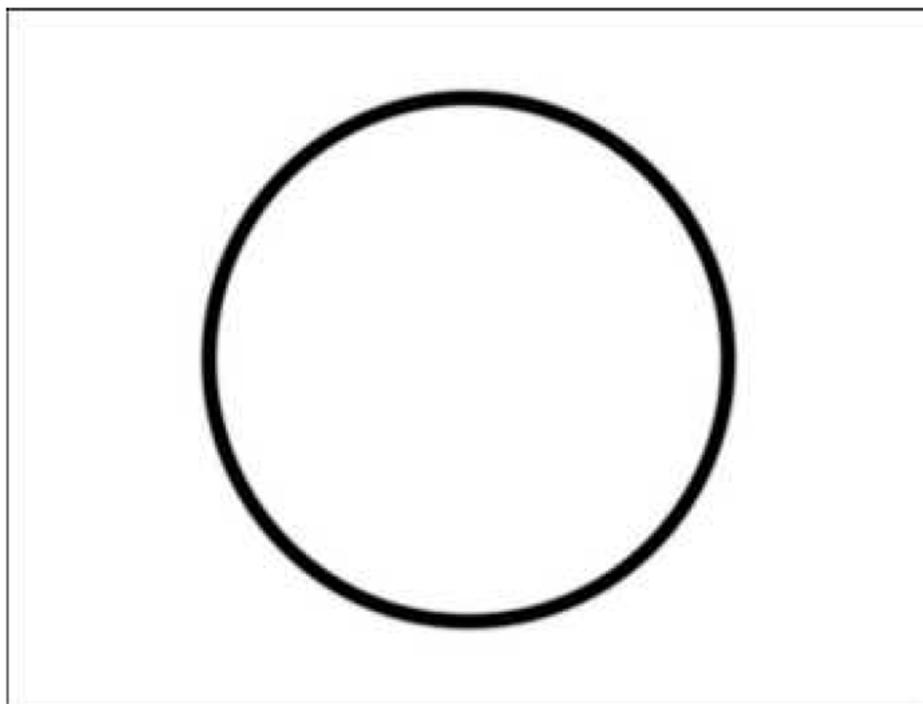


傅里叶变换



# 举例

- 周期性噪声的傅里叶变换



巴特沃斯带阻滤波器



滤波的结果

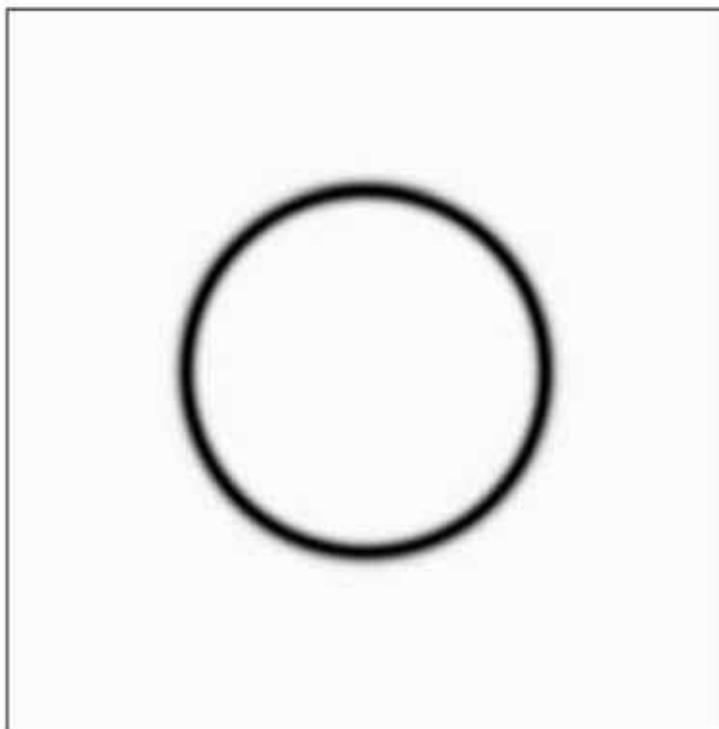




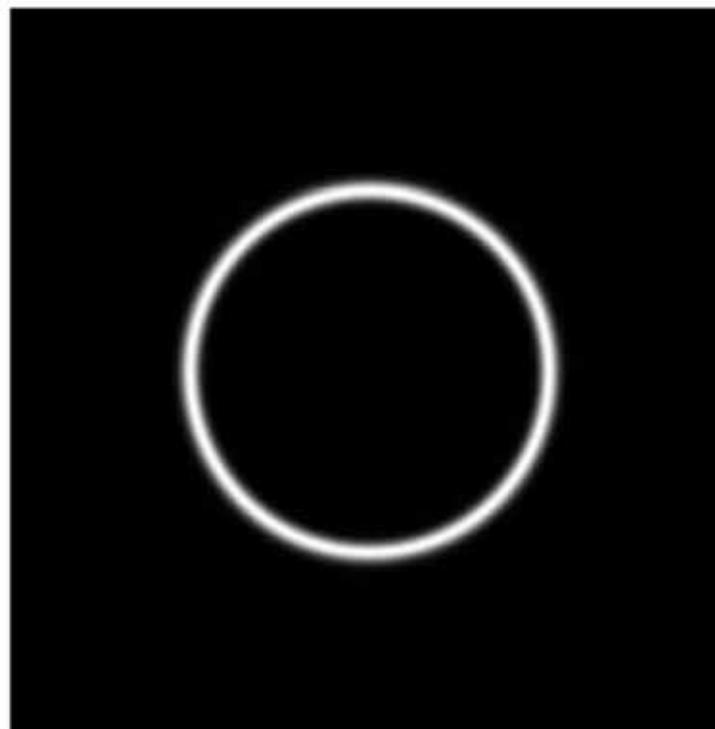
# 带通滤波器

- 从带阻滤波器构造带通滤波器

$$H_{BP}(u, v) = 1 - H_{BR}(u, v)$$



高斯带阻滤波器

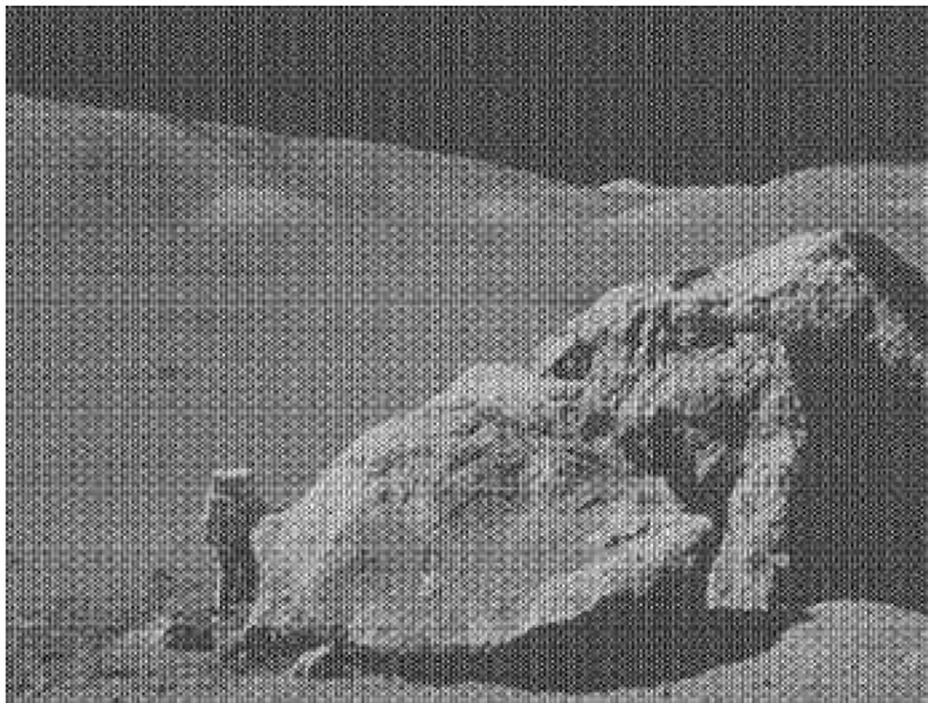


高斯带通滤波器

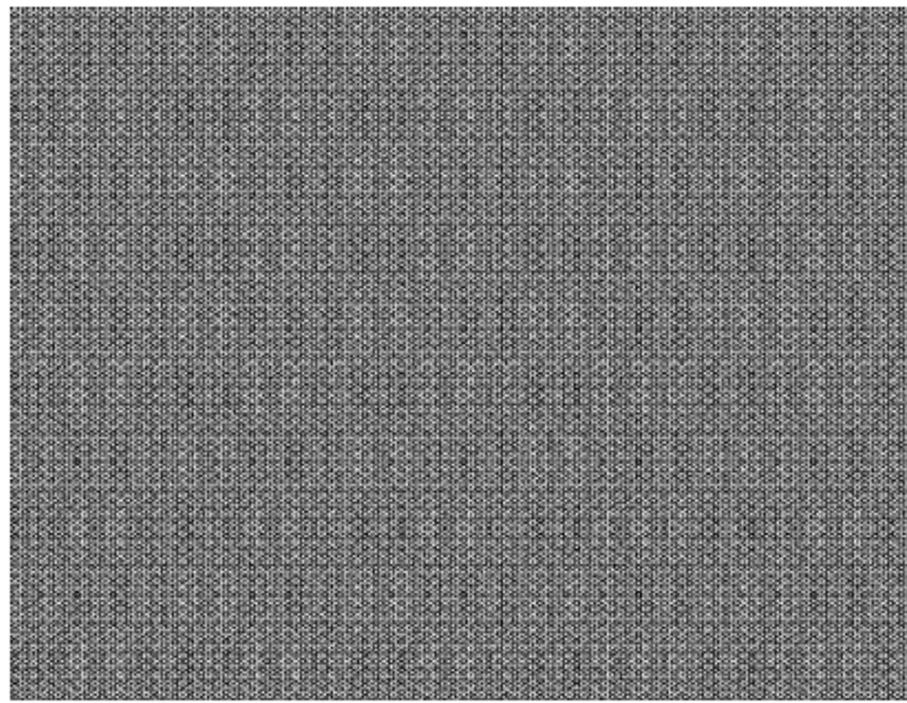


# 举例

- 提取噪声



被正弦信号污染的图像



提取的噪声



# 陷波滤波器



1. 处理特定区域
2. 保持对称性

- 在 $(u_0, v_0)$ 存在陷波， $(-u_0, -v_0)$ 也存在一个
- 陷波带阻滤波器

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^Q H_k(u, v) H_{-k}(u, v)$$

- $H_k(u, v)$ 是中心在 $(u_k, v_k)$ 的高通滤波器
- $H_{-k}(u, v)$ 是中心在 $(-u_k, -v_k)$ 的高通滤波器
- 中心是相对于 $(M/2, N/2)$ 而言



# 陷波滤波器



- $n$ 阶巴特沃斯陷波带阻滤波器

$$H_{\text{NR}}(u, v) = \prod_{k=1}^3 \left[ \frac{1}{1 + [D_{0k}/D_k(u, v)]^{2n}} \right] \left[ \frac{1}{1 + [D_{0k}/D_{-k}(u, v)]^{2n}} \right]$$

- 其中  $D_k(u, v) = [(u - M/2 - u_k)^2 + (v - N/2 - v_k)^2]^{1/2}$

$$D_{-k}(u, v) = [(u - M/2 + u_k)^2 + (v - N/2 + v_k)^2]^{1/2}$$

- 陷波带通滤波器

$$H_{\text{NP}}(u, v) = 1 - H_{\text{NR}}(u, v)$$

- 交互式地改变DFT的局部区域

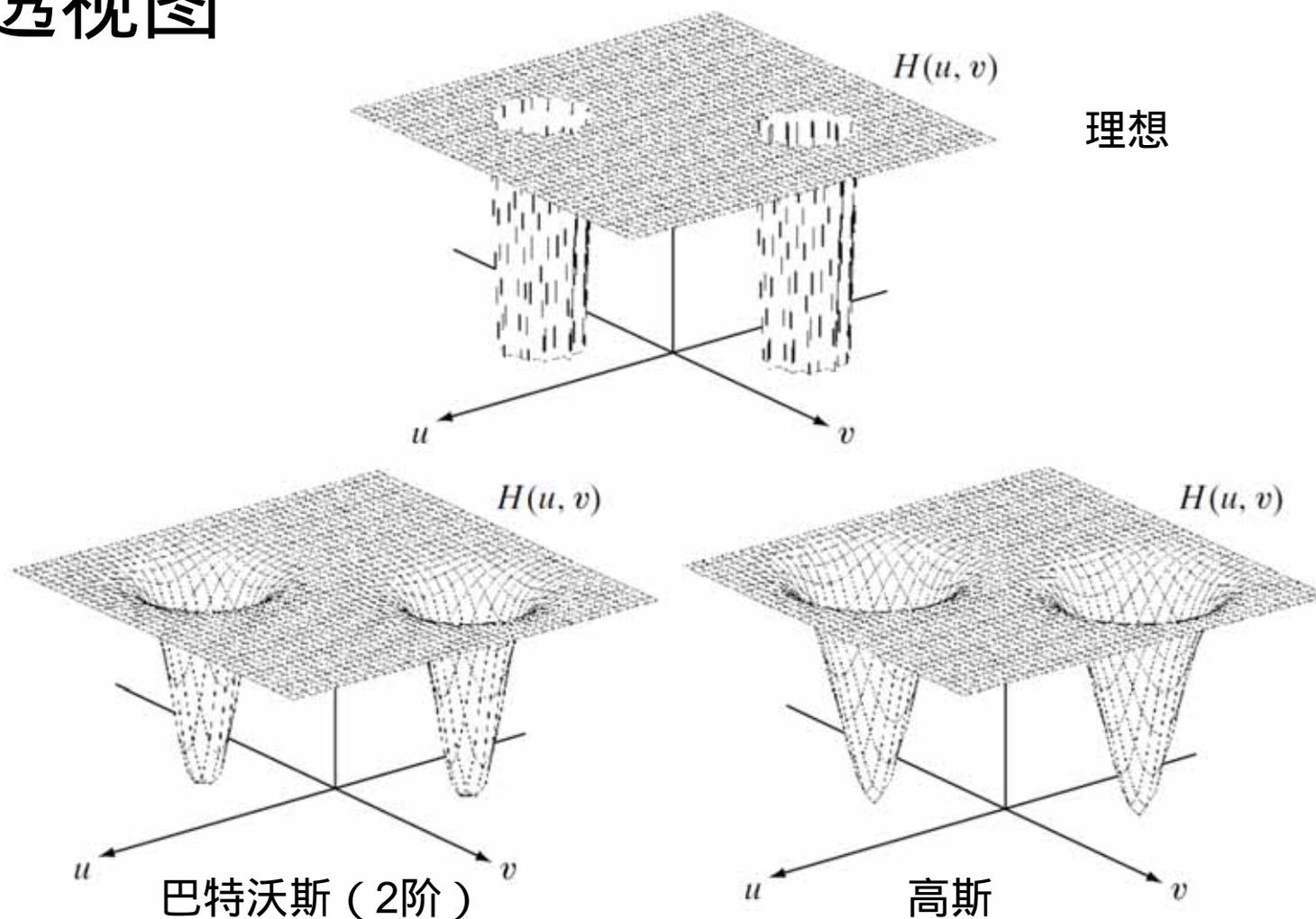
- 不进行补0填充



# 陷波带阻滤波器



- 透视图

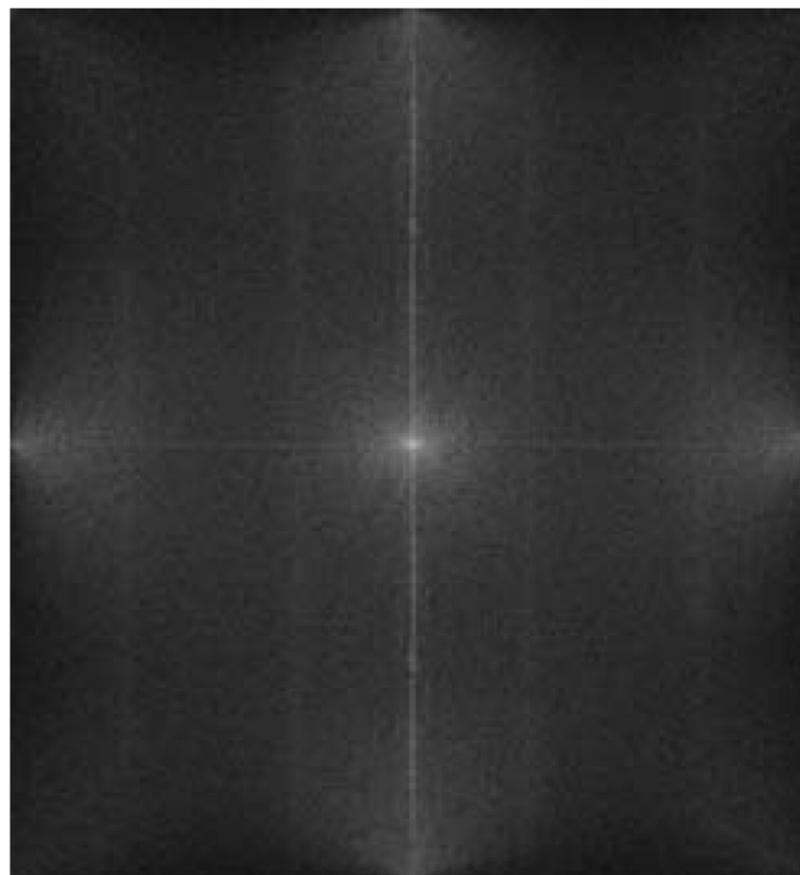


# 举例

- 含噪声的卫星图片



原图



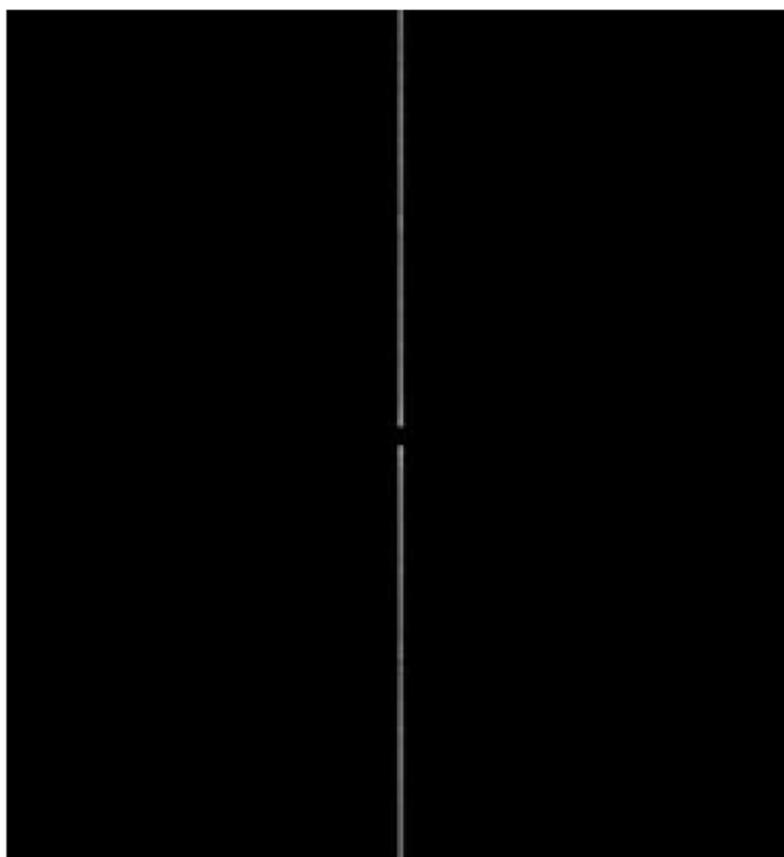
傅里叶谱



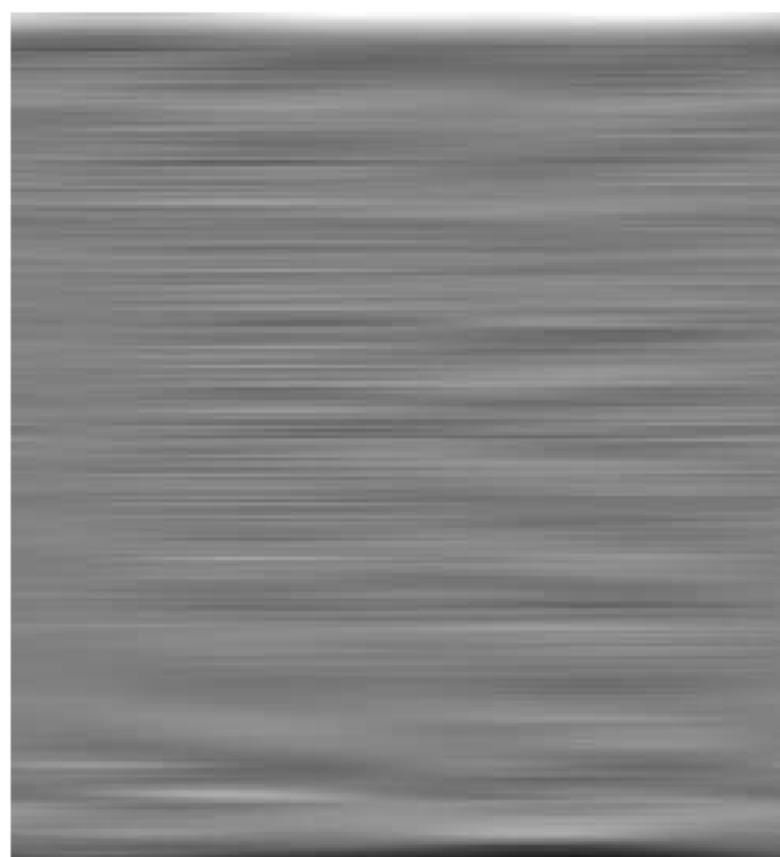
# 举例



- 含噪声的卫星图片



陷波带通滤波器



提取的噪声

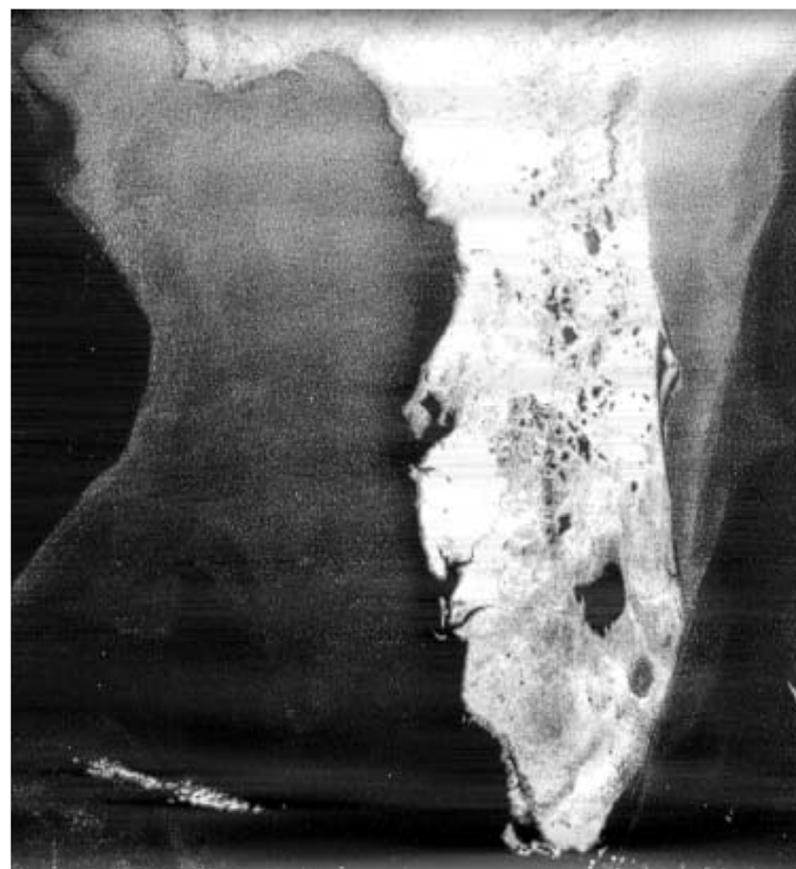


# 举例

- 含噪声的卫星图片



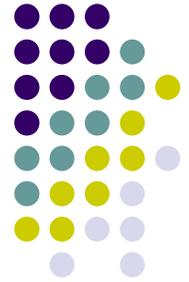
原图



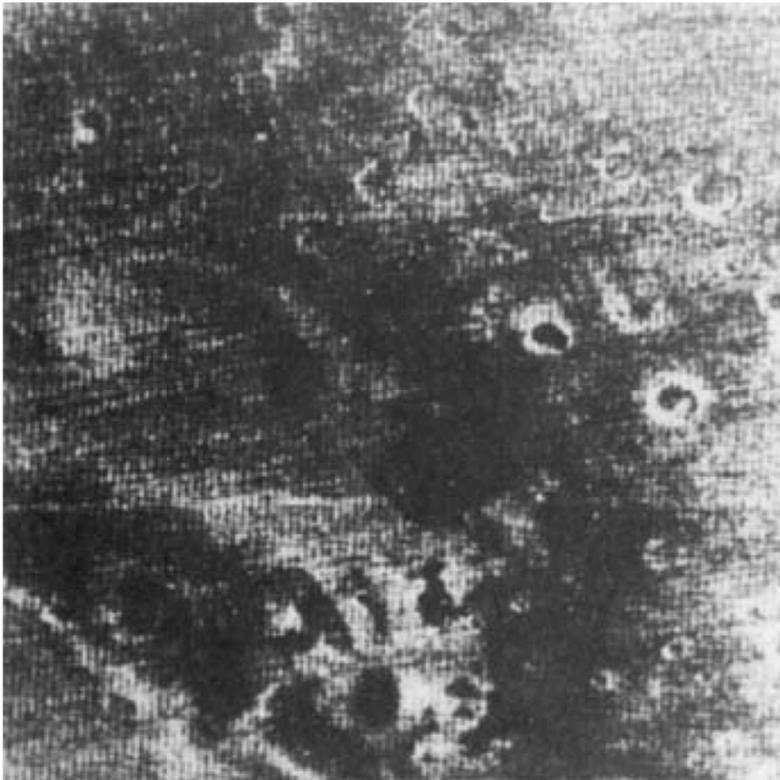
滤波后的图像



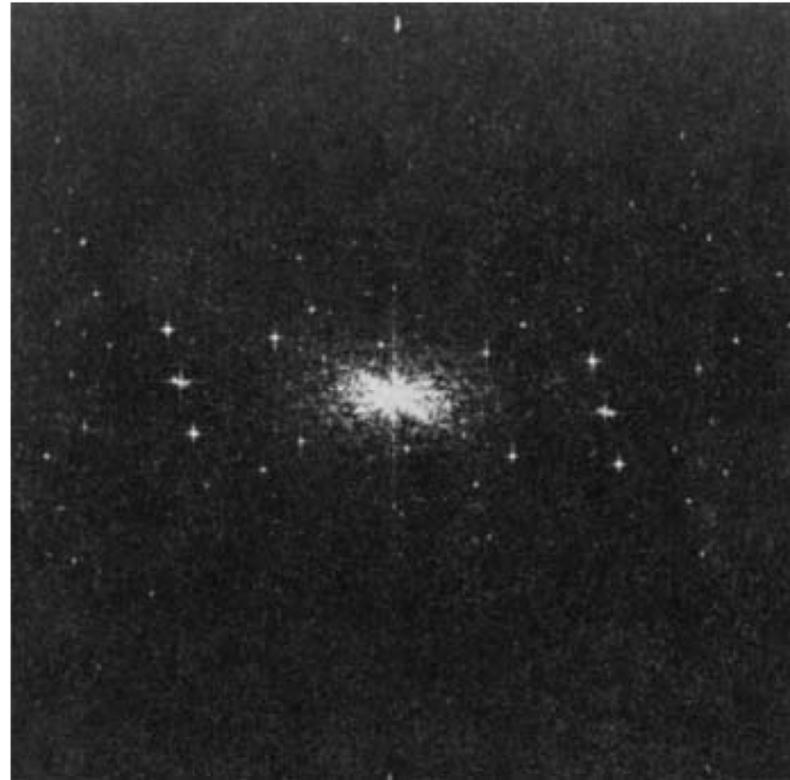
# 最佳陷波滤波器



- 频率域的噪声模式有时候难以准确去除
  - 多种噪声、噪声并非单一频率

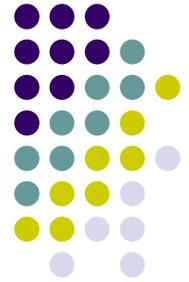


火星地形图



傅里叶谱图





# 最佳陷波滤波器

- 提取干扰模式的主频

$$N(u, v) = H_{\text{NP}}(u, v)G(u, v)$$

- 观察干扰模式

$$\eta(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H_{\text{NP}}(u, v)G(u, v)\}$$

- 去掉干扰模式

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - w(x, y)\eta(x, y)$$

- 优化权重

- 最小化局部方差



# 优化权重



- 局部方差

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2a + 1)(2b + 1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \left[ \hat{f}(x + s, y + t) - \bar{\hat{f}}(x, y) \right]^2$$

- 其中

$$\bar{\hat{f}}(x, y) = \frac{1}{(2a + 1)(2b + 1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \hat{f}(x + s, y + t)$$

- 化简

$$\begin{aligned} \sigma^2(x, y) = & \frac{1}{(2a + 1)(2b + 1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \left\{ [g(x + s, y + t) \right. \\ & \left. - w(x + s, y + t)\eta(x + s, y + t)] \right. \\ & \left. - [\bar{g}(x, y) - \overline{w(x, y)\eta(x, y)}] \right\}^2 \end{aligned}$$



# 优化权重



- 假设权重在局部为常数

$$w(x + s, y + t) = w(x, y) \quad -a \leq s \leq a \text{ and } -b \leq t \leq b.$$

- 简化

$$\overline{w(x, y)\eta(x, y)} = w(x, y)\bar{\eta}(x, y)$$

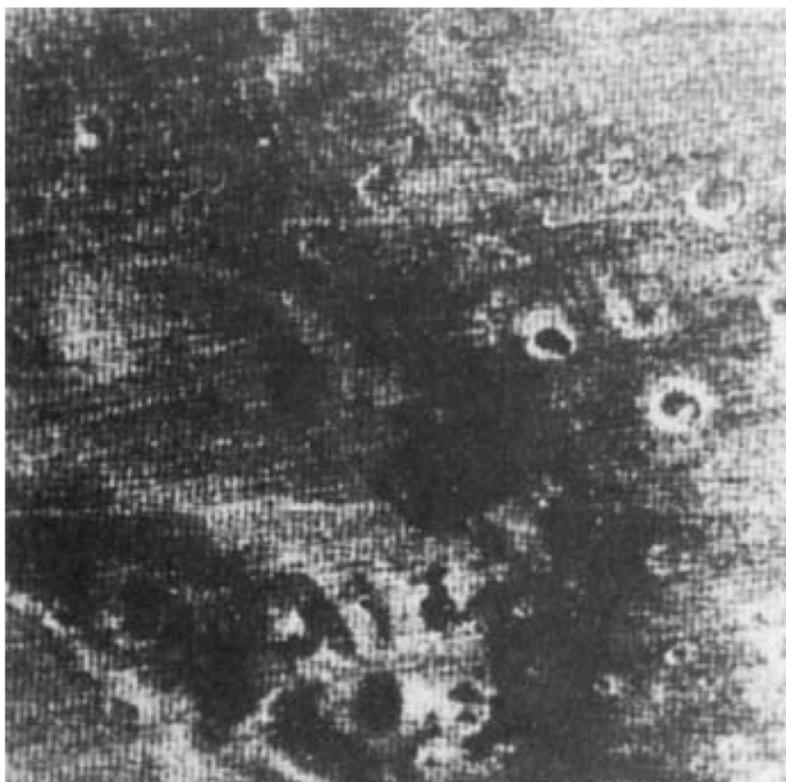
- 方差

$$\begin{aligned} \sigma^2(x, y) = & \frac{1}{(2a + 1)(2b + 1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \{ [g(x + s, y + t) \\ & - w(x, y)\eta(x + s, y + t)] \\ & - [\bar{g}(x, y) - w(x, y)\bar{\eta}(x, y)] \}^2 \end{aligned}$$

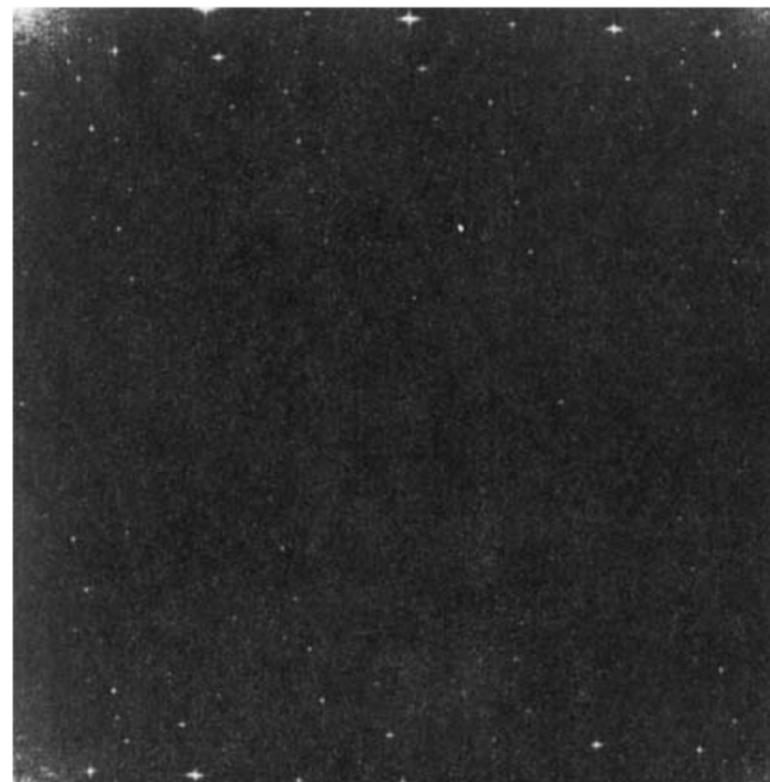
- 求导  $\frac{\partial \sigma^2(x, y)}{\partial w(x, y)} = 0 \Rightarrow w(x, y) = \frac{\overline{g(x, y)\eta(x, y)} - \bar{g}(x, y)\bar{\eta}(x, y)}{\bar{\eta}^2(x, y) - \bar{\eta}(x, y)^2}$  

# 举例

- 最佳陷波滤波器



火星地形图



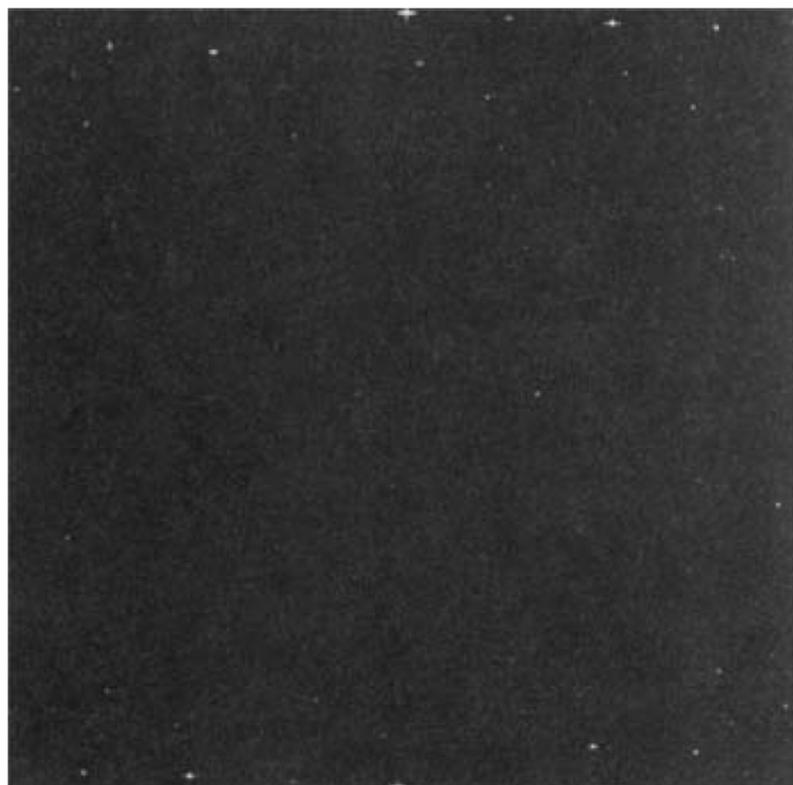
傅里叶谱图（没有中心化）



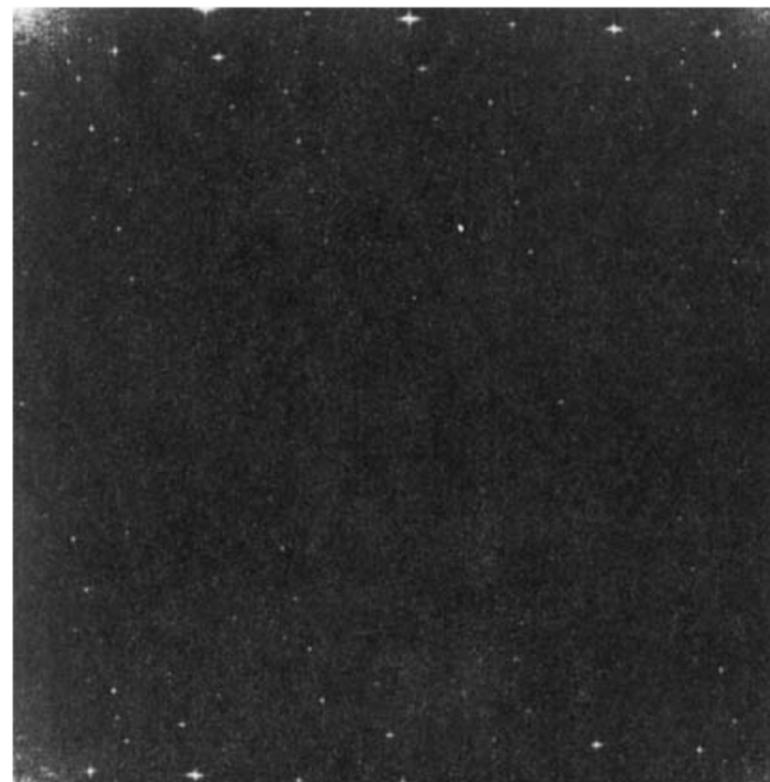
# 举例



- 最佳陷波滤波器



频率域内提取的噪声

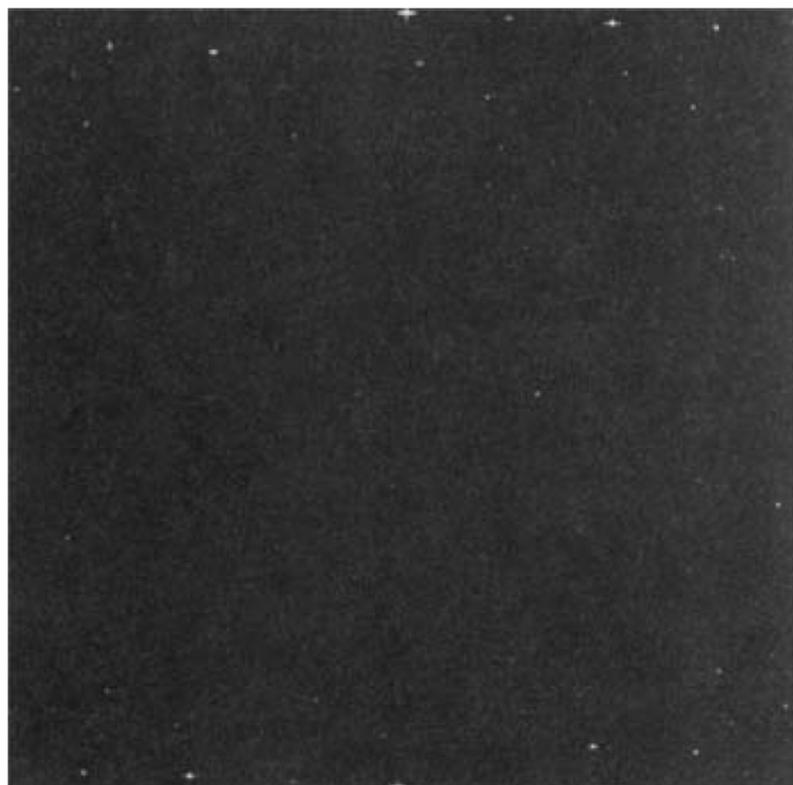


傅里叶谱图（没有中心化）

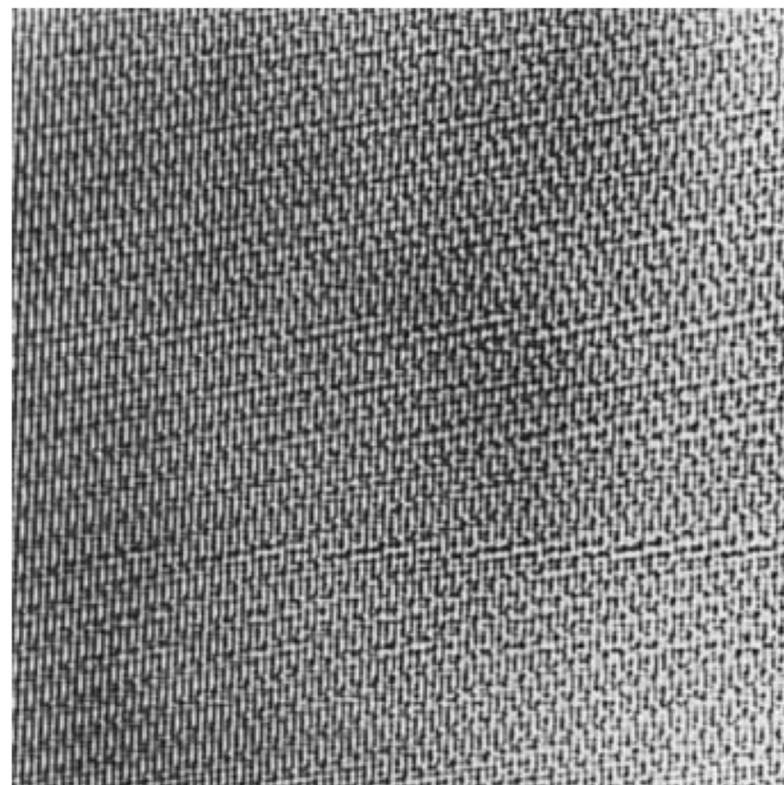


# 举例

- 最佳陷波滤波器



频率域内提取的噪声



噪声的空间表示

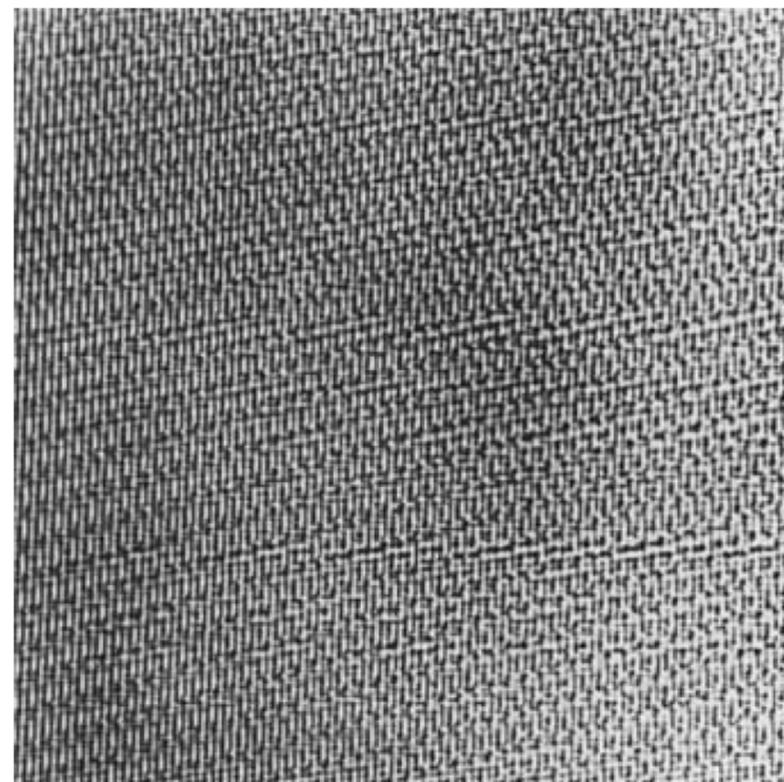


# 举例

- 最佳陷波滤波器



火星地形图

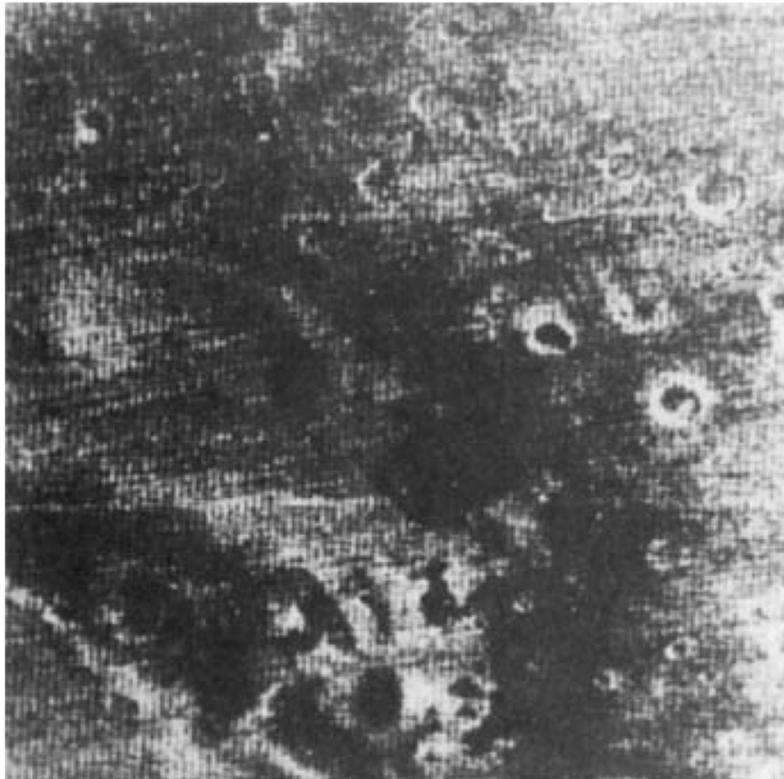


噪声的空间表示

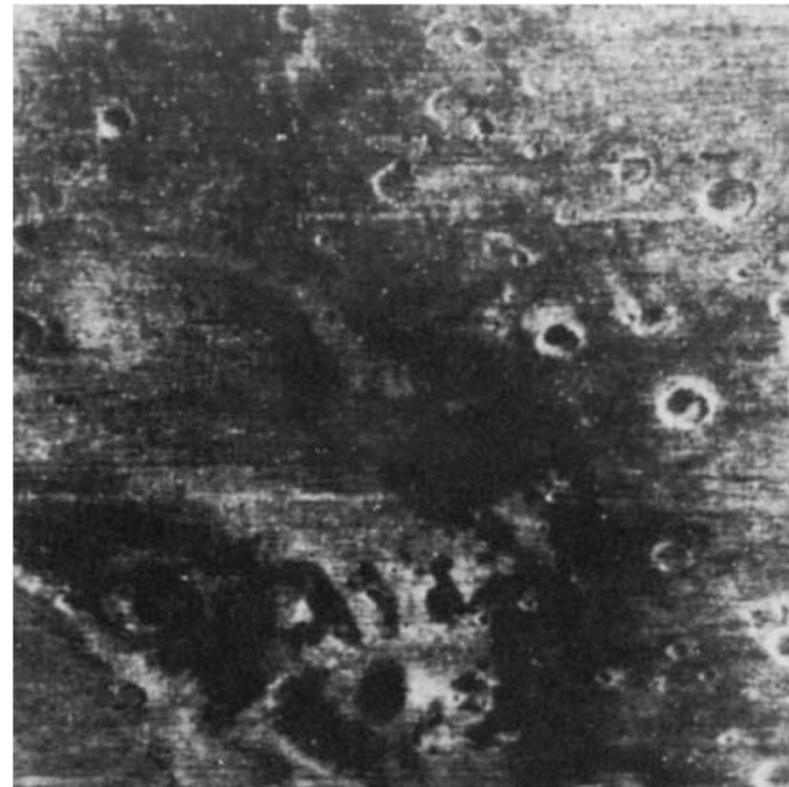


# 举例

- 最佳陷波滤波器



火星地形图



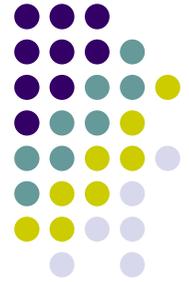
处理后的图像



# 提纲

- 图像退化/复原建模
- 噪声模型
- 仅有噪声的图像复原
- 频域滤波消除周期噪声
- 线性、位置不变的退化
- 估计退化函数
- 逆滤波





# 线性、位置不变的退化

- 图像退化建模

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y)$$

- 假设  $\eta(x, y) = 0$

$$g(x, y) = H[f(x, y)]$$

- $H$  是线性的

$$H[af_1(x, y) + bf_2(x, y)] = aH[f_1(x, y)] + bH[f_2(x, y)]$$

- 加性 ( additivity )

$$H[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = H[f_1(x, y)] + H[f_2(x, y)]$$

- 同质性 ( homogeneity )

$$H[af_1(x, y)] = aH[f_1(x, y)]$$





# 线性、位置不变的退化

- $H$ 是位置不变的

$$H[f(x - \alpha, y - \beta)] = g(x - \alpha, y - \beta)$$

- 对所有的 $f(x, y)$ ,  $\alpha, \beta$ 都成立
- 输出仅和输入值有关，与位置无关

- 引入冲激函数

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

- 图像退化建模

$$g(x, y) = H[f(x, y)] = H \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \right]$$

# 线性、位置不变的退化



- 图像退化建模

$$g(x, y) = H[f(x, y)] = H \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \right]$$

- 加性  $= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H[f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta$

- 同质性  $= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x, \alpha, y, \beta) d\alpha d\beta$$

- $H$ 的冲激响应

第一类叠加积分

$$h(x, \alpha, y, \beta) = H[\delta(x - \alpha, y - \beta)]$$





# 线性、位置不变的退化

- $H$ 的冲激响应

$$h(x, \alpha, y, \beta) = H[\delta(x - \alpha, y - \beta)]$$

- $H$ 是位置不变的

$$H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] = h(x - \alpha, y - \beta)$$

- 图像退化建模

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

- 有噪声

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x, \alpha, y, \beta) d\alpha d\beta + \eta(x, y)$$





# 线性、位置不变的退化

- $H$ 的冲激响应

$$h(x, \alpha, y, \beta) = H[\delta(x - \alpha, y - \beta)]$$

- $H$ 是位置不变的

$$H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] = h(x - \alpha, y - \beta)$$

- 图像退化建模

- 空间域

$$g(x, y) = h(x, y) \star f(x, y) + \eta(x, y)$$

- 频率域

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$



# 提纲

- 图像退化/复原建模
- 噪声模型
- 仅有噪声的图像复原
- 频域滤波消除周期噪声
- 线性、位置不变的退化
- 估计退化函数
- 逆滤波





# 图像观察估计

- 选择图像内的一个区域
  - 进行处理：去掉噪声，还原图像
  - 可以手动去除
- 利用公式估计退化函数

$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{\hat{F}_s(u, v)}$$

- 依据

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

- 从 $H_s(u, v)$ 扩展到 $H(u, v)$ 
  - $H$ 是位置不变的



# 图像配准



- 问题定义
  - 输入图像、输出图像（参考图像）
  - 估计变换函数

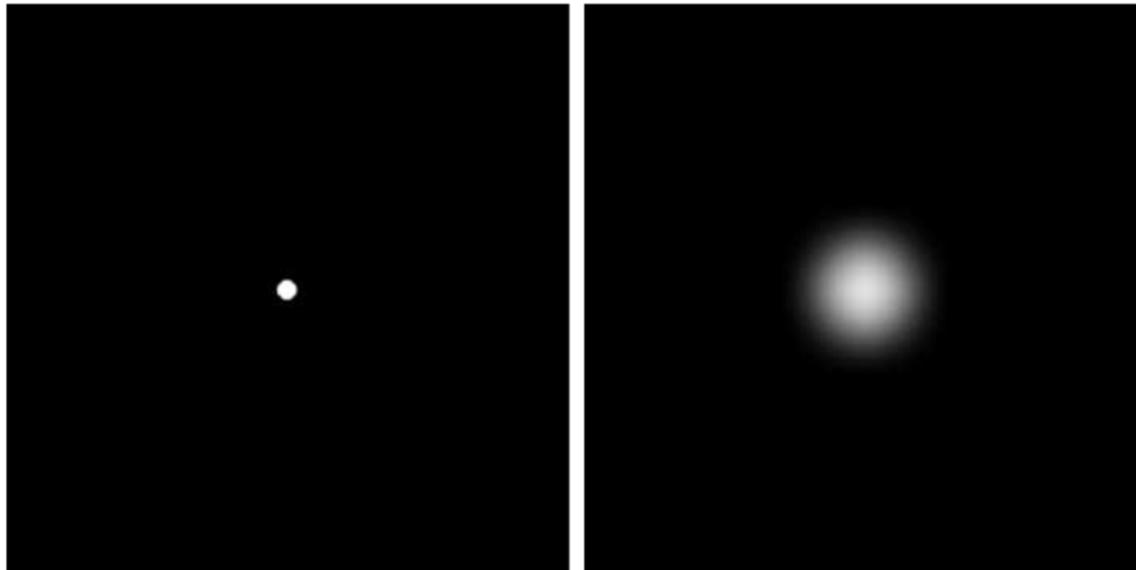




# 试验估计

- 对冲激成像
  - 冲激数值大，因此噪声的影响可以忽略
- 计算公式

$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A}$$



# 建模估计

- 大气湍流

- $k$ 是和湍流性质相关的常数
- 与高斯低通滤波器很相似



$$H(u, v) = e^{-k(u^2+v^2)^{5/6}}$$



可忽略的湍流



剧烈湍流 ( $k = 0.0025$ )



# 建模估计

- 大气湍流

- $k$ 是和湍流性质相关的常数
- 与高斯低通滤波器很相似



$$H(u, v) = e^{-k(u^2+v^2)^{5/6}}$$



中等湍流 ( $k = 0.001$ )



轻微湍流 ( $k = 0.00025$ )





# 建模估计

- 运动模型（平面运动）

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt$$

- $T$ 是曝光时间

- $x_0(t), y_0(t)$ 分别是 $x$ 和 $y$ 方向上的速率

- 傅里叶变换

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt \right] e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$



# 建模估计



- 傅里叶变换

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_0^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f[x - x_0(t), y - y_0(t)] e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \right] dt \\ &= \int_0^T F(u, v) e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt \\ &= F(u, v) \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt \end{aligned}$$



- 定义  $H(u, v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt$

- 频率域滤波

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$



# 建模估计



- 频率域滤波器

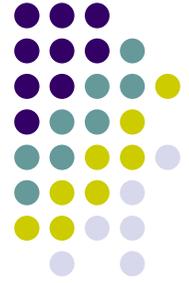
$$\begin{aligned} H(u, v) &= \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt \\ &= \frac{T}{\pi(ua + vb)} \sin[\pi(ua + vb)] e^{-j\pi(ua+vb)} \end{aligned}$$

- 令  $x_0(t) = at/T$  ,  $y_0(t) = bt/T$

- 模拟运动效果

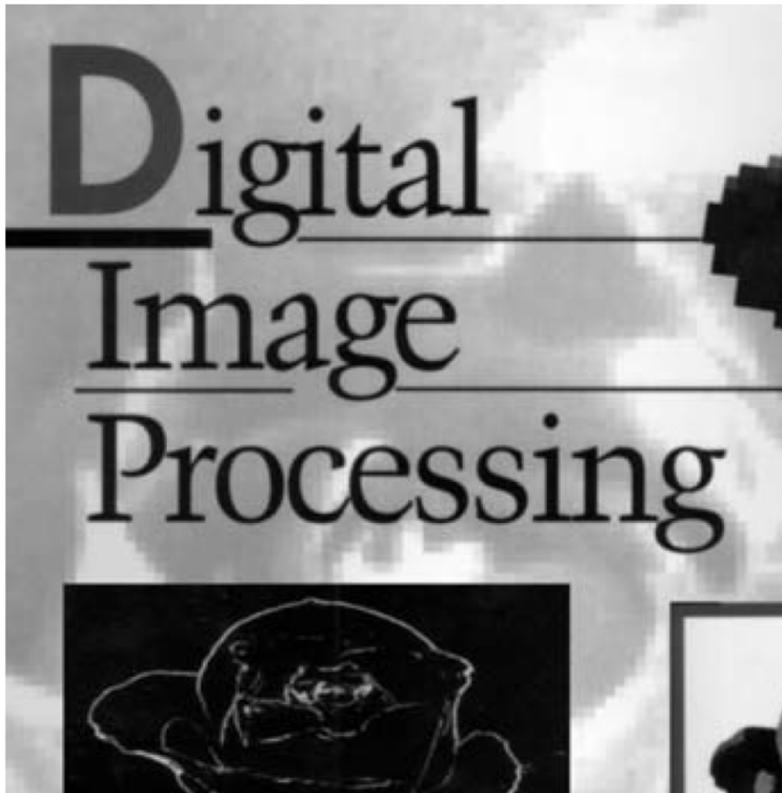
$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$





# 举例

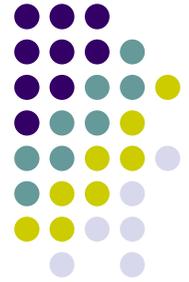
- 模拟运动效果
  - $a = b = 0.1, T = 1$



# 提纲

- 图像退化/复原建模
- 噪声模型
- 仅有噪声的图像复原
- 频域滤波消除周期噪声
- 线性、位置不变的退化
- 估计退化函数
- 逆滤波





# 逆滤波

- 退化函数 $H$ 已知

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

- 计算公式

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)}$$

$$\hat{F}(u, v) = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

- 防止除0
  - 截断频率高的分量



# 举例

- 退化模型已知



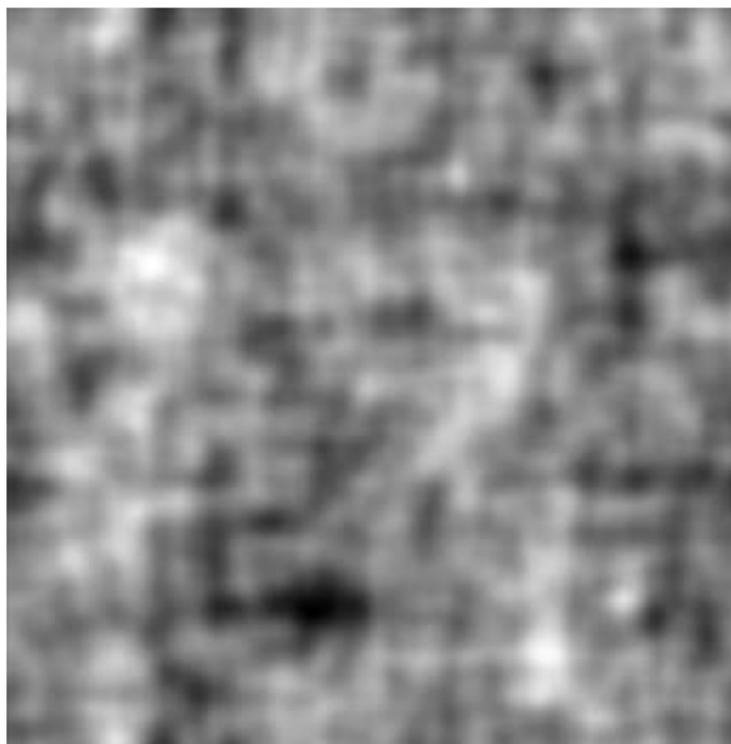
$$H(u, v) = e^{-k[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2]^{5/6}}$$



# 举例

- 逆变换

利用巴特沃斯低通滤波器截断



全滤波



40处截断



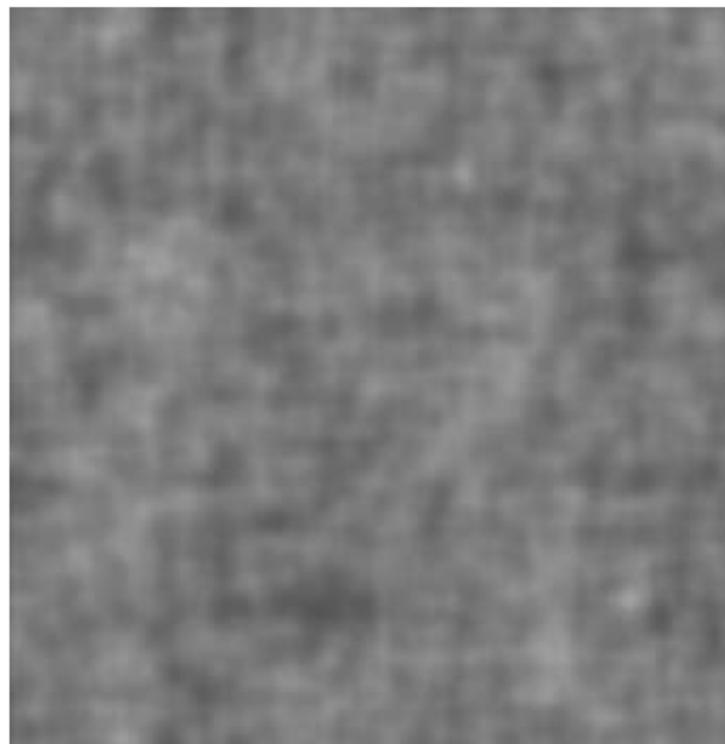
# 举例

- 逆变换

利用巴特沃斯低通滤波器截断



70处截断



85处截断

