数字图像处理

第三章

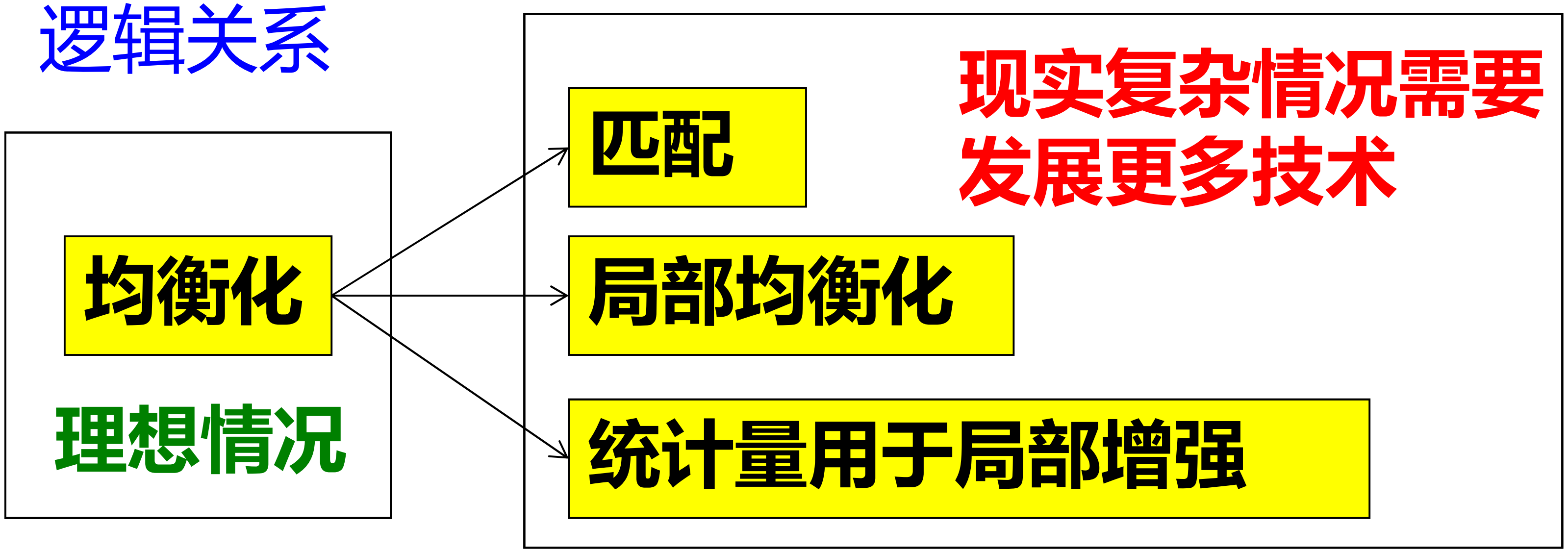
空间域图像增强（Part II）

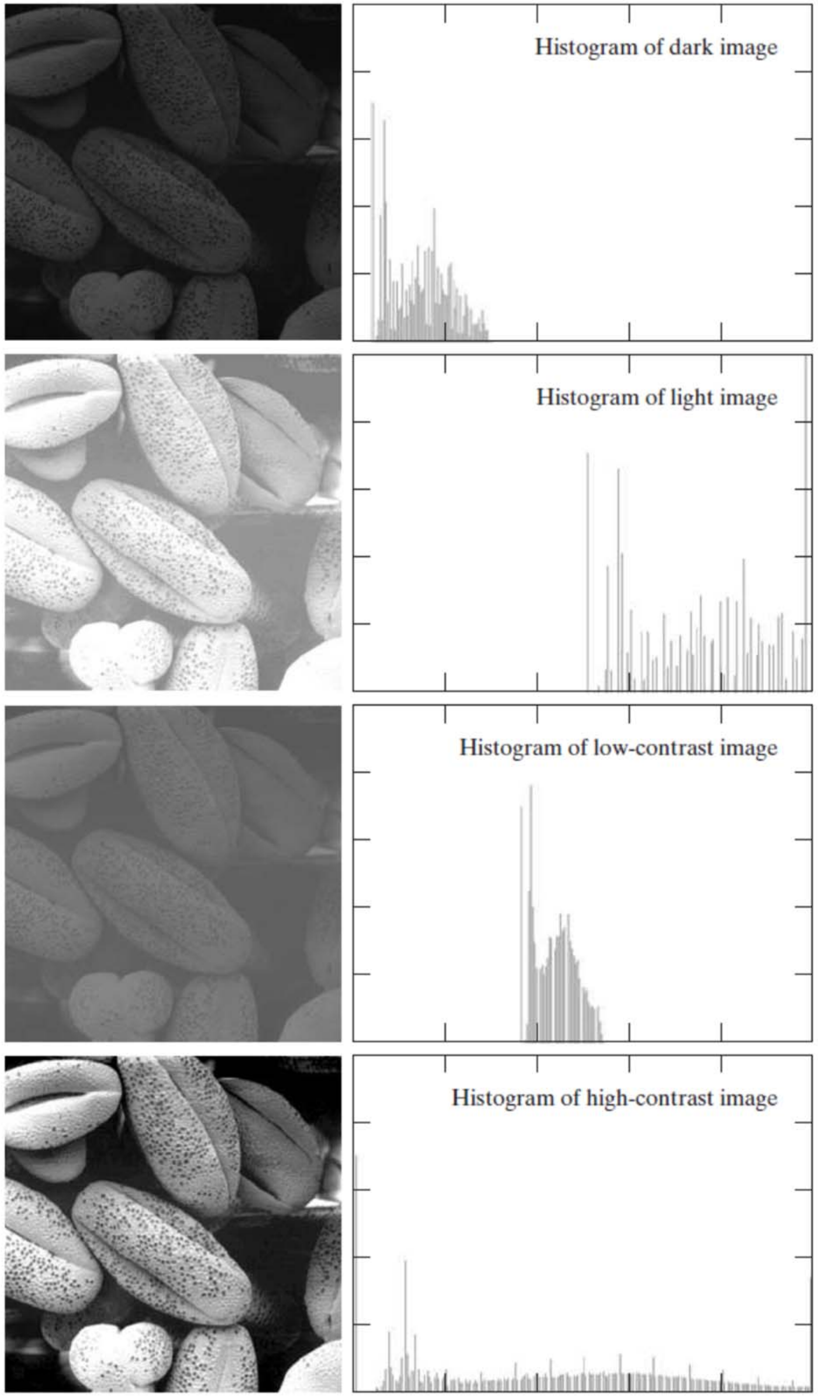
直方图处理

直方图处理

- 直方图均衡化
- 直方图匹配
- 局部直方图均衡化
- 直方图统计量用于局部图像增强

逻辑关系





回顾

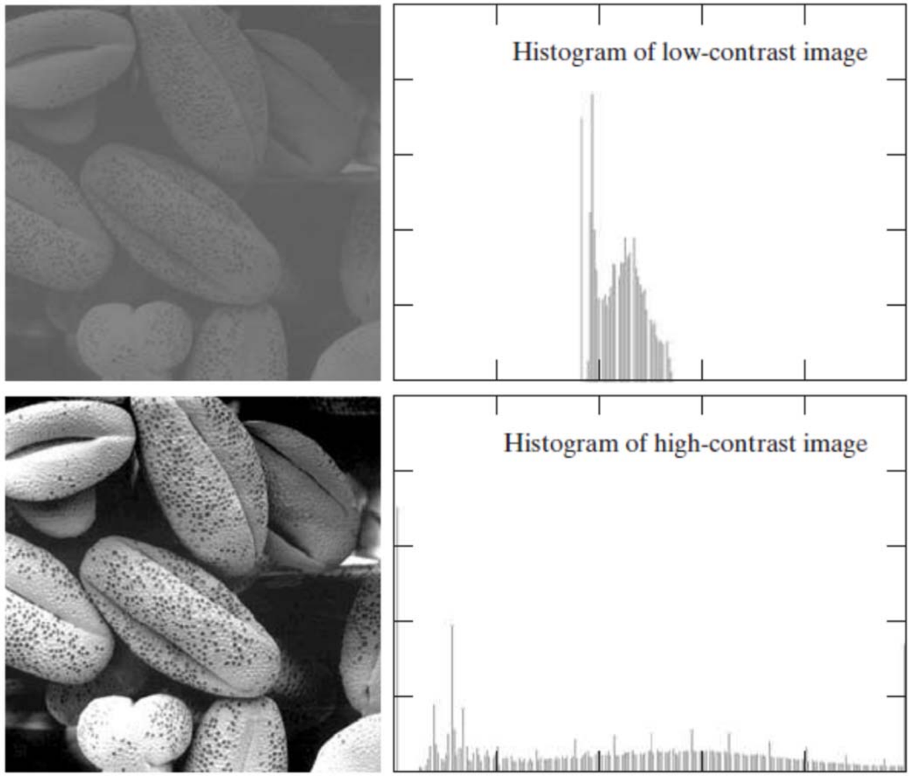
不同的直方图，图像效果的直观感受不同

什么样的的直方图有利于图像增强呢？

均衡化的直方图

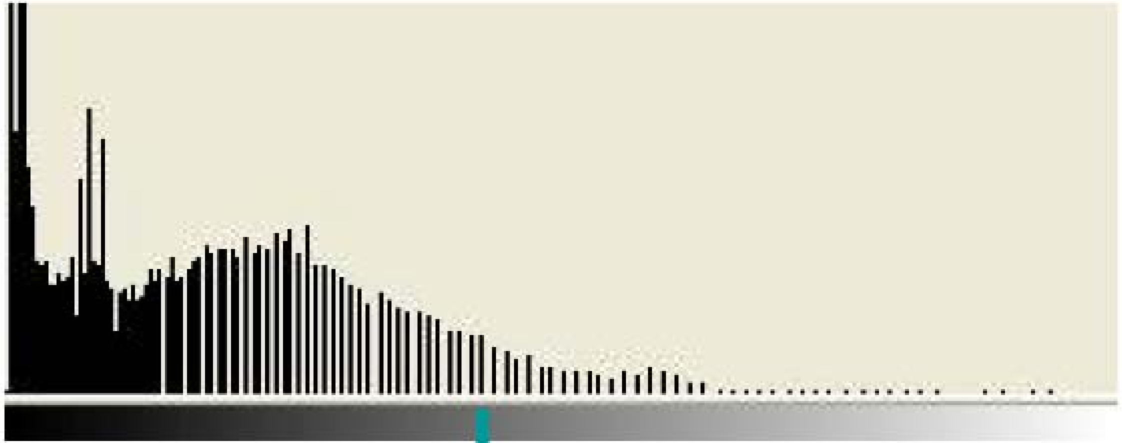
直方图均衡化

直方图呈均匀分布时，对比度会有明显增强。通过灰度变换函数，将原图像直方图的分布均衡化，这一过程称为直方图均衡化。

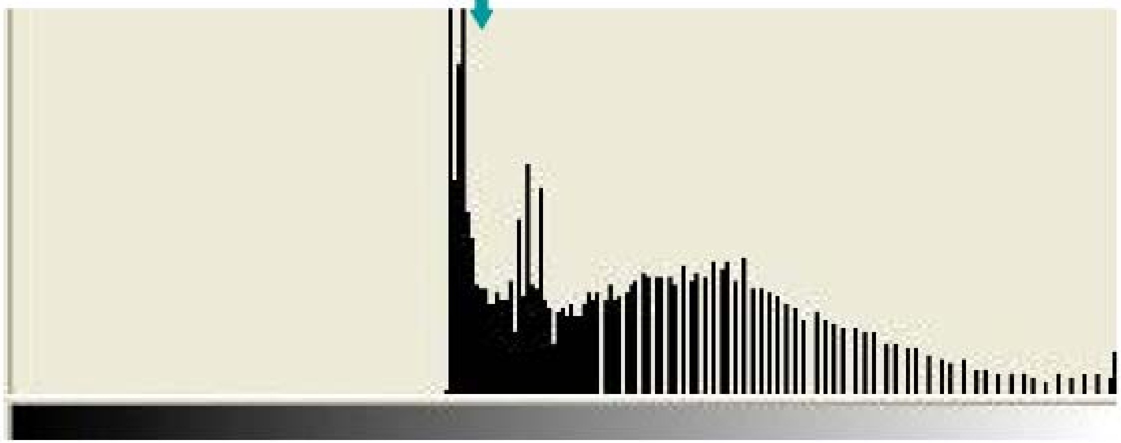


如何找到相应的灰度变换函数呢？

从简单的例子开始

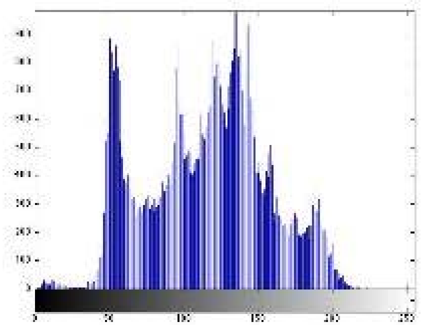


$$s = r + 100$$

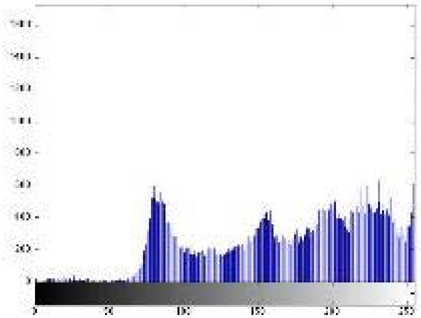


稍复杂一点的例子

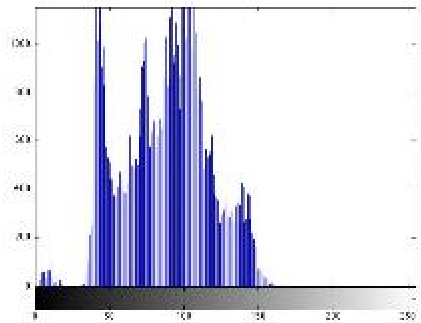
原图



$s = 1.5 \times r$



$s = 0.8 \times r$



线性运算：

$$s = T(r)$$
$$= a \times r + b$$

灰度变换函数与直方图

假设有一幅输入图像A，经过灰度变换函数$s = T(r)$，产生了输出图像B

输入图像的直方图$p_r(r)$和灰度变换函数T，如何计算输出图像B的直方图$p_s(s)$

一般情况，结论复杂

讨论一种简单情况：单调灰度变换函数

单调连续函数

- $r \in [0, L-1]$

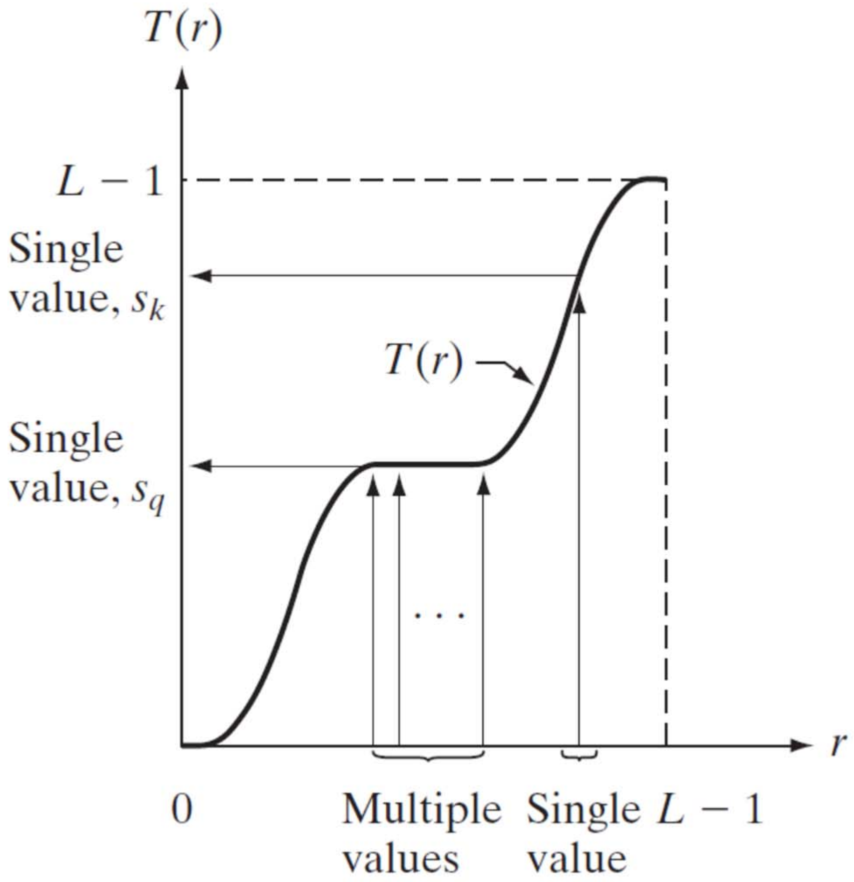
$$s = T(r)$$

  - $T(r)$在区间$[0, L-1]$为单调递增函数
  - 当$0 \le r \le L-1$时， $0 \le T(r) \le L-1$

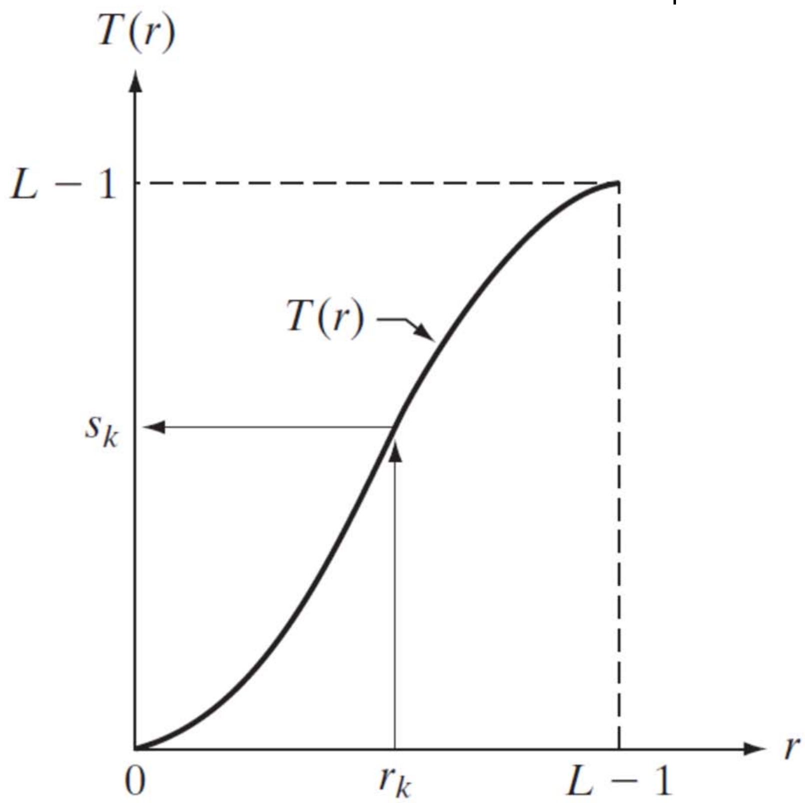
- 更强的假设
  - $T(r)$在区间$[0, L-1]$为严格单调递增函数

$$r = T^{-1}(s)$$

举例



单调递增



严格单调递增

概率密度公式

- 输入图像灰度值概率密度$p_r(r)$
- 变换函数$s = T(r)$
- 输出图像灰度值概率密度$p_s(s)$?

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right| = p_r(r)\left|\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right)^{-1}\right|$$

$$= p_r\left(T^{-1}(s)\right)\frac{1}{\left|T'\left(T^{-1}(s)\right)\right|}$$

证明过程

- https://en.wikibooks.org/wiki/Probability/Transformation_of_Probability_Densities
  - 单调递增

$$p_s(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P[S \le s] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P[T(R) \le s]$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P[R \le T^{-1}(s)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P[R \le r]$$

$$= \frac{\mathrm{d}P[R \le r]}{\mathrm{d}r} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = p_r(r) \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$$

  - 单调递减

小测试

线性运算

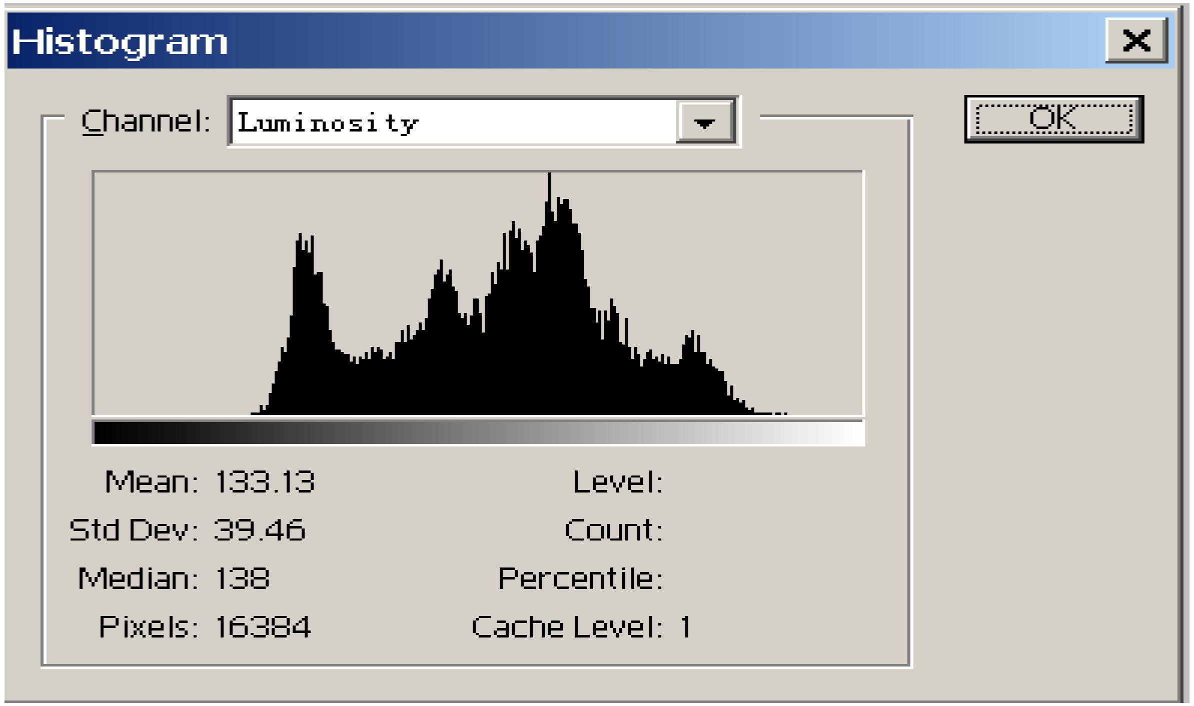
$$s = T(r) = a \times r + b$$

计算$p_r(r)$经线性运算后的直方图$p_s(s)$:

$$p_s(s) = p_r\left(T^{-1}(s)\right)\frac{1}{\left|T'\left(T^{-1}(s)\right)\right|} = \frac{1}{a}p_r\left(\frac{s-b}{a}\right)$$

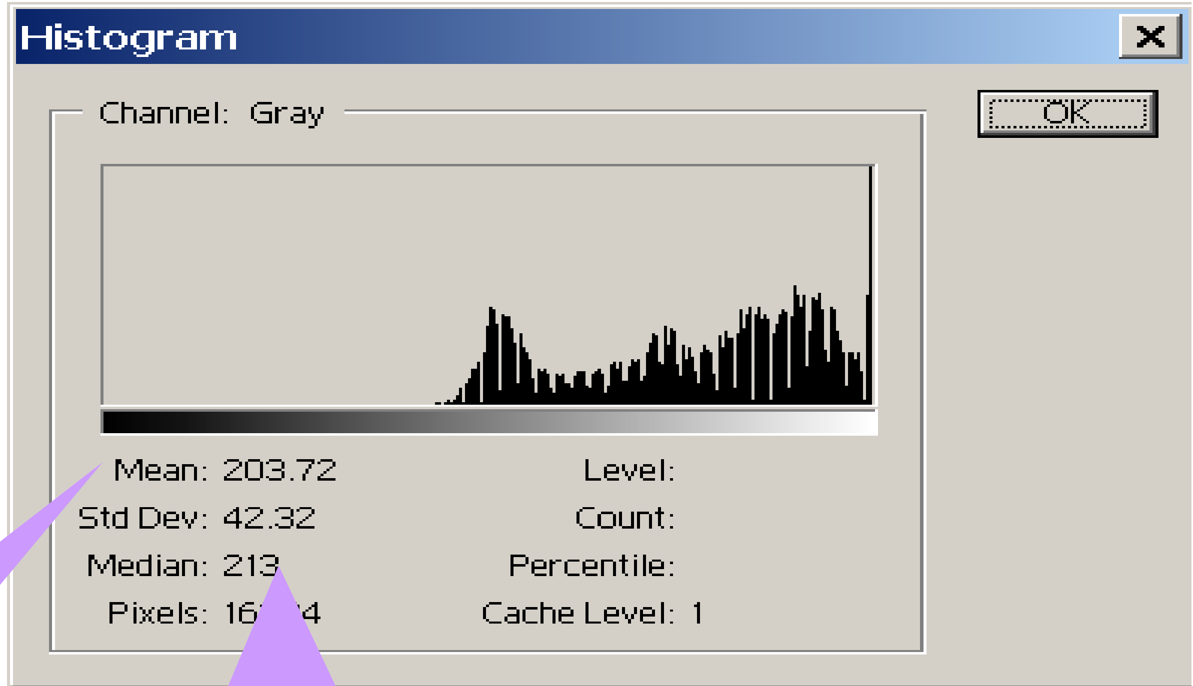
举例

$$s = T(r) = 1.2 \times r + 50$$



举例

$$s = T(r) = 1.2 \times r + 50$$



均值：203.72 ≈ 1.2*133.13+50

中值：213≈1.2*138+50

直方图均衡化

- 输入图像灰度值概率密度$p_r(r)$
- 变换函数$s = T(r)$
- 输出图像灰度值概率密度$p_s(s)$

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right| = p_r(r)\left|\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right)^{-1}\right|$$

- 如何设计$T(r)$使得$p_s(s)$成为均匀分布?

直方图均衡化

- 变换函数

$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,dw$$

  - 单调递增
  - 属于区间$[0, L-1]$
- 效果

$$\frac{ds}{dr} = \frac{dT(r)}{dr}$$

$$= (L-1)\frac{d}{dr}\left[\int_0^r p_r(w)\,dw\right]$$

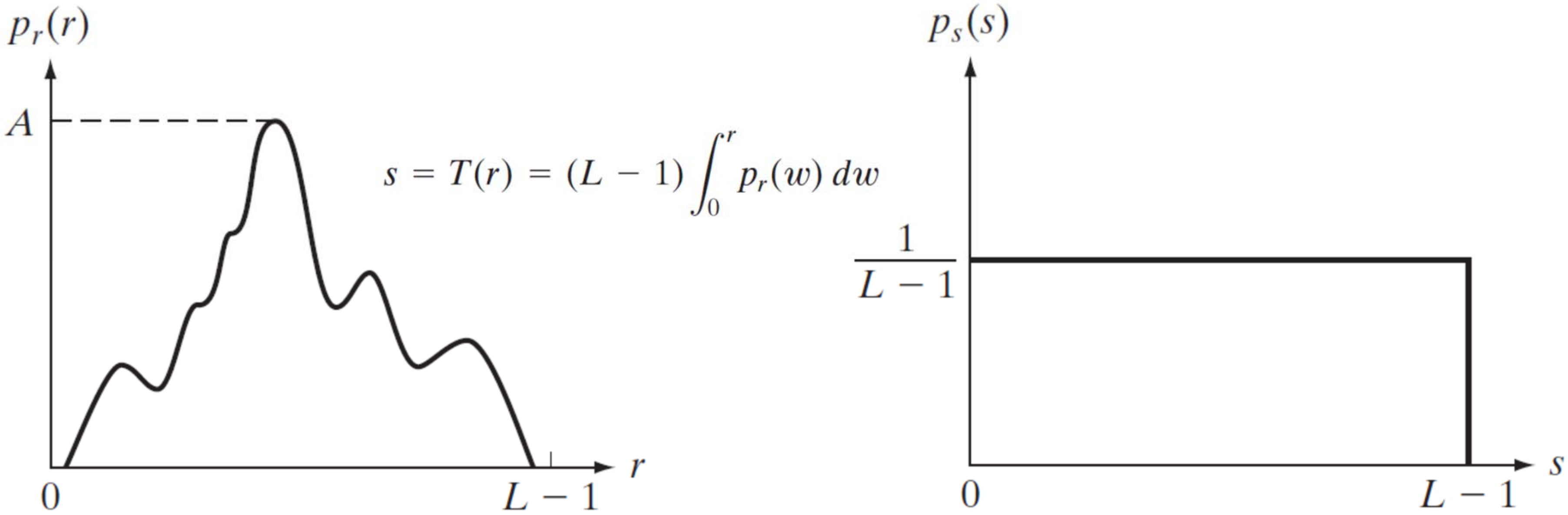
$$= (L-1)p_r(r)$$

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right|$$

$$= p_r(r)\left|\frac{1}{(L-1)p_r(r)}\right|$$

$$= \frac{1}{L-1} \qquad 0 \le s \le L-1$$

图形示意



举例

- 输入图像灰度值的概率密度

$$p_r(r) = \begin{cases} \dfrac{2r}{(L-1)^2} & \text{for } 0 \le r \le L-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 变换函数

$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,dw = \frac{2}{L-1}\int_0^r w\,dw = \frac{r^2}{L-1}$$

- 输出图像灰度值的概率密度

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right| = \frac{2r}{(L-1)^2}\left|\left[\frac{ds}{dr}\right]^{-1}\right| = \frac{2r}{(L-1)^2}\left|\left[\frac{d}{dr}\frac{r^2}{L-1}\right]^{-1}\right|$$

$$= \frac{2r}{(L-1)^2}\left|\frac{(L-1)}{2r}\right| = \frac{1}{L-1}$$

离散直方图

- 输入图像灰度级r_k的概率近似为

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{MN} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, L-1$$

- 离散变换函数（直方图均衡）

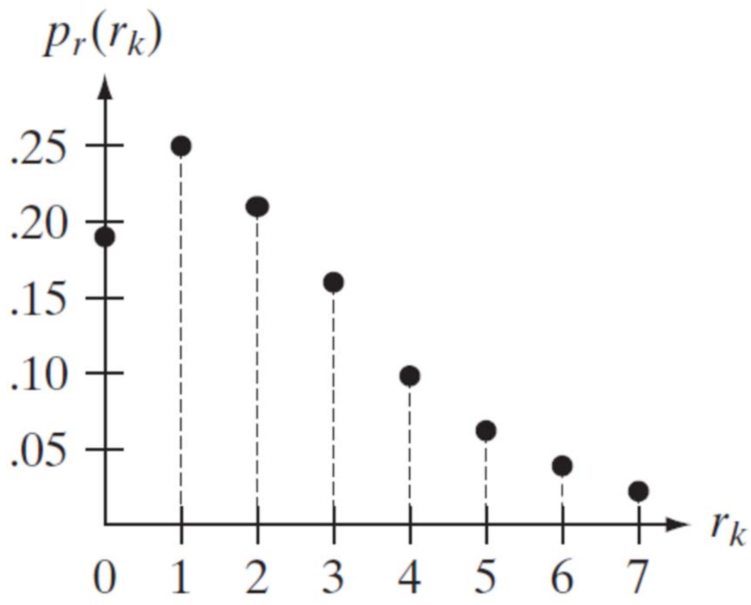
$$s_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{j=0}^{k} p_r(r_j)$$

$$= \frac{(L-1)}{MN}\sum_{j=0}^{k} n_j \qquad k = 0, 1, 2, \dots, L-1$$

举例

- 3比特数字图像的灰度分布和直方图值

r_k	n_k	$p_r(r_k) = n_k/MN$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1$	1023	0.25
$r_2 = 2$	850	0.21
$r_3 = 3$	656	0.16
$r_4 = 4$	329	0.08
$r_5 = 5$	245	0.06
$r_6 = 6$	122	0.03
$r_7 = 7$	81	0.02



举例

- 变换函数

$$s_0 = T(r_0) = 7\sum_{j=0}^{0} p_r(r_j) = 7p_r(r_0) = 1.33$$

$$s_1 = T(r_1) = 7\sum_{j=0}^{1} p_r(r_j) = 7p_r(r_0) + 7p_r(r_1) = 3.08$$

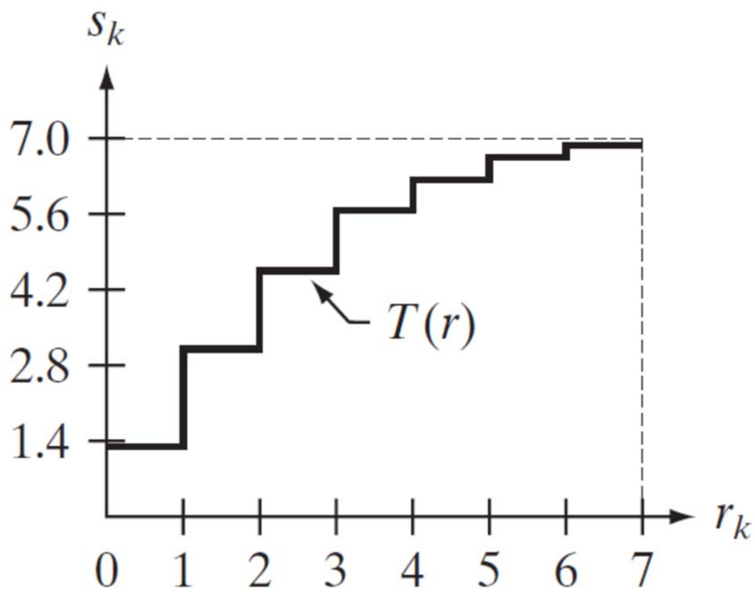
$$s_2 = 4.55, s_3 = 5.67, s_4 = 6.23$$

$$s_5 = 6.65, s_6 = 6.86, s_7 = 7.00$$

举例

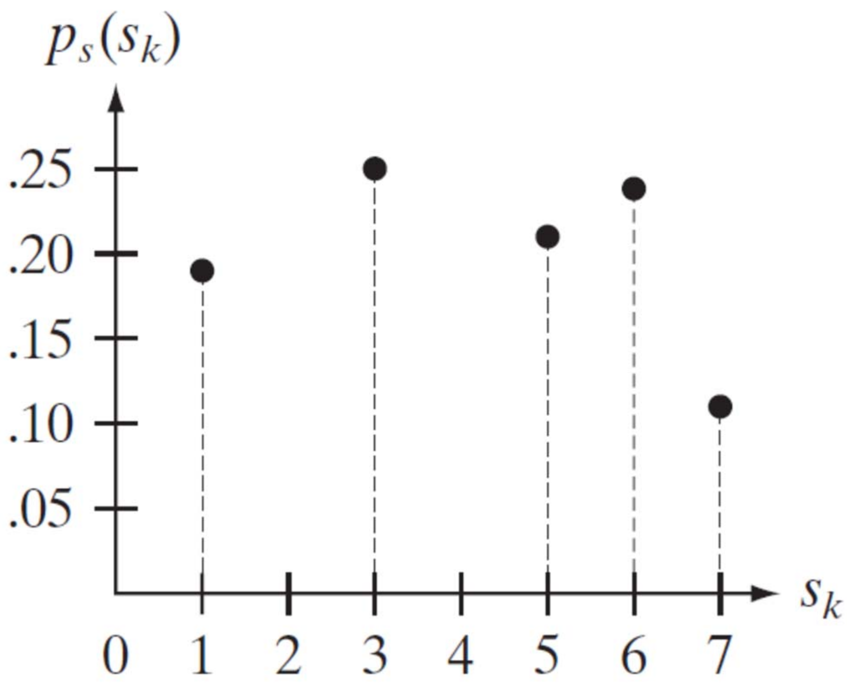
- 变换函数

$$s_0 = 1.33 \rightarrow 1 \qquad s_4 = 6.23 \rightarrow 6$$
$$s_1 = 3.08 \rightarrow 3 \qquad s_5 = 6.65 \rightarrow 7$$
$$s_2 = 4.55 \rightarrow 5 \qquad s_6 = 6.86 \rightarrow 7$$
$$s_3 = 5.67 \rightarrow 6 \qquad s_7 = 7.00 \rightarrow 7$$

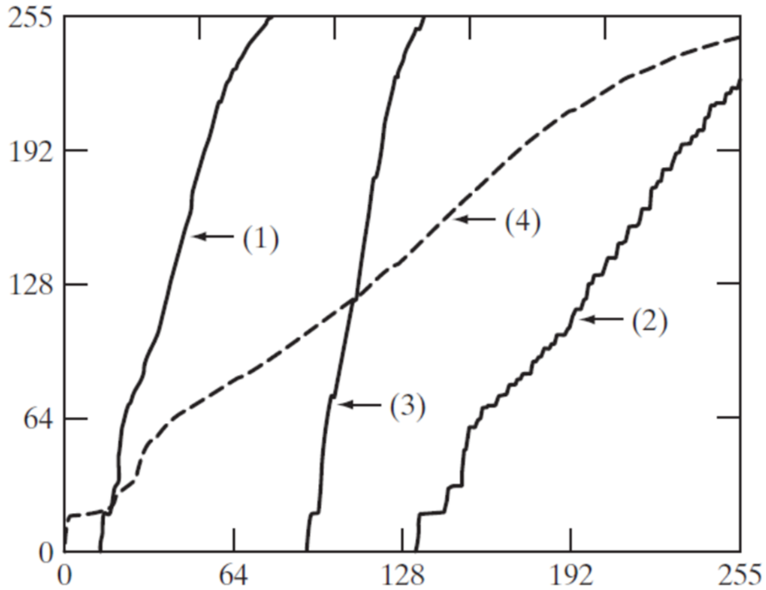


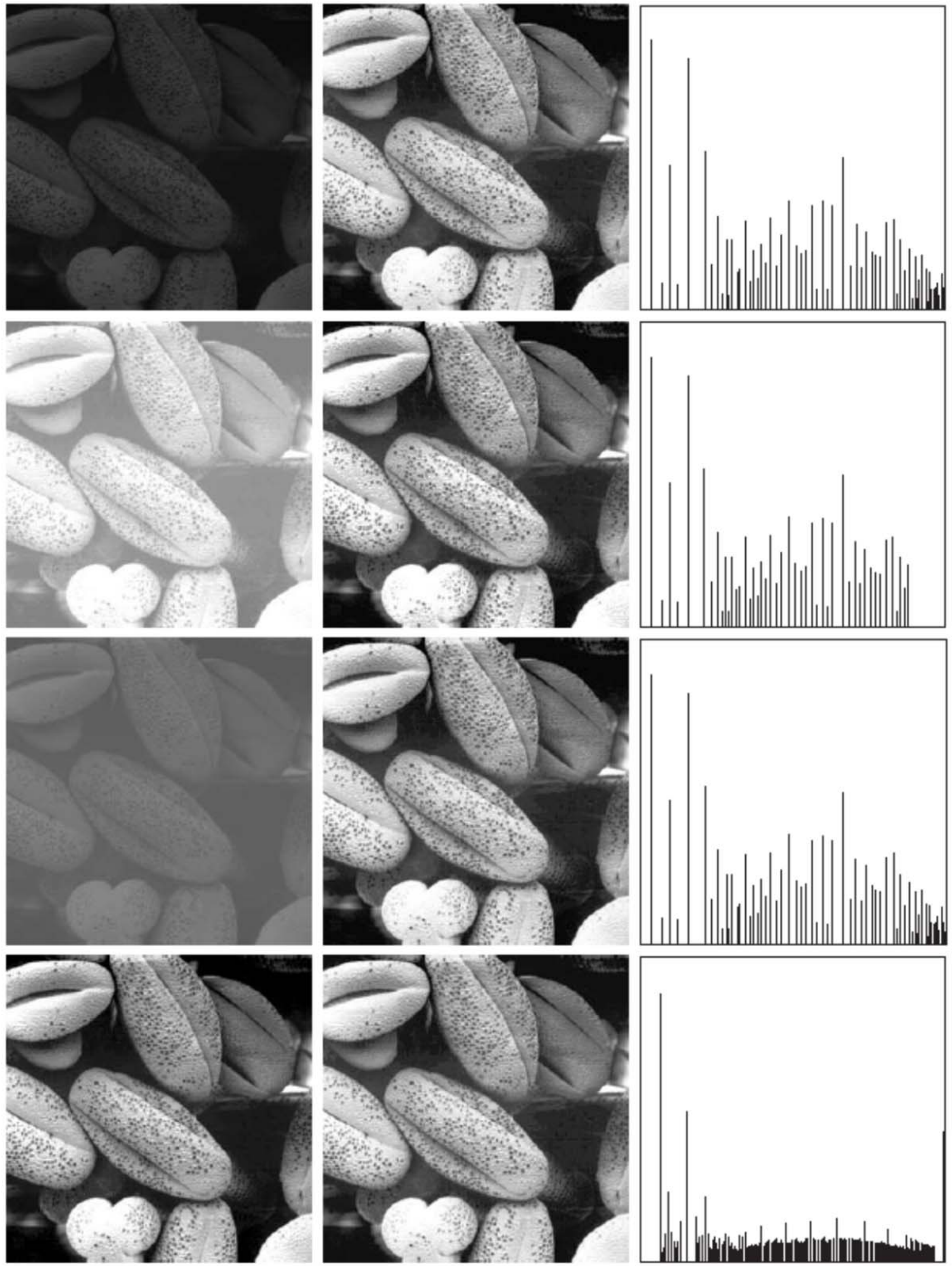
举例

- 均衡后的直方图



效果展示





更明显的例子

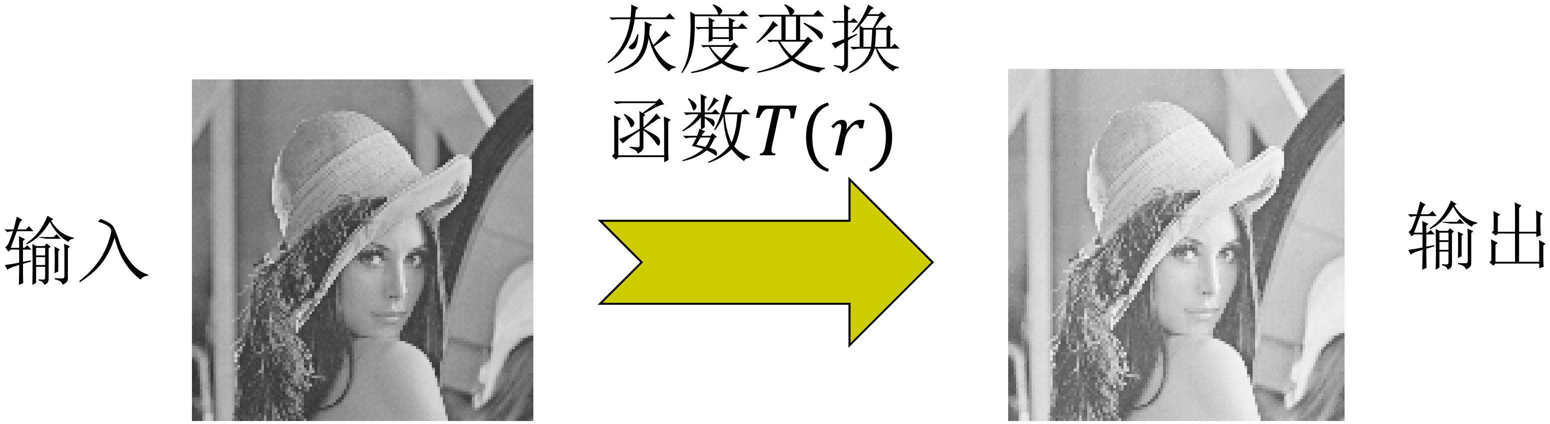
均衡化前

均衡化后

图像明显得到了增强

直方图匹配（规定化）

- 均匀直方图的基本增强有时并不是最终目标。我们通常希望可以处理后的图像具有某种指定的直方图形状。
- 这种用于产生处理后有特殊直方图的图像的方法，叫做直方图匹配或直方图规定化处理。



输出直方图分布不要求均匀，要求为某个特定分布

直方图匹配

- 输入图像灰度值概率密度$p_r(r)$
- 指定灰度值概率密度$p_z(z)$
- 如何设计变换函数使得输出图像概率密度为$p_z(z)$?

核心思想

- 以平衡化直方图图像为桥梁

A　　均衡化图像B　　C

先把A转化成均衡化图像B

再把B转化成图像C（why）

根据单调灰度变换函数存在反函数

实现方式

- 输入图像灰度值概率密度$p_r(r)$

$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,\mathrm{d}w$$

- 指定灰度值概率密度$p_z(z)$

$$G(z) = (L-1)\int_0^z p_z(t)\,\mathrm{d}t = s$$

- 反函数唯一

$$z = G^{-1}(s) = G^{-1}\big(T(r)\big)$$

具体步骤

1. 由输入图像计算$p_r(r)$
2. 根据下面的公式计算s

$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,\mathrm{d}w$$

3. 根据$p_z(z)$，计算变换函数$G(z)$

$$G(z) = (L-1)\int_0^z p_z(t)\,\mathrm{d}t$$

4. 计算反变换函数$z = G^{-1}(s)$
5. 将反变换函数作用到所有的s

举例

- 输入概率密度$p_r(r) = 2r/(L-1)^2$

$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,dw = \frac{2}{(L-1)}\int_0^r w\,dw = \frac{r^2}{(L-1)}$$

- 指定概率密度$p_z(z) = 3z^2/(L-1)^3$

$$G(z) = (L-1)\int_0^z p_z(w)\,dw = \frac{3}{(L-1)^2}\int_0^z w^2\,dw = \frac{z^3}{(L-1)^2}$$

$$z = \left[(L-1)^2 s\right]^{1/3}$$

离散直方图

- 离散情况更加简单
- 输入离散直方图$p_r(r_k)$

$$s_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{j=0}^{k} p_r(r_j)$$

$$= \frac{(L-1)}{MN}\sum_{j=0}^{k} n_j \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, L-1$$

- 指定离散直方图$p_z(z_k)$

$$G(z_q) = (L-1)\sum_{i=0}^{q} p_z(z_i) = s_k$$

  - 查表实现

$$z_q = G^{-1}(s_k)$$

具体步骤

1. 计算输入图像直方图$p_r(r)$，并计算s_k，并四舍五入
2. 依据给定直方图$p_z(z)$，计算变化函数G的所有值，并四舍五入，存储表中
3. 对于每一个s_k，通过查表，找到对应的z_q
   - $G(z_q)$最接近s_k
   - 结果不唯一时，选择最小的z_q

举例

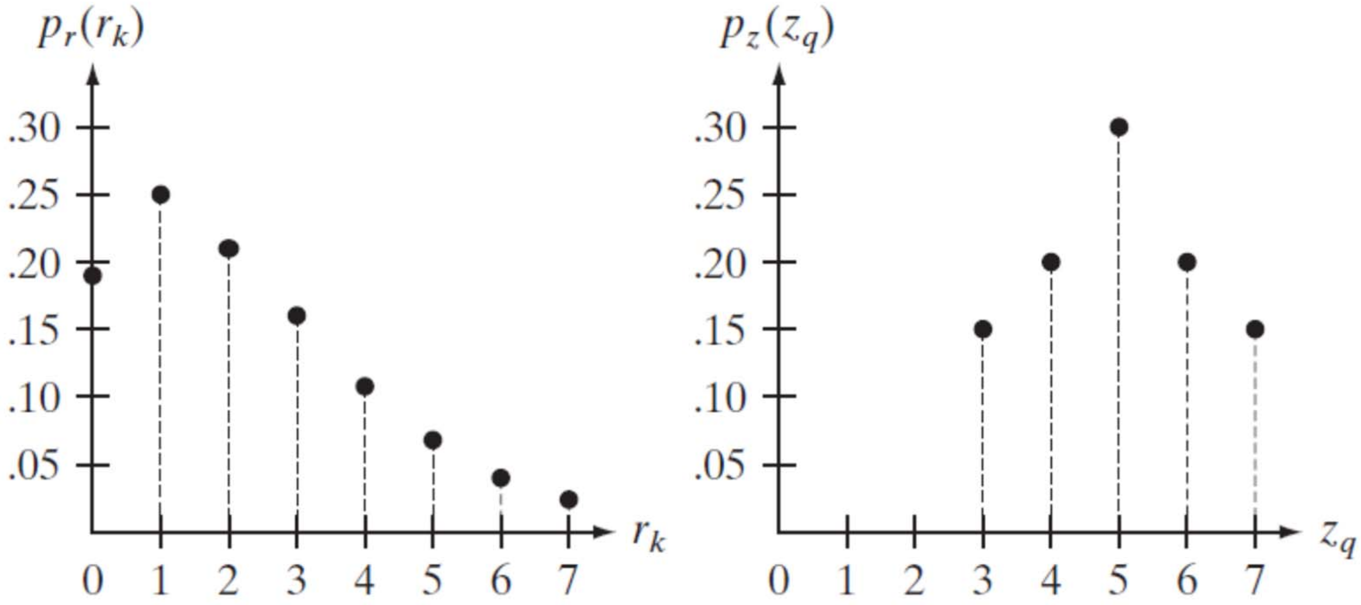
- 3比特数字图像、指定直方图

r_k	n_k	$p_r(r_k) = n_k/MN$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1$	1023	0.25
$r_2 = 2$	850	0.21
$r_3 = 3$	656	0.16
$r_4 = 4$	329	0.08
$r_5 = 5$	245	0.06
$r_6 = 6$	122	0.03
$r_7 = 7$	81	0.02

z_q	Specified $p_z(z_q)$
$z_0 = 0$	0.00
$z_1 = 1$	0.00
$z_2 = 2$	0.00
$z_3 = 3$	0.15
$z_4 = 4$	0.20
$z_5 = 5$	0.30
$z_6 = 6$	0.20
$z_7 = 7$	0.15

举例

- 3比特数字图像、指定直方图



举例

- 对输入图像计算执行直方图均衡

$$s_0 = 1.33 \rightarrow 1 \qquad s_4 = 6.23 \rightarrow 6$$
$$s_1 = 3.08 \rightarrow 3 \qquad s_5 = 6.65 \rightarrow 7$$
$$s_2 = 4.55 \rightarrow 5 \qquad s_6 = 6.86 \rightarrow 7$$
$$s_3 = 5.67 \rightarrow 6 \qquad s_7 = 7.00 \rightarrow 7$$

- 对指定直方图执行直方图均衡

$$G(z_0) = 7\sum_{j=0}^{0} p_z(z_j) = 0.00$$

$$G(z_1) = 7\sum_{j=0}^{1} p_z(z_j) = 7\left[p(z_0) + p(z_1)\right] = 0.00$$

举例

- 对输入图像计算执行直方图均衡

$$s_0 = 1.33 \rightarrow 1 \qquad s_4 = 6.23 \rightarrow 6$$
$$s_1 = 3.08 \rightarrow 3 \qquad s_5 = 6.65 \rightarrow 7$$
$$s_2 = 4.55 \rightarrow 5 \qquad s_6 = 6.86 \rightarrow 7$$
$$s_3 = 5.67 \rightarrow 6 \qquad s_7 = 7.00 \rightarrow 7$$

- 对指定直方图执行直方图均衡

$$G(z_0) = 0.00 \rightarrow 0 \qquad G(z_4) = 2.45 \rightarrow 2$$
$$G(z_1) = 0.00 \rightarrow 0 \qquad G(z_5) = 4.55 \rightarrow 5$$
$$G(z_2) = 0.00 \rightarrow 0 \qquad G(z_6) = 5.95 \rightarrow 6$$
$$G(z_3) = 1.05 \rightarrow 1 \qquad G(z_7) = 7.00 \rightarrow 7$$

举例

- 获得G的逆映射

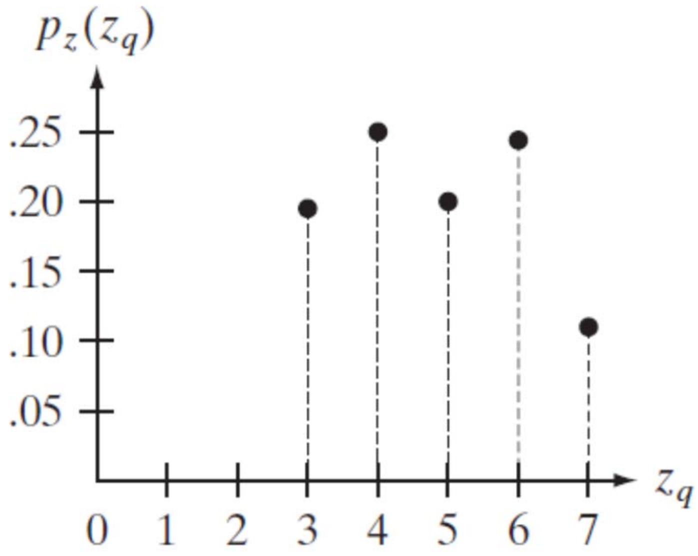
z_q	$G(z_q)$
$z_0 = 0$	0
$z_1 = 1$	0
$z_2 = 2$	0
$z_3 = 3$	1
$z_4 = 4$	2
$z_5 = 5$	5
$z_6 = 6$	6
$z_7 = 7$	7

s_k	$\rightarrow$	z_q
1	$\rightarrow$	3
3	$\rightarrow$	4
5	$\rightarrow$	5
6	$\rightarrow$	6
7	$\rightarrow$	7

举例

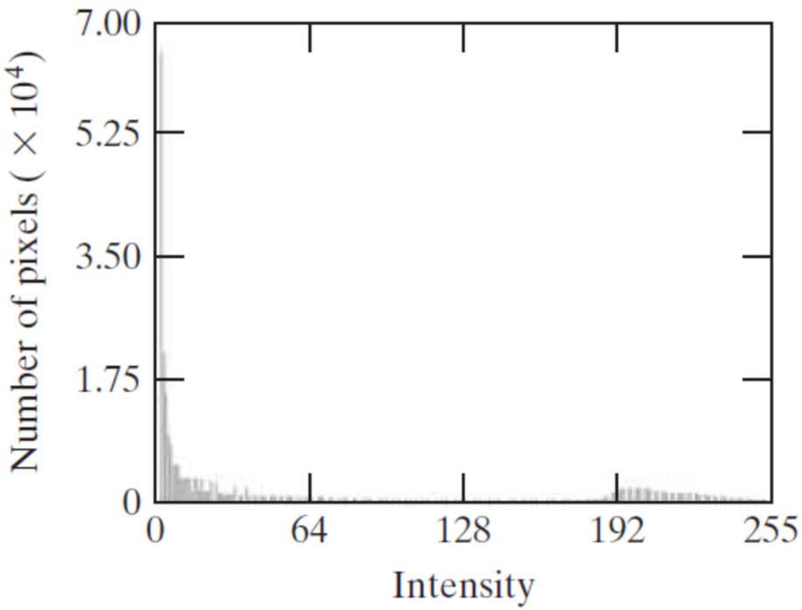
- 最终结果

z_q	Specified $p_z(z_q)$	Actual $p_z(z_k)$
$z_0 = 0$	0.00	0.00
$z_1 = 1$	0.00	0.00
$z_2 = 2$	0.00	0.00
$z_3 = 3$	0.15	0.19
$z_4 = 4$	0.20	0.25
$z_5 = 5$	0.30	0.21
$z_6 = 6$	0.20	0.24
$z_7 = 7$	0.15	0.11



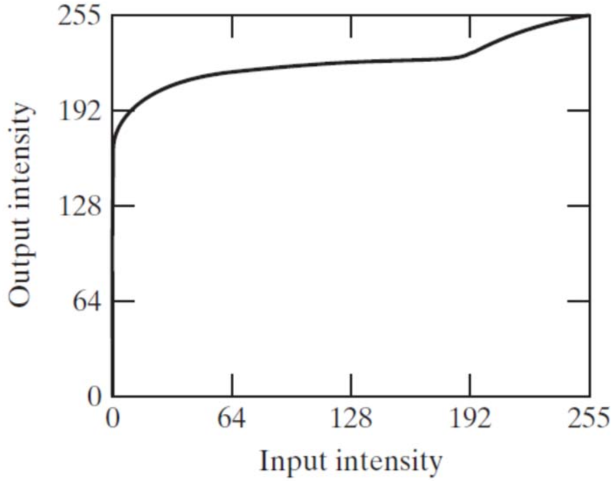
效果展示

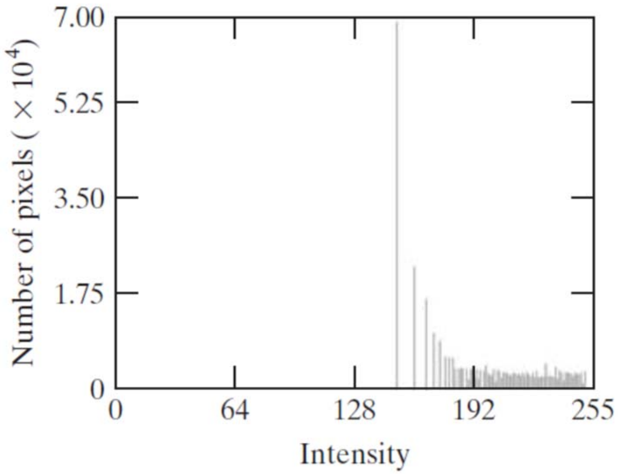
- 火星卫星图像


7.00
5.25
3.50
1.75
0
Number of pixels (× 10^4)
0
64
128
192
255
Intensity

效果展示

- 直方图均衡





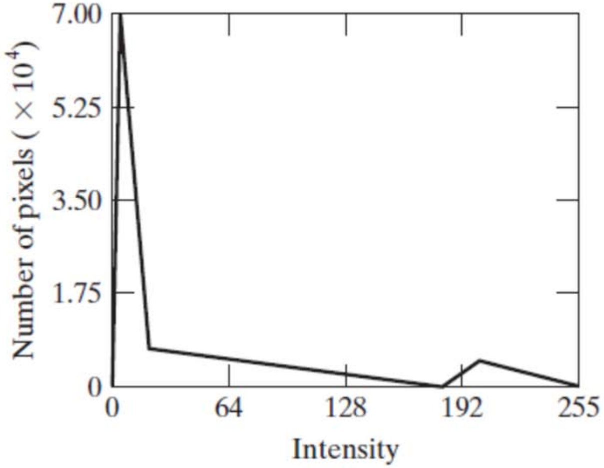
只是"漂白"了，并没有增加太多信息

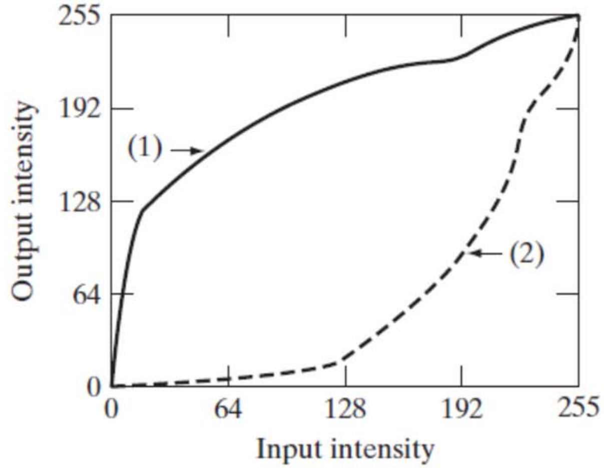
效果展示

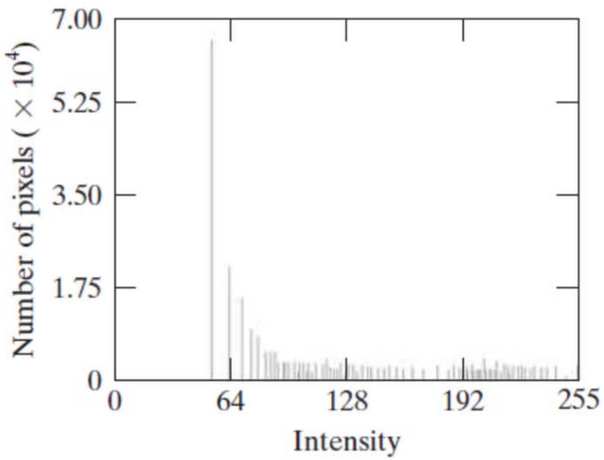
- 直方图匹配

更靠近原图像，但增加了更多细节

如何确定需要规定的直方图?







与具体问题相关。一旦规定好，就有技术可以处理

局部直方图处理

- 中小区域的细节容易被忽略
- 如果不希望对整体图像增强，只希望对局部进行增强怎么办?
- 以图像中每个像素的邻域中灰度分布为基础设计变换函数

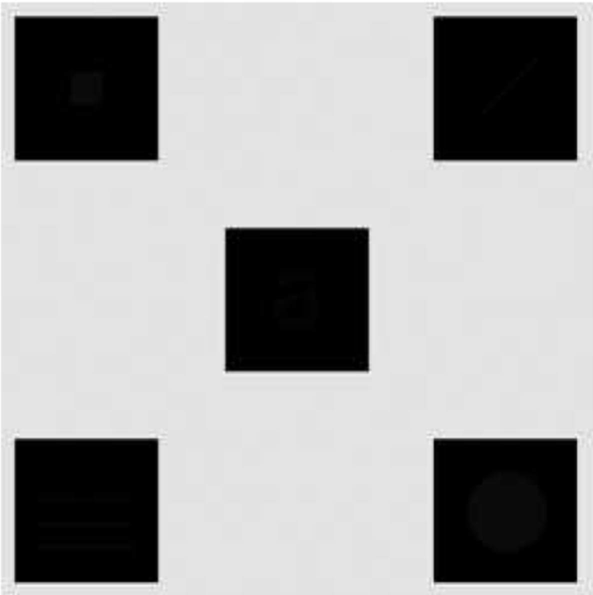
步骤

- 定义一个领域，并不断平移中心位置

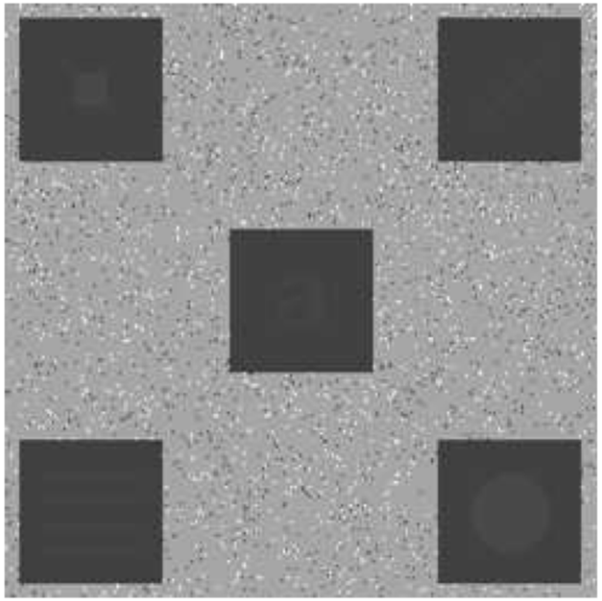
1. 在每一个位置，计算该邻域中点的直方图
   - 许多元素为0
2. 利用直方图均衡化或直方图匹配得到变换函数
3. 将变换函数作用到邻域中心像素

- 移动重复上述过程

效果展示



原图



全局直方图均衡

3×3
局部直方图均衡

在图像增强中使用直方图统计

- 回顾均值、方差

灰度平均值 $$m = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p(r_i)$$

n阶距 $$\mu_n(r) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^n p(r_i)$$

反应了灰度值的散度

2阶距最常用，也称为方差 $$\mu_2(r) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^2 p(r_i)$$

思考

$\mu_0(r), \mu_1(r)$

等于什么？

采样

- 采样均值

$$m = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

- 采样方差

$$\sigma^2 = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[f(x, y) - m\right]^2$$

0	0	1	1	2
1	2	3	0	1
3	3	2	2	0
2	3	1	0	0
1	1	3	2	2

$$m = \frac{1}{25}\sum_{x=0}^{4}\sum_{y=0}^{4} f(x, y)$$

$$= 1.44$$

$$\sigma^2 = 1.1264$$

在图像增强中使用直方图统计

- 均值和方差常用于局部增强
- 局部均值和局部方差

$$m_{S_{xy}} = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p_{S_{xy}}(r_i)$$

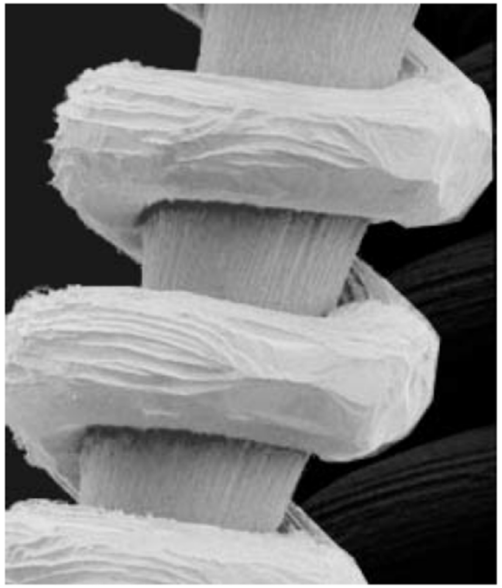
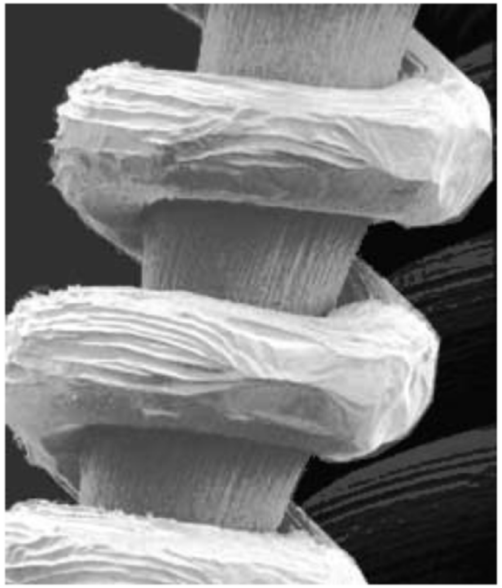
$$\sigma_{S_{xy}}^2 = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m_{S_{xy}})^2 p_{S_{xy}}(r_i)$$

  - S_{xy}表示像素(x, y)的近邻集合
  - 许多灰度值频率为0

在图像增强中使用直方图统计

- 使用局部直方图统计增强

$$g(x, y) = \begin{cases} E \cdot f(x, y) & \text{if } m_{S_{xy}} \le k_0 m_G \text{ AND } k_1\sigma_G \le \sigma_{S_{xy}} \le k_2\sigma_G \\ f(x, y) & \text{otherwise} \end{cases}$$


原图　　全局直方图均衡　　局部直方图统计

直方图用于图像增强

1. 应用众多
2. 给定图像A的直方图$p_r(r)$，单调灰度变换函数$s = T(r)$，变换后图像B的直方图$p_s(s)$

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right| = p_r(r)\left|\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right)^{-1}\right|$$

3. 给定图像A的直方图$p_r(r)$，变换后均衡化的图像B，如何求灰度变换函数$s = T(r)$？
   1. 直方图均衡
   2. 直方图匹配

讨论

- 直方图均衡化一大好处：不需要更多的参数，完全“自动化”
- 离散形式下，直方图均衡化的概率密度函数是否完全均匀？ ✖
- 直方图均衡化会有失效的时候吗？ ✔

小作业

- 实现直方图均衡化
- 要求
  - 三个部分（图像、代码、文档）
  - 语言：**Matlab**
- 提交的细节可以查阅作业的主页
  - 作业主页可以从课程主页上找到
  - http://lamda.nju.edu.cn/chenyuhui/dip19/dip19.html
- 截止日期是：**9月30日23:59:59**

下一章