数字图像处理

第五讲

频率域图像增强（Part I）

傅里叶变换

提纲

- 背景
- 基本概念
- 傅里叶变换
  - 傅里叶变换
  - 卷积定理
- 采样
  - 函数采样
  - 采样定理
  - 函数恢复

空间域vs频率域

- 共性：都为了图像增强

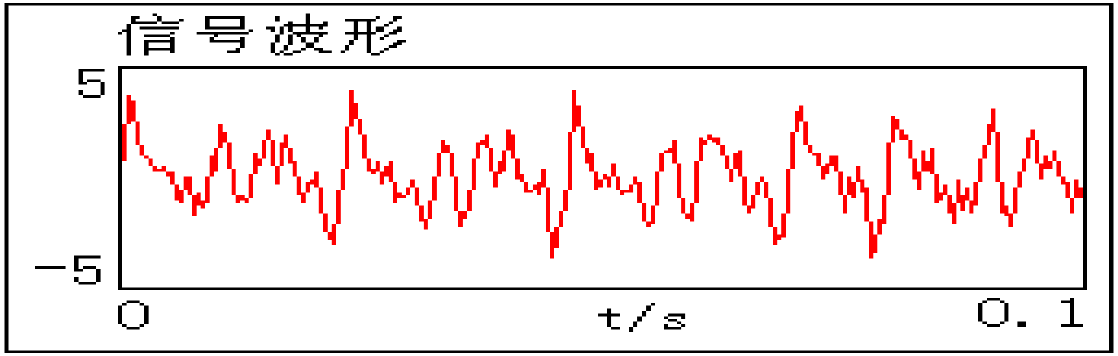
- 两大类方法：
  - **空间域方法**：图像平面本身，对图像的像素直接处理；

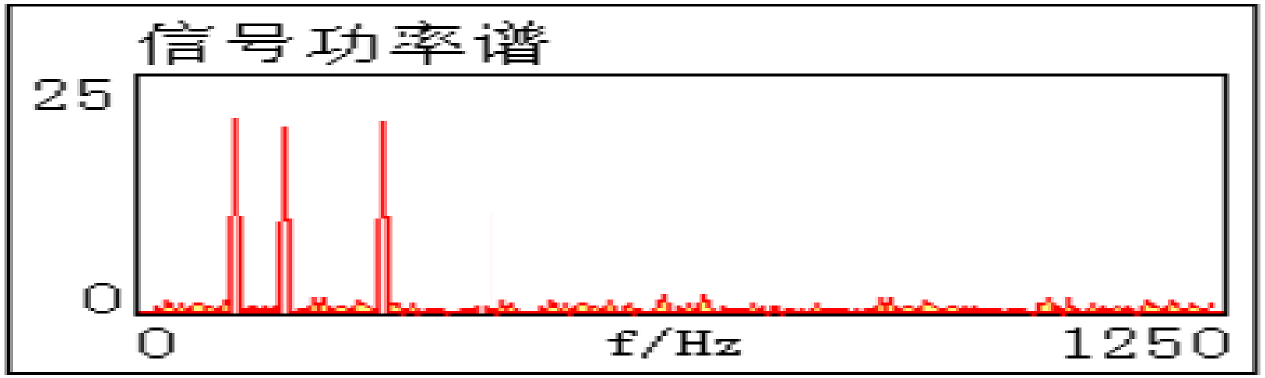
  - **频率域方法**：修改图像的频谱例如傅里叶变换为基础；

图像是连续信号的量化采样

- 信号通常包括丰富的频域信息

图例：受噪声干扰的多频率成分信号





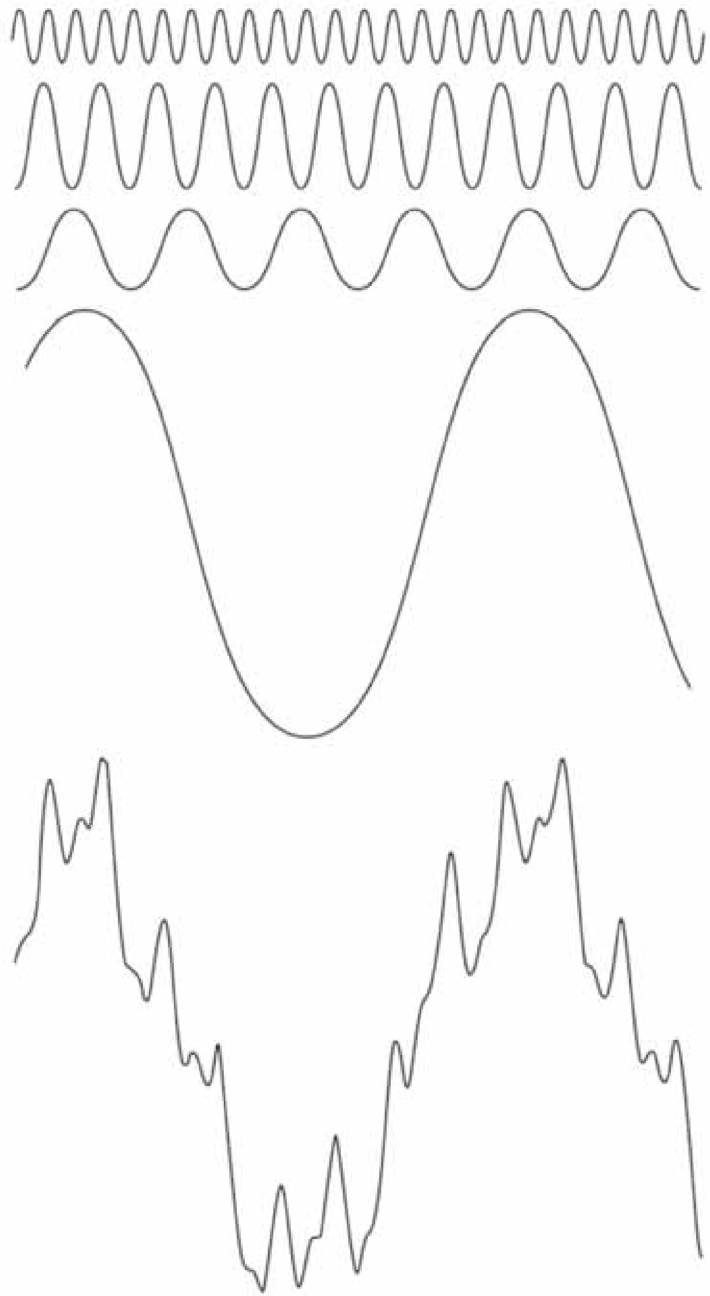
怎么把信号投影到频域空间？

- 傅里叶，法国数学家、物理学家（1768-1830）
- 《热分析理论》

傅里叶级数

任何周期函数都可以表示为不同频率的正弦函数和/或余弦函数加权之和

示例



四个波形
的叠加

怎么把信号投影到频域空间？

- 傅里叶，法国数学家、物理学家（1768-1830）

- 《热分析理论》

傅里叶变换

非周期函数也可以表示为不同频率的正弦函数和/或余弦函数加权之后的积分

傅里叶变换的意义

- 解决了频域信息如何表示这个基本问题
- 最早用于热扩散领域
- 带来了“信号处理领域”的一场革命
  - 1960 计算机、快速傅里叶变换

提纲

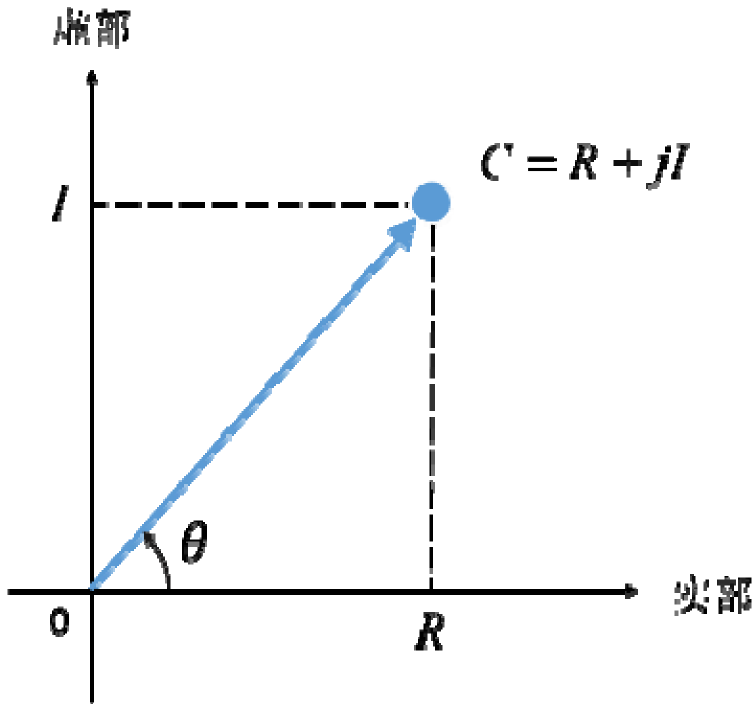
- 背景
- 基本概念
- 傅里叶变换
  - 傅里叶变换
  - 卷积定理
- 采样
  - 函数采样
  - 采样定理
  - 函数恢复

复数

- 复数C

$$C = R + jI$$

  - R和I是实数、$j = \sqrt{-1}$是虚数



复数

- 复数C

$$C = R + jI$$

  - R和I是实数、$j=\sqrt{-1}$是虚数

- 极坐标表示

$$C = |C|(\cos\theta + j\sin\theta)$$

  - $|C| = \sqrt{R^2 + I^2}$为长度
  - θ为夹角

复数

- 欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

- 极坐标表示

$$\begin{aligned} C &= |C|(\cos\theta + j\sin\theta) \\ &= |C|e^{j\theta} \end{aligned}$$

  - $1 + j2 = \sqrt{5}e^{j\theta}$，$\theta = 1.1$

- C的共轭C^*

$$C^* = R - jI$$

复函数

- 复函数

$$F(u) = R(u) + jI(u)$$

  - 幅值$|F(u)| = \sqrt{R(u)^2 + I(u)^2}$
  - 角度$\theta = \arctan[I(u)/R(u)]$, $[-\pi, \pi]$

- 复共轭函数

$$F(u) = R(u) - jI(u)$$

连续冲激与采样

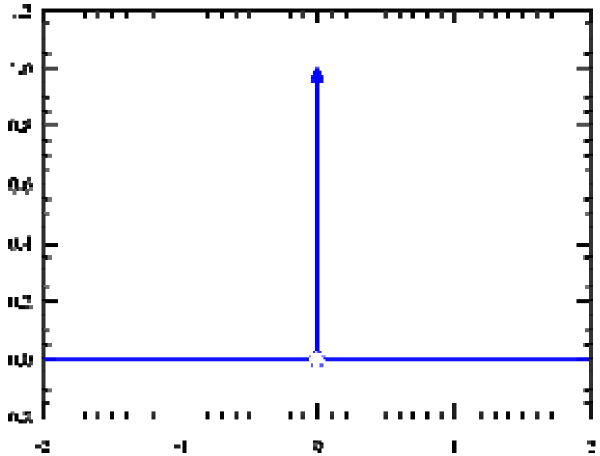
- 在0处的连续单位冲激

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{if } t \neq 0 \end{cases}$$

- 并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

- 长度为0
- 高度为∞
- 面积为1



连续冲激与采样

- 在0处的连续单位冲激

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{if } t \neq 0 \end{cases}$$

  - 并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

- 采样性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\, dt = f(0)$$

连续冲激与采样

- 在t_0处的连续单位冲激

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & \text{if } t=t_0\\ 0 & \text{if } t\neq t_0\end{cases}$$

  - 并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1$$

- 采样性质

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt=f(t_0)$$

离散冲激与采样

- 在0处的离散单位冲激

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

  - 并且满足

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1$$

- 采样性质

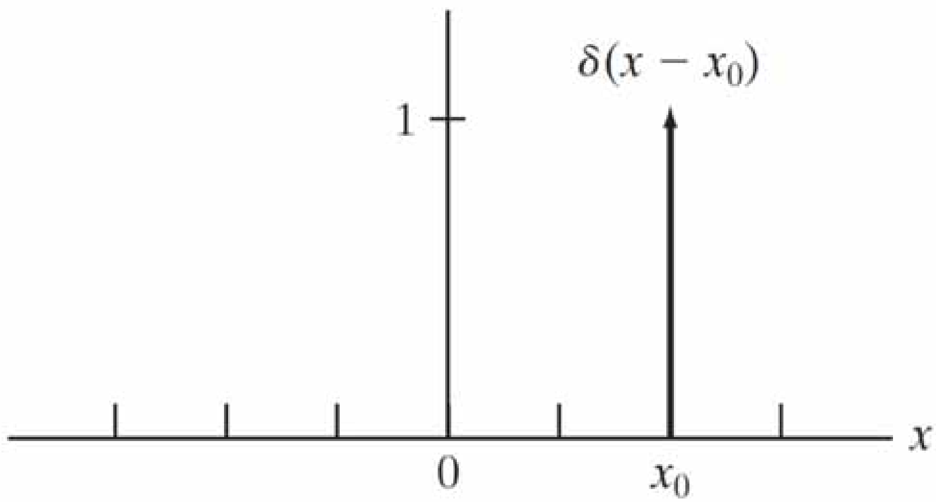
$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) = f(0)$$

离散冲激与采样

- 在x_0处的离散单位冲激

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}1 & \text{if } x=x_0\\ 0 & \text{if } x\neq x_0\end{cases}$$

  - 并且满足 $$\sum_{x=-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)=1$$



离散冲激与采样

- 在x_0处的离散单位冲激

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}1 & \text{if } x=x_0\\ 0 & \text{if } x\neq x_0\end{cases}$$

  - 并且满足 $$\sum_{x=-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)=1$$

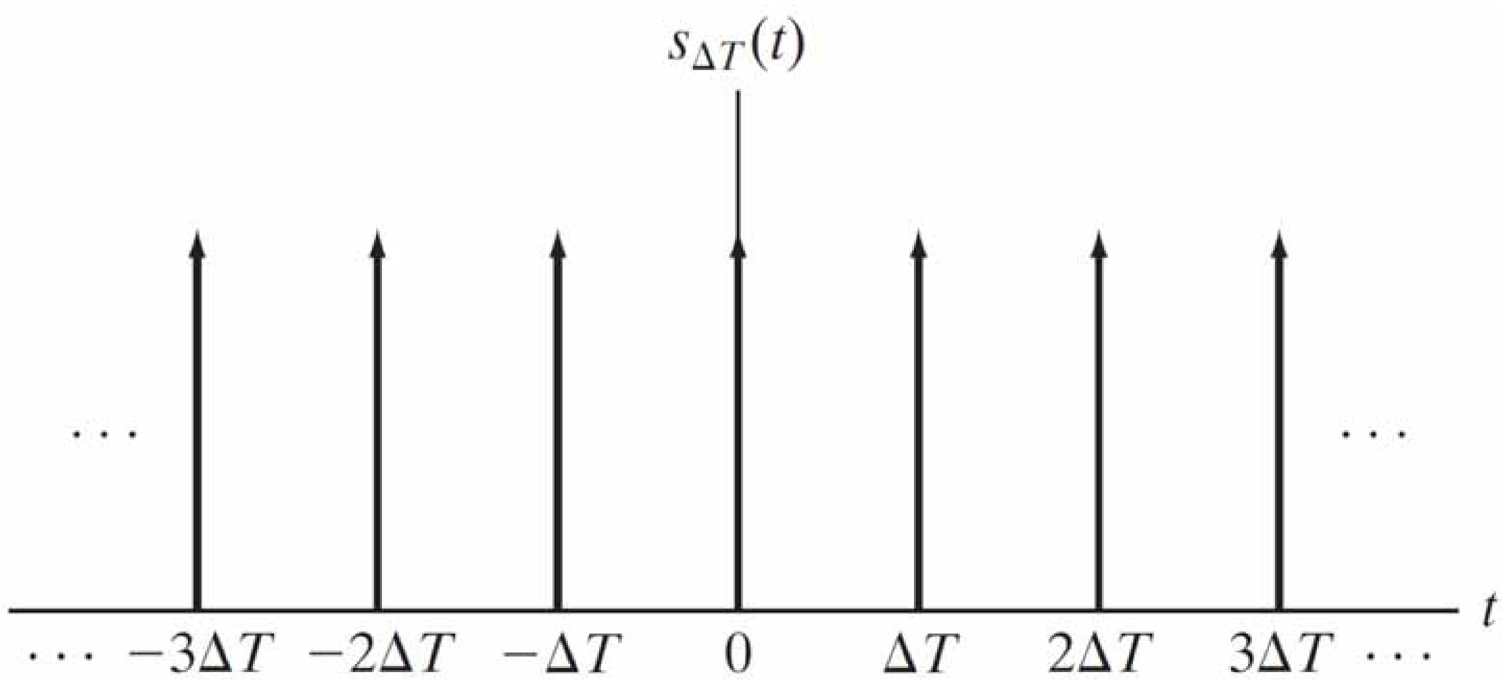
- 采样性质

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)$$

冲激串

- 无穷个以ΔT为间距的周期性冲激之和
  - 连续
  - 离散

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$



提纲

- 背景
- 基本概念
- 傅里叶变换
  - 傅里叶变换
  - 卷积定理
- 采样
  - 函数采样
  - 采样定理
  - 函数恢复

傅里叶级数

- 周期为T的连续函数$f(t)$可以表示为正弦和余弦函数的加权之和

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

注意j前面的符号

  - 其中

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}\, dt \qquad \text{for } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- 欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

连续傅里叶变换

- 连续函数$f(t)$的傅里叶变换

$$\Im\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}\,dt$$

  - 其中μ是连续变量
- 表示成μ的函数

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}\,dt$$

  - 欧拉公式

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\cos(2\pi\mu t) - j\sin(2\pi\mu t)\right]dt$$

连续傅里叶变换

- 傅里叶变换

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j2\pi\mu t}\, dt$$

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\cos(2\pi\mu t) - j\sin(2\pi\mu t)\right] dt$$

  - 通常是复数
  - μ出现在三角函数内，代表频率
  - t是秒、 μ是周/秒（赫兹）
  - t是米、 μ是周/米

傅里叶变换对

- 傅里叶变换

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j2\pi\mu t}\, dt$$

- 傅里叶反变换

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\, e^{j2\pi\mu t}\, d\mu$$

- 对比：傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}\, dt$$

举例

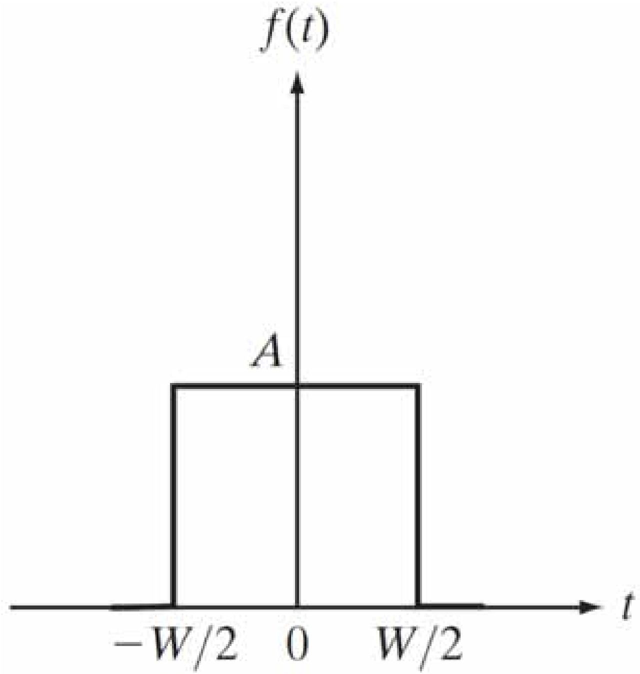
- 盒状函数的傅里叶变换

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}\,dt = \int_{-W/2}^{W/2} Ae^{-j2\pi\mu t}\,dt$$

$$= \frac{-A}{j2\pi\mu}\left[e^{-j2\pi\mu t}\right]_{-W/2}^{W/2} = \frac{-A}{j2\pi\mu}\left[e^{-j\pi\mu W} - e^{j\pi\mu W}\right]$$

$$= \frac{A}{j2\pi\mu}\left[e^{j\pi\mu W} - e^{-j\pi\mu W}\right]$$

$$= AW\frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)}$$

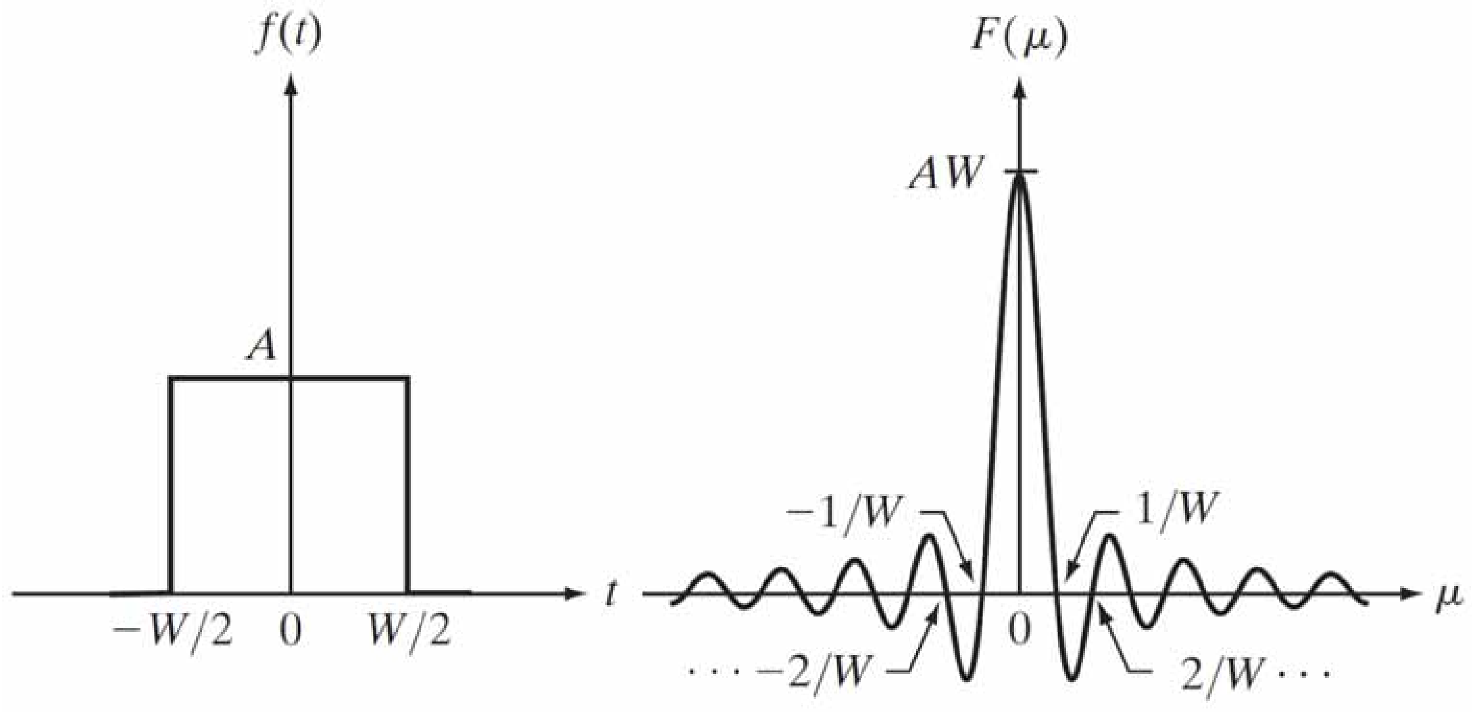


- $\sin\theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/2j$
- sinc 函数
- 实数

$$\mathrm{sinc}(m) = \frac{\sin(\pi m)}{(\pi m)}$$

举例

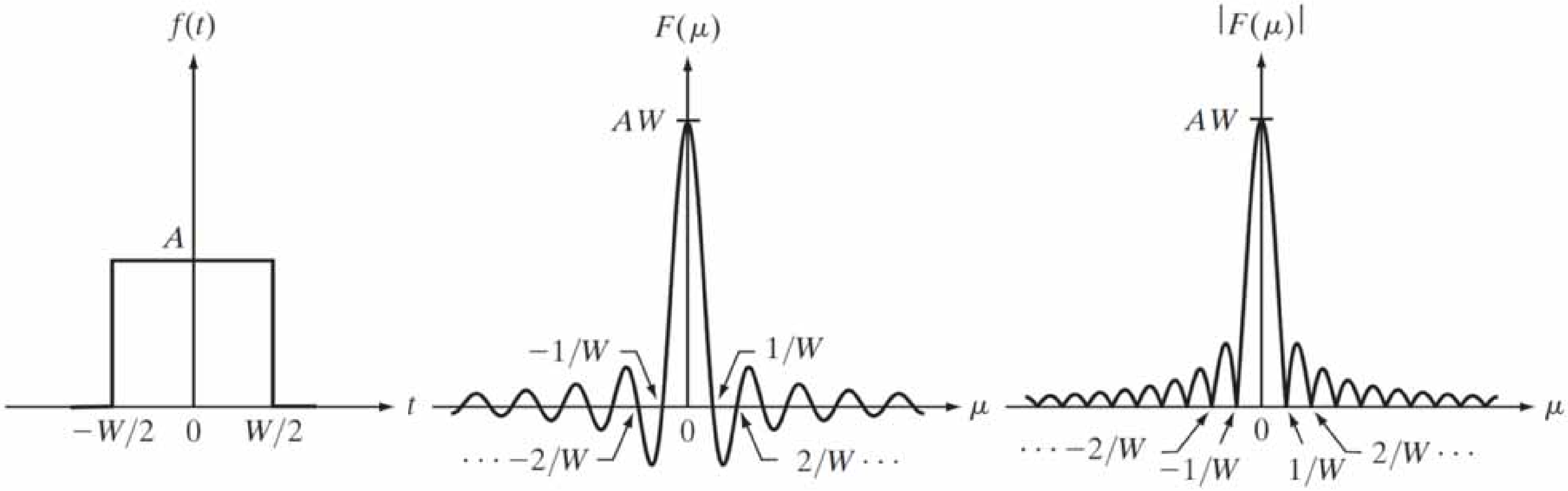
- 盒状函数的傅里叶变换



傅里叶谱/频谱

- 傅里叶变换的幅值

$$|F(\mu)| = AW\left|\frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)}\right|$$



- 零的位置与W成反比、逐渐降低、无限延伸

举例

- 连续单位冲激的傅里叶变换

$$
\begin{aligned}
F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi\mu t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\mu t}\, \delta(t)\, dt \\
&= e^{-j2\pi\mu 0} = e^{0} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

- t_0处连续单位冲激的傅里叶变换

$$
\begin{aligned}
F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, e^{-j2\pi\mu t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\mu t}\, \delta(t - t_0)\, dt \\
&= e^{-j2\pi\mu t_0} \\
&= \cos(2\pi\mu t_0) - j\sin(2\pi\mu t_0)
\end{aligned}
$$

对称性

- $f(t)$的傅里叶变换为$F(\mu)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t}\, d\mu \qquad F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t}\, dt$$

- $F(t)$的傅里叶变换为？

对称性

- $f(t)$的傅里叶变换为$F(\mu)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t}\, d\mu \qquad F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t}\, dt$$

- $F(t)$的傅里叶变换为$f(-\mu)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = f(-\mu)$$

$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{傅里叶变换}} e^{-j2\pi\mu t_0} \qquad e^{-j2\pi t_0 t} \xrightarrow{\text{傅里叶变换}} \delta(-\mu - t_0)$$

对称性

- $f(t)$的傅里叶变换为$F(\mu)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t}\, d\mu \qquad F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t}\, dt$$

- $F(t)$的傅里叶变换为$f(-\mu)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = f(-\mu)$$

$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{傅里叶变换}} e^{-j2\pi\mu t_0} \qquad e^{j2\pi a t} \xrightarrow{\text{傅里叶变换}} \delta(-\mu + a)$$

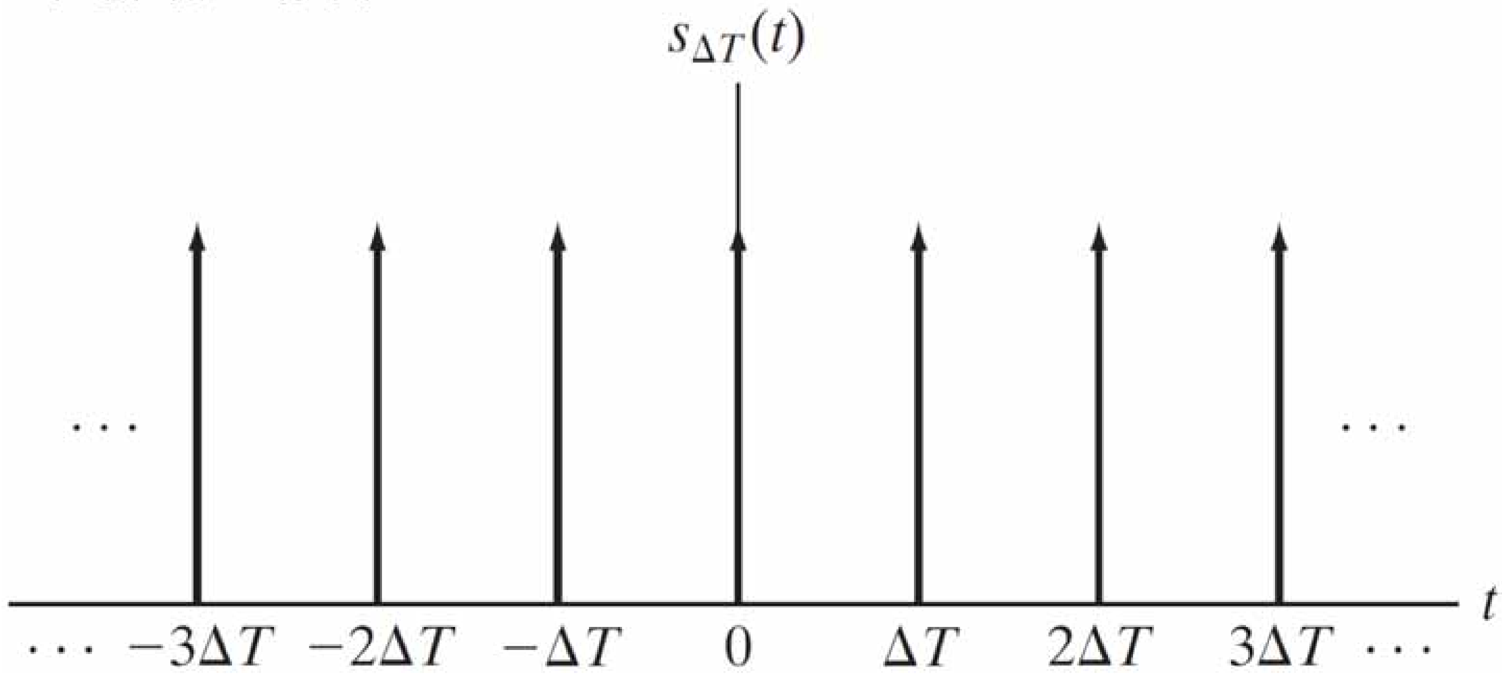
$$\delta(\mu - a)$$

举例

- 冲激串

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

  - 周期函数



举例

- 冲激串

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

- 傅里叶级数

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}$$

  - 其中

$$c_n = \frac{1}{\Delta T}\int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} dt$$

举例

冲激串的傅里叶变换还是冲激串

- 冲激串

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

- 傅里叶级数

$$s_{\Delta T}(t) = \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}$$

- 傅里叶变换

$$\Im\left\{e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}\right\} = \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
S(\mu) &= \Im\{s_{\Delta T}(t)\} \\
&= \Im\left\{\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}\right\} \\
&= \frac{1}{\Delta T}\Im\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}\right\} \\
&= \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)
\end{aligned}$$

提纲

- 背景
- 基本概念
- 傅里叶变换
  - 傅里叶变换
  - 卷积定理
- 采样
  - 函数采样
  - 采样定理
  - 函数恢复

离散卷积

- 旋转、补零、计算、滑动、裁剪

```
 Origin        f             w rotated 180°
0 0 0 1 0 0 0 0          8 2 3 2 1           (i)

          0 0 0 1 0 0 0 0                    (j)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0              (k)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0              (l)
  8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0              (m)
        8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0              (n)
                      8 2 3 2 1

Full convolution result
  0 0 0 1 2 3 2 8 0 0 0 0                    (o)

Cropped convolution result
    0 1 2 3 2 8 0 0                          (p)
```

连续卷积

- 连续函数的卷积

$$f(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$$

  - t是位移、负号表示反转

- 傅里叶变换

$$\Im\{f(t) \star h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau)\, d\tau \right] e^{-j2\pi\mu t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j2\pi\mu t}\, dt \right] d\tau$$

连续卷积

- 平移性质

$$\Im\{h(t-\tau)\} = H(\mu)\mathrm{e}^{-j2\pi\mu\tau}$$

- 化简

$$\Im\{f(t)\star h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left[H(\mu)e^{-j2\pi\mu\tau}\right]d\tau$$

$$= H(\mu)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j2\pi\mu\tau}\,d\tau$$

$$= H(\mu)F(\mu)$$

卷积定理

- 空间域卷积的傅里叶变换⇔傅里叶变换在频率域的乘积

$$f(t) \star h(t) \Leftrightarrow H(\mu) F(\mu)$$

- 空间域乘积的傅里叶变换⇔傅里叶变换在频率域的卷积

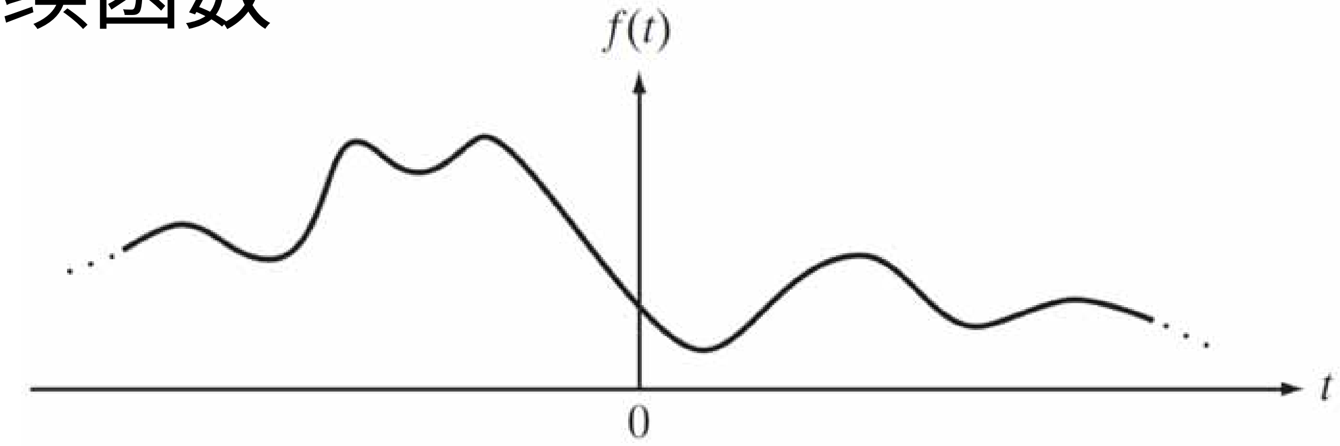
$$f(t) h(t) \Leftrightarrow H(\mu) \star F(\mu)$$

提纲

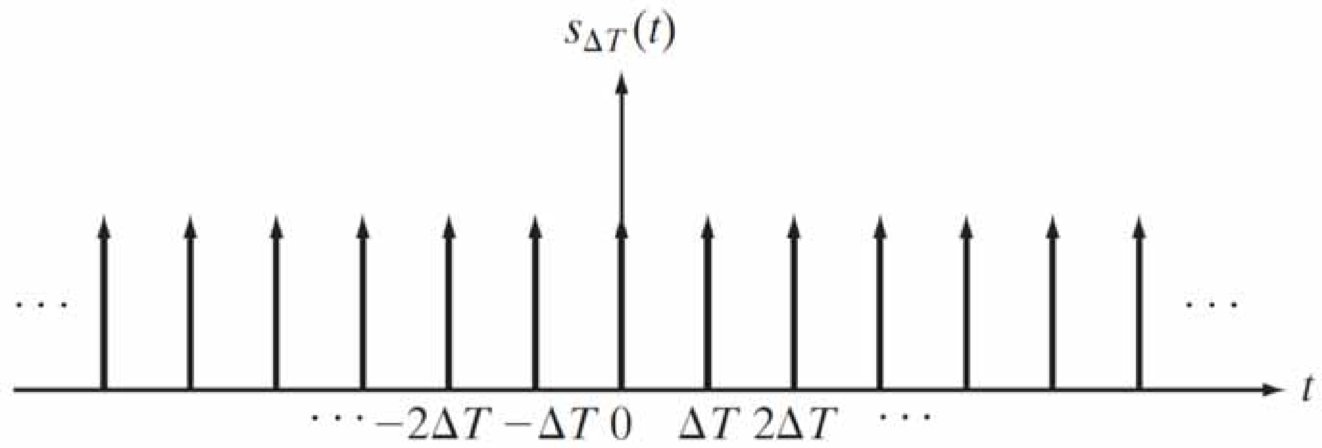
- 背景
- 基本概念
- 傅里叶变换
  - 傅里叶变换
  - 卷积定理
- 采样
  - 函数采样
  - 采样定理
  - 函数恢复

连续函数采样

- 连续函数



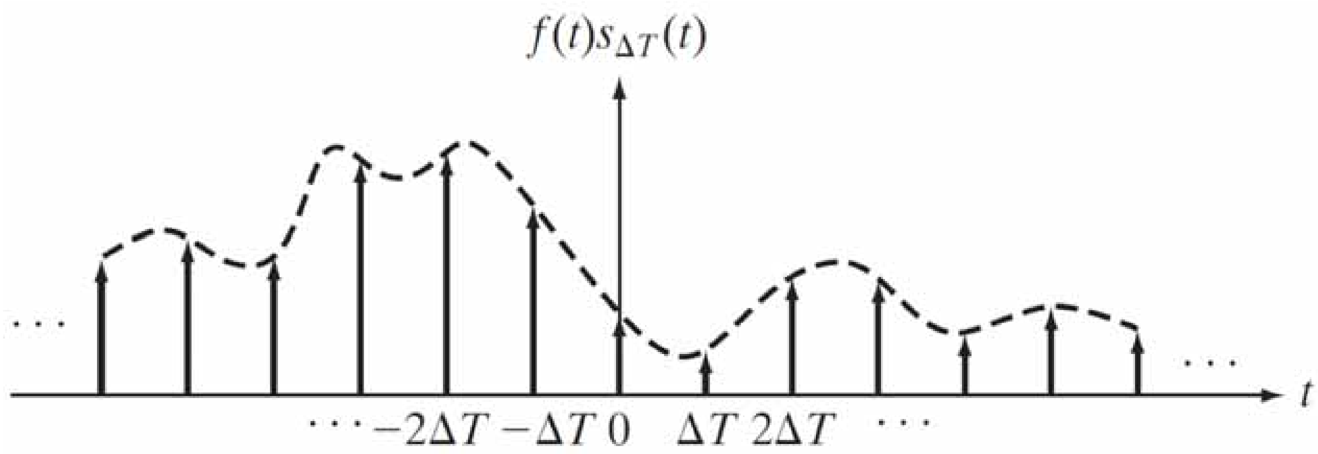
- ΔT为间隔的冲激串



连续函数采样

- 函数相乘

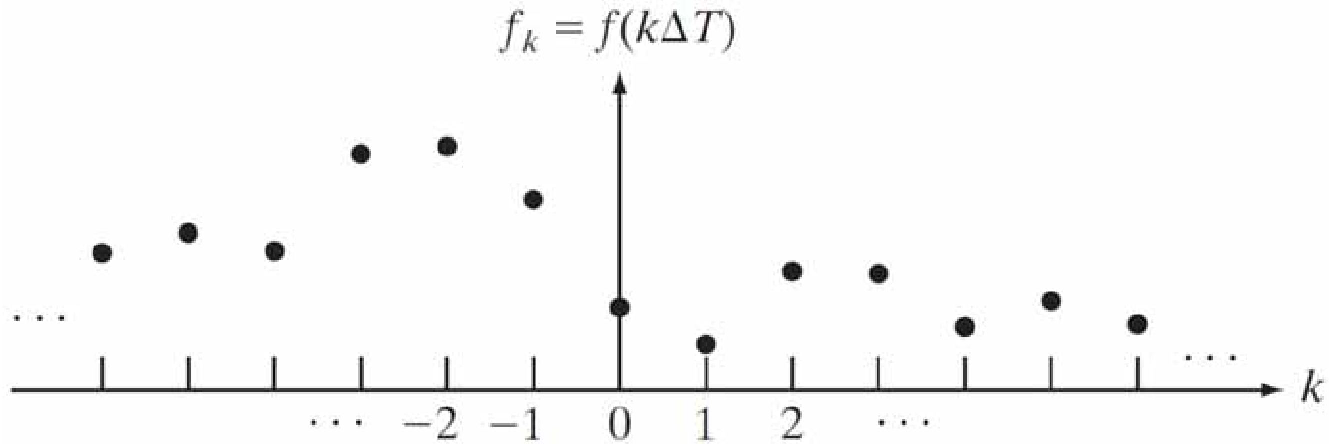
$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$



连续函数采样

- 采样值

$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t - k\Delta T)\,dt = f(k\Delta T)$$



思考：能否通过离散的采样点，恢复连续函数？

提纲

- 背景
- 基本概念
- 傅里叶变换
  - 傅里叶变换
  - 卷积定理
- 采样
  - 函数采样
  - 采样定理
  - 函数恢复

采样后函数的傅里叶变换

- 采样后函数

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

- 卷积定理

$$\tilde{F}(\mu) = \Im\{\tilde{f}(t)\} = \Im\{f(t)s_{\Delta T}(t)\} = F(\mu)\star S(\mu)$$

  - 其中

$$S(\mu) = \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

采样后函数的傅里叶变换

- 化简
  - 无限、周期性拷贝
  - 间隔$1/\Delta T$
  - 连续

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}(\mu) &= F(\mu) \star S(\mu) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) S(\mu - \tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \delta\left(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)
\end{aligned}
$$

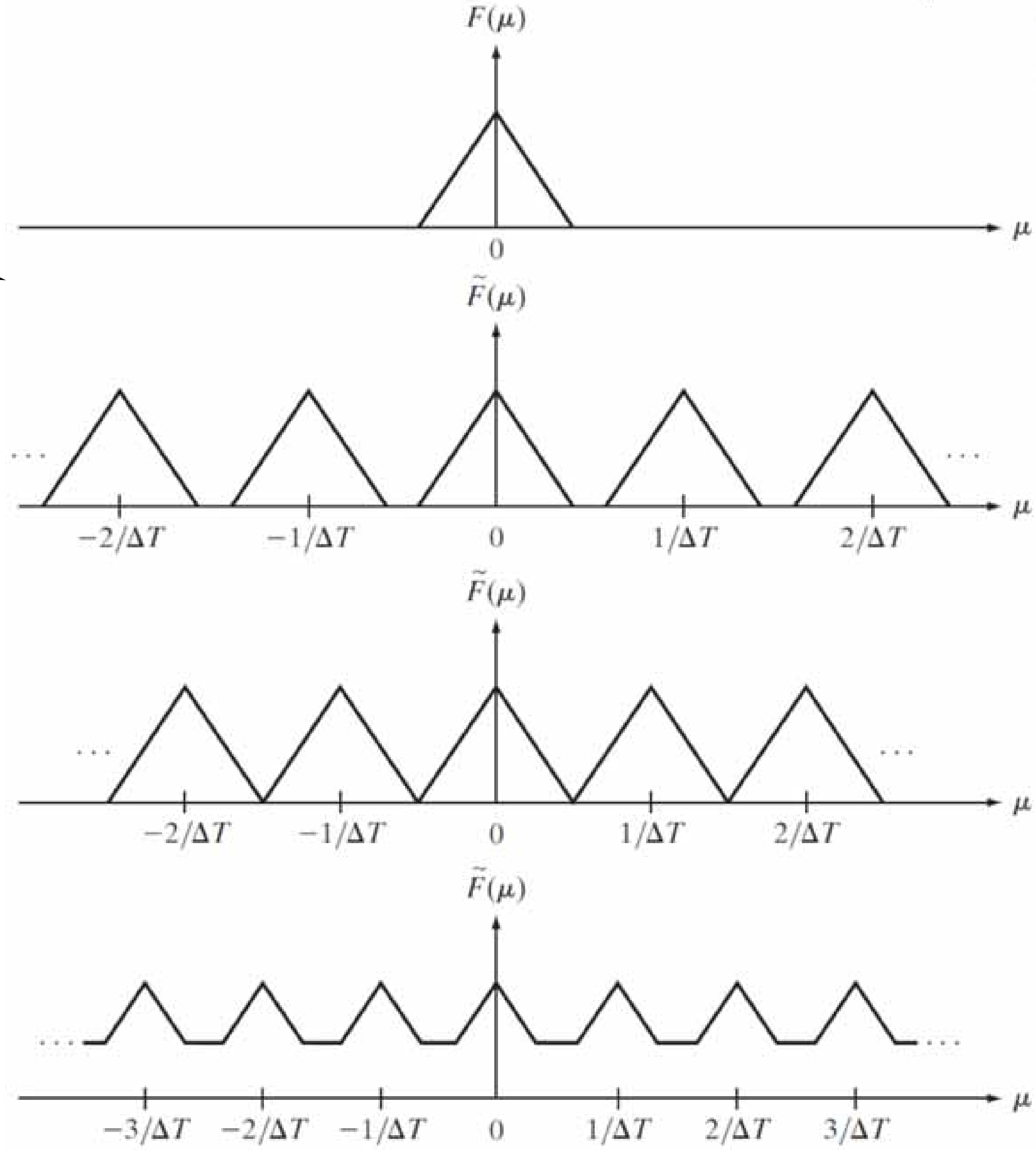
示例

能否恢复原函数$f(t)$？

过采样

临界采样

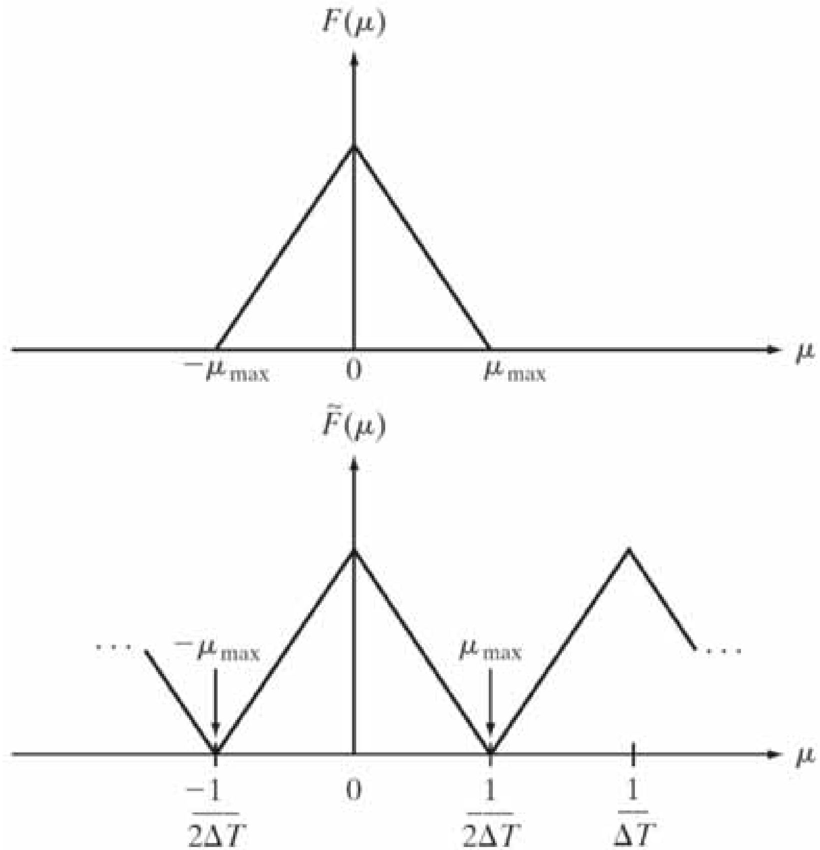
欠采样

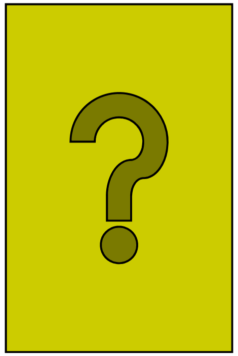


采样定理

- 带限函数$f(t)$
  - 傅里叶变换后非零频率属于$[-\mu_{\max}, \mu_{\max}]$

如果可以从$\tilde{F}(\mu)$中分离出$F(\mu)$，那么就可以恢复$f(t)$！





采样定理

- 如果

$$\frac{1}{2\Delta T} > \mu_{\max} \Leftrightarrow \frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{\max}$$

就可以从$\tilde{F}(\mu)$中分离出$F(\mu)$

  - 注意等号不可以！

采样定理

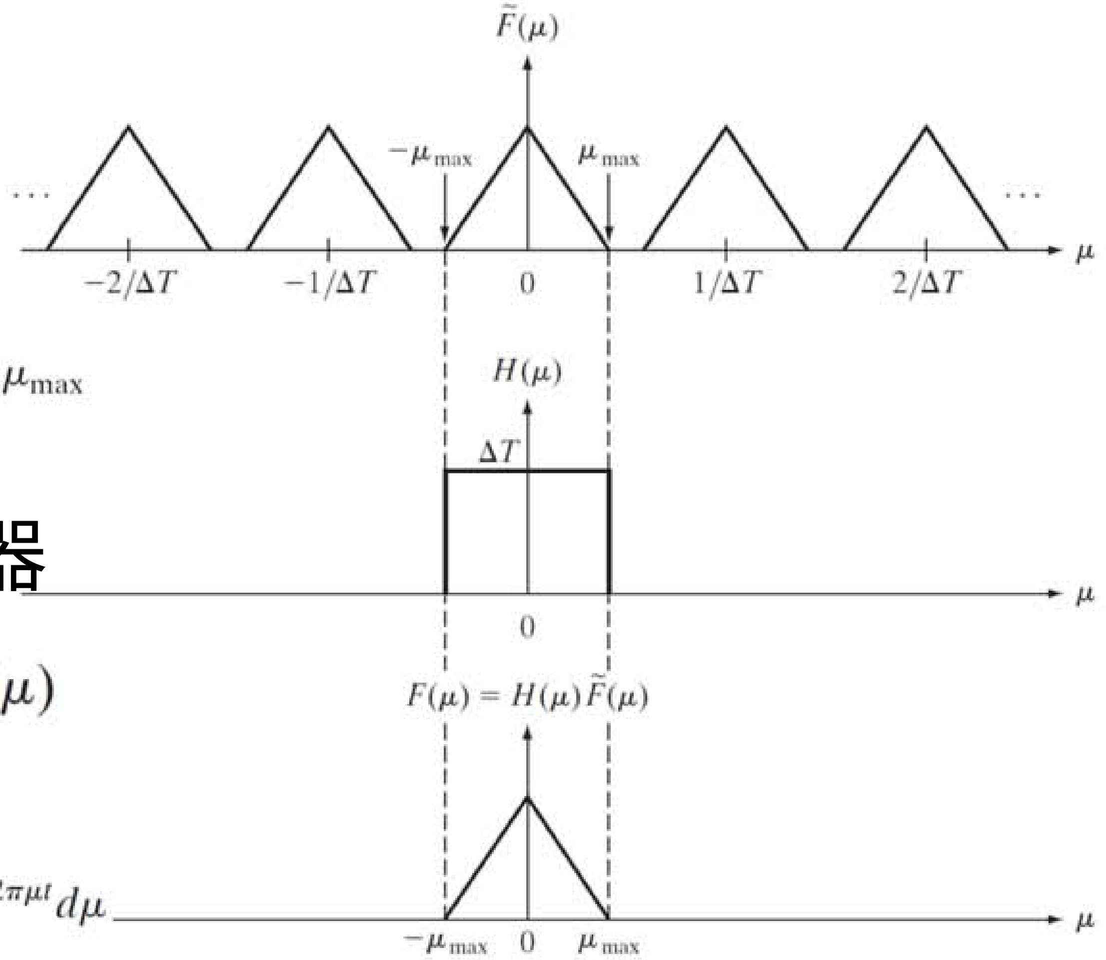
如果以超过函数最高频率的两倍采样率来获得样本，连续的带限函数可以完美地从它的样本集来恢复。

- 奈奎斯特频率(Nyquist Frequency)

$$2\mu_{\max}$$

示例

- 略高于奈奎斯特频率采样



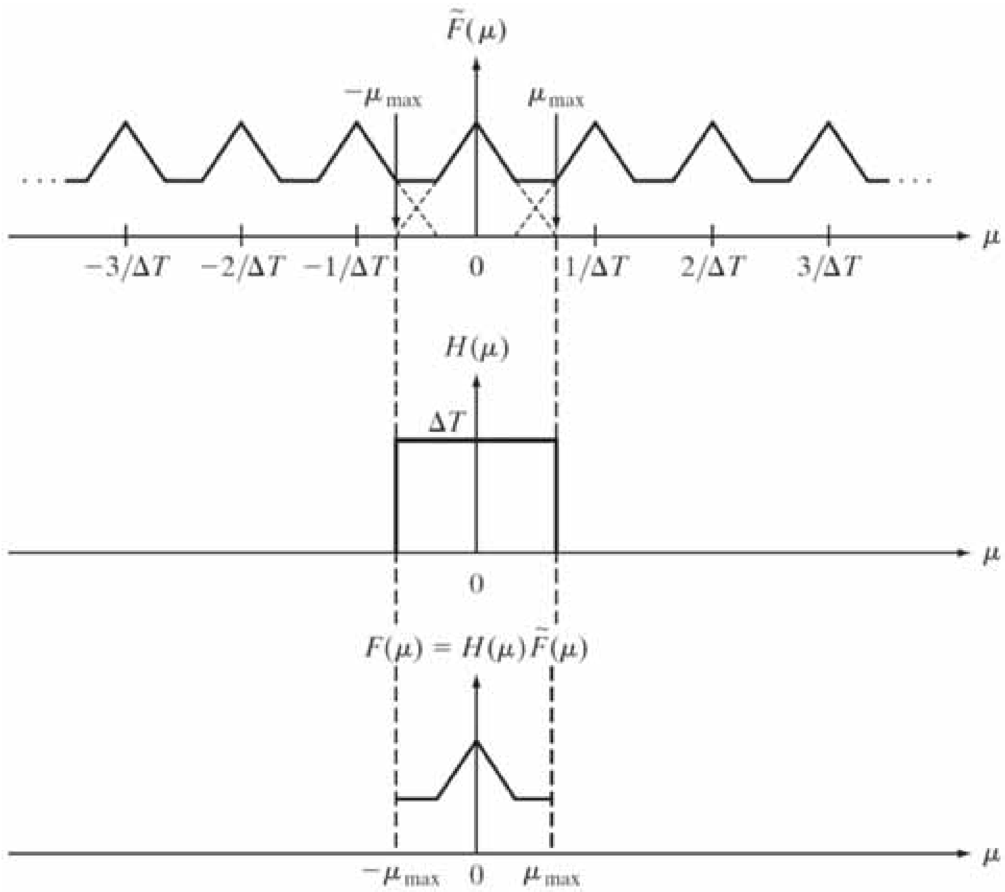
- 定义函数

$$H(\mu)=\begin{cases}\Delta T & -\mu_{\max}\le\mu\le\mu_{\max}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

  - 理想低通滤波器
- 相乘 $F(\mu)=H(\mu)\tilde{F}(\mu)$
- 恢复 $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\mu)e^{j2\pi\mu t}d\mu$

混淆

- 欠采样
  - 带限函数以低于奈奎斯特频率采样
- 无法分离
- 无法补救



混淆

- 在实际中，可以避免吗？

采样定理

如果以超过函数最高频率的两倍采样率来获得样本，连续的带限函数可以完美地从它的样本集来恢复。

- 即使原函数是带限的，仍然难以避免！
  - 采样是有限的
- 有限长度采样
  - 引入无限频率分量

有限长度采样

- 采样时间限制在$[0, T]$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 函数已经发生变换

$$f(t) \Rightarrow f(t)h(t)$$

- $f(t)h(t)$通常是无限带宽

$$f(t)h(t) \Leftrightarrow H(\mu) \star F(\mu)$$

  - $H(\mu)$有无限频率 （？）

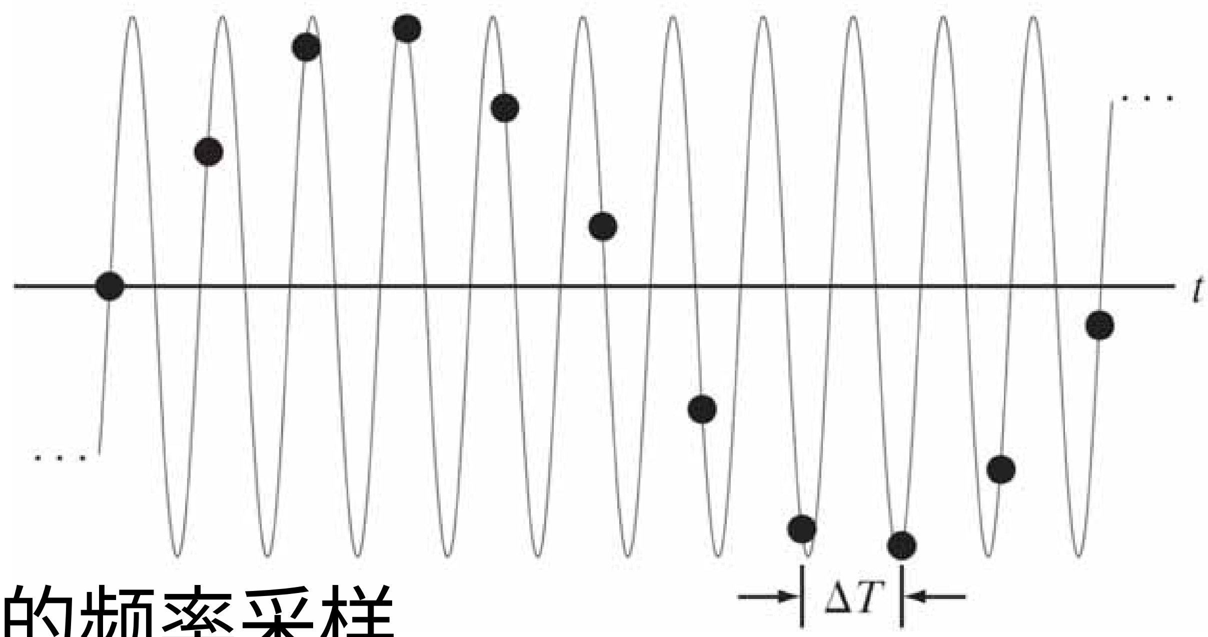
抗混淆

- 一个带限函数一定是从$-\infty$扩展到∞。
- 没有有限持续时间的函数是带限的。
- 有限长度的采样，混淆是不可避免的。

- 抗混淆
  - 事先防止或减轻混淆
  - 平滑输入函数，减少高频分量
    - 图像散焦

示例

- 带限函数——正弦波$\sin(\pi t)$
  - 周期是$2s$，频率为$1/2$赫兹
  - 欠采样



  - 以1赫兹的频率采样
    - $\cdots \sin(-\pi), \sin(0), \sin(\pi), \sin(2\pi), \cdots$

提纲

- 背景
- 基本概念
- 傅里叶变换
  - 傅里叶变换
  - 卷积定理
- 采样
  - 函数采样
  - 采样定理
  - 函数恢复

由样本恢复原函数

- 频率域操作

$$F(\mu) = H(\mu)\tilde{F}(\mu)$$

- 空间域操作

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \Im^{-1}\{F(\mu)\} \\ &= \Im^{-1}\{H(\mu)\tilde{F}(\mu)\} \\ &= h(t) \star \tilde{f}(t) \end{aligned}$$

由样本恢复原函数

- 化简

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t/\Delta T)}{\pi t/\Delta T}$$

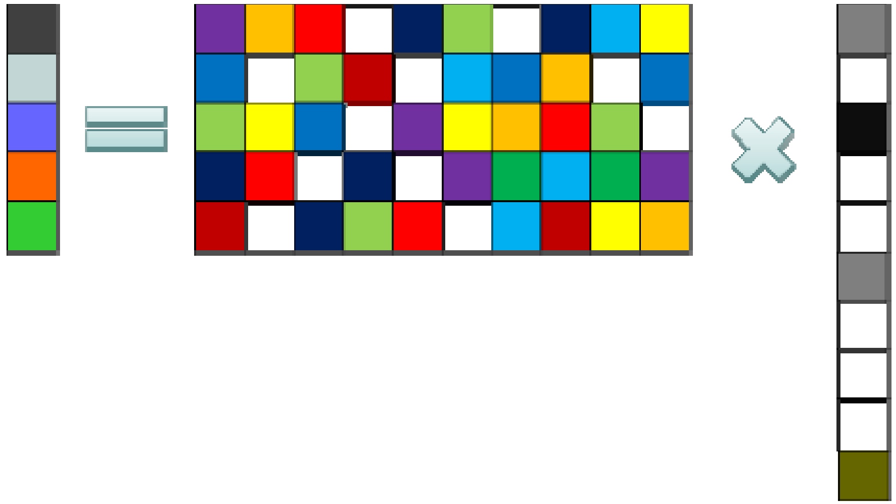
- 函数内插

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)\,\mathrm{sinc}\left[(t - n\Delta T)/\Delta T\right]$$

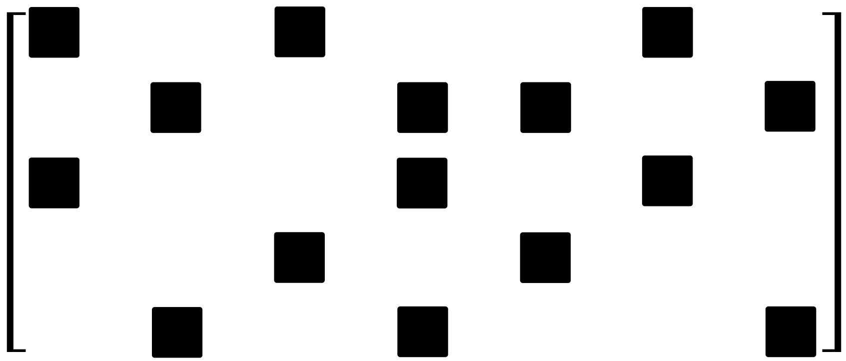
  - 无限个样本的内插（实际中只能近似，如灰度内插）
  - $t = k\Delta T, f(t) = f(k\Delta T)$

扩展：超越采样定理

- 压缩感知
  - 稀疏



- 矩阵补全
  - 低秩

$M =$  $\in \mathbb{R}^{n \times d}$

下一讲