数字图像处理

第四讲

空间域图像增强（Part III）

空间滤波、算术操作增强

空间滤波

- 空间滤波基础
  - 空间滤波机理
  - 空间相关与卷积
- 平滑空间滤波器
  - 平滑线性滤波器
  - 统计排序滤波器
- 锐化空间滤波器
  - 拉普拉斯算子
  - 梯度
- 混合空间增强法

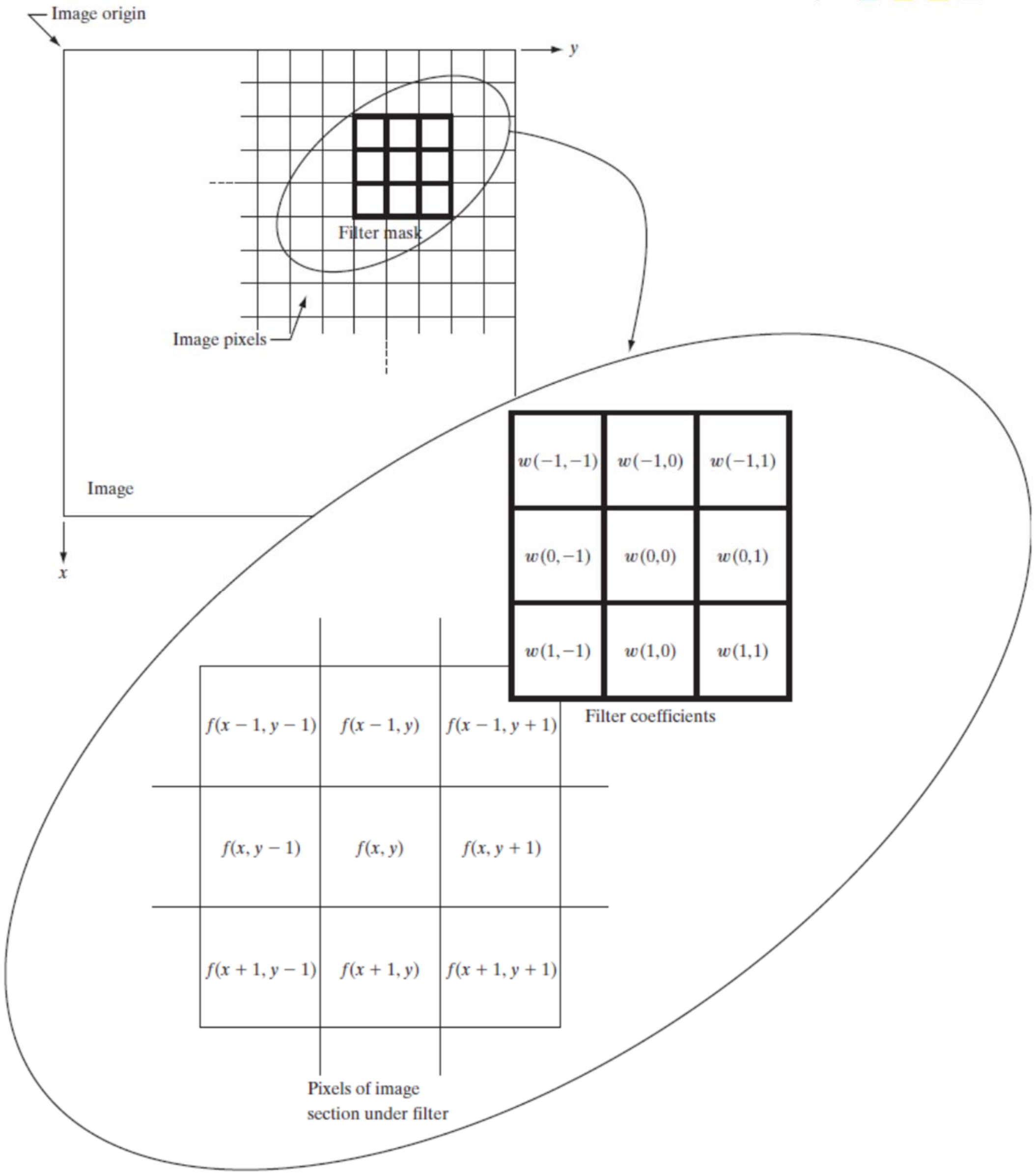
空间滤波

- 空间滤波基础
  - 空间滤波机理
  - 空间相关与卷积
- 平滑空间滤波器
  - 平滑线性滤波器
  - 统计排序滤波器
- 锐化空间滤波器
  - 拉普拉斯算子
  - 梯度
- 混合空间增强法

空间滤波机理

- 空间滤波器
  - 邻域（矩形）
  - 预定义的操作

$$g(x,y) = w(-1,-1)f(x-1,y-1)$$
$$+w(-1,0)f(x-1,y)$$
$$+\cdots$$
$$+w(0,0)f(x,y)$$
$$+\cdots$$
$$+w(1,1)f(x+1,y+1)$$



空间滤波机理

- $m \times n$的模板
  - $m = 2a + 1$，$n = 2b + 1$
  - 最小为3×3
- 滤波操作

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s, t) f(x + s, y + t)$$

  - x和y是可变的
- 线性空间滤波 $\leftrightarrow$ 频率域滤波

空间相关与卷积

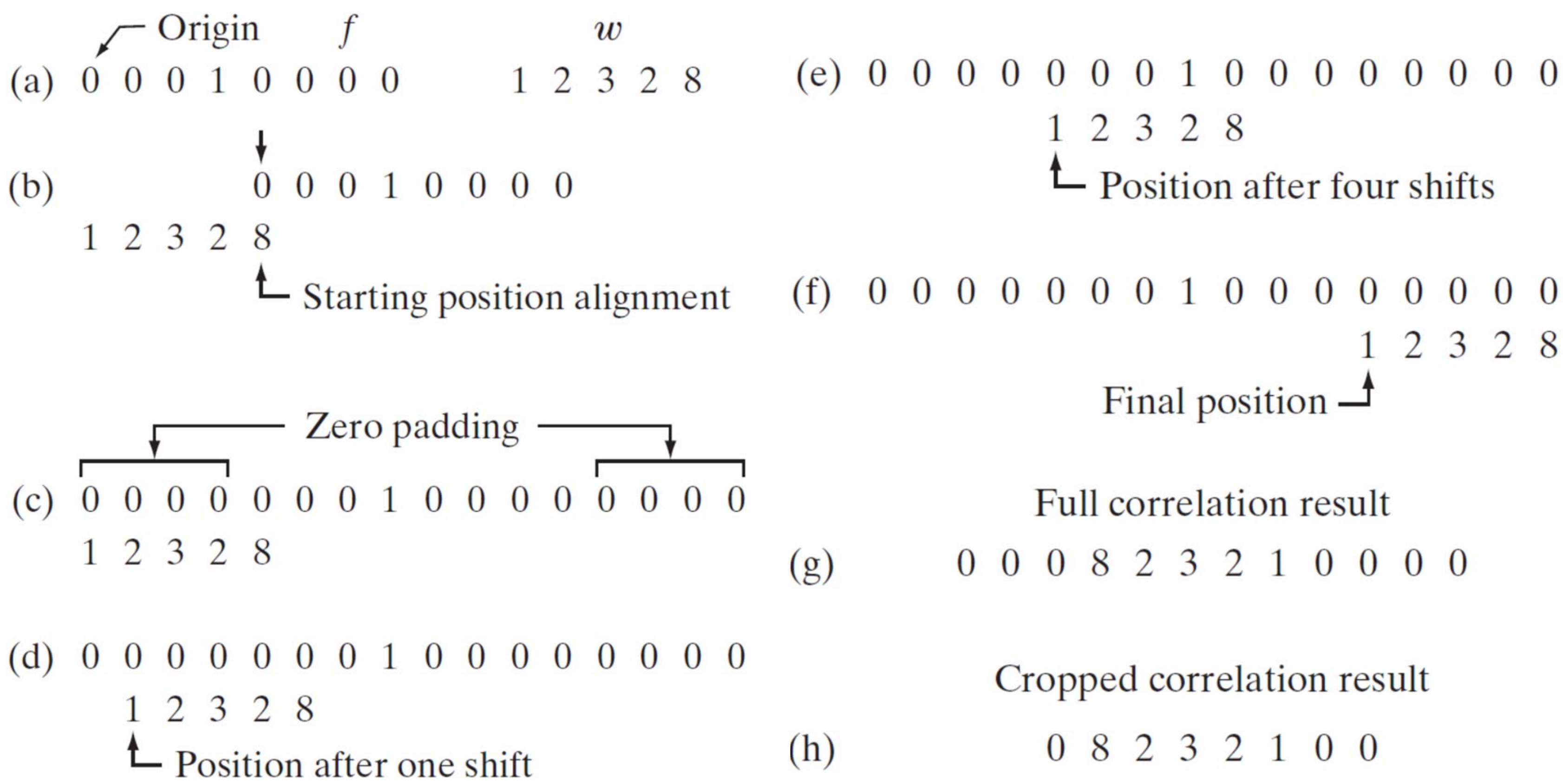
- 相关（Correlation）
  - 平移滤波器模板，计算每个位置乘积之和

- 卷积（Convolution）
  - 与相关相似，但滤波器要旋转180度

- 实际中未必严格区分

相关

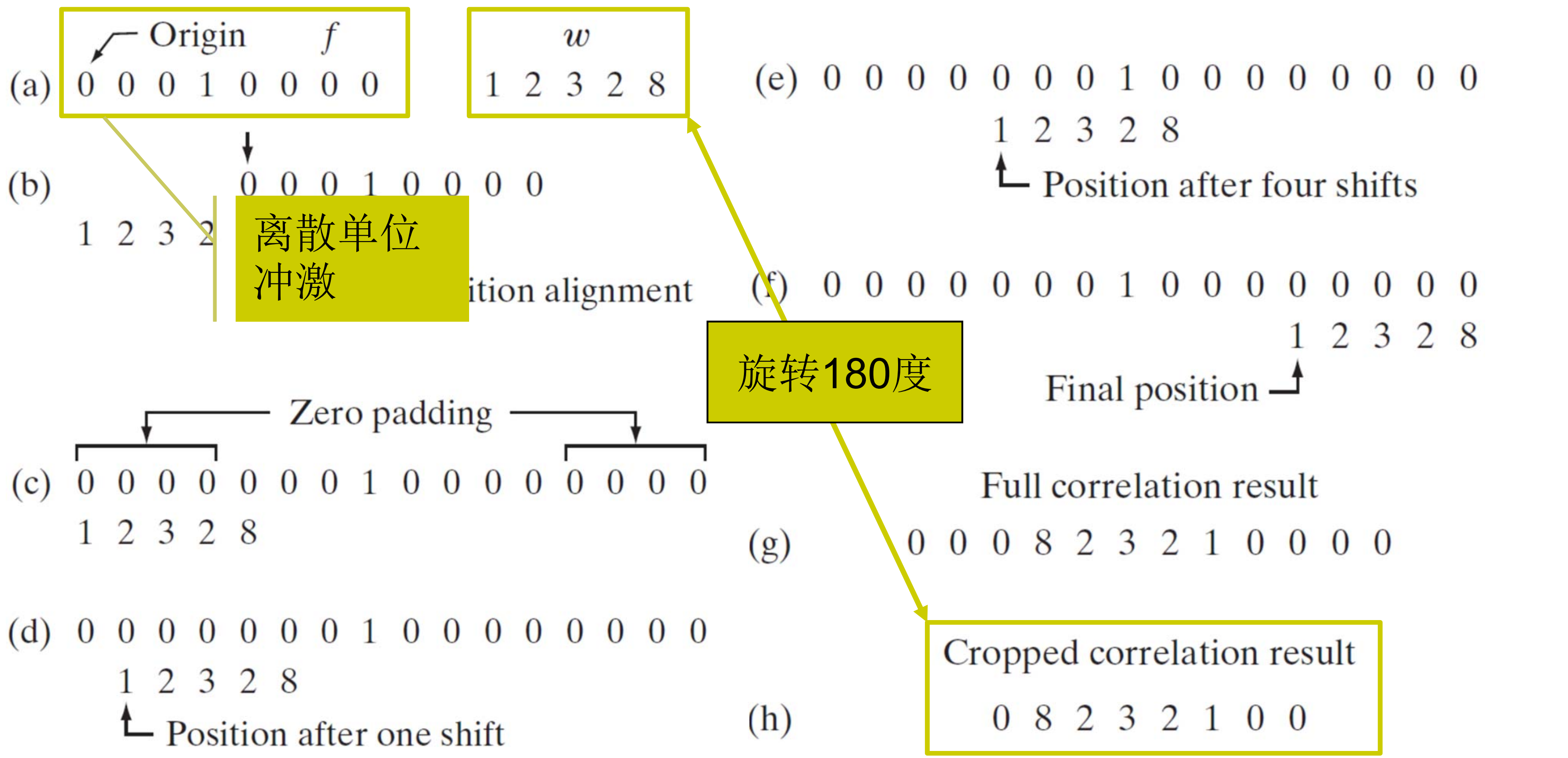
- 补零、计算、滑动、裁剪



Origin
f
w
(a) 0 0 0 1 0 0 0 0
1 2 3 2 8
(b) 0 0 0 1 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Starting position alignment
Zero padding
(c) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
(d) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Position after one shift
(e) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Position after four shifts
(f) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Final position
Full correlation result
(g) 0 0 0 8 2 3 2 1 0 0 0 0
Cropped correlation result
(h) 0 8 2 3 2 1 0 0

相关

- 补零、计算、滑动、裁剪



Origin f
(a) 0 0 0 1 0 0 0 0
w
1 2 3 2 8
(b) 0 0 0 1 0 0 0 0
1 2 3 2
离散单位
冲激
ition alignment
Zero padding
(c) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
(d) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Position after one shift
(e) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Position after four shifts
(f) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8
Final position
旋转180度
Full correlation result
(g) 0 0 0 8 2 3 2 1 0 0 0 0
Cropped correlation result
(h) 0 8 2 3 2 1 0 0

卷积

- 旋转、补零、计算、滑动、裁剪

Origin　　f　　w rotated 180°

0 0 0 1 0 0 0 0　　8 2 3 2 1　(i)

0 0 0 1 0 0 0 0　(j)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (k)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (l)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (m)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (n)
8 2 3 2 1

Full convolution result

0 0 0 1 2 3 2 8 0 0 0 0　(o)

Cropped convolution result

0 1 2 3 2 8 0 0　(p)

矩阵形式

- 上下填充
- 左右填充

Origin $f(x, y)$

$$\begin{array}{ccccc}
0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0
\end{array}$$

$w(x, y)$

$$\begin{array}{ccc}
1&2&3\\
4&5&6\\
7&8&9
\end{array}$$

(a)

Padded f

$$\begin{array}{ccccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}$$

(b)

Initial position for w

$$\begin{array}{ccccccccc}
1&2&3&0&0&0&0&0&0\\
4&5&6&0&0&0&0&0&0\\
7&8&9&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}$$

(c)

Full correlation result

$$\begin{array}{ccccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&9&8&7&0&0&0\\
0&0&0&6&5&4&0&0&0\\
0&0&0&3&2&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}$$

(d)

Cropped correlation result

$$\begin{array}{ccccc}
0&0&0&0&0\\
0&9&8&7&0\\
0&6&5&4&0\\
0&3&2&1&0\\
0&0&0&0&0
\end{array}$$

(e)

Rotated w

$$\begin{array}{ccccccccc}
9&8&7&0&0&0&0&0&0\\
6&5&4&0&0&0&0&0&0\\
3&2&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}$$

(f)

Full convolution result

$$\begin{array}{ccccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&2&3&0&0&0\\
0&0&0&4&5&6&0&0&0\\
0&0&0&7&8&9&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}$$

(g)

Cropped convolution result

$$\begin{array}{ccccc}
0&0&0&0&0\\
0&1&2&3&0\\
0&4&5&6&0\\
0&7&8&9&0\\
0&0&0&0&0
\end{array}$$

(h)

小结

- $m \times n$的滤波器与图像做相关操作

$$w(x, y) \star f(x, y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s, t) f(x + s, y + t)$$

  - 寻找匹配

- $m \times n$的滤波器与图像做卷积操作

$$w(x, y) \bigstar f(x, y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s, t) f(x - s, y - t)$$

线性滤波的向量表示

- 把滤波器和灰度值拉成向量

$$R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \cdots + w_{mn} z_{mn} = \sum_{k=1}^{mn} w_k z_k = \mathbf{w}^\top \mathbf{z}$$

  - $\mathbf{w}$是$m \times n$的滤波器系数
  - $\mathbf{z}$为相应图像的灰度值

w_1	w_2	w_3
w_4	w_5	w_6
w_7	w_8	w_9

$$\begin{aligned} R &= w_1 z_1 + w_2 z_2 + \ldots + w_9 z_9 \\ &= \sum_{k=1}^{9} w_k z_k \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{z} \end{aligned}$$

空间滤波器模板

- 计算平均灰度

$$R=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} z_i$$

- 两变量的连续函数（高斯）

$$h(x,y)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

  - $w_1=h(-1,-1),w_2=h(-1,0),\cdots,w_9=h(1,1)$

- 非线性滤波器
  - 更加强大

空间滤波

- 空间滤波基础
  - 空间滤波机理
  - 空间相关与卷积
- 平滑空间滤波器
  - 平滑线性滤波器
  - 统计排序滤波器
- 锐化空间滤波器
  - 拉普拉斯算子
  - 梯度
- 混合空间增强法

平滑线性滤波器

- 均值滤波器
  - 优点：降低噪声
  - 缺点：边缘模糊

$$R = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} z_i$$

$$\frac{1}{9} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

  - 先求和，再归一化

平滑线性滤波器

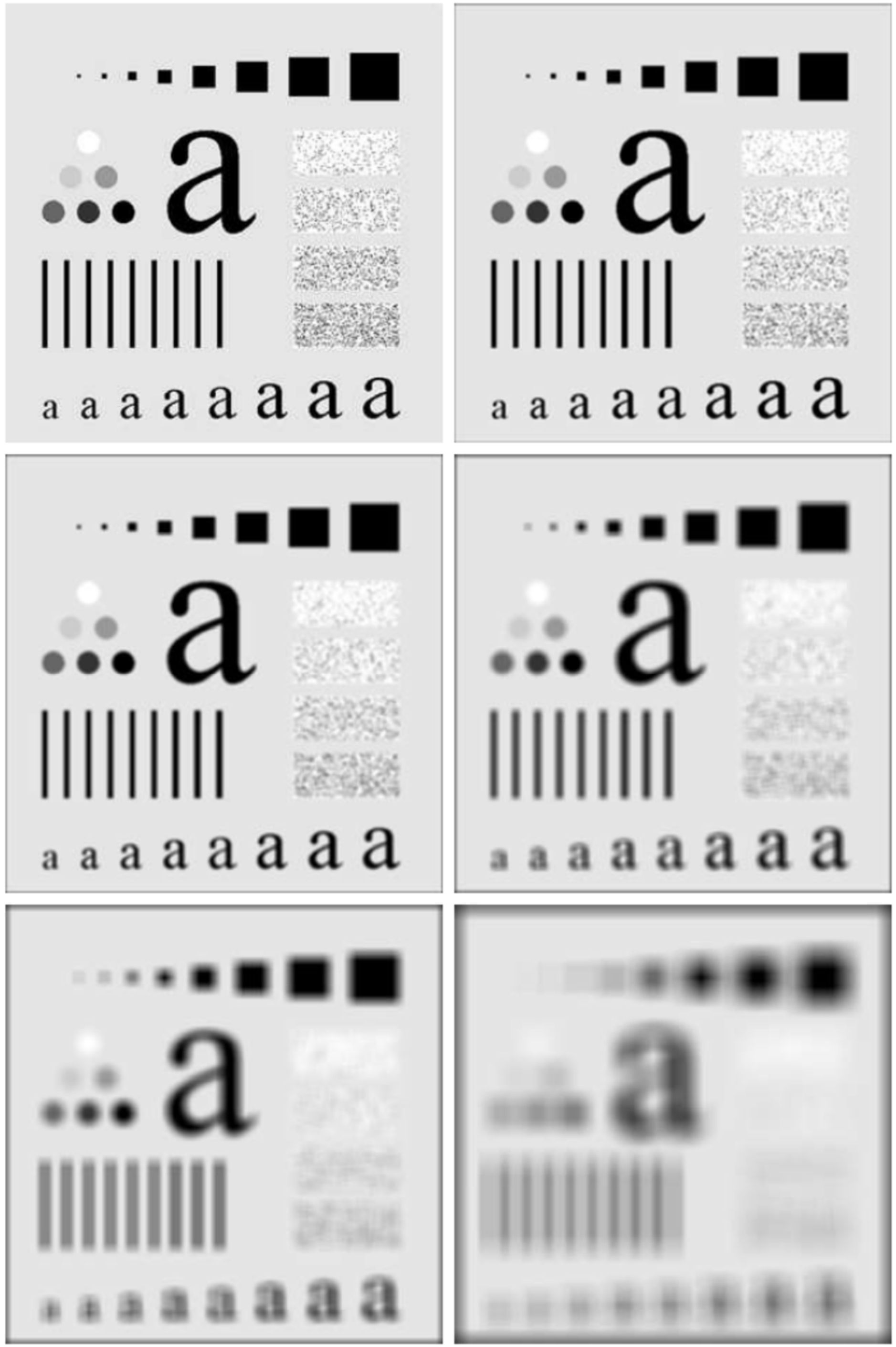
- 加权线性滤波器
  - 非均匀权重
  - 降低模糊

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x+s, y+t)}{\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b} w(s,t)}$$

$$\frac{1}{16} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

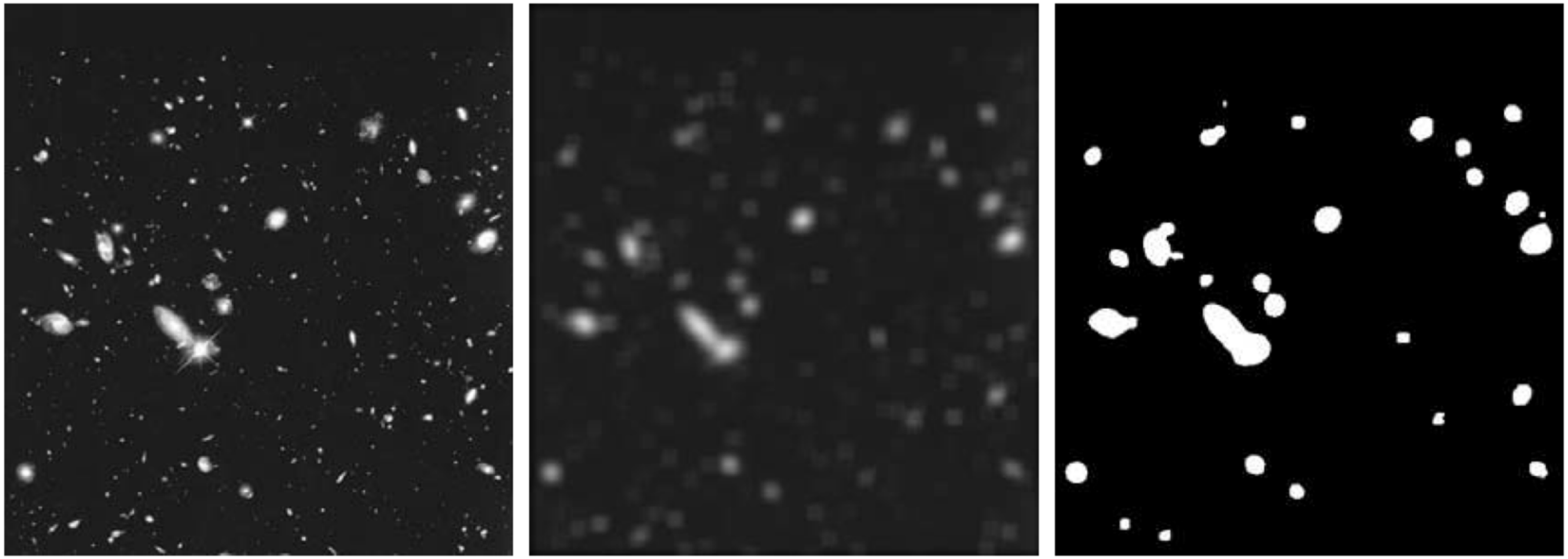
效果展示

- 3、5、9、15、35的方形均值滤波
  - 小物体
  - 边缘
  - 边界



实际应用

- 哈勃望远镜照片
  - 15×15均值滤波器
  - 阈值处理（最高亮度25%）

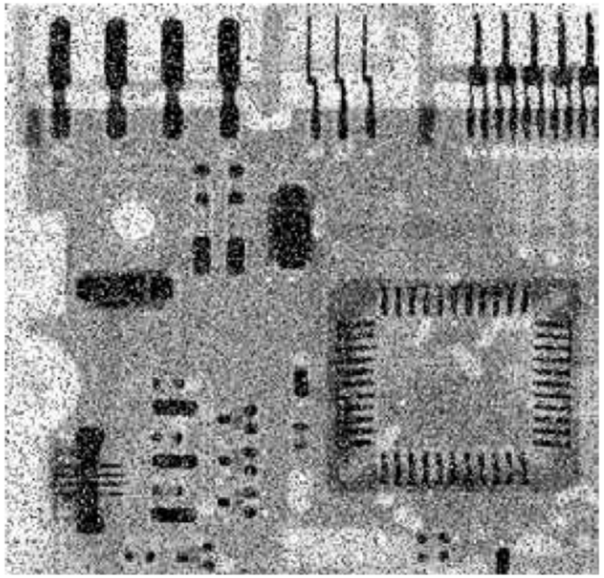


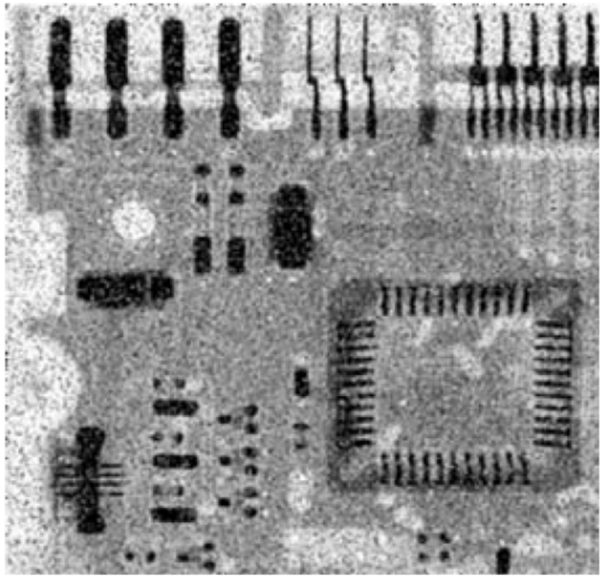
统计排序滤波器

- 非线性滤波器
  - 对滤波器覆盖的像素排序
  - 用排序决定的值替代中心像素
- 中值滤波器
  - 10、15、20、20、20、20、20、25、100
- 最大值滤波器
  - max
- 最小值滤波器
  - min

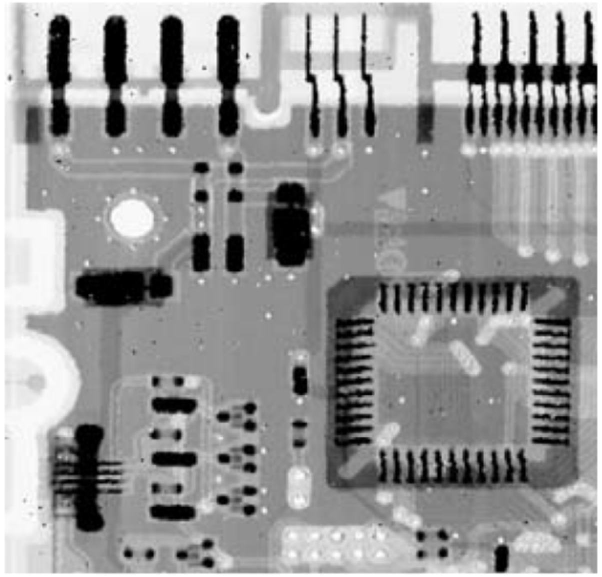
效果展示

- 电路板的X射线图像





3 × 3均值滤波



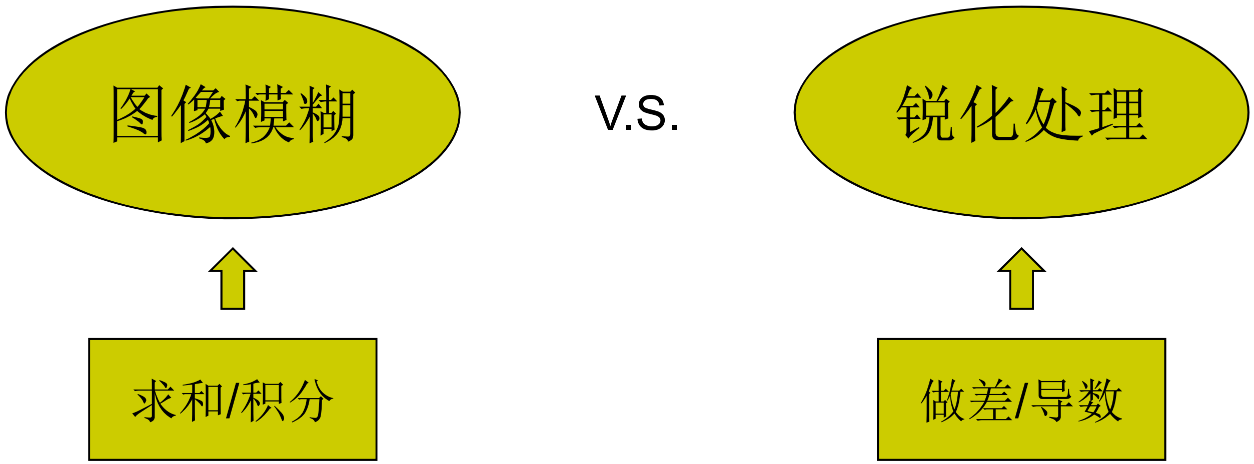
3 × 3中值滤波

空间滤波

- 空间滤波基础
  - 空间滤波机理
  - 空间相关与卷积
- 平滑空间滤波器
  - 平滑线性滤波器
  - 统计排序滤波器
- 锐化空间滤波器
  - 拉普拉斯算子
  - 梯度
- 混合空间增强法

锐化处理

- 目的
  - 突出灰度的过渡部分
- 应用广泛
  - 电子印刷、医学成像、工业检测、制导



数学基础

- 一阶导数的性质
  - 在恒定灰度区域为零
  - 在突变（斜坡、台阶）的起点非零
  - 沿着斜坡非零
- 二阶导数的性质
  - 在恒定灰度区域为零
  - 在突变（斜坡、台阶）的起点和终点非零
  - 沿着恒定斜率斜坡为零

数学基础

- 一维函数$f(x)$
  - 一阶导数

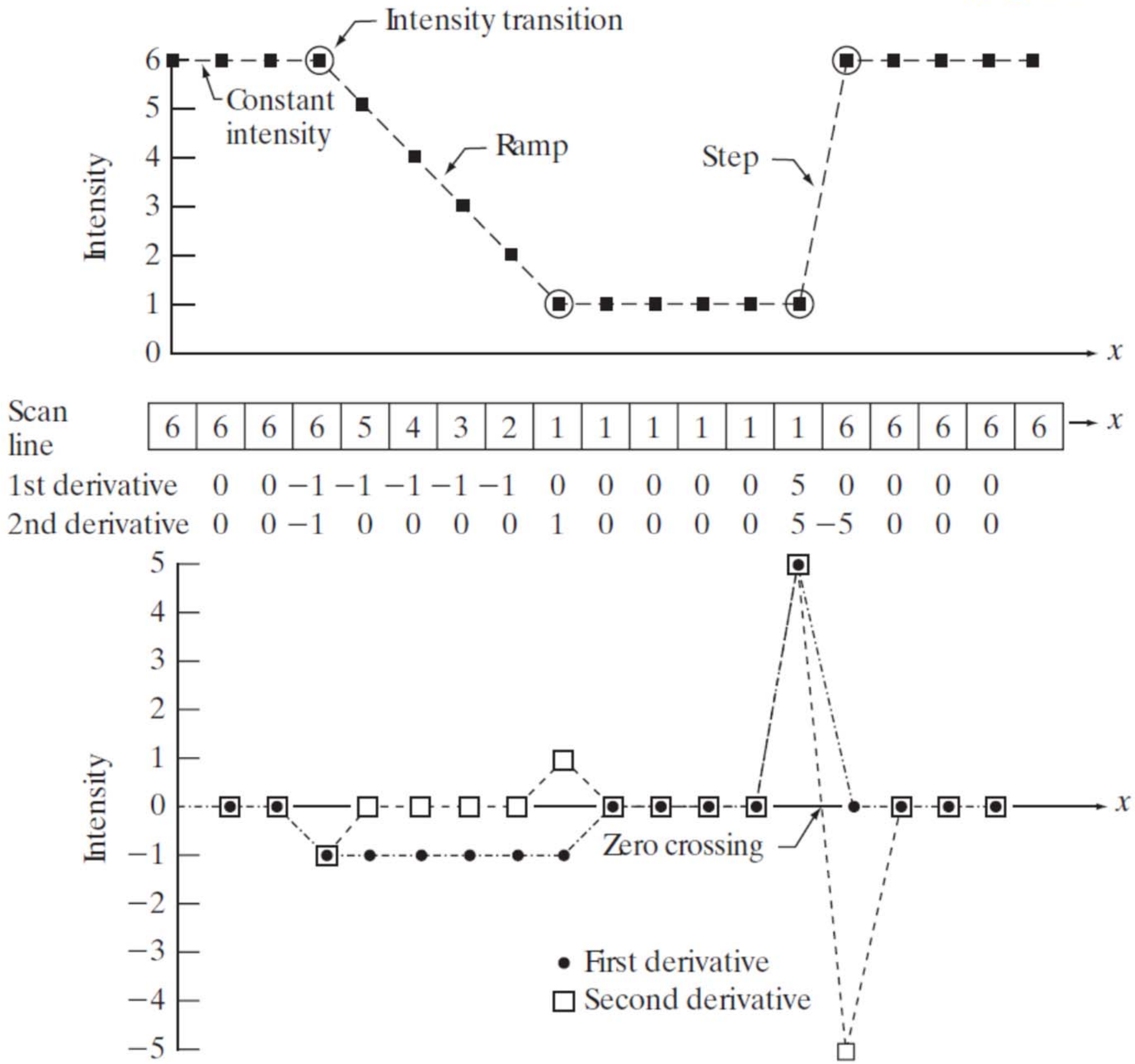
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x+1) - f(x)$$

  - 二阶导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)$$

一阶和二阶导数的对比

- 恒定区域
- 斜坡
- 恒定区域
- 台阶
- 恒定区域



直观的结论

- 数字图像的边缘类似于斜坡

- 一阶导数产生较粗的边缘
  - 沿斜坡的导数一直非零

- 二阶导数产生两个有间距的双边缘
  - 由零分开、单像素宽

- 二阶导数在增强细节方面比一阶导数好！

使用二阶导数对图像锐化

- 各向同性滤波器
  - 旋转图像→滤波 = 滤波→旋转结果
- 拉普拉斯算子

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

  - 线性算子
- 离散拉普拉斯算子

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y)$$

拉普拉斯算子

- 标准形式

$$\nabla^2 f(x,y) = f(x+1,y) + f(x-1,y)$$
$$+ f(x,y+1) + f(x,y-1)$$
$$-4f(x,y)$$

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

90度增量
各向同性

- 对角线形式

1	1	1
1	−8	1
1	1	1

45度增量
各向同性

使用二阶导数对图像锐化

- 拉普拉斯算子结果叠加到图像中

$$g(x, y) = f(x, y) + c\left[\nabla^2 f(x, y)\right]$$

- 采用负的中心系数，$c = -1$
- 采用正的中心系数，$c = 1$

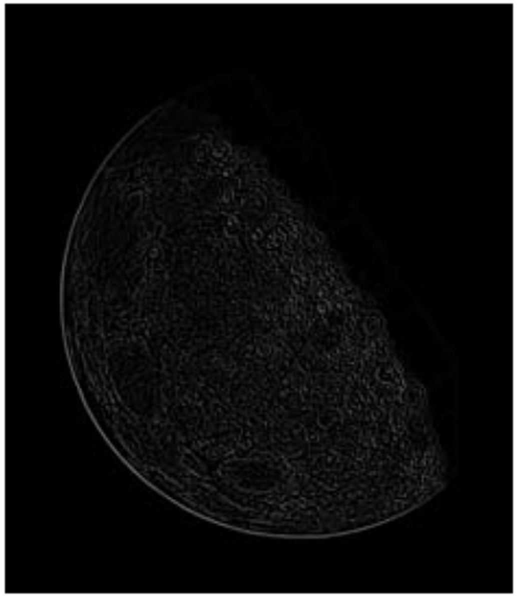
0	−1	0
−1	4	−1
0	−1	0

−1	−1	−1
−1	8	−1
−1	−1	−1

效果展示

- 月球图像

标准拉普拉斯滤波后结果



标准拉普拉斯锐化

对角版本拉普拉斯锐化

非锐化掩蔽

- 从原图像减去一幅非锐化版本
  1. 模糊原图像
  2. 从原图像减去模糊图像，得到模板
  3. 将模板加到原图像
- 具体公式

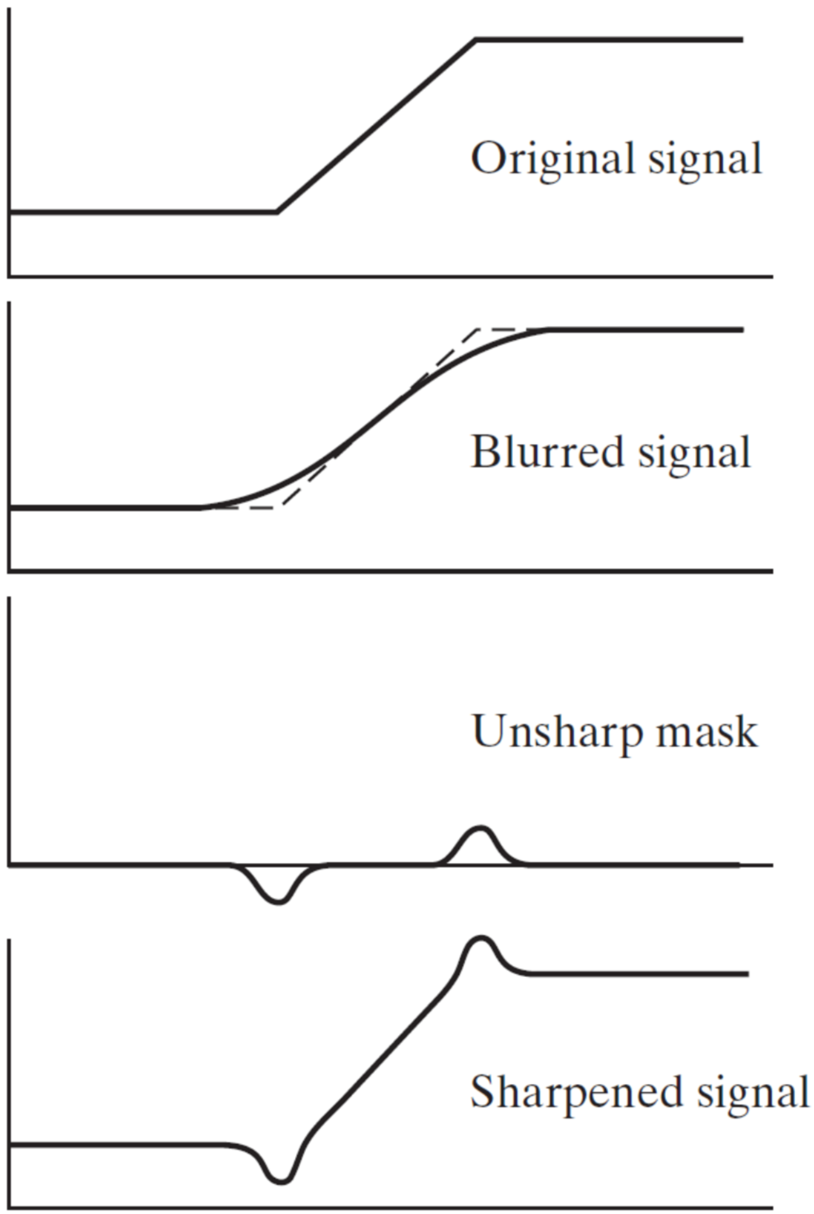
$$g_{\text{mask}}(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y)$$

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{\text{mask}}(x, y)$$

  - 模糊图像$\bar{f}(x,y)$
  - 非锐化掩蔽$k = 1$；高提升滤波$k > 1$

示例

- 非锐化模板
- 二阶导数



效果展示

- 文本增强

高斯滤波

非锐化模板

非锐化掩蔽

高提升滤波，$k = 4.5$

使用一阶导数对图像锐化

- 利用梯度的大小
  - 梯度：最大变化率的方向
    - 线性算子

$$\nabla f \equiv \mathrm{grad}(f) \equiv \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

  - 大小
    - 非线性

$$M(x, y) = \mathrm{mag}(\nabla f) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$

  - 近似计算

$$M(x, y) \approx |g_x| + |g_y|$$

梯度的离散近似

- 最简单的近似

$$g_x = z_8 - z_5$$

$$g_y = z_6 - z_5$$

- 交叉差分

$$g_x = z_9 - z_5$$

$$g_y = z_8 - z_6$$

$$M(x, y) = \left[(z_9 - z_5)^2 + (z_8 - z_6)^2\right]^{1/2}$$

$$M(x, y) \approx |z_9 - z_5| + |z_8 - z_6|$$

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

-1	0
0	1

0	-1
1	0

罗伯特交叉梯度算子

梯度的离散近似

- 对称模板

$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)$$

$$g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)$$

−1	−2	−1
0	0	0
1	2	1

−1	0	1
−2	0	2
−1	0	1

Soble算子

梯度的离散近似

- 对称模板

$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)$$

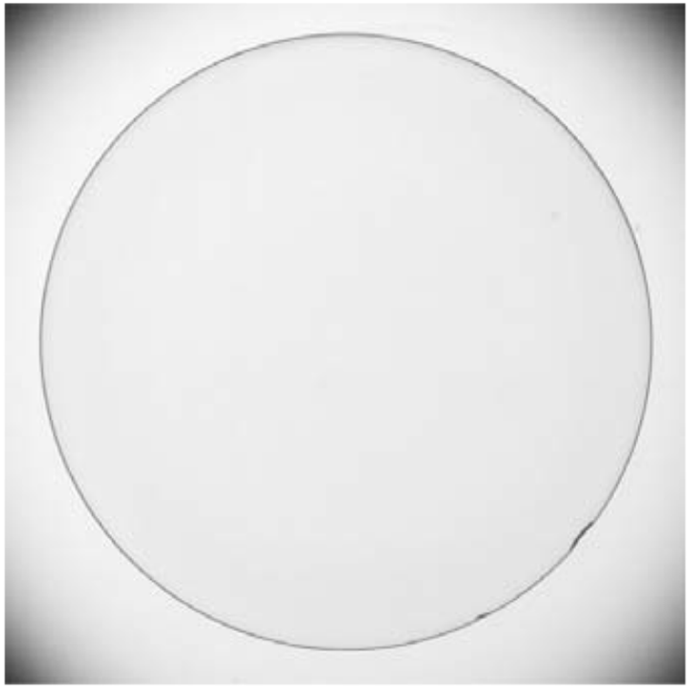
$$g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)$$

  - 计算大小

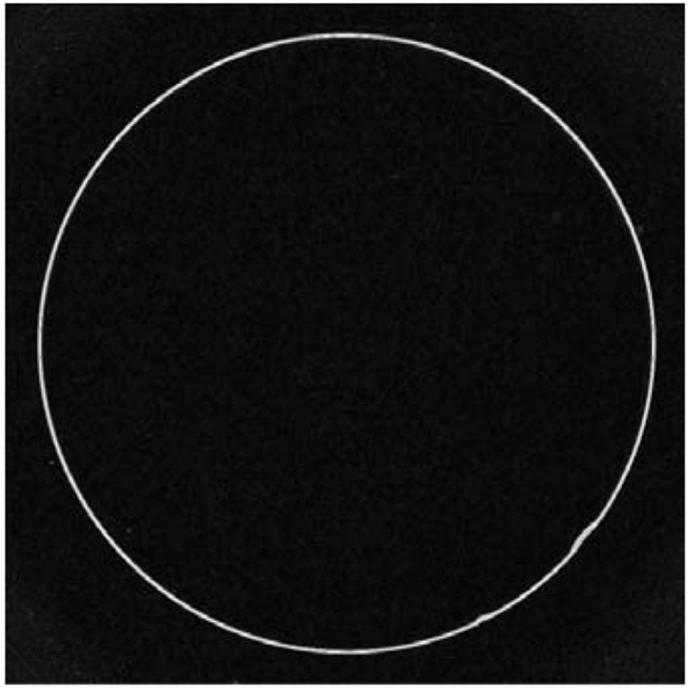
$$M(x, y) \approx |(z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)| + |(z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)|$$

效果展示

- 隐形眼镜光学图像



原图



Sobel梯度图像

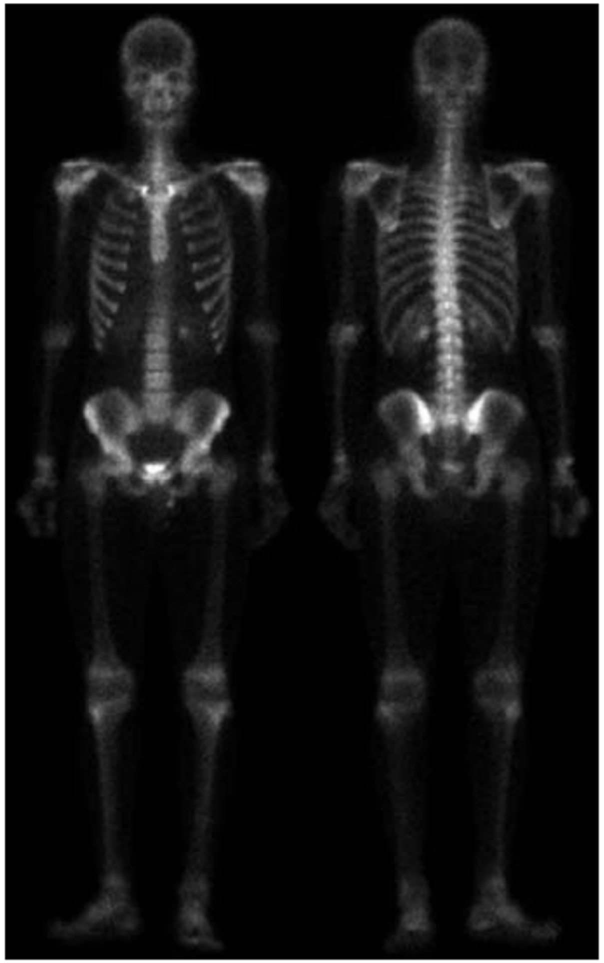
空间滤波

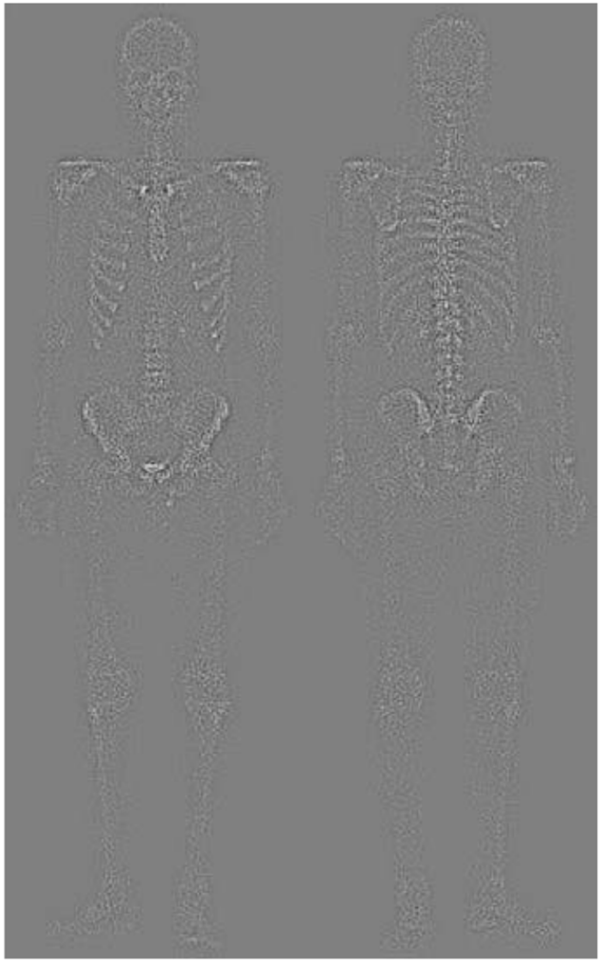
- 空间滤波基础
  - 空间滤波机理
  - 空间相关与卷积
- 平滑空间滤波器
  - 平滑线性滤波器
  - 统计排序滤波器
- 锐化空间滤波器
  - 拉普拉斯算子
  - 梯度
- 混合空间增强法

利用多种图像增强方法

- 人体骨骼扫描图像

原图

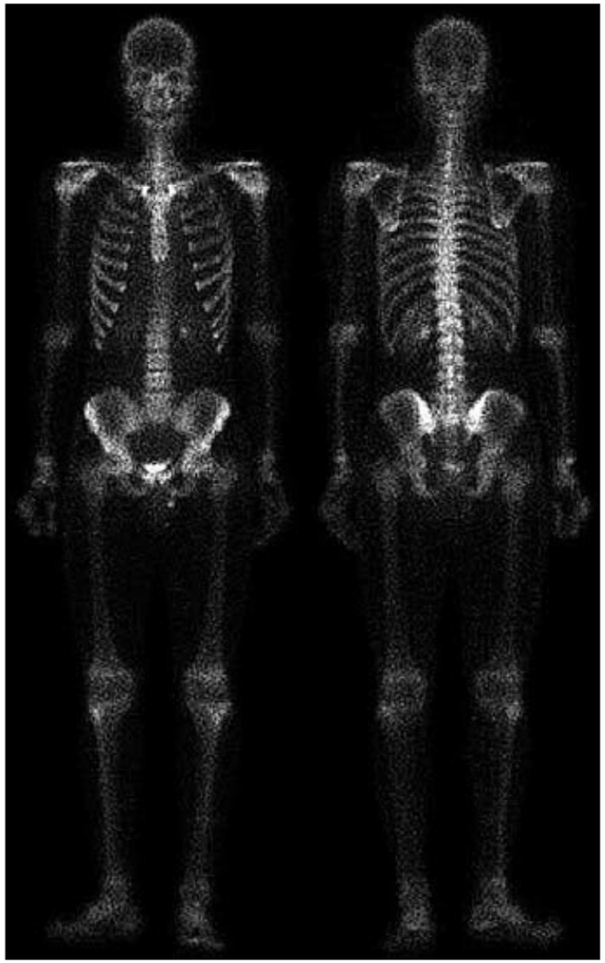




拉普拉斯
滤波

利用多种图像增强方法

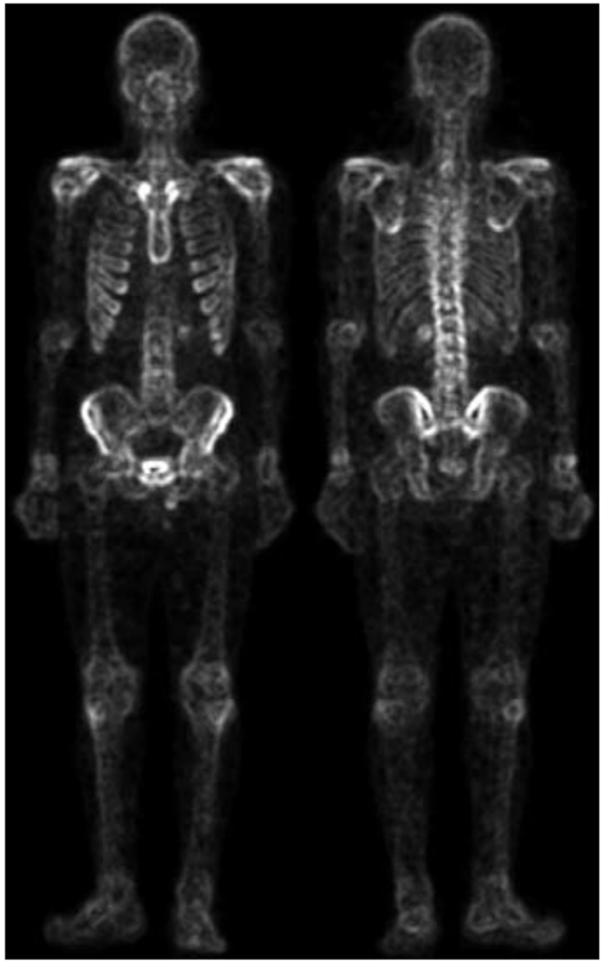
- 拉普拉斯锐化
  - 噪声过多
  - 过于增强细节



利用多种图像增强方法

- 梯度锐化（对变化响应强，细节响应弱）

Sobel梯度操作

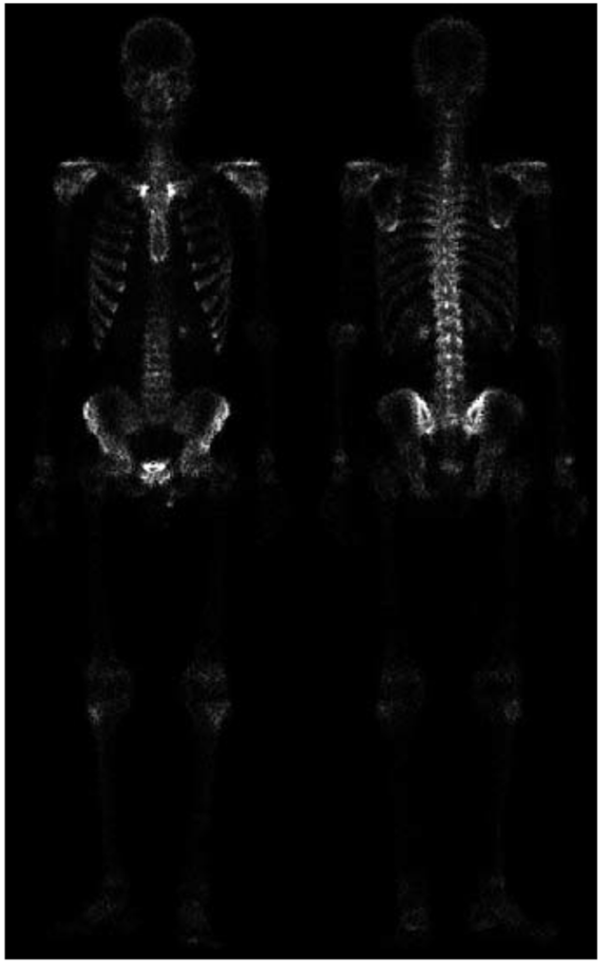


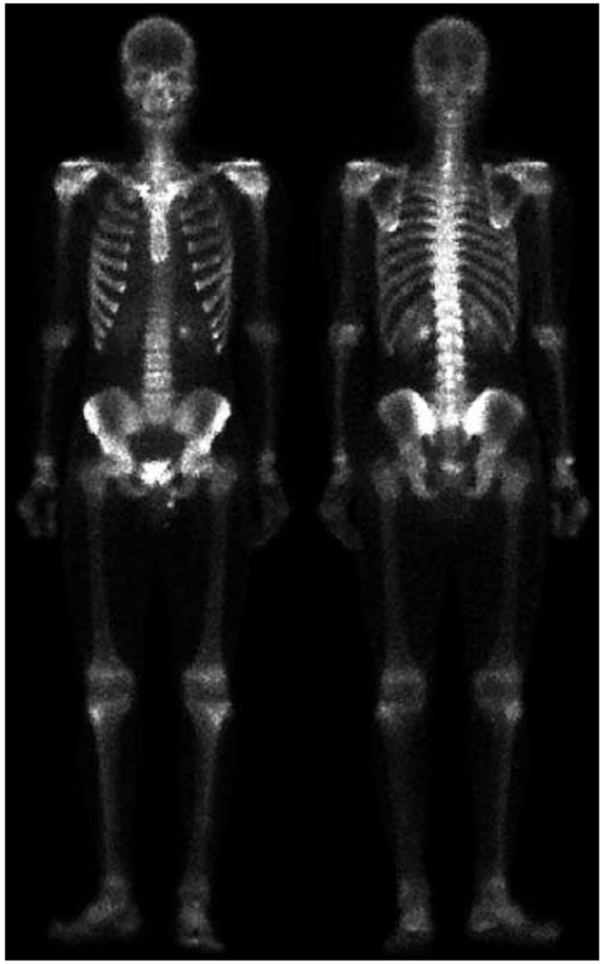
5 × 5 均值滤波

利用多种图像增强方法

- 结合拉普拉斯锐化和梯度锐化

拉普拉斯图像
平滑梯度图像
的乘积

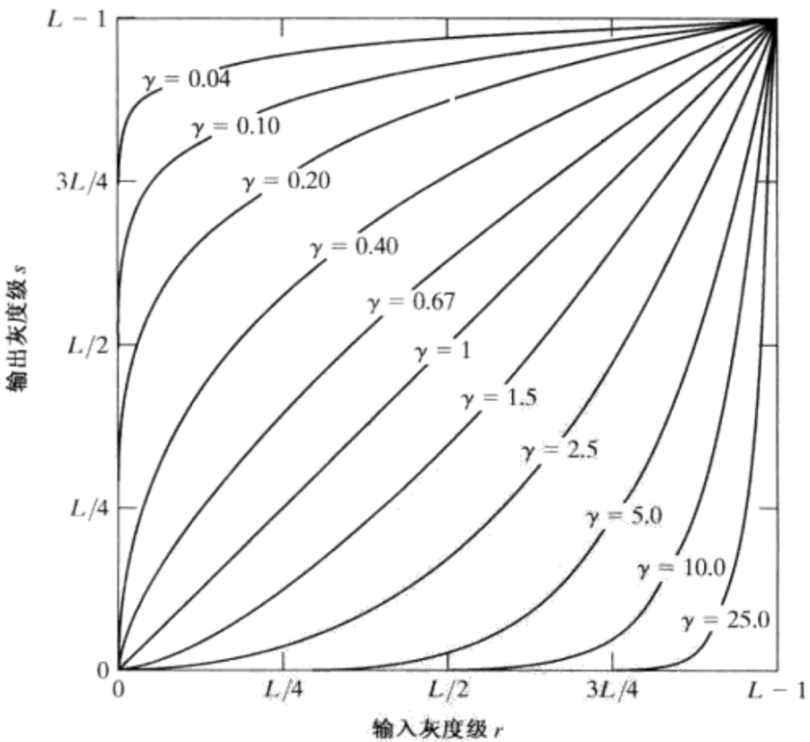




与原图
叠加

利用多种图像增强方法

- 幂律变换（$\gamma = 0.5$）



算术操作增强

- 算术/逻辑操作主要以像素对像素为基础在两幅或多幅图像间进行。

- 四大类
  - 加法
  - 减法
  - 乘法
  - 除法

$$s(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

$$d(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$$

$$p(x, y) = f(x, y) \times g(x, y)$$

$$v(x, y) = f(x, y) \div g(x, y)$$

图像加法处理

- 小例子

+

=

图像加法处理

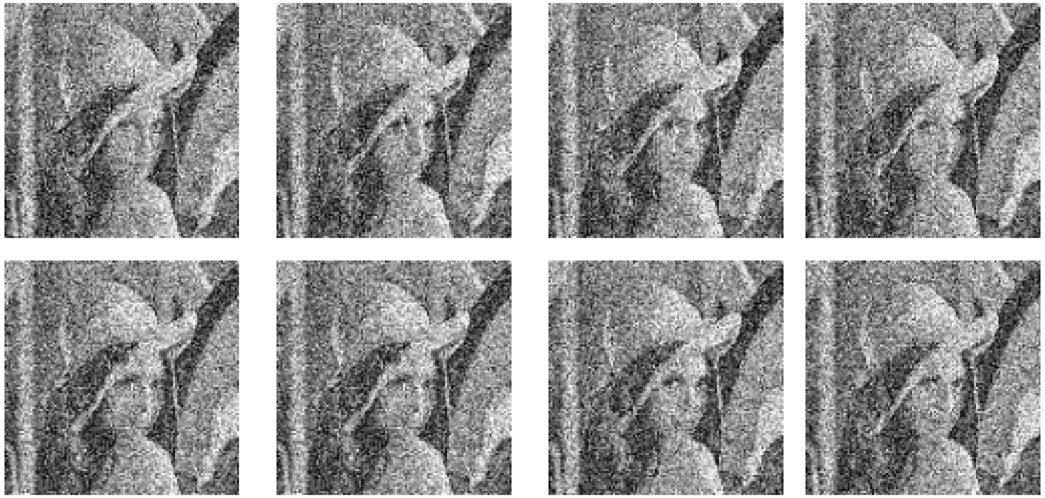
- 多次曝光：将不同时间曝光照片进行叠加，得到一张具有特殊效果的照片

图像加法处理

- 加法运算常用于减少图像中的随机噪声
  - 配准对齐

怎么理解？

图像加法处理



8张随机噪声图像

怎么证明？

加法处理后

噪声明显减少，图像得到增强

推导

- 定理：**对M幅加性噪声图像进行平均，可以使图像的平方信噪比提高M倍。**
- 证明：$D_i(x,y)=S(x,y)+N_i(x,y)$ where $E\{N_i(x,y)\}=0$

平方信噪比 $P(x,y)=\dfrac{S^2(x,y)}{E\{N^2(x,y)\}}$ $\quad\dfrac{\textbf{信号}}{\textbf{噪声}}$

$$\overline{D}(x,y)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left[S(x,y)+N_i(x,y)\right]$$

$$\overline{P}(x,y)=\frac{S^2(x,y)}{E\left\{\frac{1}{M^2}\left[\sum_{i=1}^{M}N_i(x,y)\right]^2\right\}}$$

推导续

- 由于

$$E\left\{\left[N_1(x,y)+N_2(x,y)\right]^2\right\}=E\left\{N_1^2(x,y)+N_2^2(x,y)\right\}+2E\left\{N_1(x,y)\right\}E\left\{N_2(x,y)\right\}$$

- 注意到N_1和N_2独立，因此

$$E\left\{\left[N_1(x,y)+N_2(x,y)\right]^2\right\}=E\left\{N_1^2(x,y)\right\}+E\left\{N_2^2(x,y)\right\}$$

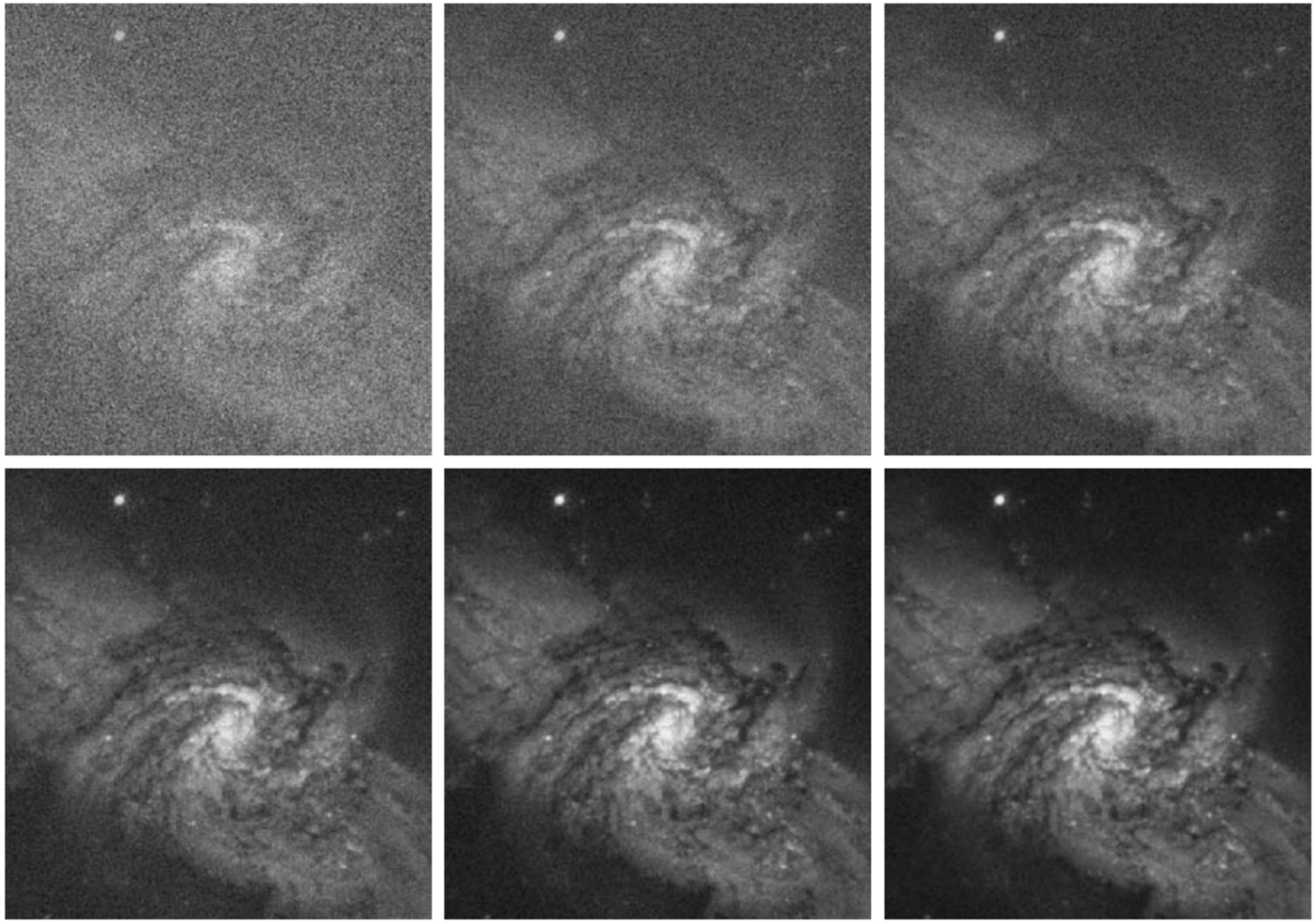
- 代入，有

$$\overline{P}(x,y)=\frac{M^2S^2(x,y)}{\sum_{i=1}^{M}N_i^2(x,y)}=\frac{M^2S^2(x,y)}{MN^2(x,y)}=MP(x,y)$$

效果展示

- 天文学

5 10



20 50 100

图像减法处理

- 操作定义

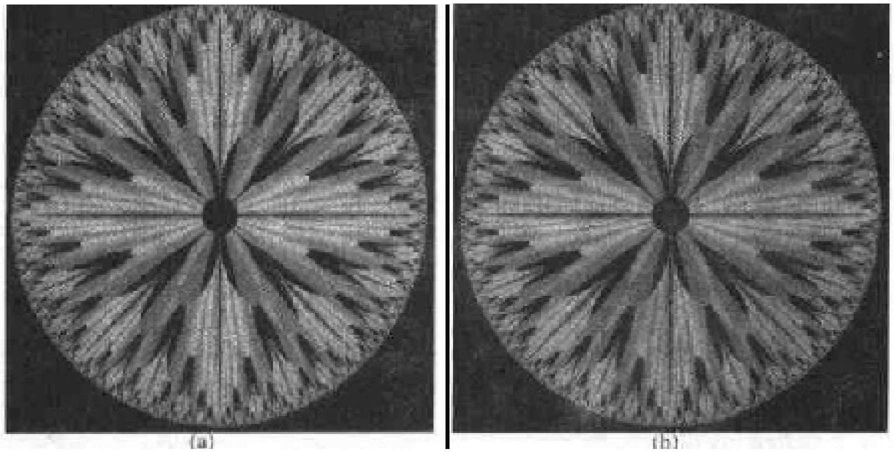
$$g(x,y) = f(x,y) - h(x,y)$$

减法怎么让图像增强呢？

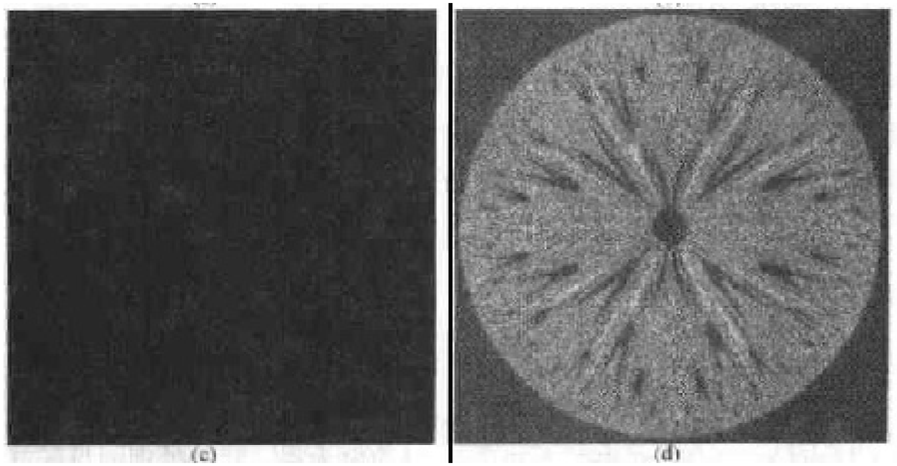
图像减法处理

- 操作定义

$$g(x,y) = f(x,y) - h(x,y)$$



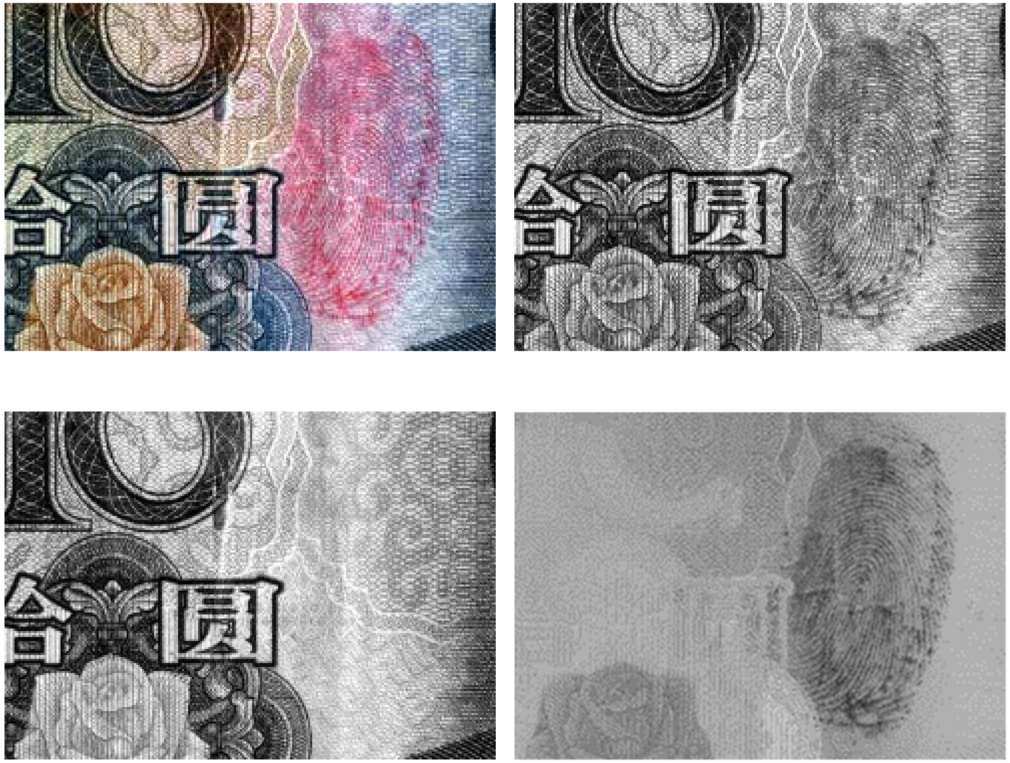
做差再做下直方图均衡化



图像差别的细节被观察到

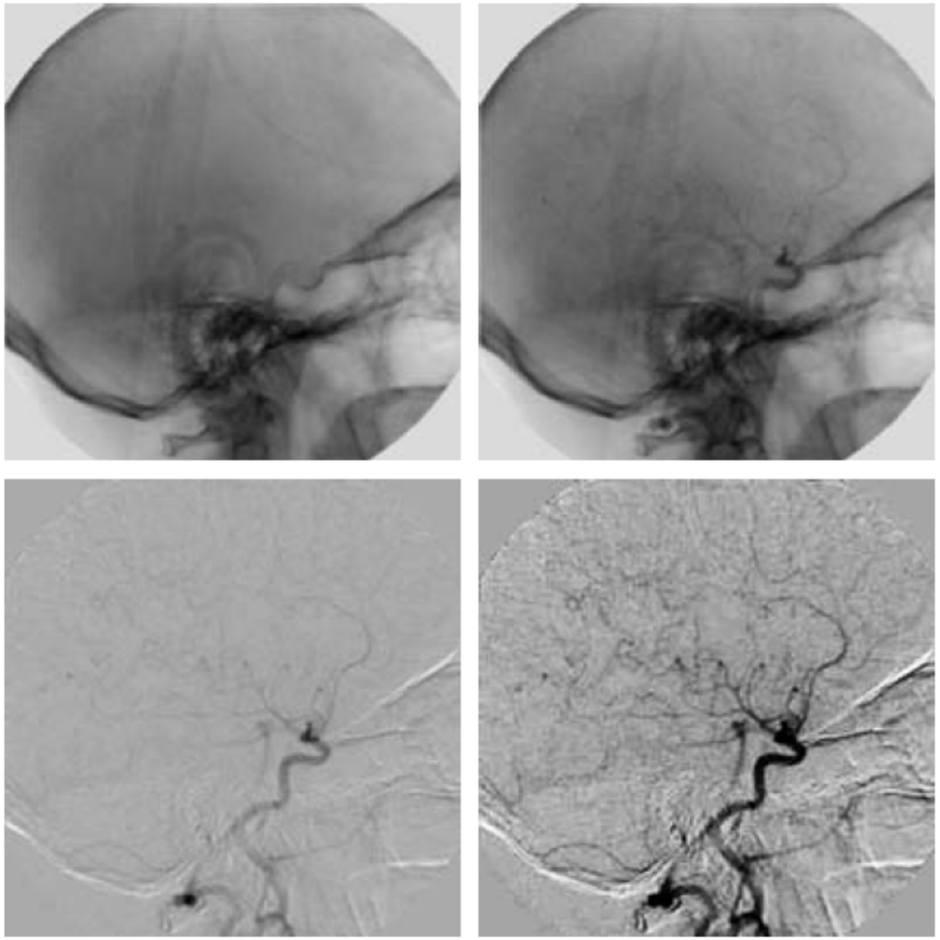
应用

- 指纹抽取



应用：掩膜式X光成像法

- 考量不同介质注入病人血管后的反应



模板图像

活体图像

差值图像

对比度增强

问题

减法操作后取值范围存在负数，比如-255到255，而数字图像只能存正数，怎么办?

- 主要两种办法，都可以称为规范化方法
  - 直接规范化到[0,255]

$$y = (x + 255)/2$$

  - 更精细地规划化到[0,255]

$$y = (x - min)/(max - min) * 255$$

min和max分别为做差图像的最小，最大像素

当min=-255，max=255时，两个方法效果一样；

图像乘法与除法处理

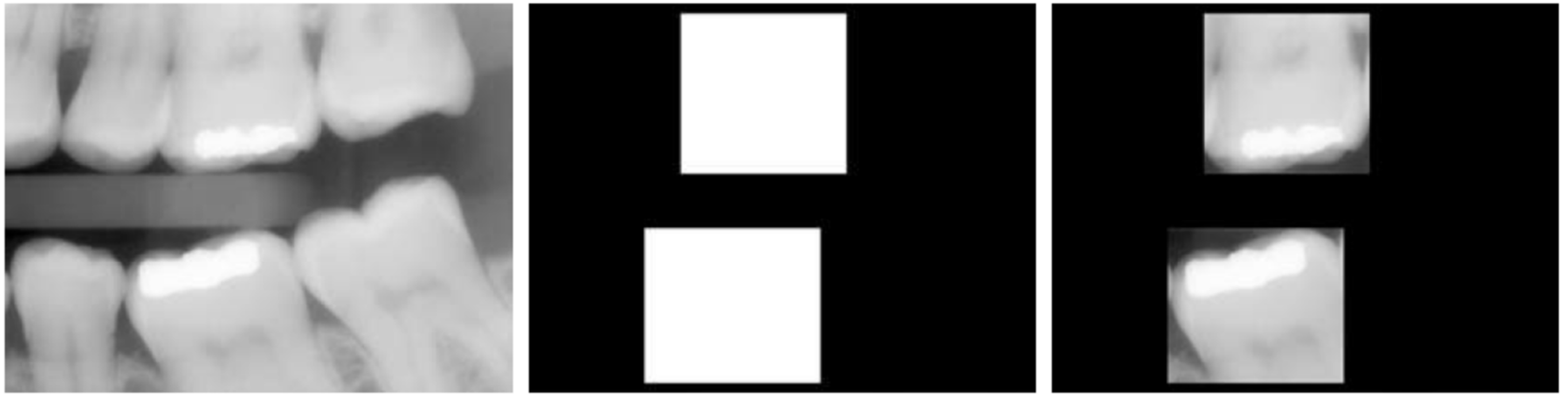
- 乘法：通常用来进行掩模运算
- 除法：通常可以用来归一化

$$g(x,y) = f(x,y)h(x,y)$$

虽然乘法和除法在某些特别应用上会很有用，但总体用的比较少。

例子

乘法



除法

下一讲