数字图像处理

第五讲

空间域图像增强（Part IV)

集合/逻辑操作、空间操作、灰度内插

目录

- 集合操作
- 逻辑操作
- 空间操作
  - 单像素操作
  - 邻域操作
  - 几何空间变换
  - 图像配准
- 灰度内插

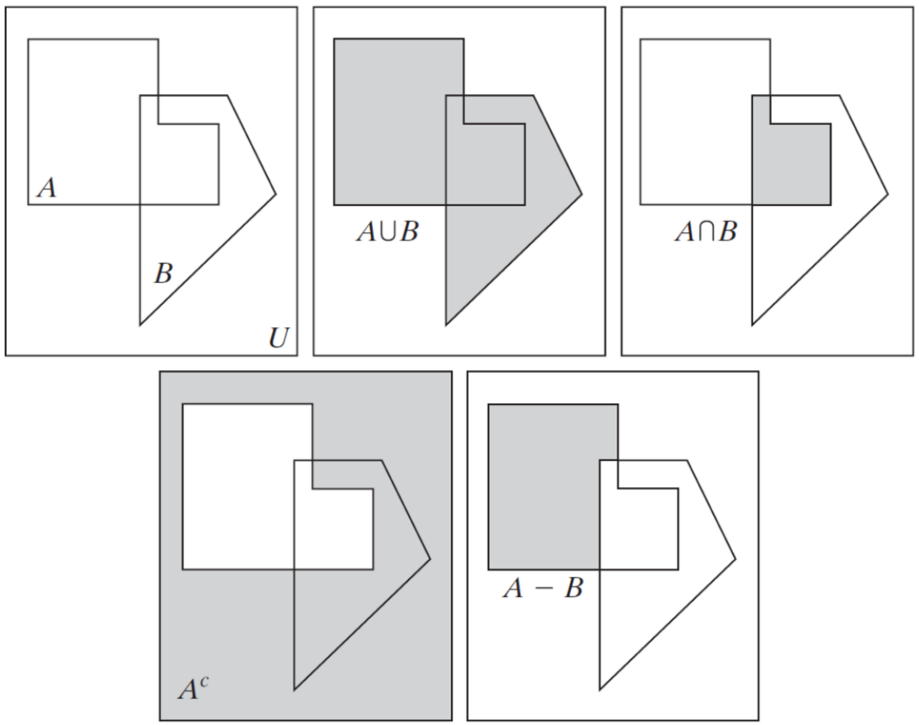
基本集合操作

- $a = (a_1, a_2)$是A的元素：$a \in A$
- a不是A的元素：$a \notin A$
- 空集：$\emptyset$
- 全集：U
- A是B的子集：$A \subseteq B$
- 集合A和B的并集：$A \cup B$
- 集合A和B的交集：$A \cap B$
- 集合A和B互斥：$A \cap B = \emptyset$

基本集合操作

- 集合A的补集：$A^c = \{w|w \notin A\} = U - A$
- 集合A和B的差：

$$A - B = \{w|w \in A, w \notin B\} = A \cap B^c$$



灰度图像的集合操作

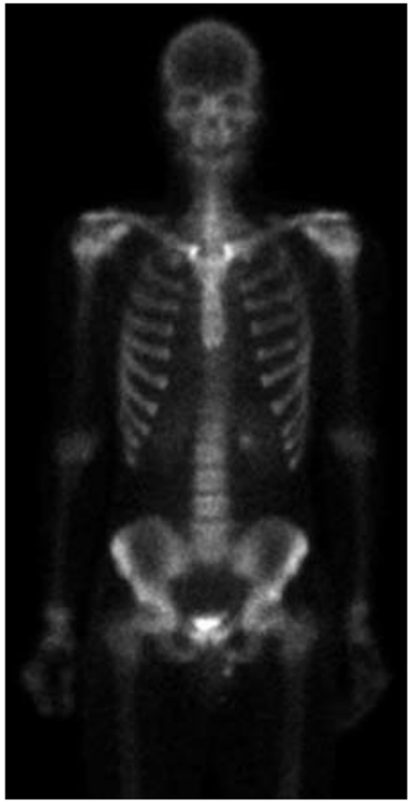
- 灰度图像集合A
- 元素为三元组(x, y, z)
  - x和y是空间坐标， z是灰度
- 集合A的补集（大小不变）

$$A^c = \{(x, y, K - z) | (x, y, z) \in A\}$$

  - $K = 2^k - 1$为灰度级数，k为比特数
- 集合A和B的并集

$$A \cup B = \left\{ \max_z(a, b) \; a \in A, b \in B \right\}$$

示例



原图

补集操作
得到的负像

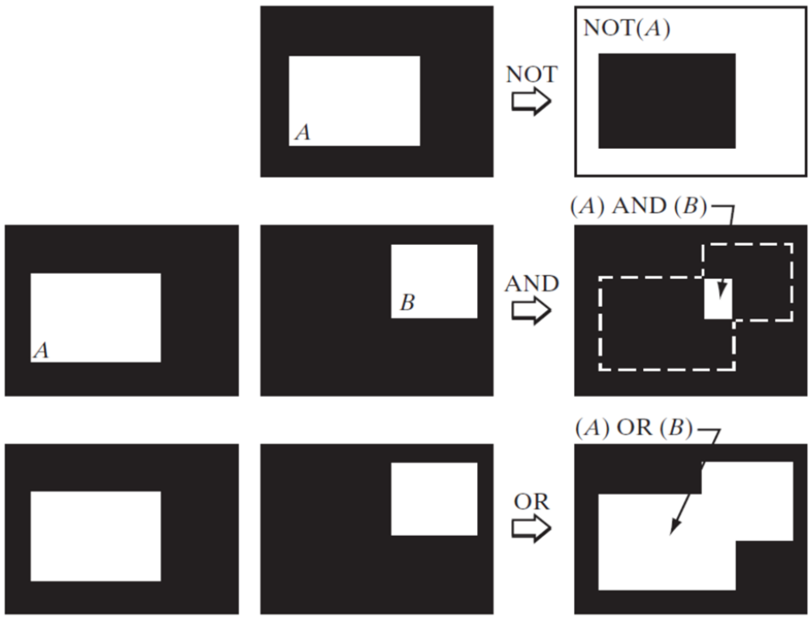
与常数图像
的并集

目录

- 集合操作
- 逻辑操作
- 空间操作
  - 单像素操作
  - 邻域操作
  - 几何空间变换
  - 图像配准
- 灰度内插

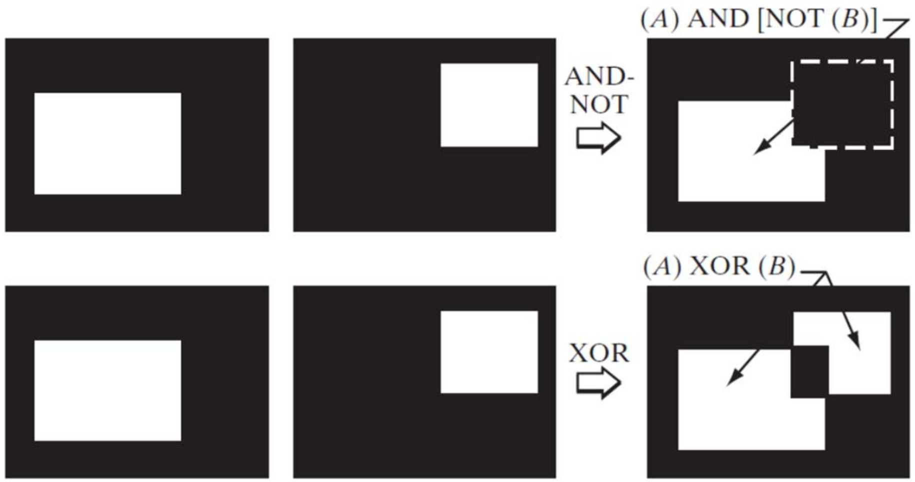
逻辑操作

- 二值图像
  - 前景（1值）、背景（0值）
- OR、AND、NOT逻辑操作
  - 集合的并、交和求补操作



逻辑操作

- 属于A不属于B操作
- XOR操作



- 功能完备操作
  - AND、OR和NOT

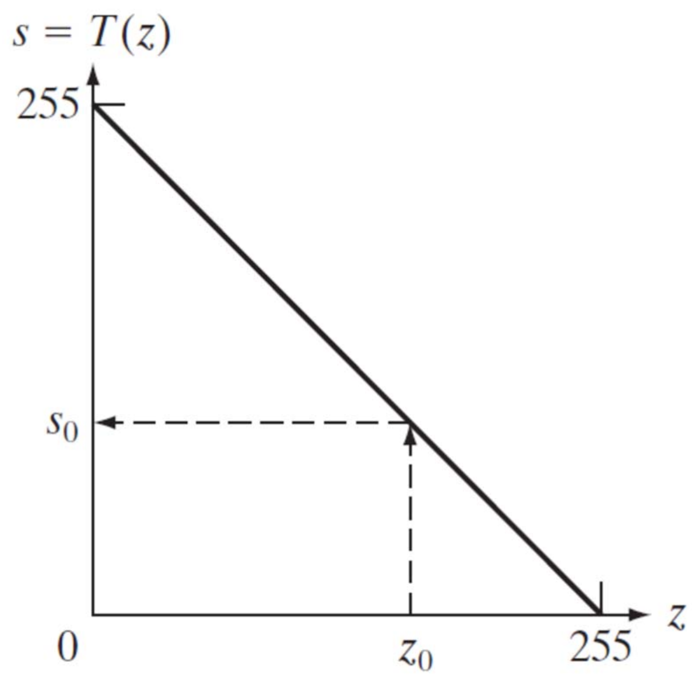
目录

- 集合操作
- 逻辑操作
- 空间操作
  - 单像素操作
  - 邻域操作
  - 几何空间变换
  - 图像配准
- 灰度内插

单像素操作

- 以灰度为基础改变单个像素的值
  - 灰度变换

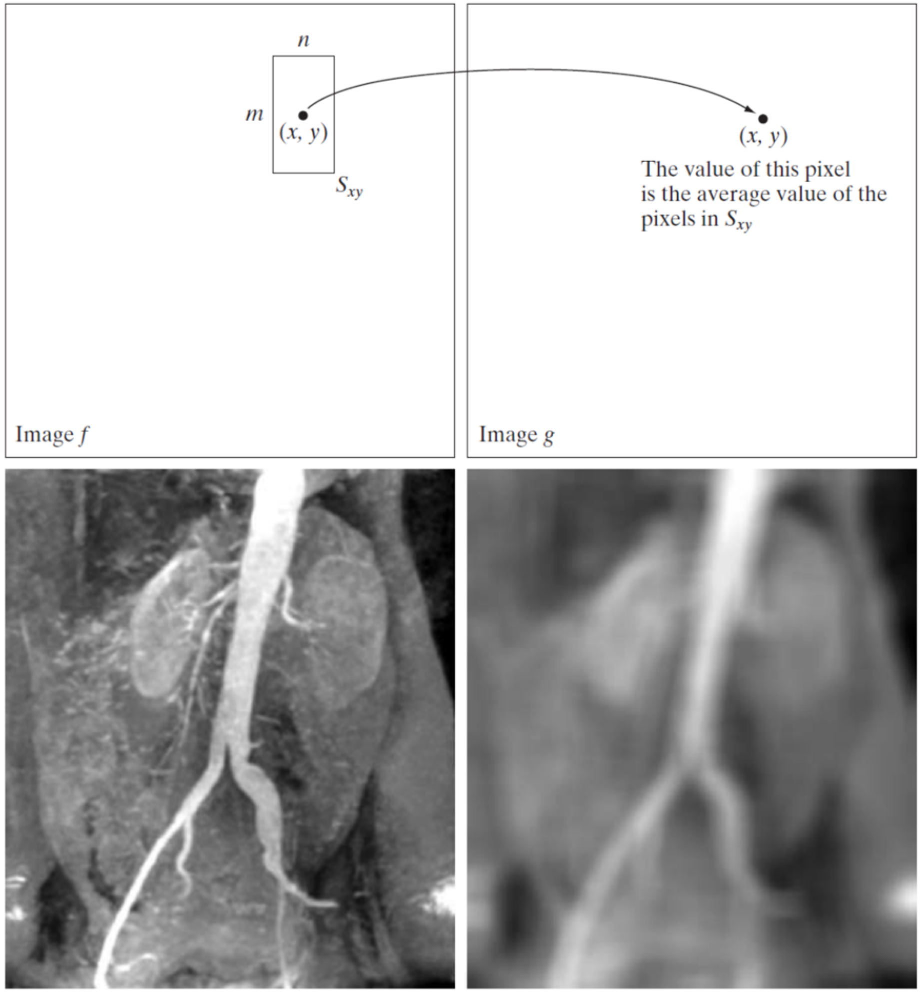
$$s = T(z)$$



邻域操作

- 由输入坐标(x, y)的邻域像素决定
  - 空间滤波

$$g(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(r,c)\in S_{xy}} f(r, c)$$



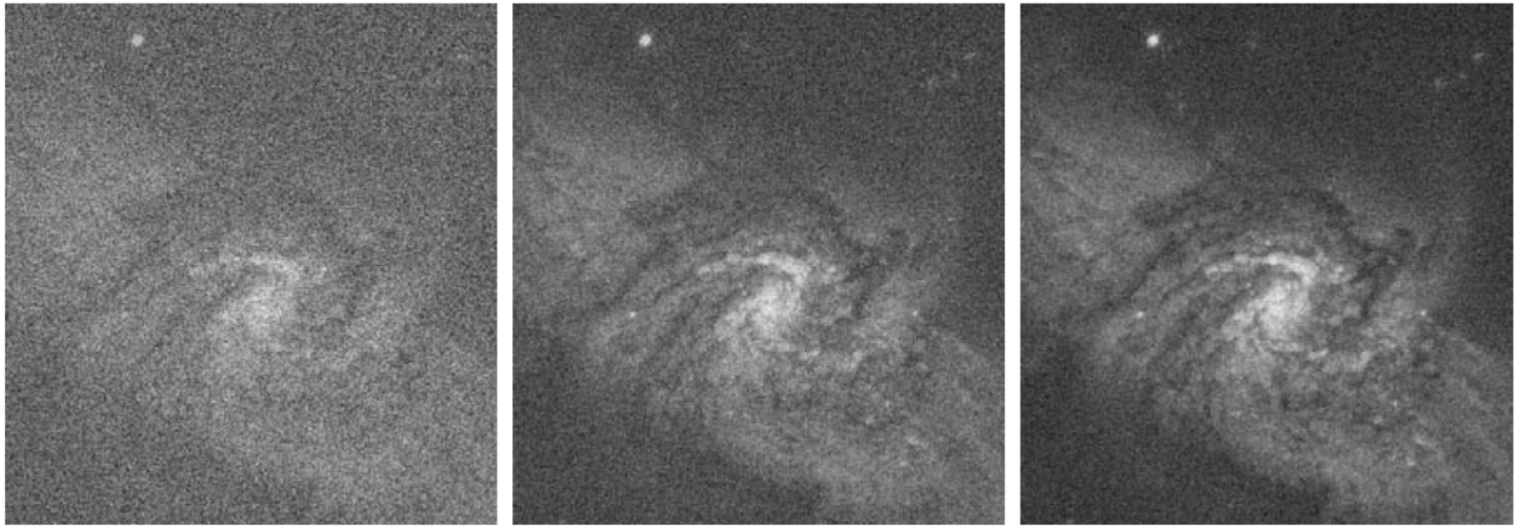
讨论

- 单像素操作、邻域操作对单幅图像做处理，不改变像素的空间位置

$$s = r + a$$

讨论

- 算术/逻辑运算对多幅图像做处理，也不改变像素的空间位置



降噪

几何变换

- 几何变换改变像素的空间位置使得图像得到增强





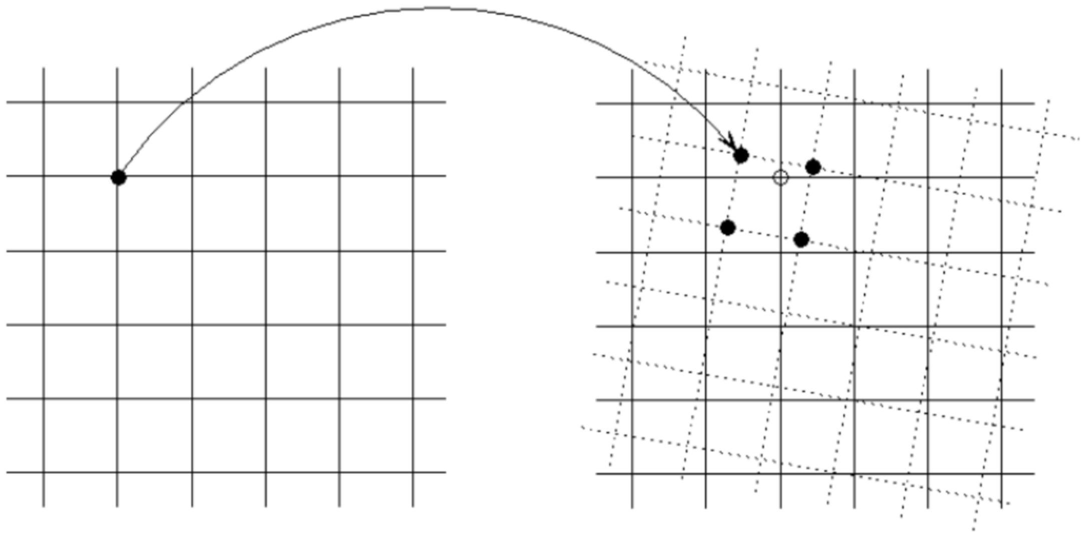

几何变换

- 橡皮膜操作
  - 在橡皮膜上印刷一幅图像
  - 然后拉伸橡皮膜
- 几何变换包含两个独立的算法：空间变换算法和灰度内插算法
  - 空间变换：描述每个像素空间位置的变换
  - 灰度内插：确定变换后图像像素的灰度级

几何变换

- 图像的每个坐标点(v, w)变换到新坐标点(x, y)

$$(x, y) = T\{(v, w)\}$$



Note：图像坐标是离散的，网格的。变换后的坐标点可能不落在网格点上。

几何变换

- 空间变换需要满足一个条件
  - 保持图像中曲线型特征的连续性和各物体的连通性
  - 简而言之的话——相邻的输入产生相邻的输出
- 任意的空间变换会弄乱图像内容，或者内容支离破碎
- 一种常用的空间变换：仿射变换（Affine Transformation）

仿射变换

- 仿射变换（Affine Transformation）包括了旋转、伸缩、平移、倾斜等变换

$$x = t_{11}v + t_{21}w + t_{31}$$

$$y = t_{12}v + t_{22}w + t_{32}$$

  - t_{31}和t_{32}刻画了平移量
  - t_{11}和t_{22}刻画了伸缩比例
  - t_{12}和t_{21}刻画了倾斜程度
  - 整体组合刻画了平移、旋转角度、倾斜程度

仿射变换

- 仿射变换（Affine Transformation）包括了旋转、伸缩、平移、倾斜等变换

$$x = t_{11}v + t_{21}w + t_{31}$$

$$y = t_{12}v + t_{22}w + t_{32}$$

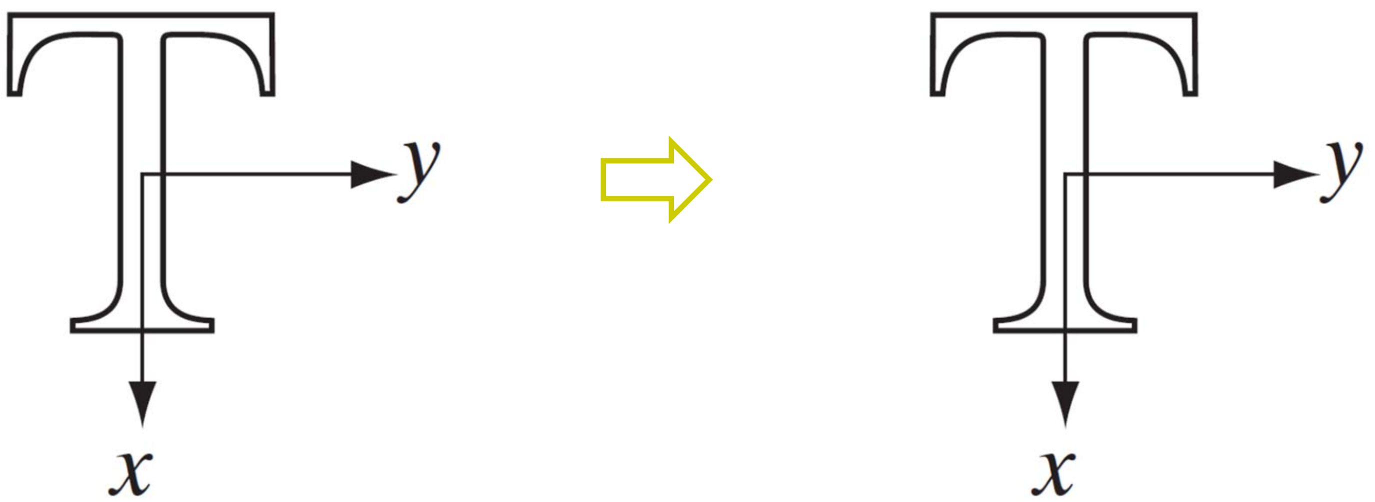
- 优点
  - 保持共线性（co-linearity）
    - 共线的点变换后依然共线
  - 保持距离比例（ratios of distance）
    - 线的中心变换后依然是线的中心

恒等变换

- 坐标公式

$$x = v$$

$$y = w$$

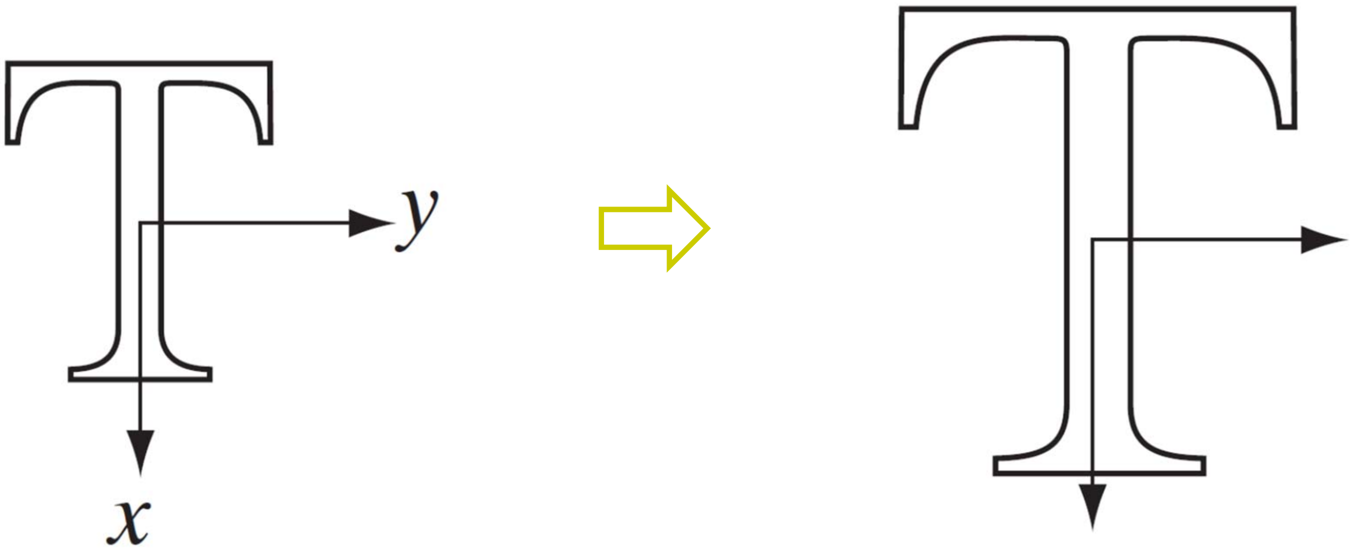


伸缩变换

- 坐标公式

$$x = c_x v$$

$$y = c_y w$$



旋转变换

- 坐标公式

$$x = v\cos\theta - w\sin\theta$$

$$y = v\sin\theta + w\cos\theta$$

平移变换

- 坐标公式

$$x = v + t_x$$

$$y = w + t_y$$

（垂直）倾斜变换

- 坐标公式

$$x = v + s_v w$$

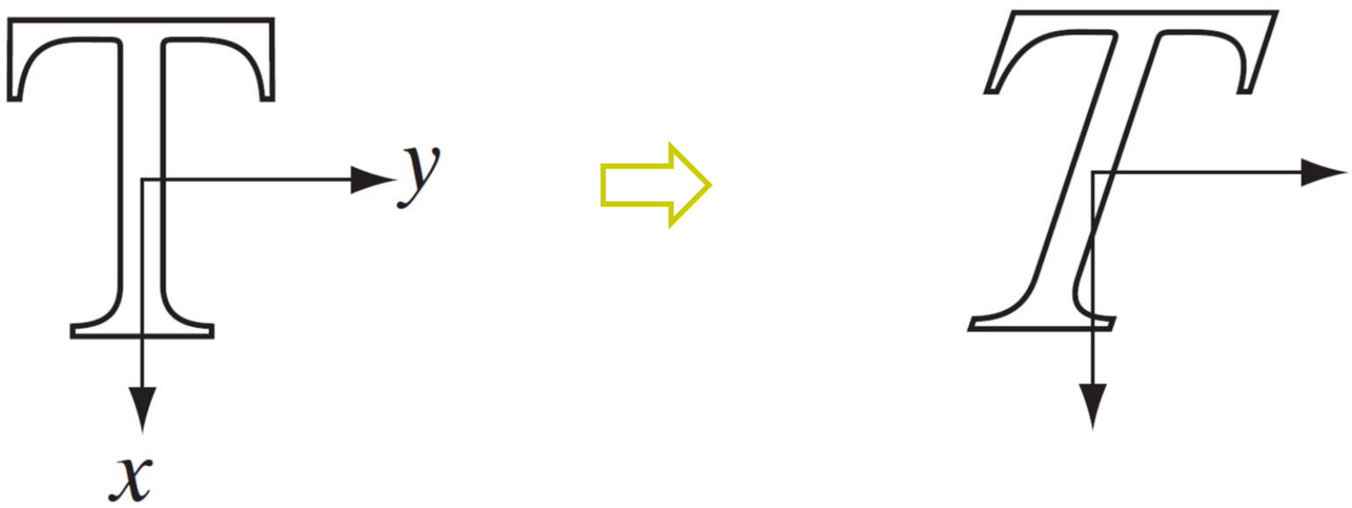
$$y = w$$

（水平）倾斜变换

- 坐标公式

$$x = v$$

$$y = s_h v + w$$



仿射变换

- 变换公式

$$x = t_{11}v + t_{21}w + t_{31}$$

$$y = t_{12}v + t_{22}w + t_{32}$$

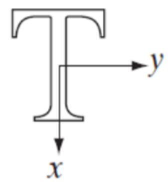
- 矩阵形式

$$[x \quad y \quad 1] = [v \quad w \quad 1]\,\mathbf{T} = [v \quad w \quad 1]\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

仿射变换

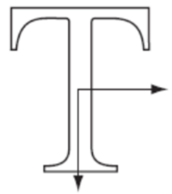
恒等变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= v \\ y &= w \end{aligned}$$



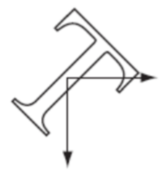
伸缩变换

$$\begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= c_x v \\ y &= c_y w \end{aligned}$$



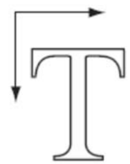
旋转变换

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= v\cos\theta - w\sin\theta \\ y &= v\sin\theta + w\cos\theta \end{aligned}$$



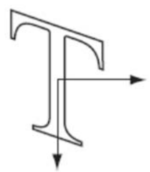
平移变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= v + t_x \\ y &= w + t_y \end{aligned}$$



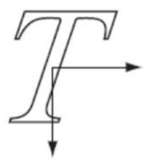
（垂直）倾斜变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= v + s_v w \\ y &= w \end{aligned}$$



（水平）倾斜变换

$$\begin{bmatrix} 1 & s_h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= v \\ y &= s_h v + w \end{aligned}$$



复杂仿射变换

- 通过一系列仿射变换操作完成
  - 因为仿射变换的组合还是仿射变换

- 矩阵形式

$$[x\ y\ 1] = [v\ w\ 1]\underbrace{T_1 T_2 \cdots}_{T}$$

  - T_i是基本放射变换

复杂仿射变换

- 逆仿射变换
  - 如果变换后，想把图像复原，怎么操作?
  - 仿射变换是可逆的$T = T_1 T_2 T_3$
  - 逆变换矩阵为

$$T^{-1} = T_3^{-1} T_2^{-1} T_1^{-1}$$

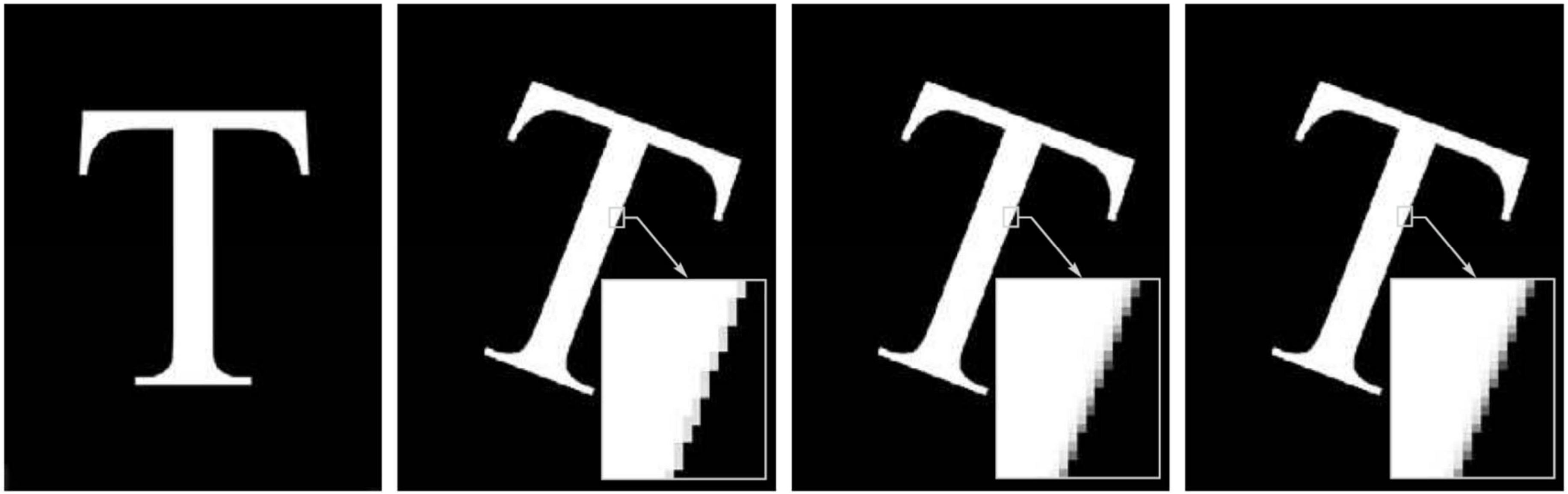
- 条件：T_1、T_2、T_3是可逆矩阵。
  - 基本变换矩阵都是可逆矩阵

仿射变换

- 前向影射
  - 根据输入(v, w)，计算输出$(x, y) = T\{(v, w)\}$
  - 多个输入对应一个输出、空白输出
- 反向映射
  - 根据输出(x, y)，寻找输入$(v, w) = T^{-1}\{(v, w)\}$
  - 灰度内插
  - 更加有效

示例

- 图像旋转21°



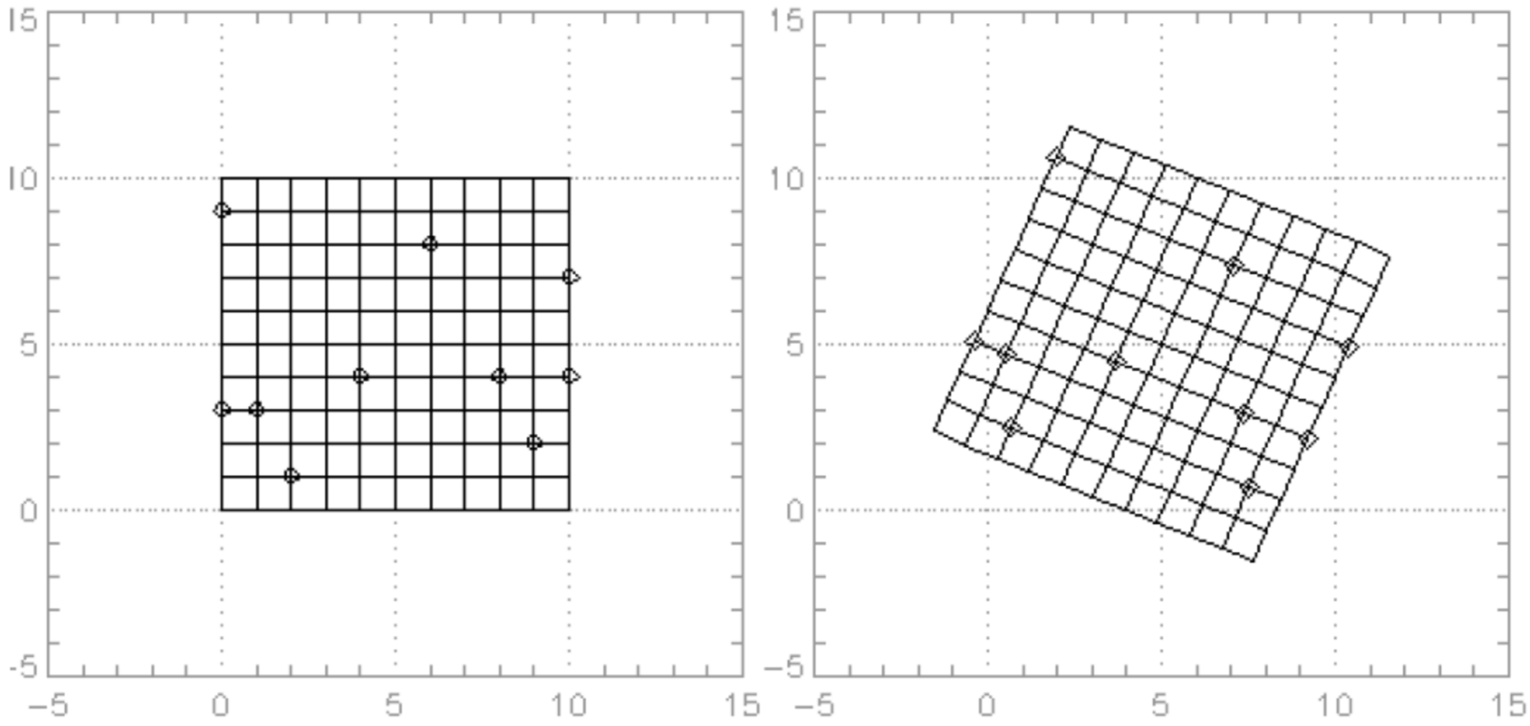
最近邻内插　　双线性内插　　双三次内插

图像配准

- 问题定义
  - 输入图像、输出图像（参考图像）
  - 估计变换函数
- 实际应用
  - 相似时间内不同设备的图像
  - 相同设备不同时间拍摄的图像
- 约束点
  - 输入图像和输出图像中位置已知的相应点

点匹配法

- 在图像中寻找对应的点



具体问题

- 如何将图像A、B对齐？

Image A

Image B

具体问题

- 寻找匹配点

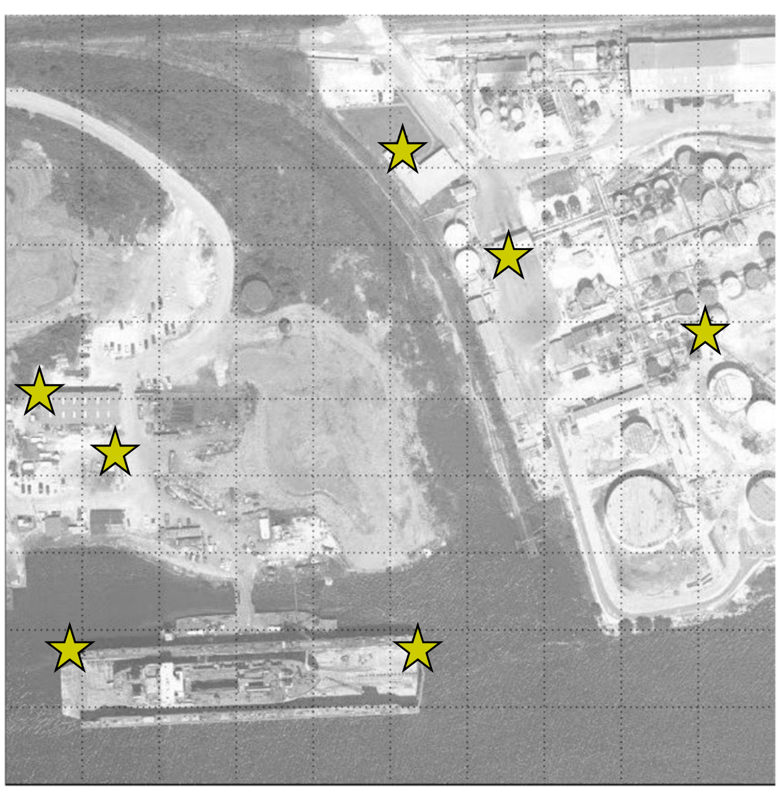


Image A

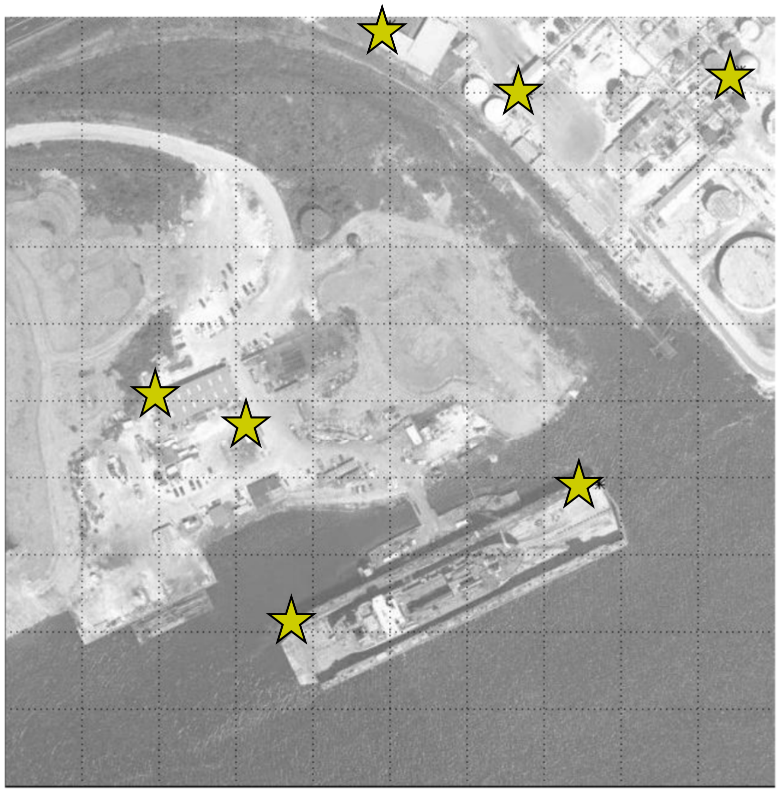


Image B

具体问题

- 图像A中的n个点

$$P=\begin{bmatrix} v_0 & w_0 & 1 \\ v_1 & w_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{n-1} & w_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

- 图像B中的n个点

$$Q=\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-1} & y_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

具体问题

- 寻找最优仿射变换

$$Q = PT$$

- 求解线性方程
- 求解最小二乘

$$\min_{T} \|Q - PT\|_F^2$$

  - 闭合解

$$T = (P^\top P)^{-1} P^\top Q$$

具体问题

- 变换矩阵

$$T=(P^{\top}P)^{-1}P^{\top}Q=\begin{bmatrix}0.92 & 0.39 & 0\\ -0.39 & 0.92 & 0\\ 224.17 & 10.93 & 1\end{bmatrix}$$

- 数值结果

X_a	Y_a	X_b	Y_b	X'_a	Y'_a
30.5	325.3	125.8	322.5	126.0	322.8
86.8	271.3	199.3	295.3	198.7	294.9
330.3	534.0	320.0	632.0	320.5	632.2
62.0	110.3	238.0	137.0	238.4	136.8
342.0	115.0	494.0	250.0	493.9	250.4
412.0	437.0	434.3	574.8	433.3	574.7
584.5	384.8	611.8	594.0	612.2	593.8

具体问题

- 实际效果

Mapped A

Original B

一般流程

- 建模（双线性近似）

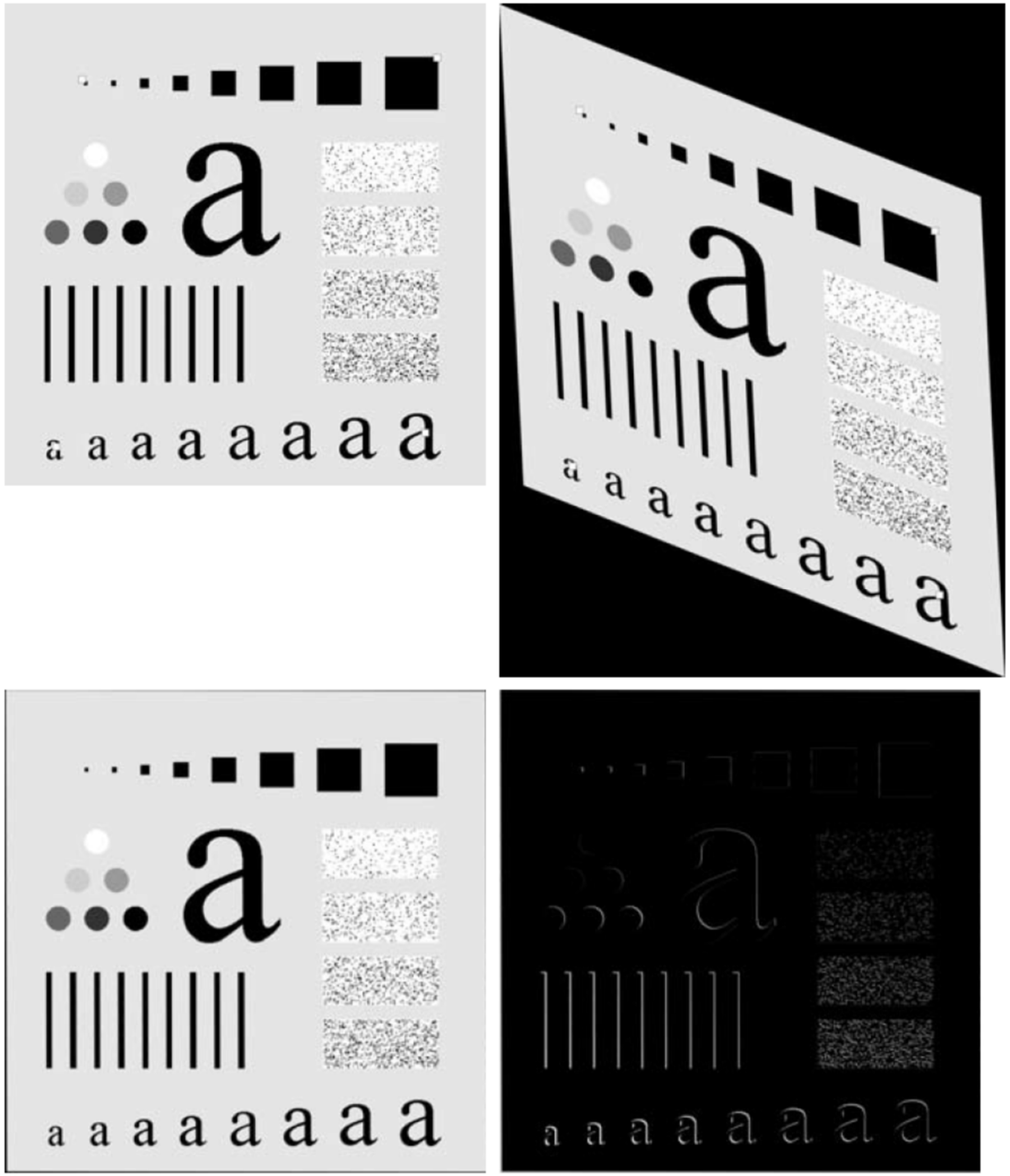
$$x = c_1 v + c_2 w + c_3 vw + c_4$$

$$y = c_5 v + c_6 w + c_7 vw + c_8$$

  - 8个参数
- 寻找约束点
  - 4个约束点、8个方程，求解方程组
- 执行映射
  - 灰度内插
- 增加约束点
  - 将原图分成多个4边形，逐个处理

示例

- 4个约束点
  - 手动选择



效果展示

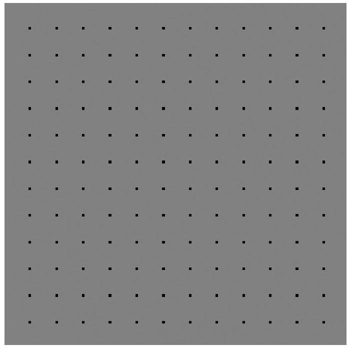
- 几何校正

变形后的老虎

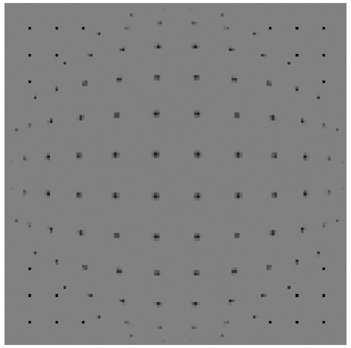
校正后的老虎

效果展示

- 几何校正



测试靶



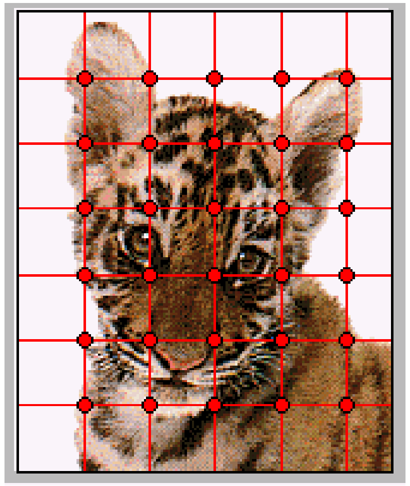
对应的鱼眼图像

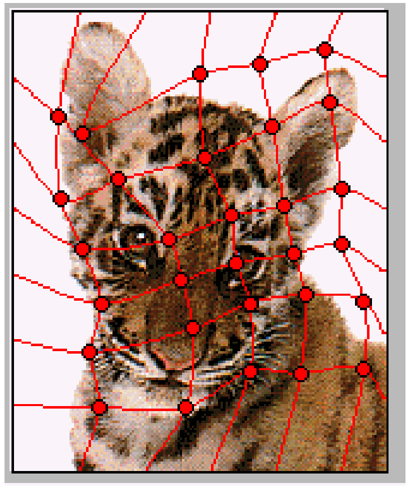
效果展示

- 图像卷绕

效果展示

- 图像卷绕



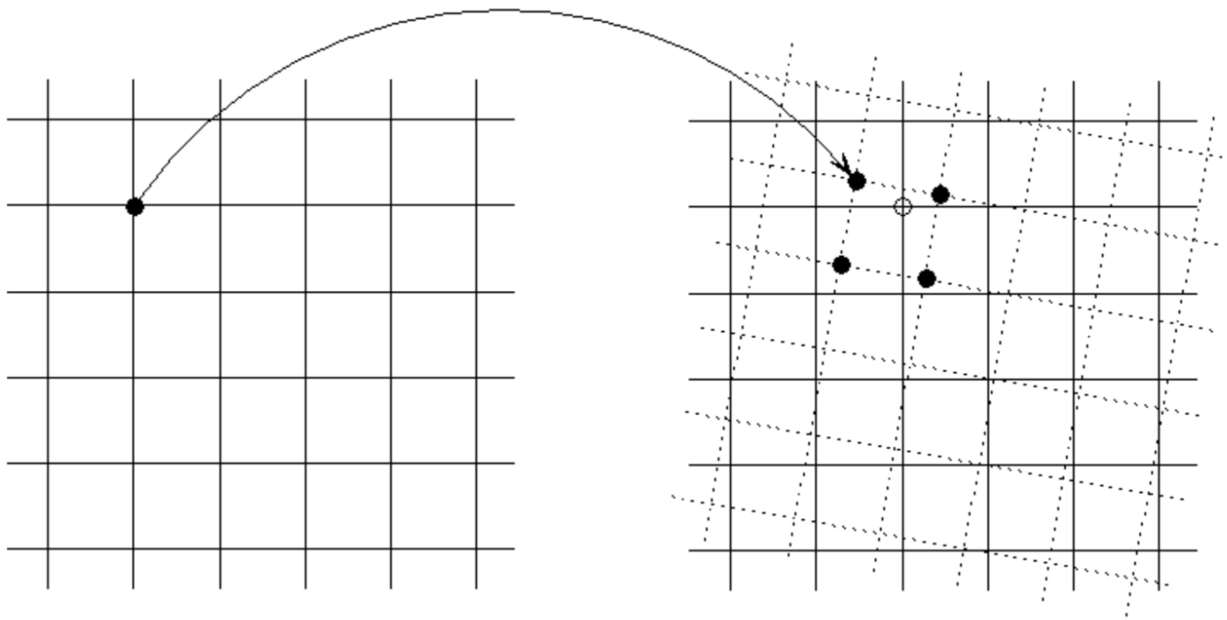


目录

- 集合操作
- 逻辑操作
- 空间操作
  - 单像素操作
  - 邻域操作
  - 几何空间变换
  - 图像配准
- 灰度内插

引言

- 变换后，原图像的网格点未必落入网格点

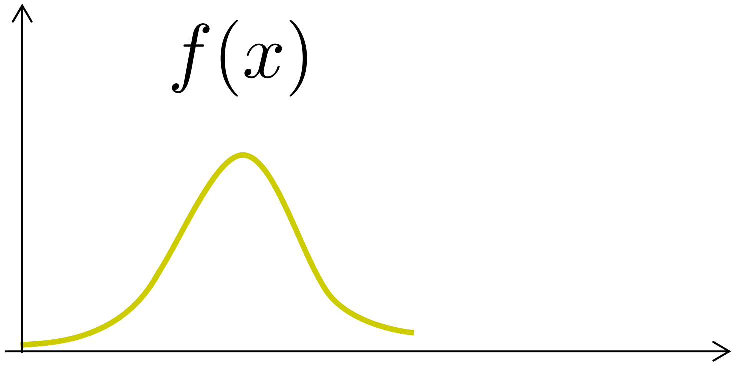


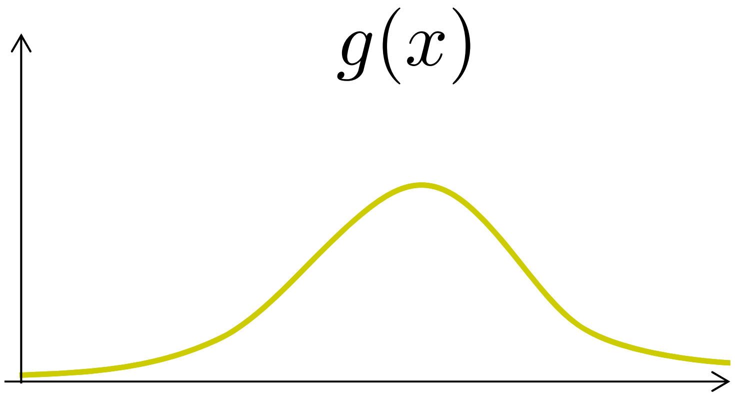
引言

函数图像的放大缩小

放大一倍：

$$g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) \qquad g(2x) = f(x)$$

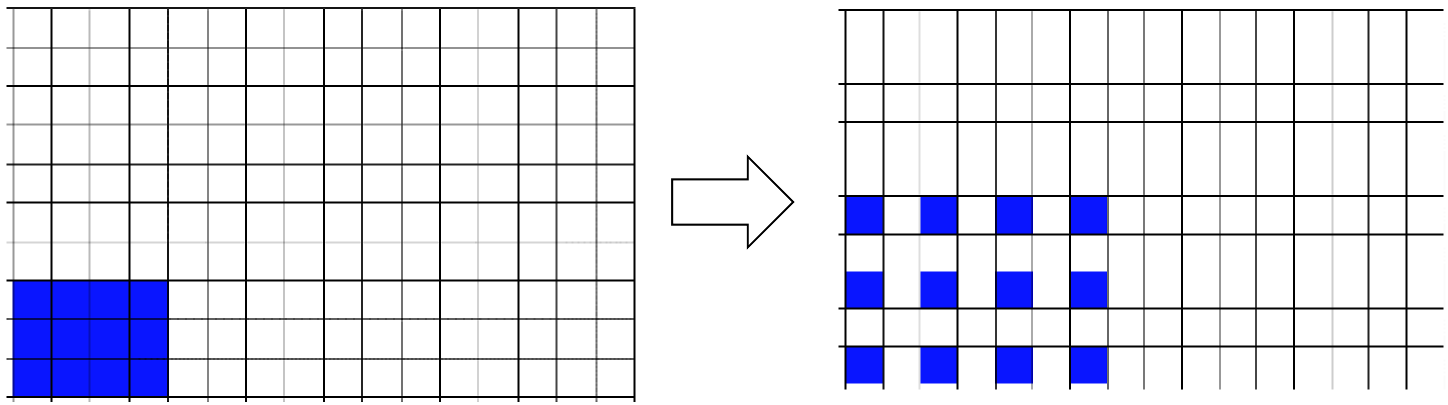




引言

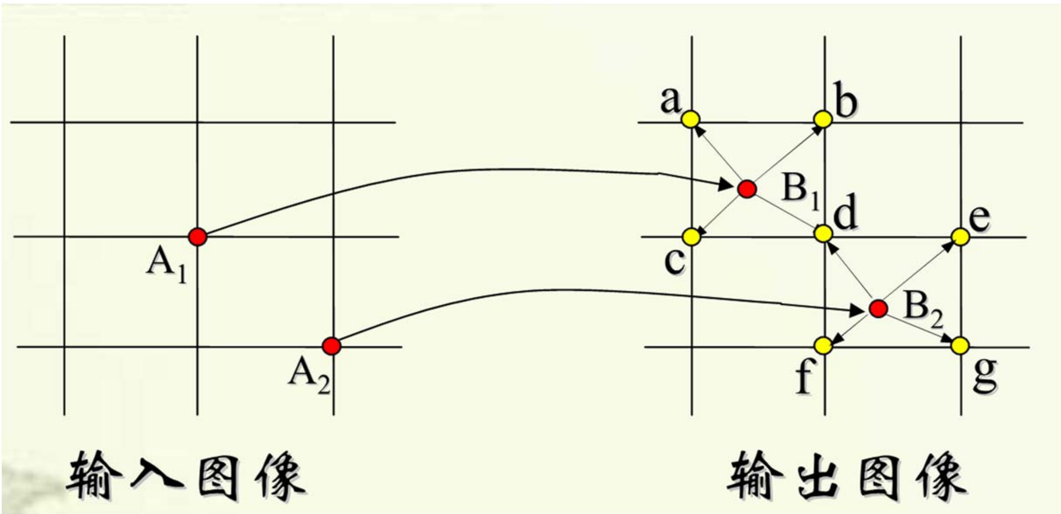
图像的放大缩小

$$g[2x, 2y] = f[x, y]$$



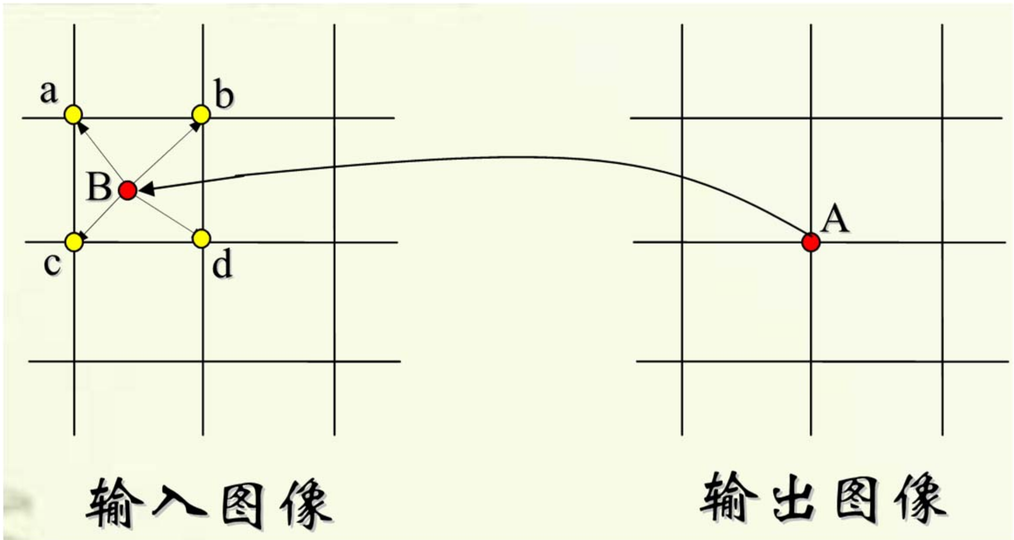
灰度内插

- 前向映射
  - 通过输入图像像素位置，计算输出图像对应的像素位置
  - 将该位置像素的灰度值分配给其相邻四个网格位置



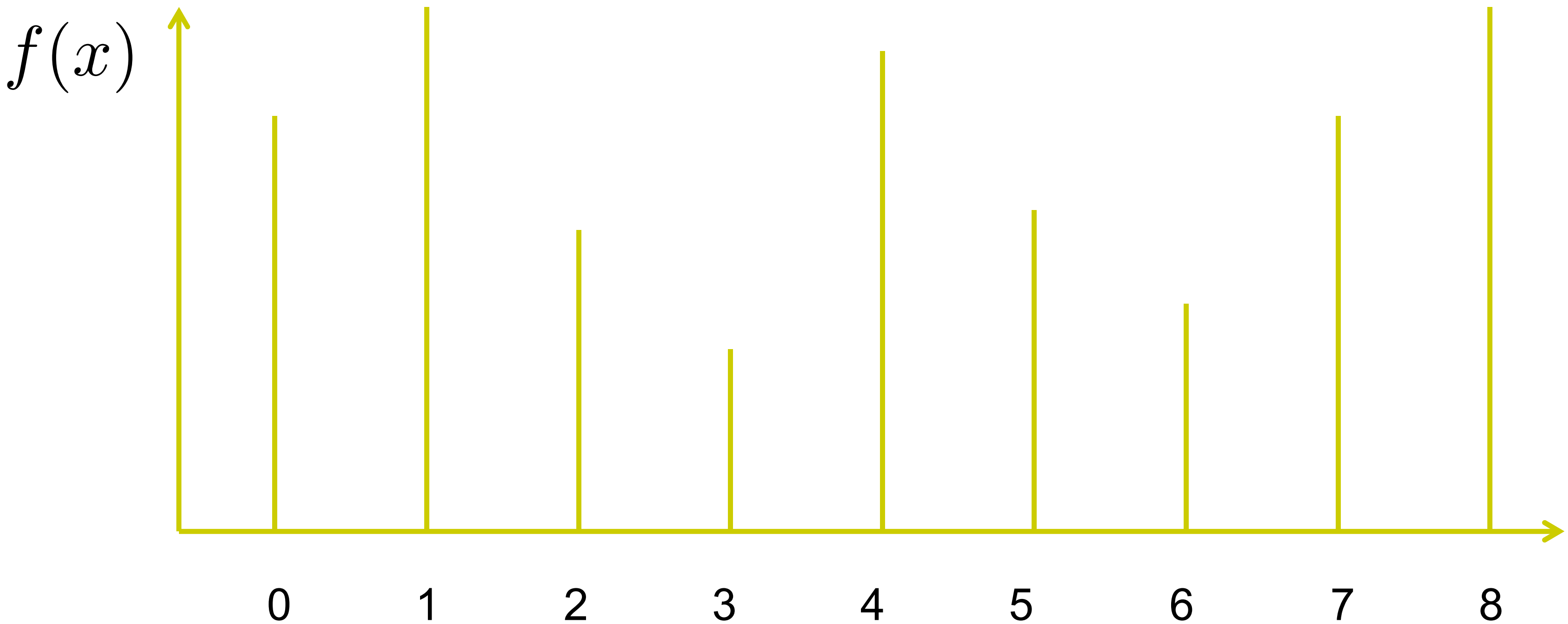
灰度内插

- 反向映射
  - 通过输出图像像素位置，计算输入图像中涉及到所有对应的像素位置；
  - 根据输入图像相邻四个像素的灰度值计算该位置像素的灰度值.



插值

$$f(0) = 10$$
$$f(1) = 12$$
$$f(0.5) = ?$$

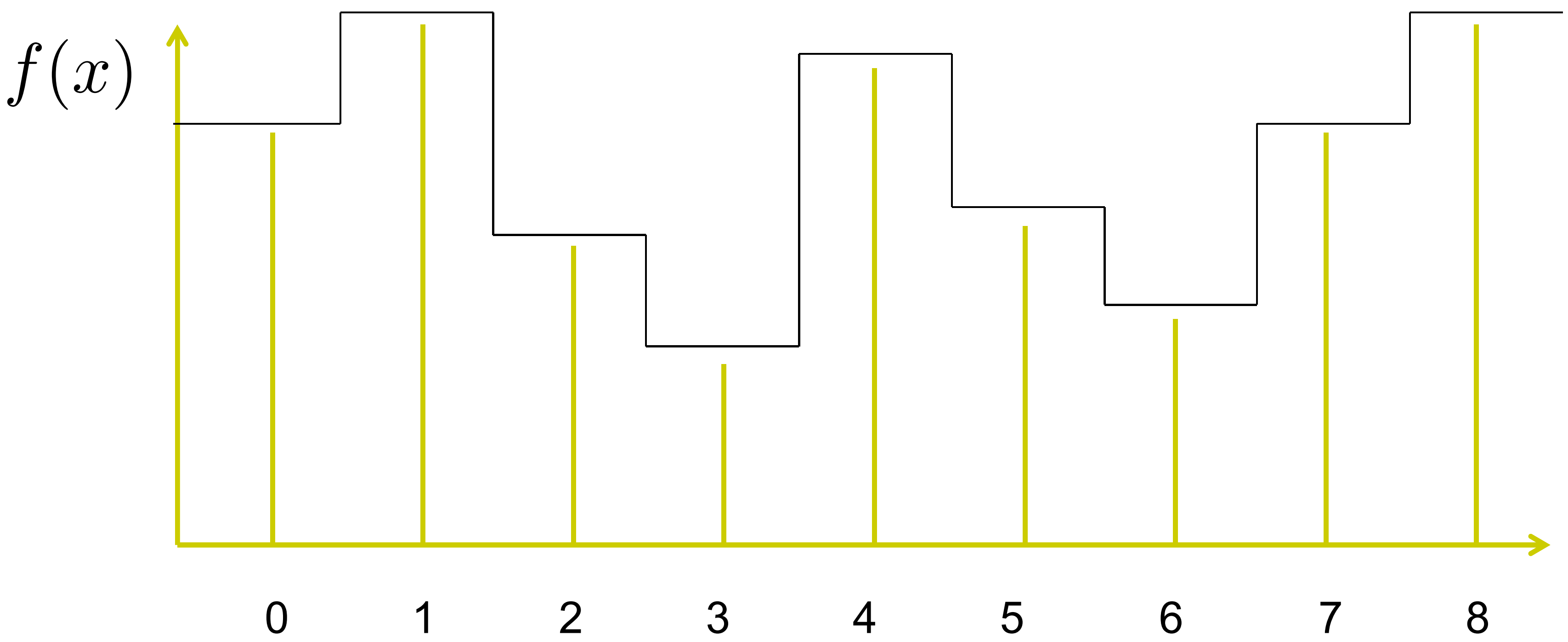


最近邻内插

$$f(0) = 10$$

$$f(1) = 12$$

$$f(0.4) = f(0), f(0.6) = f(1), f(0.5) = \ldots$$

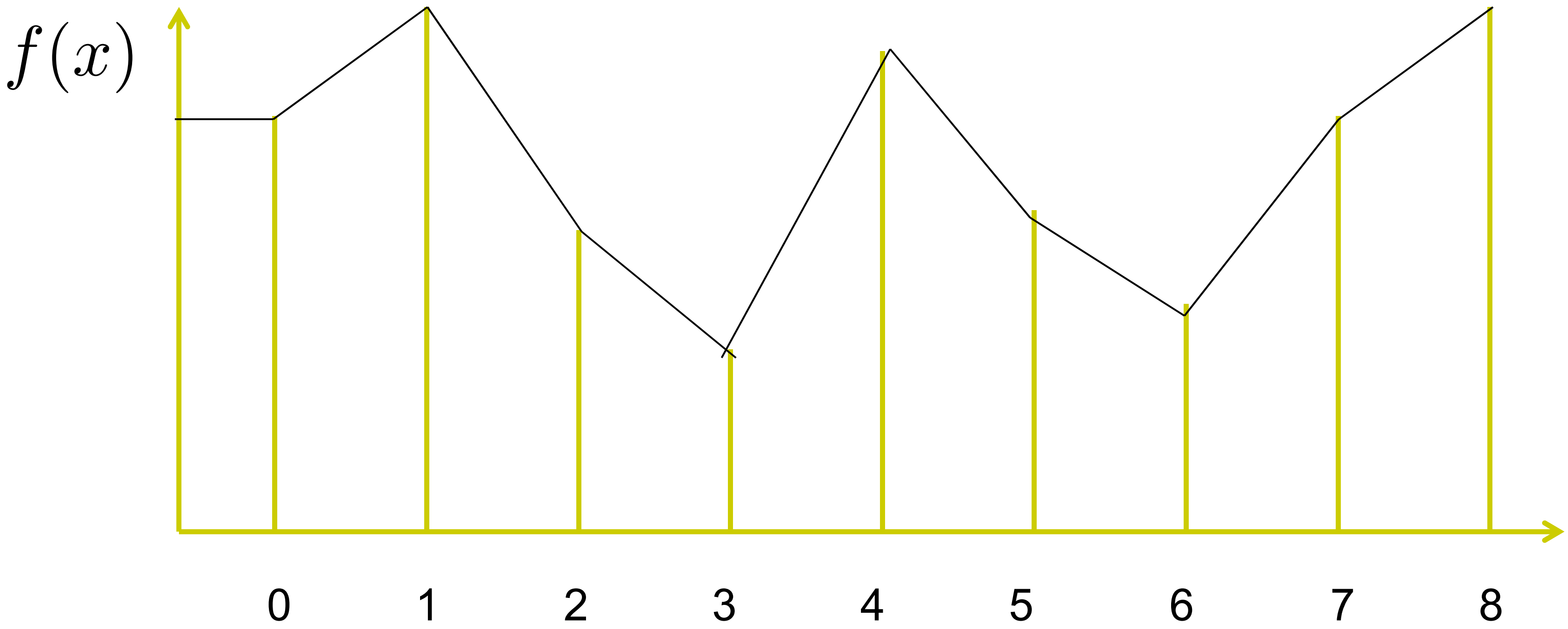


线性内插

$$f(0)=10, f(1)=12$$

解出[0,1]： $f(x)=10+x*2$

$$f(0.4)=10.8$$

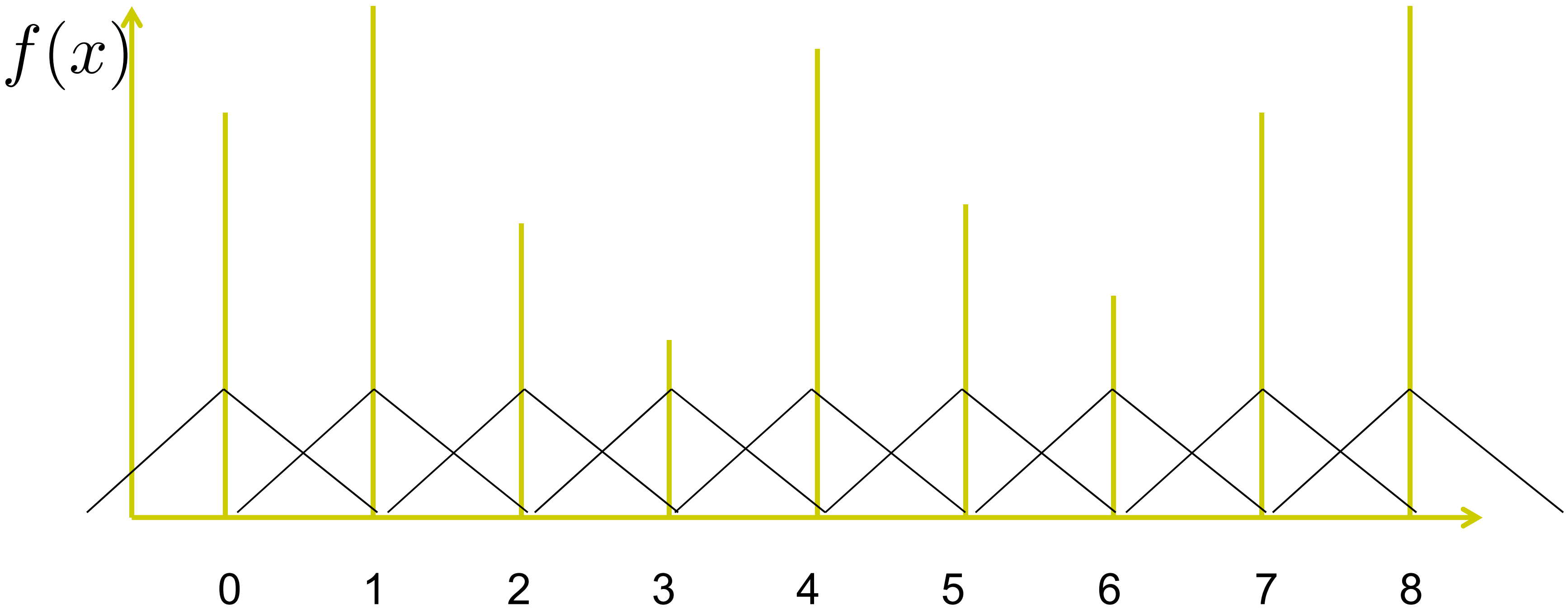


线性内插

线性插值 $f(0)=10, f(1)=12$

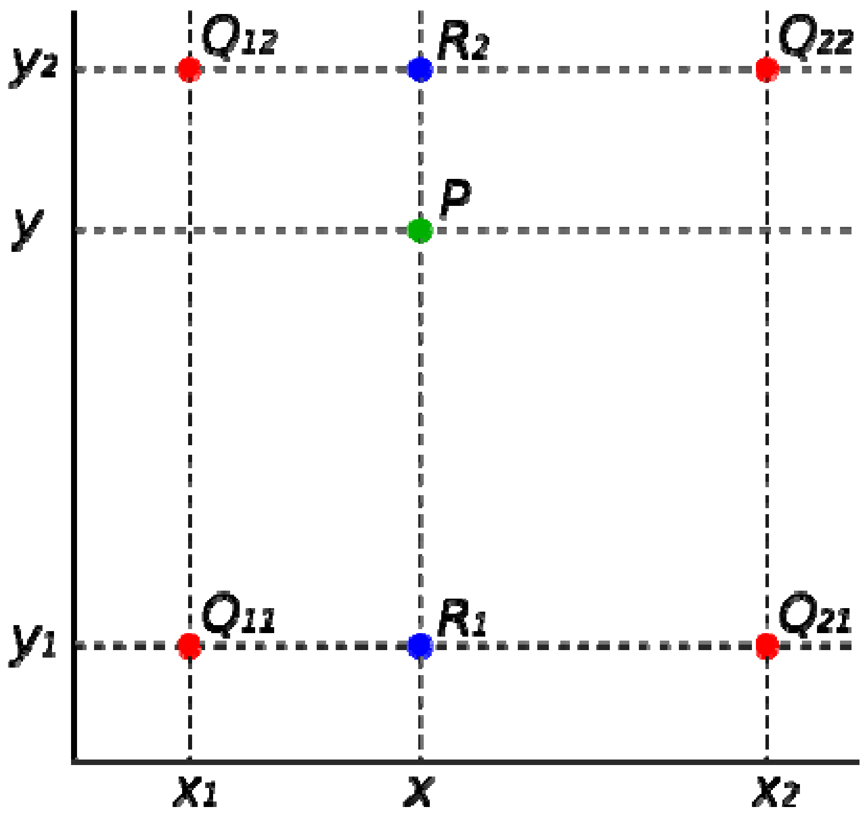
另一种写法：$f(x)=(1-x)*f(0)+(x-0)*f(1)$

$$f(0.4)=0.6*10+0.4*12=6+4.8=10.8$$



双线性内插

- $Q_{11} = (x_1, y_1)$, $Q_{12} = (x_1, y_2)$, $Q_{21} = (x_2, y_1)$, $Q_{22} = (x_2, y_2)$, $P = (x, y)$
- 估计$f(x, y)$

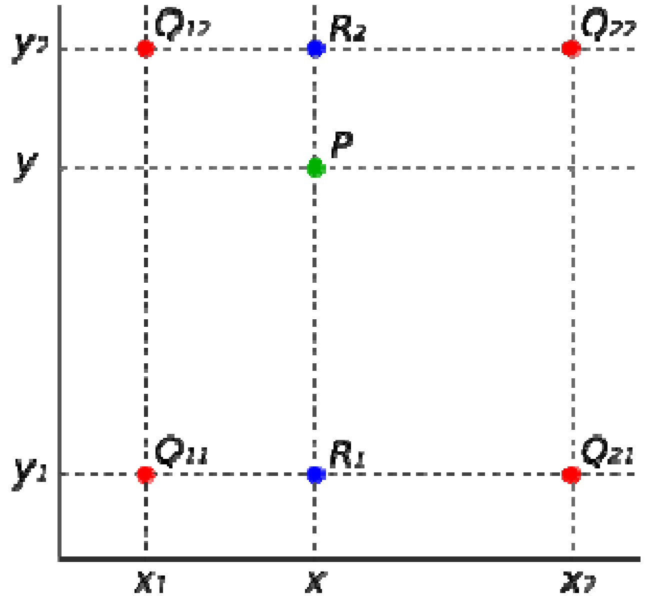


https://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear_interpolation

双线性内插

- 计算公式

$$f(x,y_1) \approx \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(Q_{11}) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(Q_{21}),$$
$$f(x,y_2) \approx \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(Q_{12}) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(Q_{22}).$$



$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx \frac{y_2-y}{y_2-y_1}f(x,y_1) + \frac{y-y_1}{y_2-y_1}f(x,y_2) \\ &= \frac{y_2-y}{y_2-y_1}\left(\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(Q_{11}) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(Q_{21})\right) + \frac{y-y_1}{y_2-y_1}\left(\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(Q_{12}) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(Q_{22})\right) \\ &= \frac{1}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}\big(f(Q_{11})(x_2-x)(y_2-y) + f(Q_{21})(x-x_1)(y_2-y) + f(Q_{12})(x_2-x)(y-y_1) + f(Q_{22})(x-x_1)(y-y_1)\big) \\ &= \frac{1}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}\begin{bmatrix} x_2-x & x-x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(Q_{11}) & f(Q_{12}) \\ f(Q_{21}) & f(Q_{22}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_2-y \\ y-y_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

双线性内插

- 另一种算法

$$f(x,y) \approx a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy,$$

- 求解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_1 & y_2 & x_1 y_2 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(Q_{11}) \\ f(Q_{12}) \\ f(Q_{21}) \\ f(Q_{22}) \end{bmatrix}$$

双线性内插

- 另一种算法

$$f(x,y) \approx a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy,$$

- 求解方程组

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{f(Q_{11})x_2y_2}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_{12})x_2y_1}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_{21})x_1y_2}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_{22})x_1y_1}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)},\\
a_1 &= \frac{f(Q_{11})y_2}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_{12})y_1}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_{21})y_2}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_{22})y_1}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)},\\
a_2 &= \frac{f(Q_{11})x_2}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_{12})x_2}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_{21})x_1}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_{22})x_1}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)},\\
a_3 &= \frac{f(Q_{11})}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_{12})}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_{21})}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_{22})}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)}.
\end{aligned}$$

双线性内插

- 另一种形式

$$f(x,y) \approx b_{11} f(Q_{11}) + b_{12} f(Q_{12}) + b_{21} f(Q_{21}) + b_{22} f(Q_{22}),$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_1 & y_2 & x_1 y_2 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \end{bmatrix}^{-1} \right)^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \end{bmatrix}$$

效果展示

- 用最近邻内插和双线性内插的方法分别将老虎放大1.5倍。

效果展示

采用最近邻内插放大1.5倍

采用双线性内插放大1.5倍

双三次内插

- 函数f，一阶导数f_x和f_y，二阶导数f_{xy}
- 四个坐标点(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)
- 计算插值函数

$$p(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}a_{ij}x^i y^j.$$

- 导数计算公式

$$p_x(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{3}a_{ij}ix^{i-1}y^j,$$

$$p_y(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x^i jy^{j-1},$$

$$p_{xy}(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}ix^{i-1}jy^{j-1}.$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Bicubic_interpolation

双三次内插

- 依据函数值建立等式

1. $f(0,0) = p(0,0) = a_{00}$,
2. $f(1,0) = p(1,0) = a_{00} + a_{10} + a_{20} + a_{30}$,
3. $f(0,1) = p(0,1) = a_{00} + a_{01} + a_{02} + a_{03}$,
4. $f(1,1) = p(1,1) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij}$.

- 依据一阶导数f_x建立等式

1. $f_x(0,0) = p_x(0,0) = a_{10}$,
2. $f_x(1,0) = p_x(1,0) = a_{10} + 2a_{20} + 3a_{30}$,
3. $f_x(0,1) = p_x(0,1) = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}$,
4. $f_x(1,1) = p_x(1,1) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij} i$,

双三次内插

- 依据一阶导数f_y建立等式

5. $f_y(0,0) = p_y(0,0) = a_{01},$
6. $f_y(1,0) = p_y(1,0) = a_{01} + a_{11} + a_{21} + a_{31},$
7. $f_y(0,1) = p_y(0,1) = a_{01} + 2a_{02} + 3a_{03},$
8. $f_y(1,1) = p_y(1,1) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} j.$

- 依据二阶导数f_{xy}建立等式

1. $f_{xy}(0,0) = p_{xy}(0,0) = a_{11},$
2. $f_{xy}(1,0) = p_{xy}(1,0) = a_{11} + 2a_{21} + 3a_{31},$
3. $f_{xy}(0,1) = p_{xy}(0,1) = a_{11} + 2a_{12} + 3a_{13},$
4. $f_{xy}(1,1) = p_{xy}(1,1) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} ij.$

双三次内插

- 求解线性方程 $a = A^{-1}x$

$$\alpha = \left[a_{00} \ a_{10} \ a_{20} \ a_{30} \ a_{01} \ a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{02} \ a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{03} \ a_{13} \ a_{23} \ a_{33} \right]^T$$

$$x = \left[f(0,0) \ f(1,0) \ f(0,1) \ f(1,1) \ f_x(0,0) \ f_x(1,0) \ f_x(0,1) \ f_x(1,1) \ f_y(0,0) \ f_y(1,0) \ f_y(0,1) \ f_y(1,1) \ f_{xy}(0,0) \ f_{xy}(1,0) \ f_{xy}(0,1) \ f_{xy}(1,1) \right]^T$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & 3 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
-3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\
9 & -9 & -9 & 9 & 6 & 3 & -6 & -3 & 6 & -6 & 3 & -3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\
-6 & 6 & 6 & -6 & -3 & -3 & 3 & 3 & -4 & 4 & -2 & 2 & -2 & -2 & -1 & -1 \\
2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
-6 & 6 & 6 & -6 & -4 & -2 & 4 & 2 & -3 & 3 & -3 & 3 & -2 & -1 & -2 & -1 \\
4 & -4 & -4 & 4 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

双三次内插

- 图像处理—离散近似

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &\approx \frac{f(x+h,y)-f(x-h,y)}{2h} \\
f_y(x,y) &\approx \frac{f(x,y+k)-f(x,y-k)}{2k} \\
f_{xx}(x,y) &\approx \frac{f(x+h,y)-2f(x,y)+f(x-h,y)}{h^2} \\
f_{yy}(x,y) &\approx \frac{f(x,y+k)-2f(x,y)+f(x,y-k)}{k^2} \\
f_{xy}(x,y) &\approx \frac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y-k)-f(x-h,y+k)+f(x-h,y-k)}{4hk}.
\end{aligned}
$$

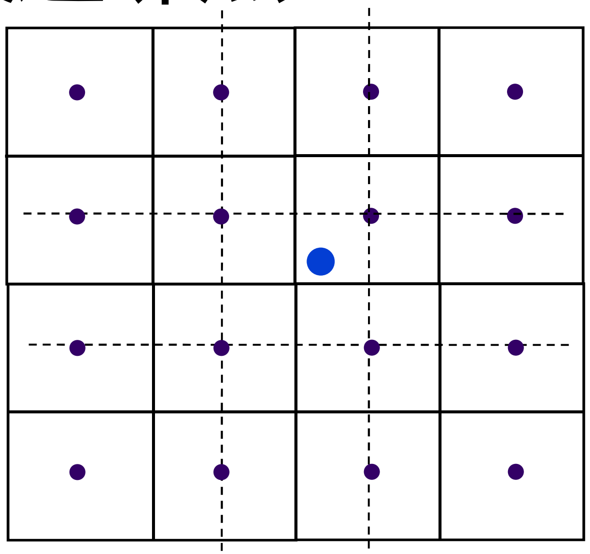
https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference

双三次内插

- 另一种解法

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij} x^i y^j .$$

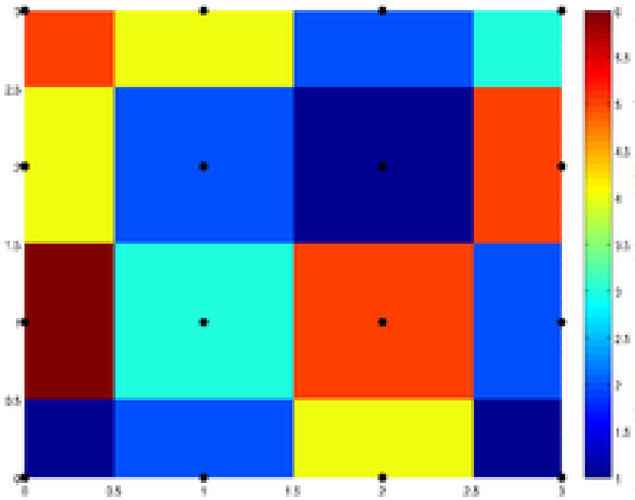
- 寻找16个最近邻点



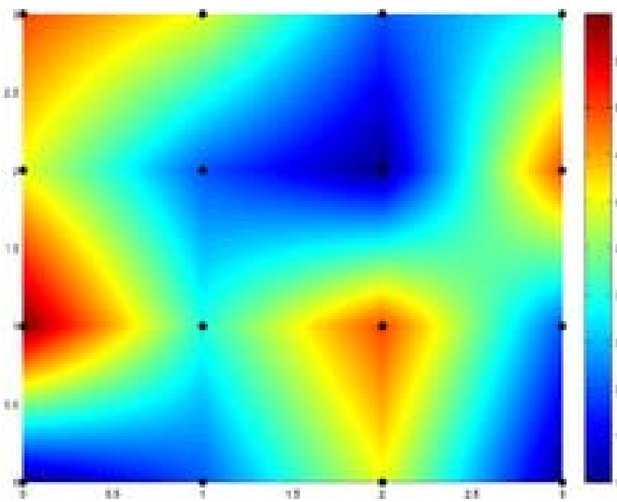
- 写出16个方程求解

效果展示

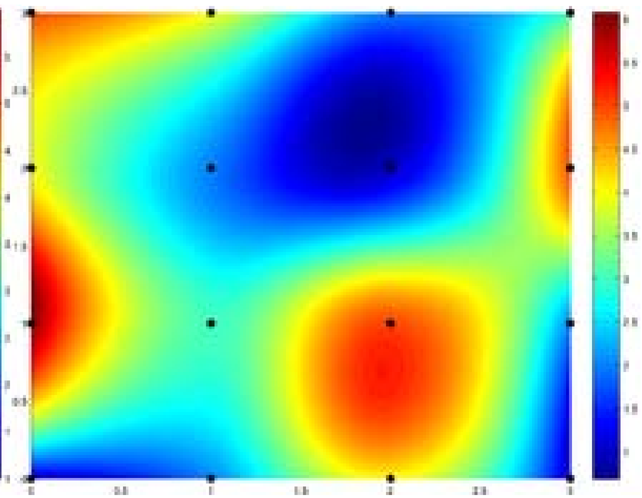
- 平滑程度



最近邻内插



双线性内插



双三次内插

效果展示

最近邻内插

双线性内插

双三次内插

128 → 1024　　64 → 1024

下一讲

- 10 月 12 日（星期六）