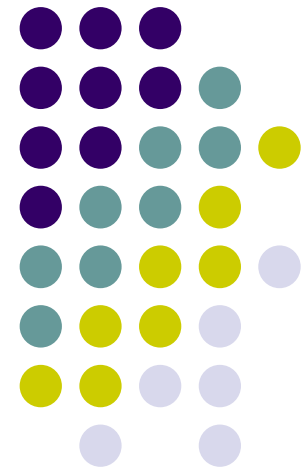


数字图像处理

第七讲 频率域图像增强 (Part II) 离散傅里叶变换



提纲

- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
 - 二维采样定理
 - 图像中的混淆
- 离散傅里叶变换（二维）
 - 基本性质
 - 傅里叶谱和相角
 - 二维卷积定理



采样后函数的傅里叶变换



- 采样后函数

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

- 卷积定理

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\mu) &= \mathfrak{S}\{\tilde{f}(t)\} = \mathfrak{S}\{f(t)s_{\Delta T}(t)\} = F(\mu) \star S(\mu) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)S(\mu - \tau) d\tau = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \delta\left(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right) d\tau = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)\end{aligned}$$

- 周期函数

采样后函数的傅里叶变换



- 采样后函数

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

- 傅里叶变换 $\tilde{F}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)e^{-j2\pi\mu t} dt$

- 连续函数

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)e^{-j2\pi\mu t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)e^{-j2\pi\mu t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T} \quad [f_n = f(n\Delta T)]$$

离散傅里叶变换 (DFT)

周期并不是

$$\left[-\frac{1}{2\Delta T}, \frac{1}{2\Delta T}\right]$$

- 对 $\tilde{F}(\mu)$ 的一个周期 $[0, 1/\Delta T]$ 采样

$$\mu = \frac{m}{M\Delta T} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- 考虑 M 个样本构造的 $\tilde{F}(\mu)$

$$\tilde{F}(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi\mu\Delta T n}$$

- 离散傅里叶变换 (DFT)

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi mn/M} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

离散傅里叶变换对



- 离散傅里叶变换 (DFT)

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi mn/M} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- 离散傅里叶反变换 (IDFT)

$$f_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi mn/M} \quad n = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- 表达式不依赖采样间隔、频率间隔
- 适用于任何**均匀取样**的有限离散样本集

离散傅里叶变换对（新符号）



- 离散傅里叶变换（DFT）

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \quad u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- u 是整数

- 离散傅里叶反变换（IDFT）

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M} \quad x = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- x 是整数



离散傅里叶变换

- 无限周期、周期为 M

$$F(u) = F(u + kM) \quad f(x) = f(x + kM)$$

- 离散卷积

$$f(x) \star h(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f(m)h(x - m)$$

- $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$
- 周期函数，也被称为**循环卷积**
- 与之前的卷积不一样，主要区别是 x
- **卷积定理**依然成立



采样间隔和频率间隔

- 对连续函数 $f(t)$ 采样
 - 以 ΔT 为间隔采 M 个样本

$$\{f(x) | x = 0, 1, \dots, M - 1\}$$

- 总时间长度为

$$T = M\Delta T$$

- 离散频域中的间隔

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta T} = \frac{1}{T}$$

反转关系



采样间隔和频率间隔

- 对连续函数 $f(t)$ 采样

- 以 ΔT 为间隔采 M 个样本

$$\{f(x)|x = 0, 1, \dots, M - 1\}$$

- 总时间长度为

$$T = M\Delta T$$

- 离散频域中的间隔

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta T} = \frac{1}{T}$$

- 离散频域范围

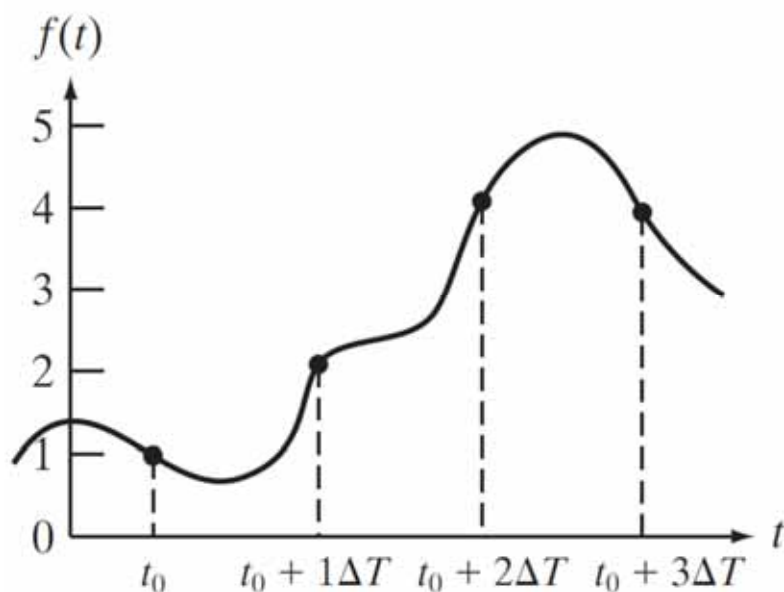
$$\Omega = M\Delta u = \frac{1}{\Delta T}$$

反转关系

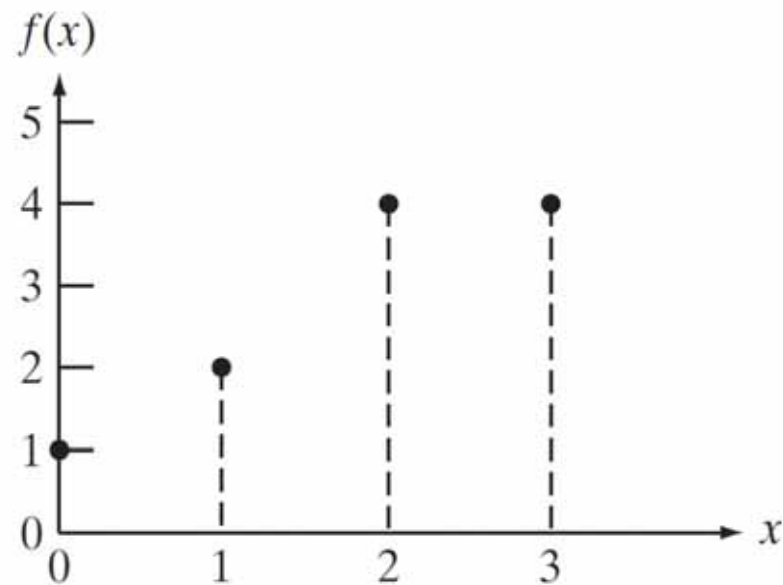
举例



- 离散傅里叶变换



对连续函数采样



离散集合

举例



- 离散傅里叶变换

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \quad u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$F(0) = \sum_{x=0}^3 f(x) = [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)]$$

$$= 1 + 2 + 4 + 4 = 11$$

$$F(1) = \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-j2\pi(1)x/4}$$

$$= 1e^0 + 2e^{-j\pi/2} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2} = -3 + 2j$$

$$F(2) = -(1 + 0j) \text{ and } F(3) = -(3 + 2j)$$

举例



- 离散傅里叶反变换

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M} \quad x = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$f(0) = \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u) e^{j2\pi u(0)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u)$$

$$= \frac{1}{4} [11 - 3 + 2j - 1 - 3 - 2j]$$

$$= \frac{1}{4} [4] = 1$$

提纲

- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
 - 二维采样定理
 - 图像中的混淆
- 离散傅里叶变换（二维）
 - 基本性质
 - 傅里叶谱和相角
 - 二维卷积定理





二维连续冲激与采样

- 两个连续变量的冲激

$$\delta(t, z) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = z = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, z) dt dz = 1$$

- 采样性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) \delta(t, z) dt dz = f(0, 0)$$

二维连续冲激与采样



- 在 (t_0, z_0) 处的连续冲激

$$\delta(t - t_0, z - z_0) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = t_0, z = z_0 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

- 并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0, z - z_0) dt dz = 1$$

- 采样性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) \delta(t - t_0, z - z_0) dt dz = f(t_0, z_0)$$

二维离散冲激与采样



- 两个离散变量的冲激

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 并且满足

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \delta(x, y) = 1$$

- 采样性质

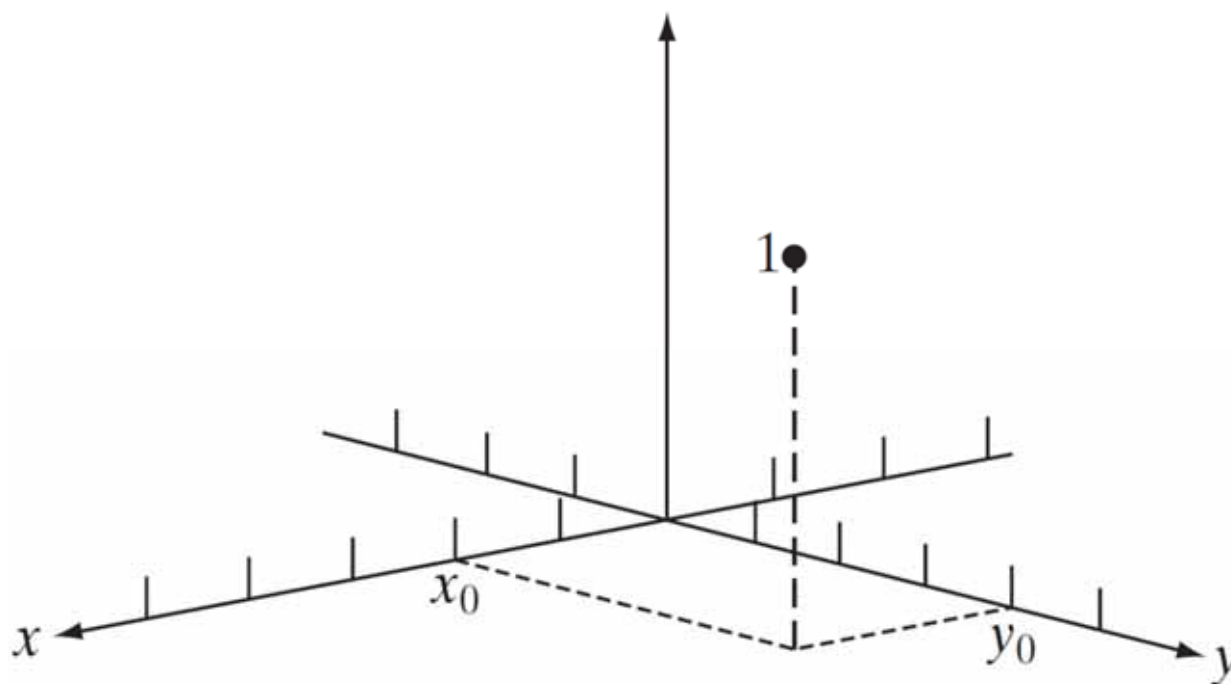
$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x, y) = f(0, 0)$$

二维离散冲激与采样



- 在 (x_0, y_0) 处的离散冲激

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x_0, y = y_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



二维离散冲激与采样



- 在 (x_0, y_0) 处的离散冲激

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x_0, y = y_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 并且满足

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0, y - y_0) = 1$$

- 采样性质

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0)$$

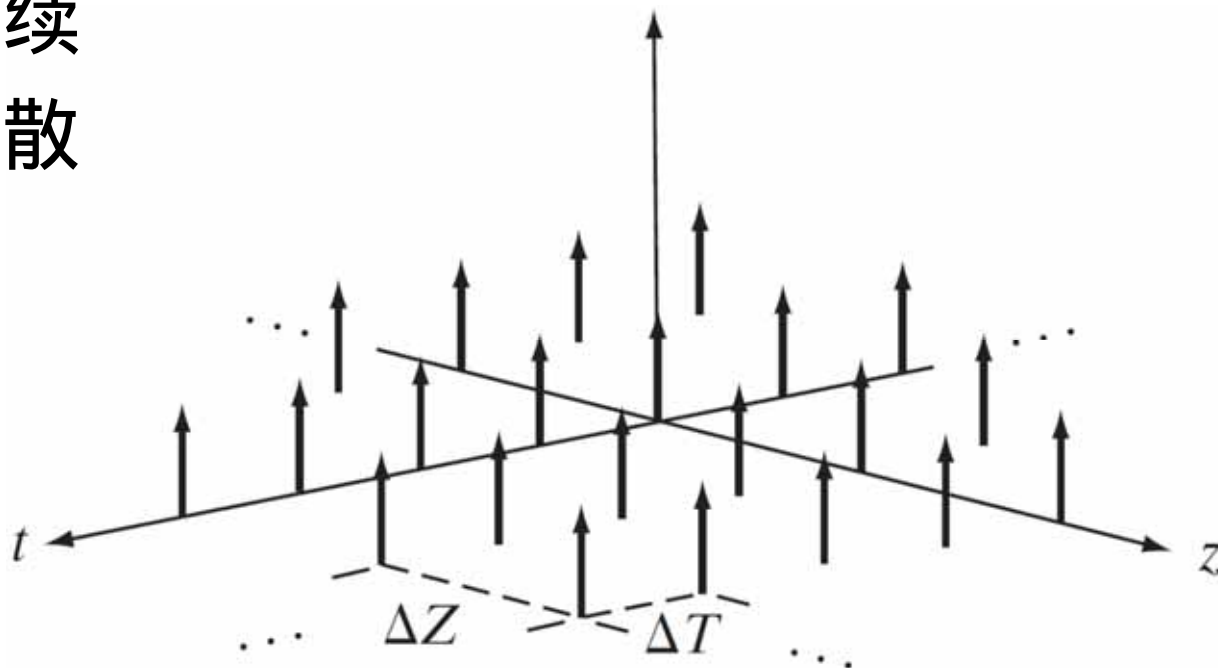


二维冲激串

- 沿 t 轴以 ΔT 为间隔，沿 z 轴以 ΔZ 为间隔

$$s_{\Delta T \Delta Z}(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\Delta T, z - n\Delta Z)$$

- 连续
- 离散



二维连续傅里叶变换对



- 二维傅里叶变换

$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz$$

- 二维傅里叶反变换

$$f(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) e^{j2\pi(\mu t + \nu z)} d\mu d\nu$$

- 对比：一维傅里叶变换

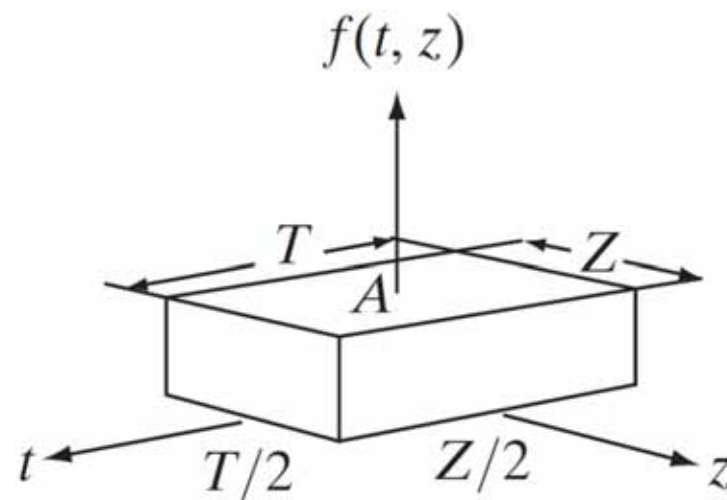
$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

举例



- 二维盒状函数的傅里叶变换

$$\begin{aligned} & F(\mu, \nu) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-Z/2}^{Z/2} A e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz \\ &= ATZ \left[\frac{\sin(\pi\mu T)}{(\pi\mu T)} \right] \left[\frac{\sin(\pi\nu Z)}{(\pi\nu Z)} \right] \end{aligned}$$

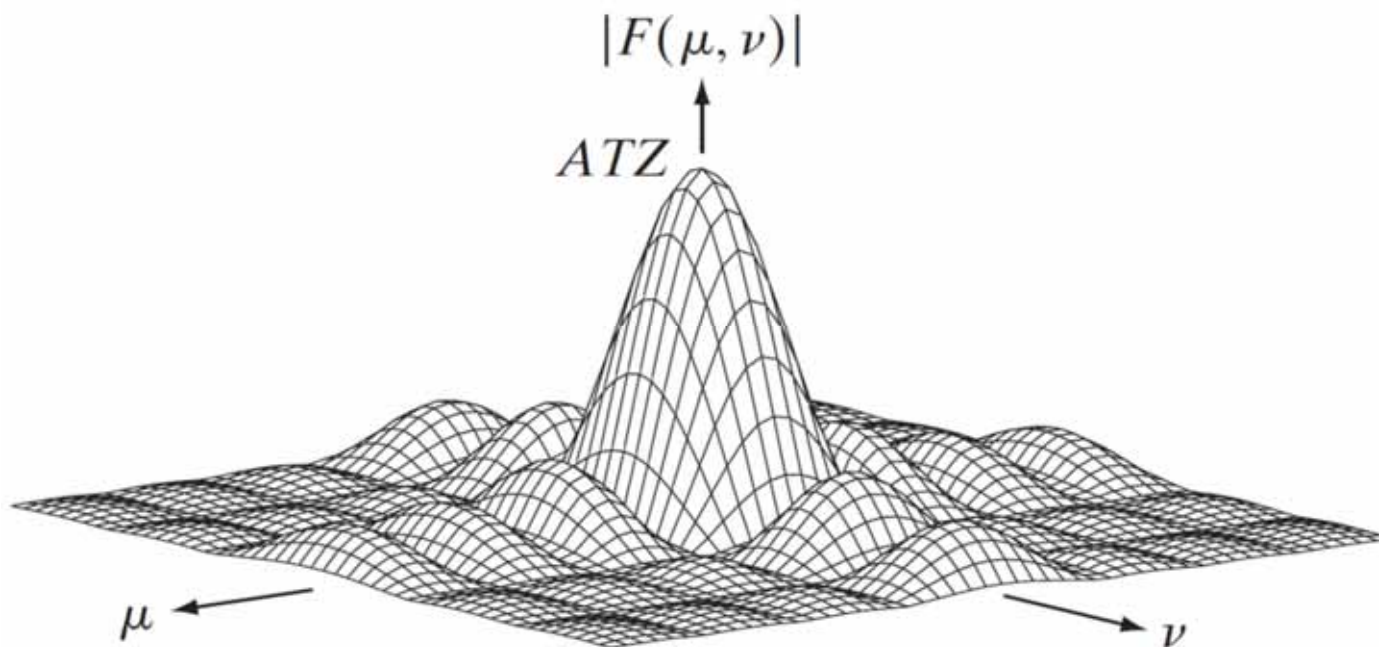


举例



- 幅值

$$|F(\mu, \nu)| = ATZ \left| \frac{\sin(\pi\mu T)}{(\pi\mu T)} \right| \left| \frac{\sin(\pi\nu Z)}{(\pi\nu Z)} \right|$$



- 零的位置与 W, Z 成反比、逐渐降低、**无限**延伸

提纲

- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
 - 二维采样定理
 - 图像中的混淆
- 离散傅里叶变换（二维）
 - 基本性质
 - 傅里叶谱和相角
 - 二维卷积定理



二维采样



- 二维冲激串

$$s_{\Delta T \Delta Z}(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\Delta T, z - n\Delta Z)$$

- 通过相乘，对连续函数 $f(t, z)$ 采样

$$\tilde{f}(t, z) = f(t, z) s_{\Delta T \Delta Z}(t, z)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t, z) \delta(t - m\Delta T, z - n\Delta Z)$$

二维采样定理



- 带限函数 $f(t, z)$

- 区间 $[-\mu_{\max}, \mu_{\max}]$ 和 $[-\nu_{\max}, \nu_{\max}]$ 之外频率分量为0

$$F(\mu, \nu) = 0 \quad \text{for } |\mu| \geq \mu_{\max} \quad \text{and} \quad |\nu| \geq \nu_{\max}$$

- 如果采样间隔满足

$$\Delta T < \frac{1}{2\mu_{\max}} \quad \Delta Z < \frac{1}{2\nu_{\max}}$$

- 或采样频率满足

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{\max} \quad \frac{1}{\Delta Z} > 2\nu_{\max}$$

- 则连续带限函数可以由一组样本完美恢复。

二维采样定理



- 带限函数 $f(t, z)$

- 区间 $[-\mu_{\max}, \mu_{\max}]$ 和 $[-\nu_{\max}, \nu_{\max}]$ 之外频率分量为0

$$F(\mu, \nu) = 0 \quad \text{for } |\mu| \geq \mu_{\max} \quad \text{and} \quad |\nu| \geq \nu_{\max}$$

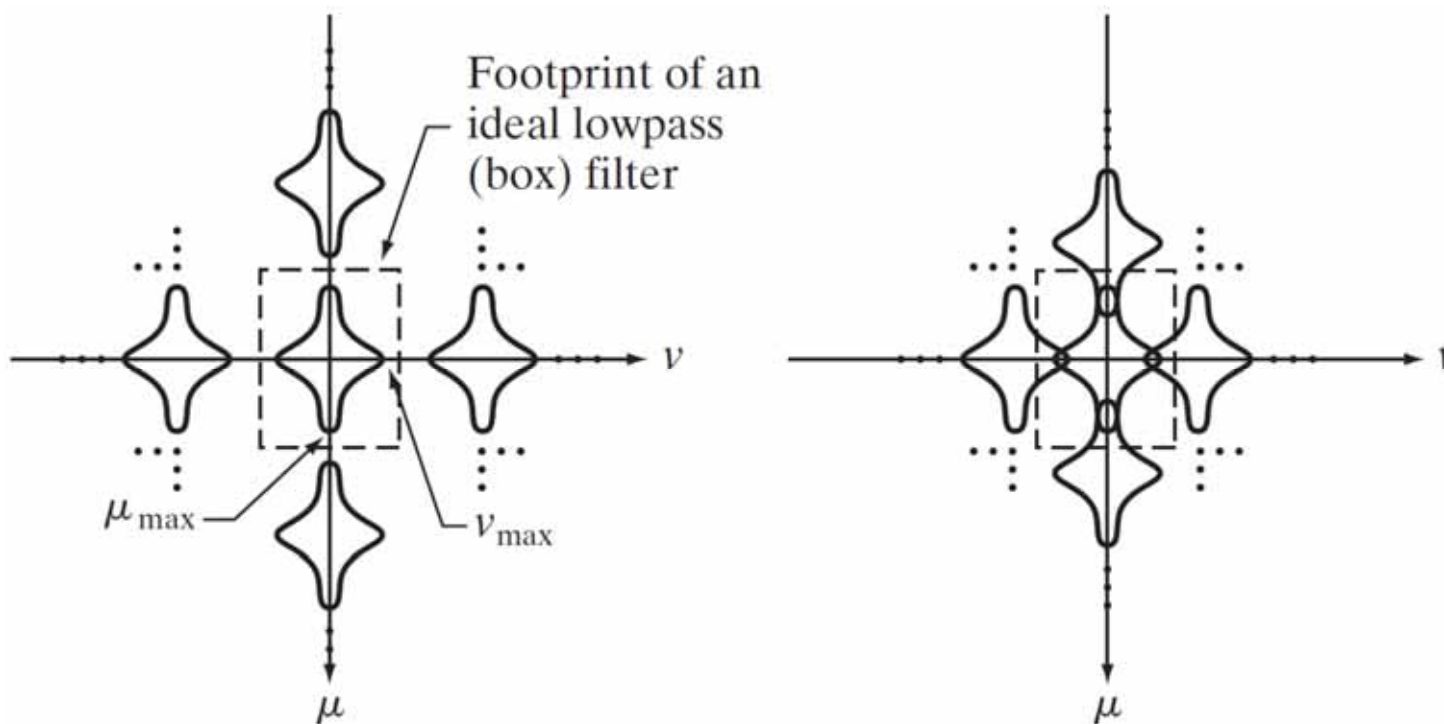
二维采样定理

如果一个二维带限连续函数在两个方向上均以大于最高频率的两倍采样率来获得样本，则该函数可以完美地从它的样本集来恢复。

举例



- 采样后函数的傅里叶变换



过采样

欠采样

提纲

- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
 - 二维采样定理
 - 图像中的混淆
- 离散傅里叶变换（二维）
 - 基本性质
 - 傅里叶谱和相角
 - 二维卷积定理



图像中的混淆



- 有限长度的采样，混淆是不可避免的
 - 一维、二维……
- 空间混淆
 - 欠采样
 - 锯齿、伪高光、虚假模式
- 时间混淆
 - 图像系列中的时间间隔有关
 - 例如电影中车轮倒转

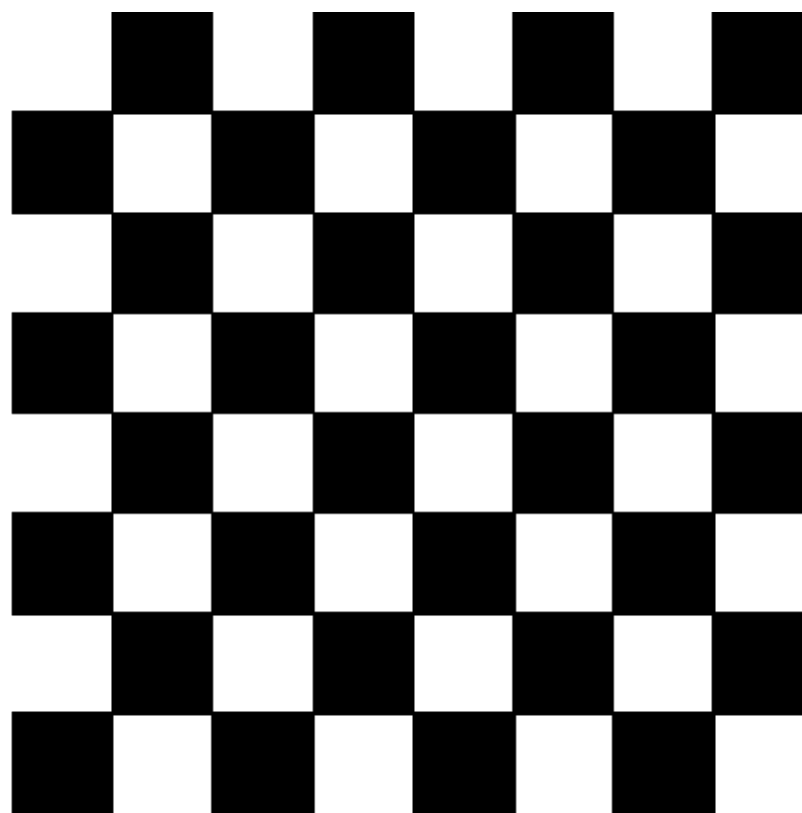
举例



- 用 96×96 的成像系统去数字化棋盘模式

- 96×96 像素

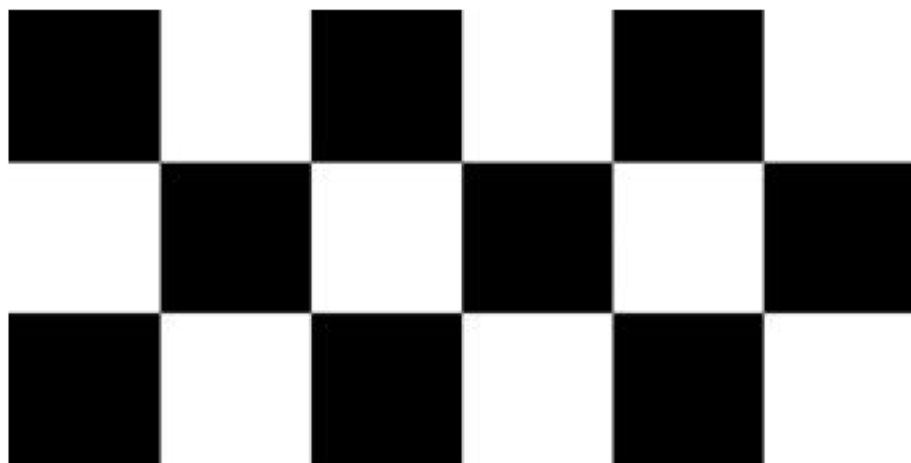
- 棋盘模式



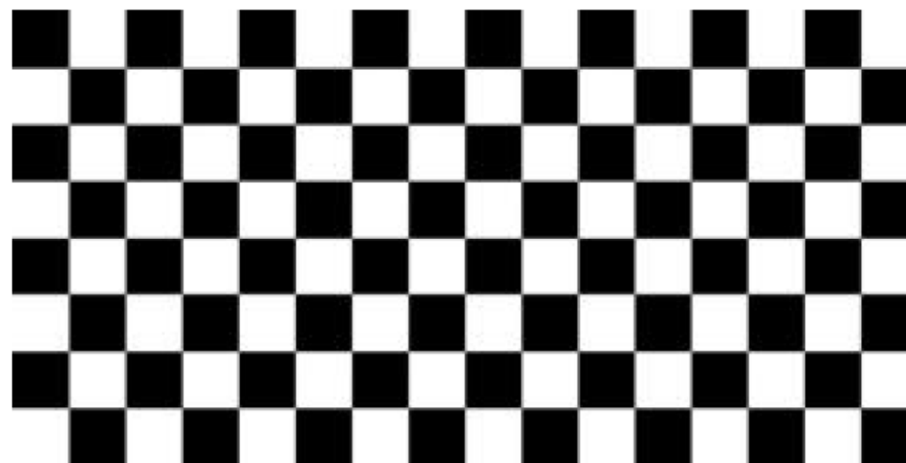
举例



- 用 96×96 的成像系统去数字化棋盘模式
 - 96×96 像素



实际边长为16个像素



实际边长为6个像素

举例

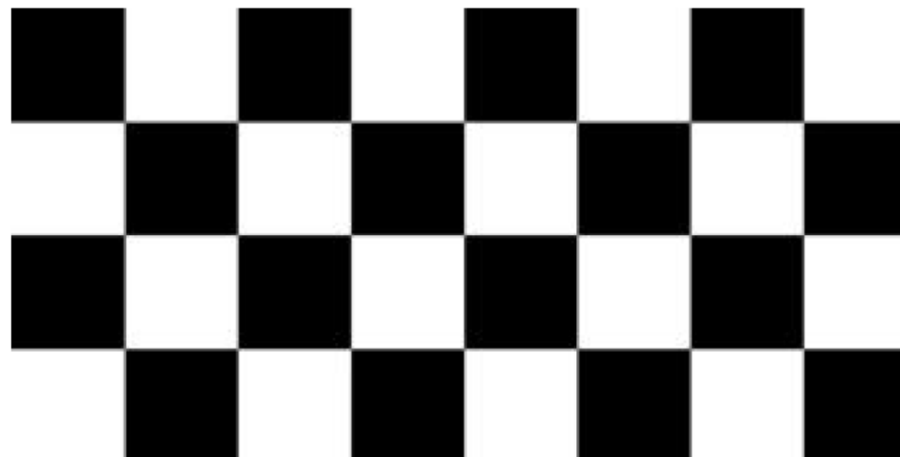


- 用 96×96 的成像系统去数字化棋盘模式
 - 96×96 像素

看起来像是边长为12
像素的棋盘！



实际边长为0.9174个像素



实际边长为0.4798个像素

图像采样



- 图像放大
 - 可以理解为过采样
 - 整数倍放大：水平和垂直方向**像素复制**
 - 一般情况：图像缩小→灰度内插
- 图像缩小
 - 可以理解为欠采样
 - 整数倍缩小：水平和垂直方向**行列删除**
 - 一般情况：图像放大→灰度内插

图像缩小后的混淆



原图



通过行列删除缩小一半
再通过像素复制放大

图像缩小后的混淆

略微模糊、减轻混淆



原图

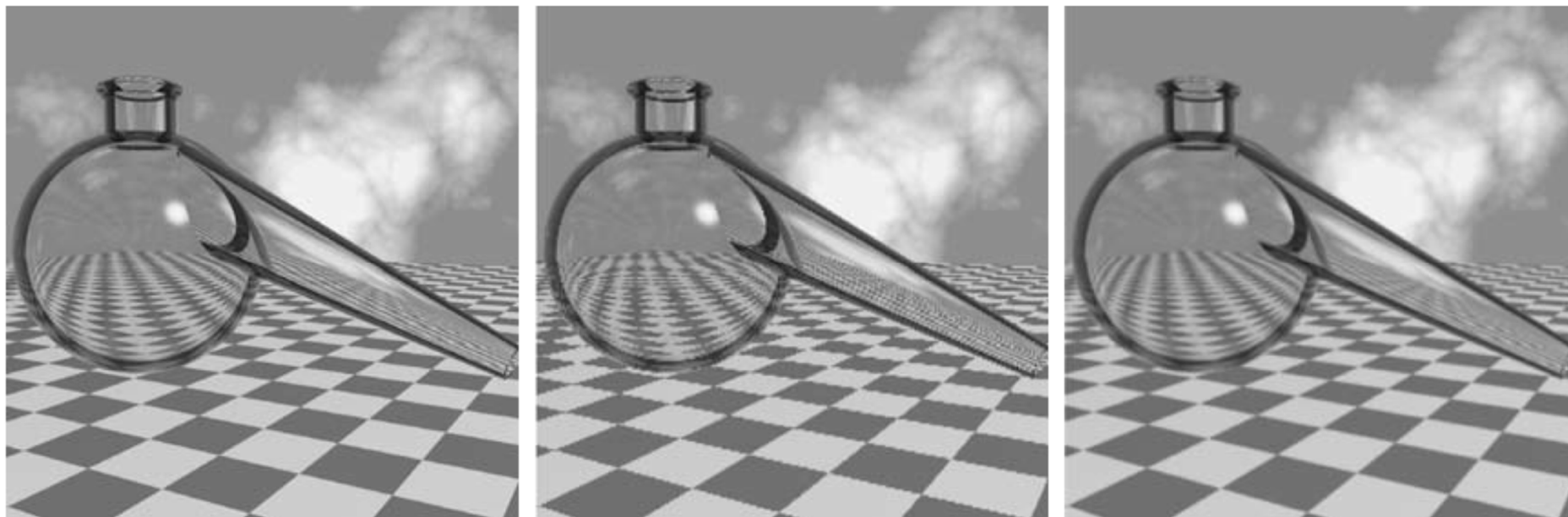


通过行列删除缩小一半
再通过像素复制放大



先用均值滤波器平滑
通过行列删除缩小一半
再通过像素复制放大

图像缩小后的锯齿

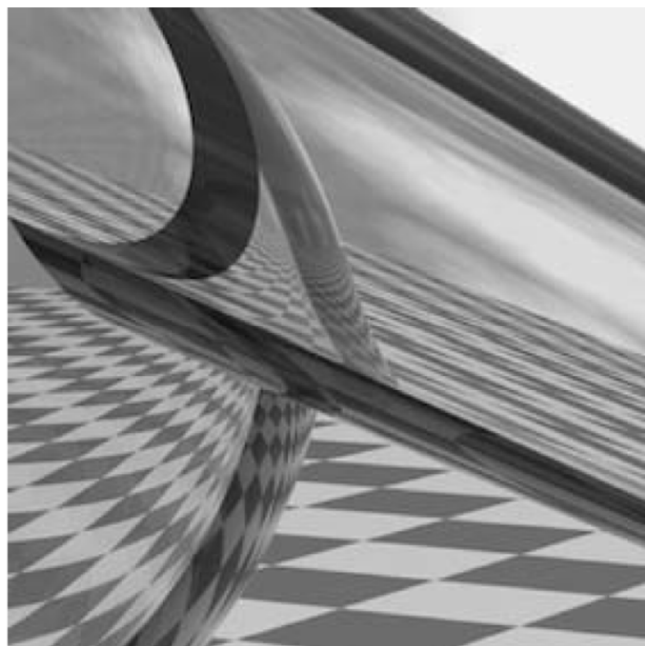


原图

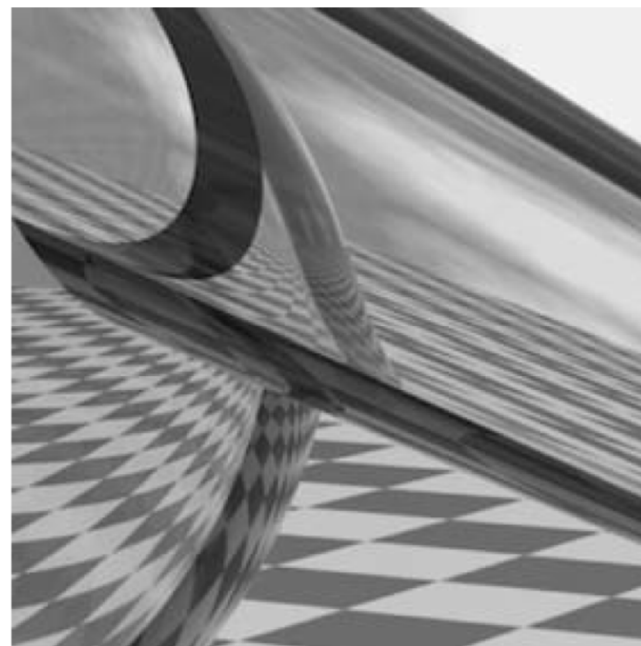
通过双线性内插缩小到25%
再通过像素复制放大

先用均值滤波器平滑
通过双线性内插缩小到25%
再通过像素复制放大

图像放大后的锯齿



通过像素复制放大4倍

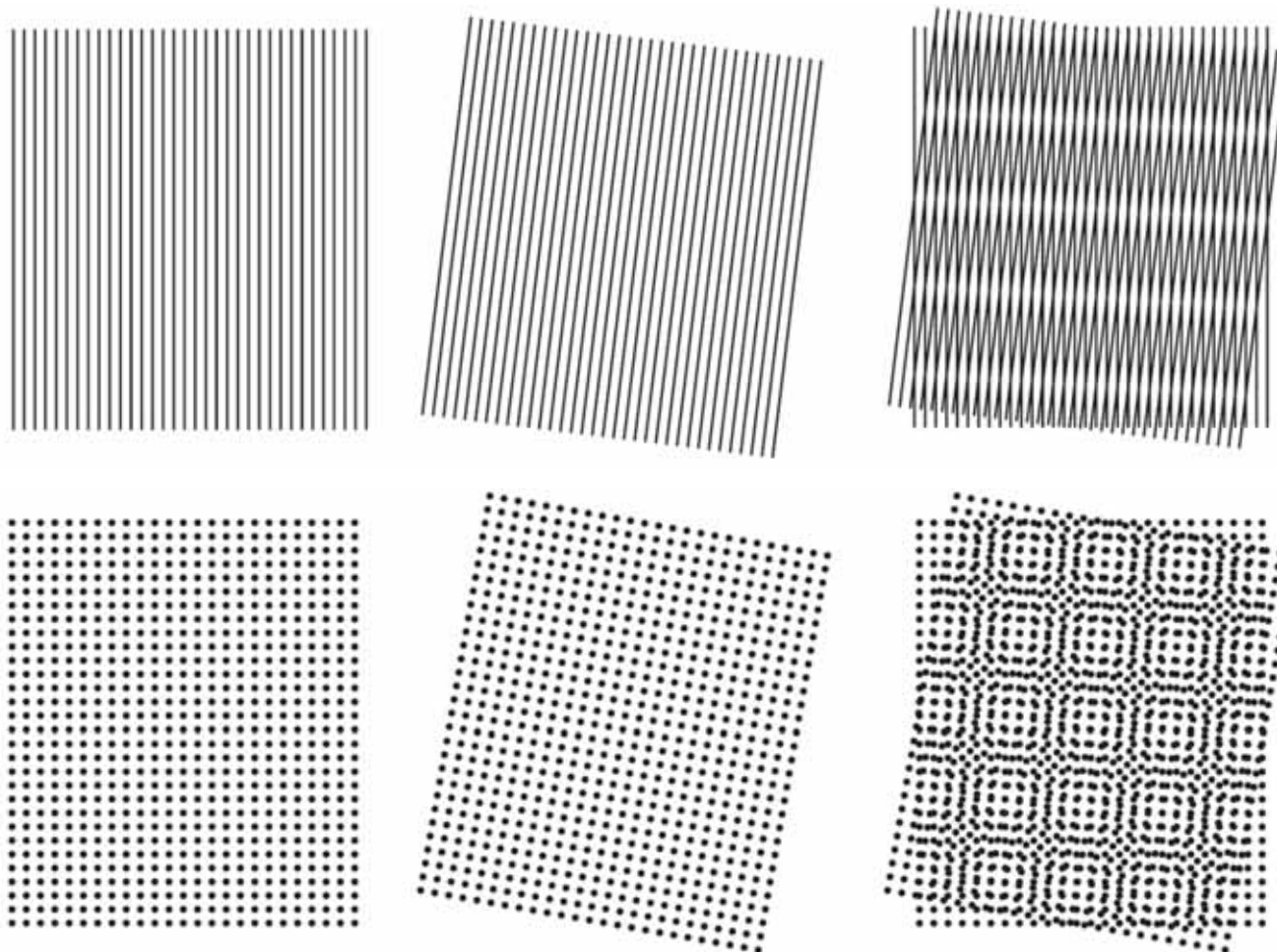


通过双线性内插放大4倍

莫尔模式



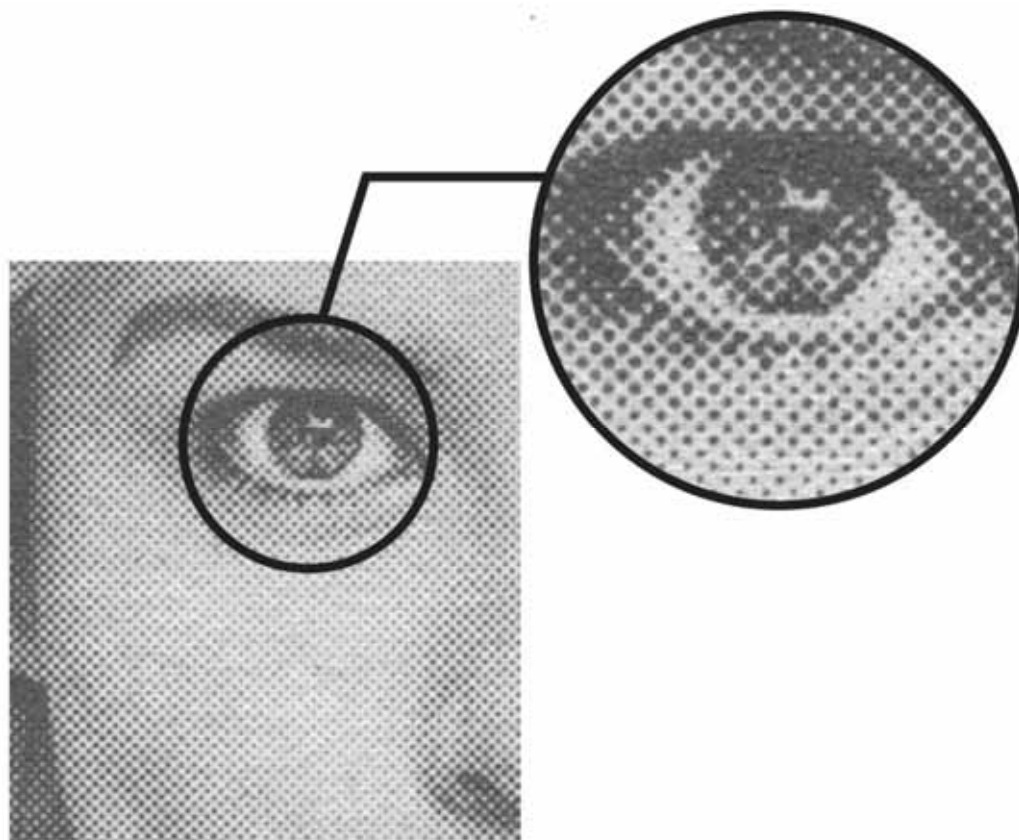
- 两个近似等间隔的光栅产生的差拍模式



报纸印刷

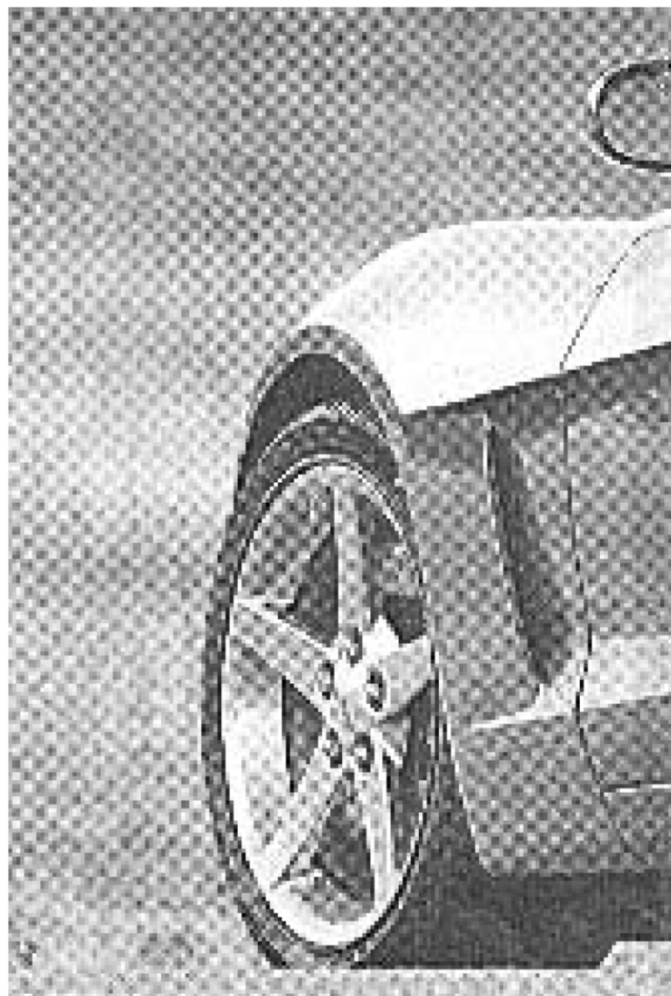


- 半色调
 - 通过调整黑点的大小和连接方式模拟色调



莫尔模式

- 扫描报纸
 - 报纸上的模式（ ± 45 度）
 - 扫描模式（水平和垂直）



提纲

- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
 - 二维采样定理
 - 图像中的混淆
- 离散傅里叶变换（二维）
 - 基本性质
 - 傅里叶谱和相角
 - 二维卷积定理





二维离散傅里叶变换对

- 二维离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- $u = 0, 1, \dots, M - 1, v = 0, 1, \dots, N - 1$
- $f(x, y)$ 是大小为 $M \times N$ 的数字图像

- 二维离散傅里叶反变换 (IDFT)

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- $x = 0, 1, \dots, M - 1, y = 0, 1, \dots, N - 1$

提纲



- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
 - 二维采样定理
 - 图像中的混淆
- 离散傅里叶变换（二维）
 - 基本性质
 - 傅里叶谱和相角
 - 二维卷积定理



采样间隔和频率间隔

- 对连续函数 $f(t, z)$ 采样
 - t 方向上以 ΔT 为间隔采 M 个样本
 - z 方向上以 ΔZ 为间隔采 N 个样本
 - 两个方向上的总时间

$$T = M\Delta T \quad Z = N\Delta Z$$

- 离散频域中的间隔

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta T} \quad \Delta v = \frac{1}{N\Delta Z}$$

- 离散频域范围 $\frac{1}{\Delta T}$ $\frac{1}{\Delta Z}$

平移和旋转



- 平移性

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(x_0u/M + y_0v/N)}$$

$$f(x, y) e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

- 平移不影响幅值

- 旋转性

- 极坐标 : $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $u = \omega \cos \varphi$ $v = \omega \sin \varphi$

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$$

- $f(x, y)$ 旋转 θ_0 , 则 $F(u, v)$ 旋转相同的角度

周期性

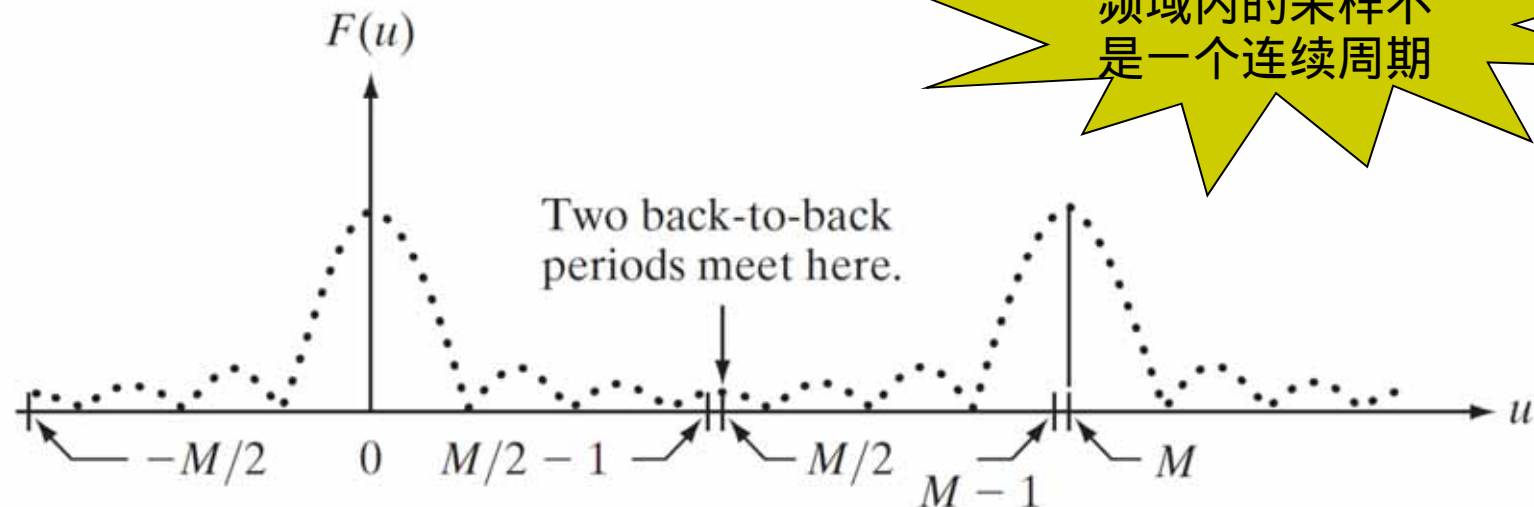


- 在两个方向上是无限周期的

$$F(u, v) = F(u + k_1M, v) = F(u, v + k_2N) = F(u + k_1M, v + k_2N)$$

$$f(x, y) = f(x + k_1M, y) = f(x, y + k_2N) = f(x + k_1M, y + k_2N)$$

- 其中 k_1, k_2 为整数



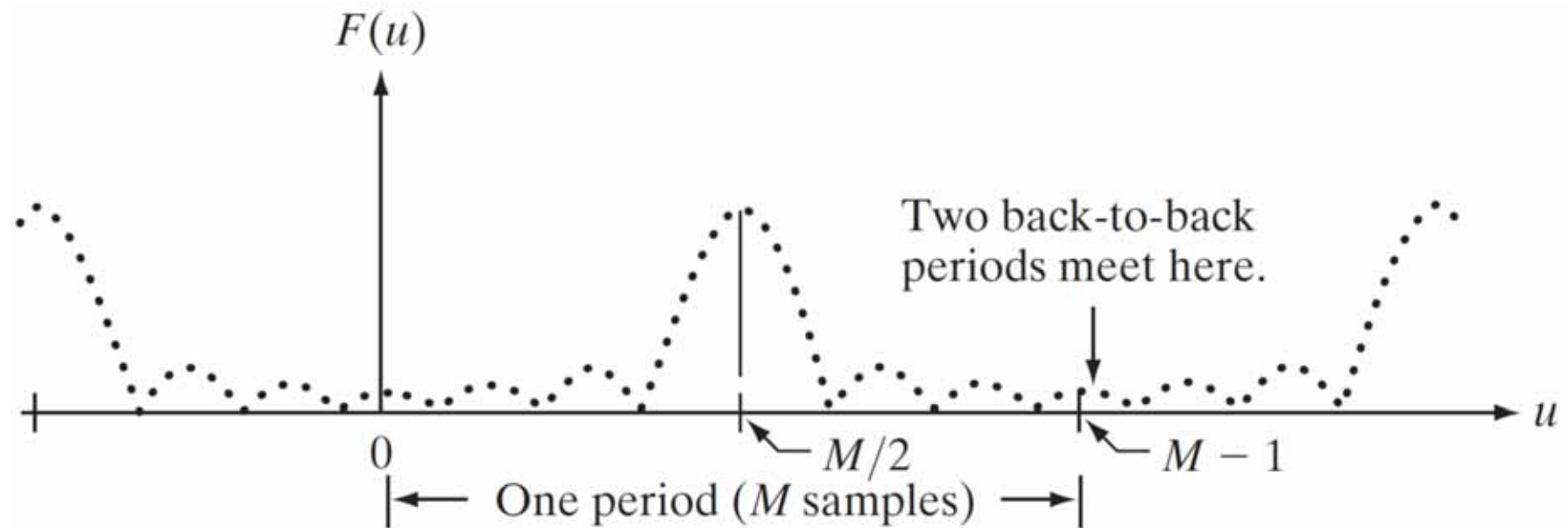
平移傅里叶变换



- 平移性

$$f(x) e^{j2\pi(u_0x/M)} \Leftrightarrow F(u - u_0)$$

- 令 $u = M/2$

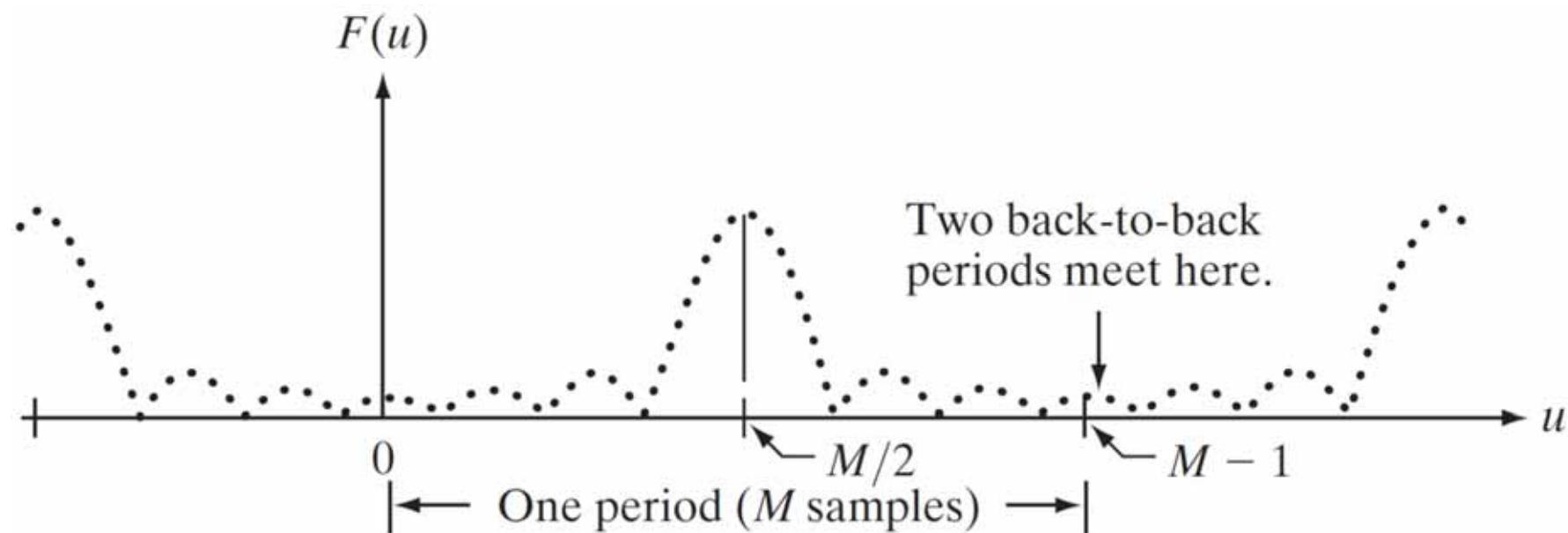


平移傅里叶变换



- 平移性

$$f(x)(-1)^x \Leftrightarrow F(u - M/2)$$

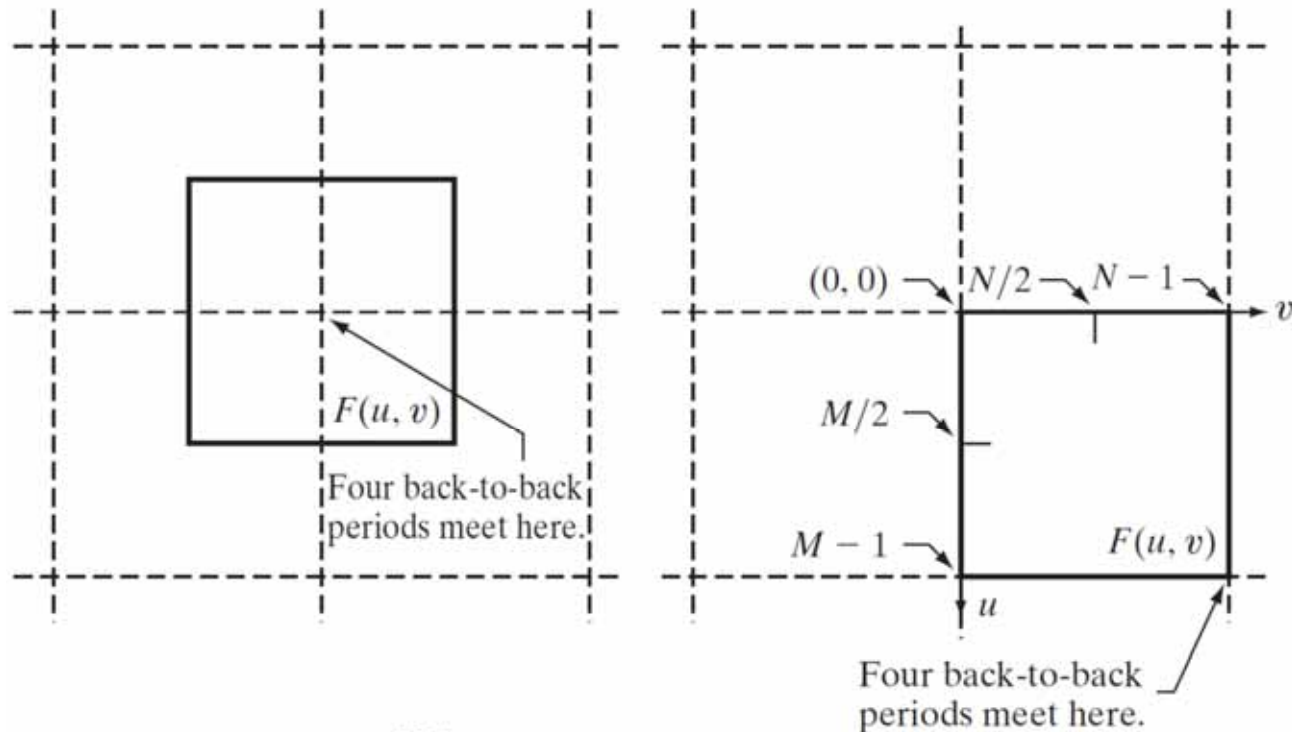


平移傅里叶变换



- 平移性

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$$



□ = Periods of the DFT.

□ = $M \times N$ data array, $F(u, v)$.



对称性

- 任意函数函数 $w(x, y)$

$$w(x, y) = w_e(x, y) + w_o(x, y)$$

- 偶数部分

$$w_e(x, y) \triangleq \frac{w(x, y) + w(-x, -y)}{2}$$

$$w_e(x, y) = w_e(-x, -y)$$

- 奇数部分

$$w_o(x, y) \triangleq \frac{w(x, y) - w(-x, -y)}{2}$$

$$w_o(x, y) = -w_o(-x, -y)$$

傅里叶变换中的对称性



- DFT和IDFT中的索引都是正的
- 该情况下，对称性是相对于序列中心而言
- 对称性

$$w_e(x, y) = w_e(M - x, N - y)$$

$$w_o(x, y) = -w_o(M - x, N - y)$$

对称性



- 偶函数之积是偶函数
- 奇函数之积是偶函数
- 偶函数和奇函数之积是奇函数
- 离散奇函数的样本之和为零

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} w_e(x, y) w_o(x, y) = 0$$



举例

- 考虑一维序列
 - 其中 $M = 4$

$$f = \{f(0) \quad f(1) \quad f(2) \quad f(3)\} = \{2 \quad 1 \quad 1 \quad 1\}$$

偶函数还是
奇函数？

举例



- 考虑一维序列

- 其中 $M = 4$

$$f = \{f(0) \quad f(1) \quad f(2) \quad f(3)\} = \{2 \quad 1 \quad 1 \quad 1\}$$

- 检验偶性 $f(x) = f(4 - x)$

$$f(0) = f(4), \quad f(2) = f(2), \quad f(1) = f(3), \quad f(3) = f(1)$$

- $f(4)$ 可以忽略、偶序列

- 任意4个点的偶序列

$$\{a \quad b \quad c \quad b\}$$



举例

- 考虑一维序列

- 其中 $M = 4$

$$g = \{g(0) \quad g(1) \quad g(2) \quad g(3)\} = \{0 \quad -1 \quad 0 \quad 1\}$$

偶函数还是
奇函数？

举例



- 考虑一维序列

- 其中 $M = 4$

$$g = \{g(0) \ g(1) \ g(2) \ g(3)\} = \{0 \ -1 \ 0 \ 1\}$$

- 检验奇性 $g(x) = -g(4 - x)$

$$g(0) = -g(4), g(2) = -g(2), g(1) = -g(3)$$

- $g(4)$ 可以忽略、 $g(0) = 0$ 、奇序列

$$w_o(x, y) \triangleq \frac{w(x, y) - w(-x, -y)}{2}$$



举例

- 考虑一维序列

- 其中 $M = 4$

$$g = \{g(0) \ g(1) \ g(2) \ g(3)\} = \{0 \ -1 \ 0 \ 1\}$$

- 检验奇性 $g(x) = -g(4 - x)$

$$g(0) = -g(4), g(2) = -g(2), g(1) = -g(3)$$

- $g(4)$ 可以忽略、 $g(0) = 0$ 、奇序列

- 任意4个点的奇序列

$$\{0 \ -b \ 0 \ b\}$$



序列的奇偶性

- 受序列的长度影响

- 奇序列 $\{0 \ -1 \ 0 \ 1\}$

- 非奇非偶 $\{0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0\}$

- 奇序列

| | | | | | |
|---|---|----|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | -2 | 0 | 2 | 0 |
| 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

对称性



- 实函数 $f(x, y)$ 的傅里叶变换是共轭对称

$$F^*(u, v) = F(-u, -v)$$

$$\begin{aligned} F^*(u, v) &= \left[\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)} \right]^* \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f^*(x, y) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi([-u]x/M+[-v]y/N)} \\ &= F(-u, -v) \end{aligned}$$

对称性



- 实函数 $f(x, y)$ 的傅里叶变换是共轭对称

$$F^*(u, v) = F(-u, -v)$$

- 虚函数 $f(x, y)$ 的傅里叶变换是共轭反对称

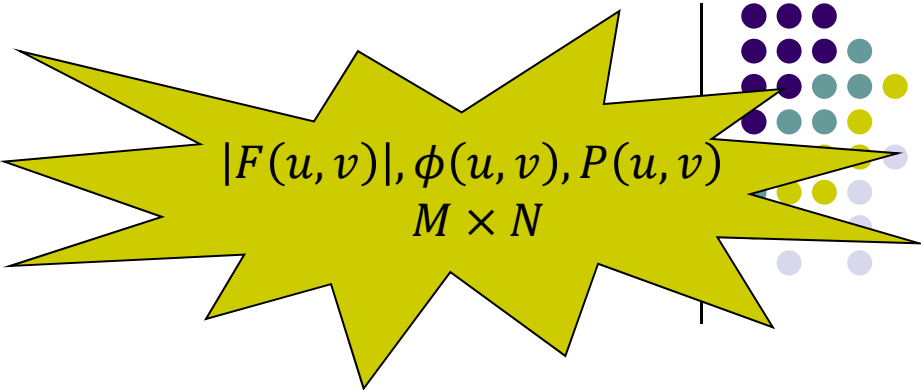
$$F^*(-u, -v) = -F(u, v)$$

提纲

- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
 - 二维采样定理
 - 图像中的混淆
- 离散傅里叶变换（二维）
 - 基本性质
 - 傅里叶谱和相角
 - 二维卷积定理



傅里叶谱和相角



$|F(u, v)|, \phi(u, v), P(u, v)$
是大小为 $M \times N$ 的矩阵

- 二维DFT的极坐标

$$F(u, v) = |F(u, v)|e^{j\phi(u, v)}$$

- 幅度（傅里叶谱）

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$$

- 相角 $[-\pi, \pi]$

$$\phi(u, v) = \arctan \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

- 功率谱

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

傅里叶谱和相角



- 实函数 $f(x, y)$ 的傅里叶变换是共轭对称

$$F^*(u, v) = F(-u, -v)$$

- 傅里叶谱是关于原点偶对称

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$$

- 相角是关于原点奇对称

$$\phi(u, v) = -\phi(-u, -v)$$

傅里叶谱和相角



- 二维离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- 因此

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \\ &= MN \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = MN \bar{f}(x, y) \end{aligned}$$

- $|F(0,0)|$ 通常为谱的最大分量

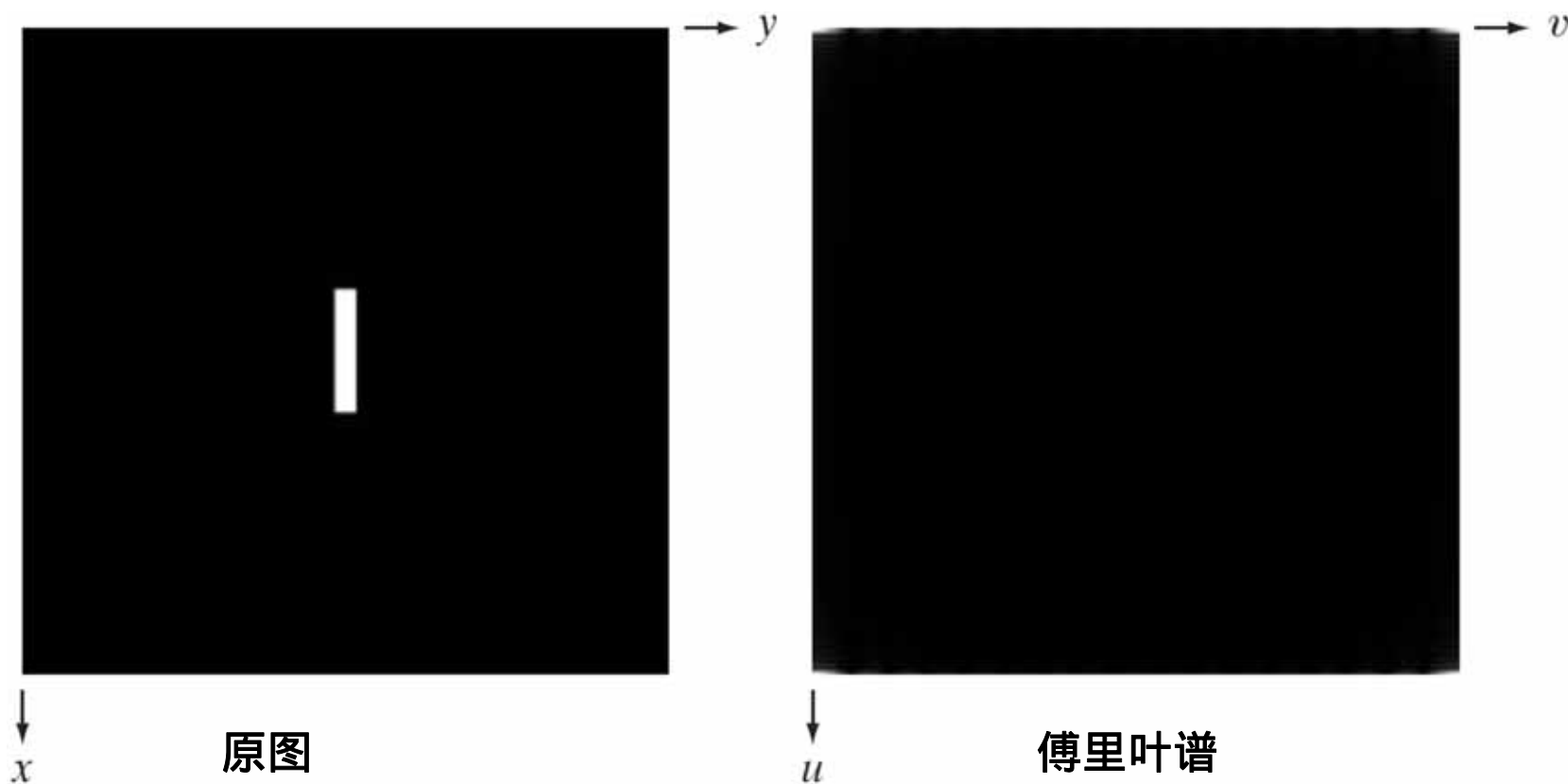
$$|F(0, 0)| = MN |\bar{f}(x, y)|$$

- $F(0,0)$ 被称为直流分量 (频率为0)

举例



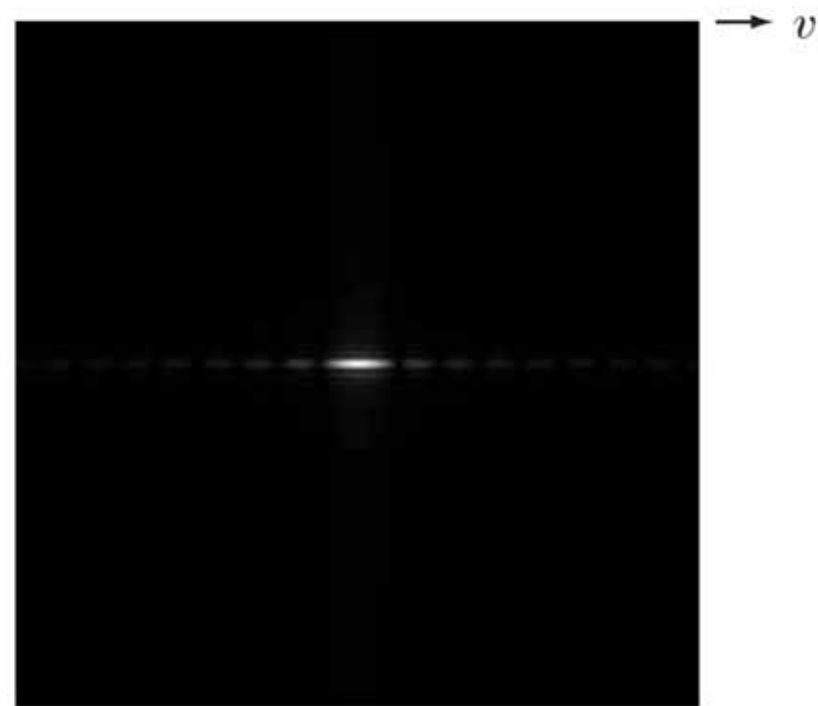
- 为什么谱图四个角都亮？



举例



$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$$



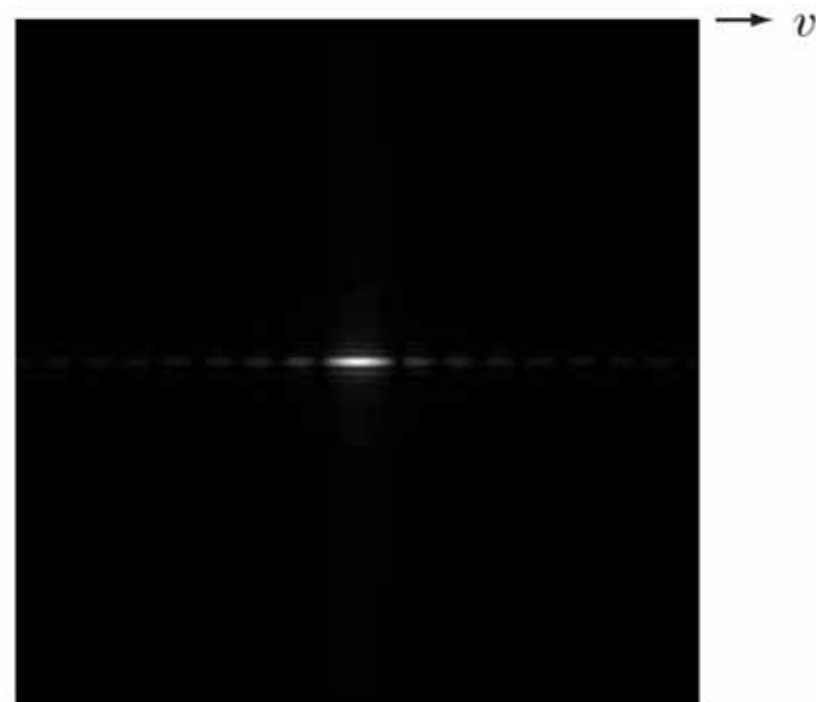
u

中心化后谱图

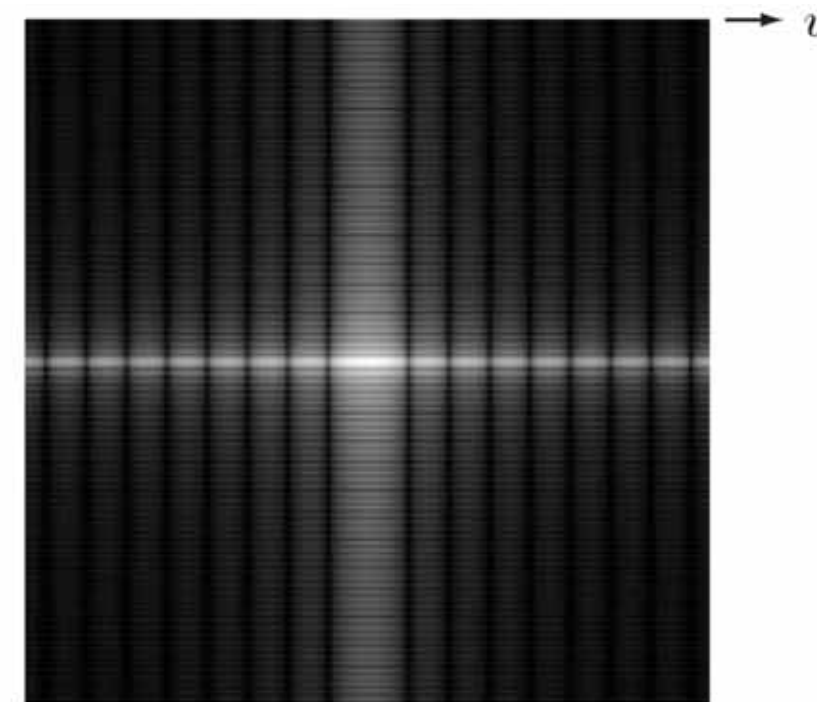
举例



$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$$



中心化后谱图



中心化后再对数变换

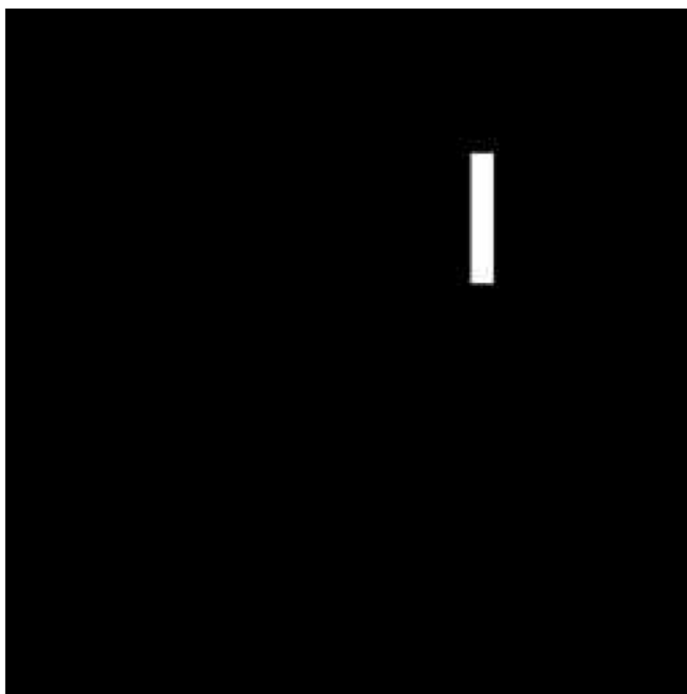
$$\log(1 + |F(u, v)|)$$



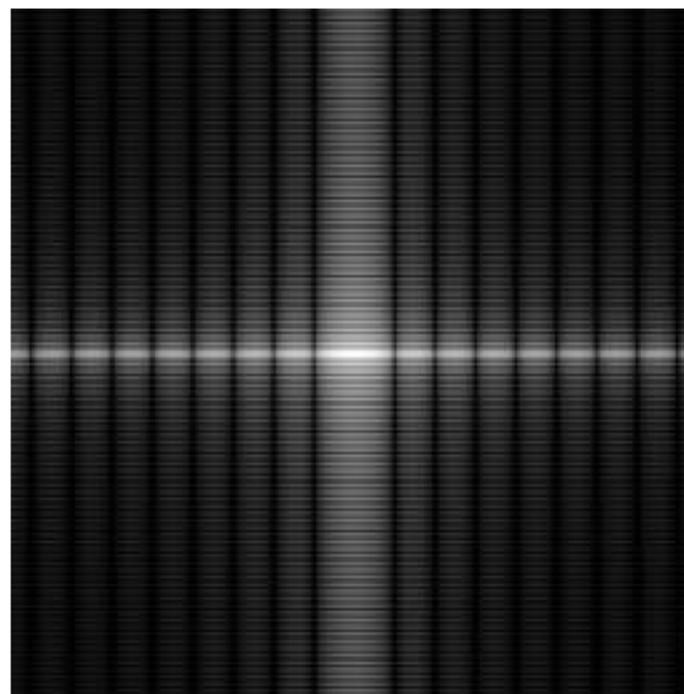
举例

- 图像平移不改变傅里叶谱

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(x_0u/M + y_0v/N)}$$



平移后图像



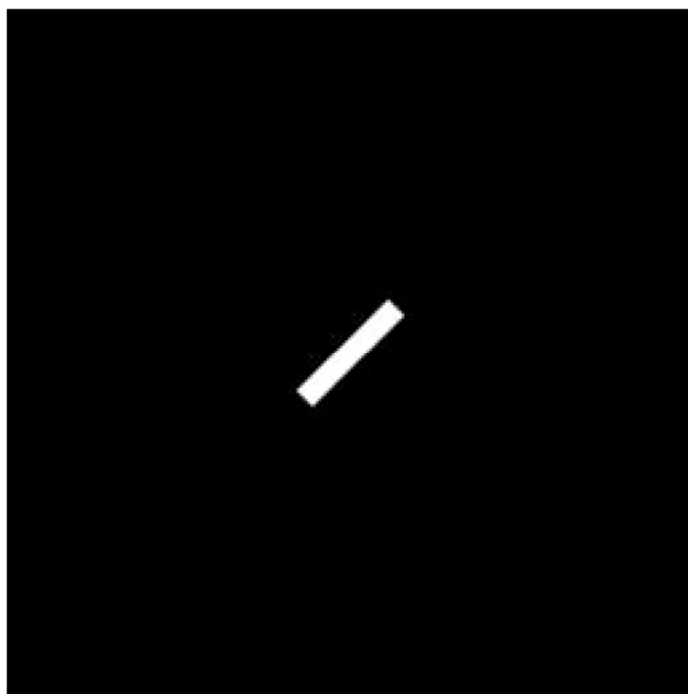
傅里叶谱



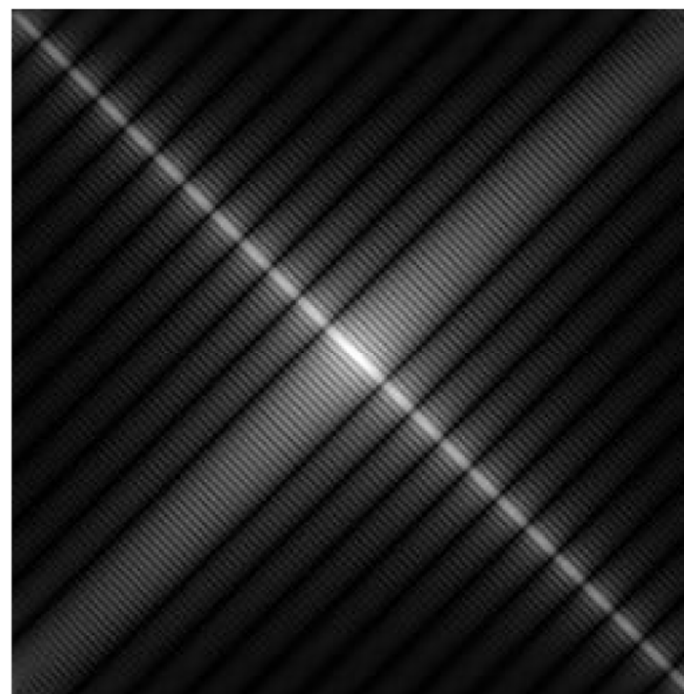
举例

- 图像旋转 θ_0 ，谱图旋转同样的角度

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$$



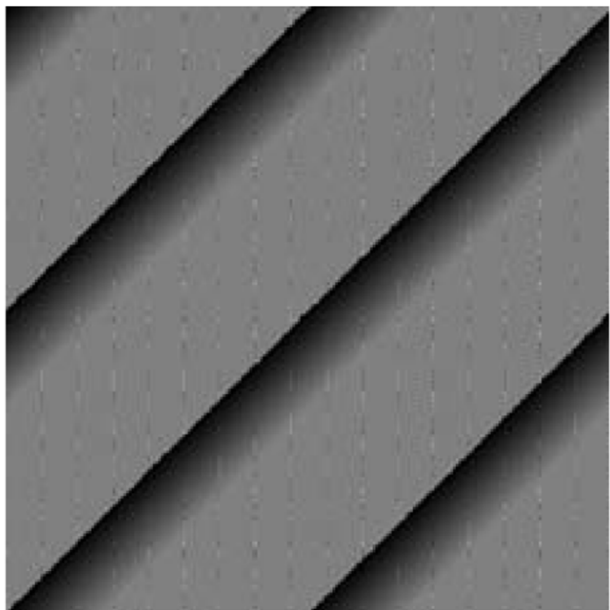
旋转后图像



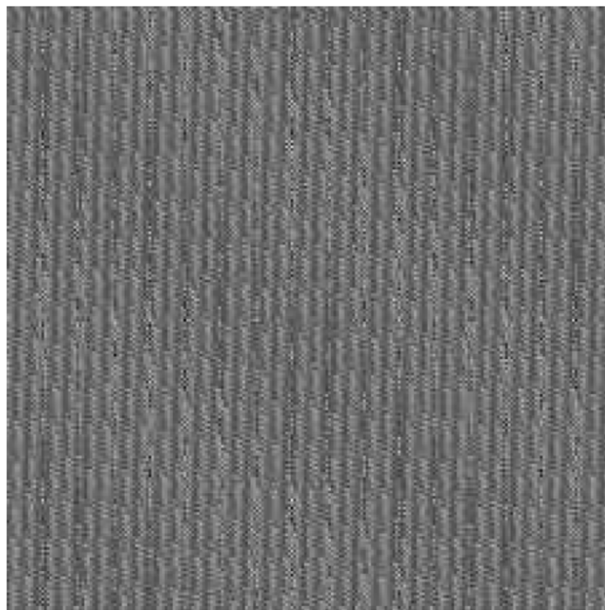
傅里叶谱

举例

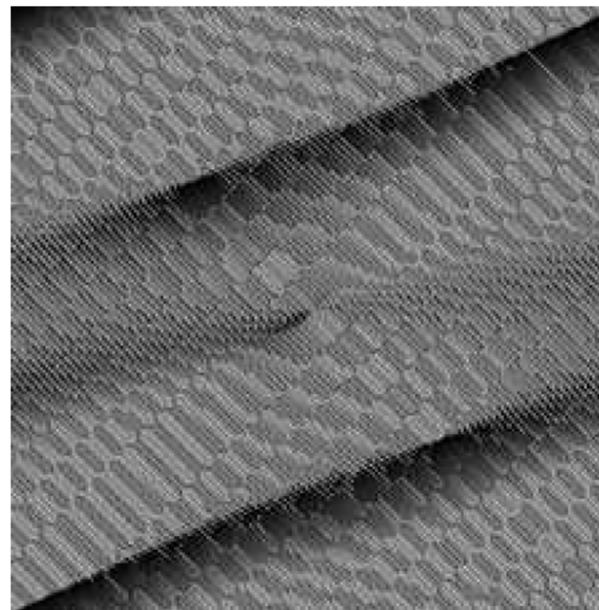
- 相角差异巨大，可视信息少



原图相角



平移后图像相角



旋转后图像相角

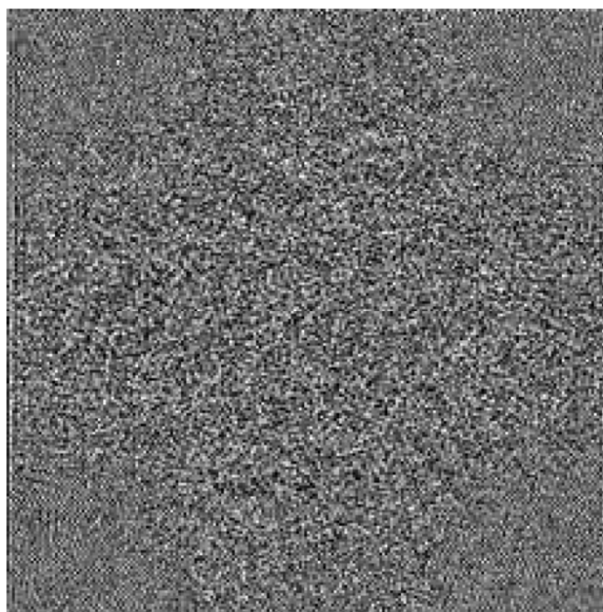
举例



- 傅里叶谱决定了正弦波的幅度，表示灰度
- 相角表示正弦波的位移，携带了定位信息



原图



相角

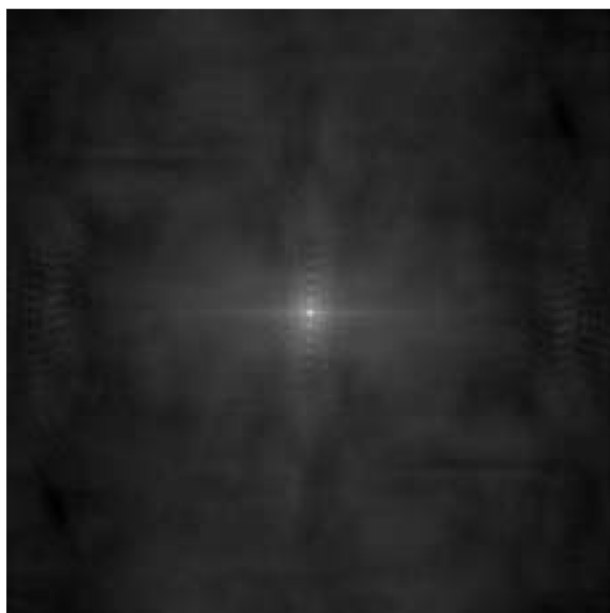


仅用相角信息重构

举例



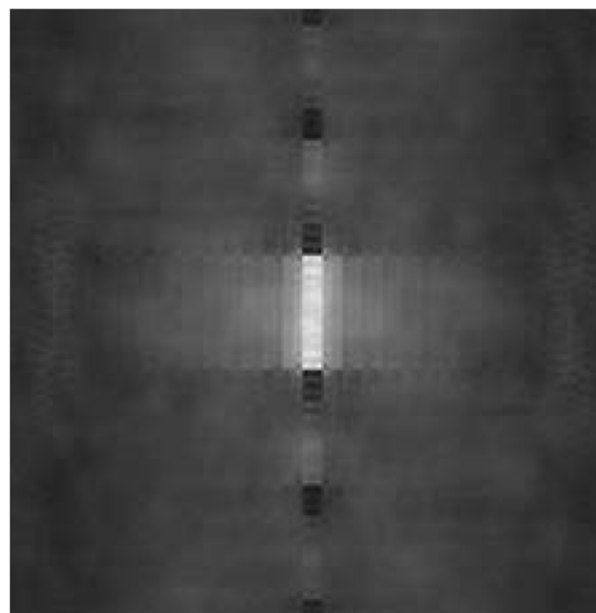
- 傅里叶谱决定了正弦波的幅度，表示灰度
- 相角表示正弦波的位移，携带了定位信息



仅用傅里叶谱重构



妇女相角+矩形谱



妇女谱+矩形相角

提纲

- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
 - 二维采样定理
 - 图像中的混淆
- 离散傅里叶变换（二维）
 - 基本性质
 - 傅里叶谱和相角
 - 二维卷积定理



二维卷积定理



- 二维离散卷积

$$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x - m, y - n)$$

- $x = 0, 1, \dots, M - 1, y = 0, 1, \dots, N - 1$

- 周期函数，也被称为**循环卷积**

- 二维卷积定理

频域滤波的
理论依据

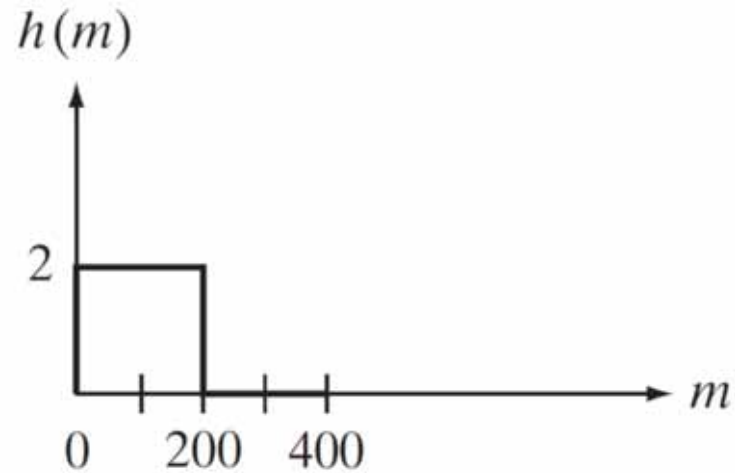
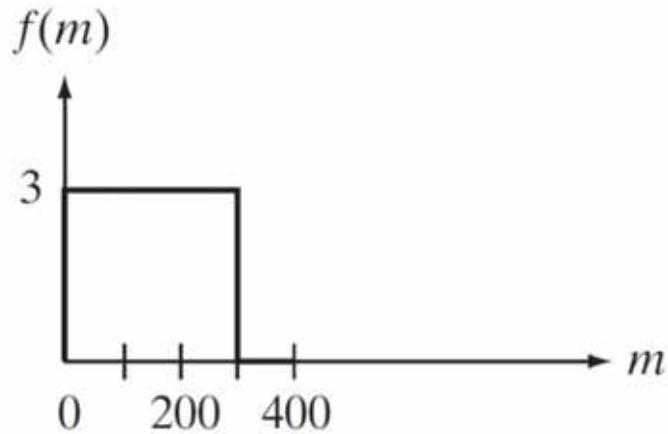
$$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) H(u, v)$$

$$f(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$$

举例



- 直接计算二维离散卷积



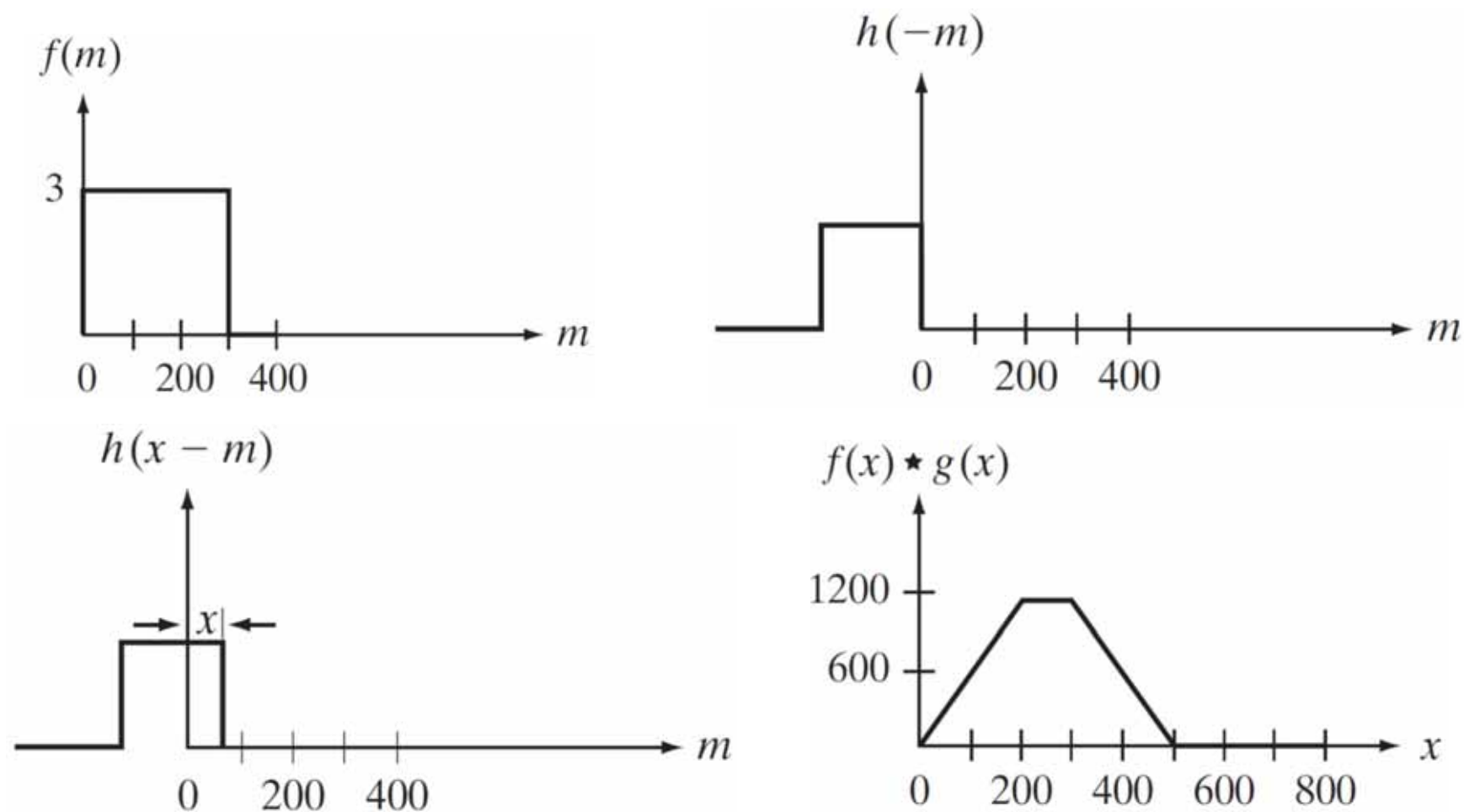
$$f(x) \star h(x) = \sum_{m=0}^{399} f(x)h(x - m)$$

- $x = 0, 1, \dots, 799$

举例



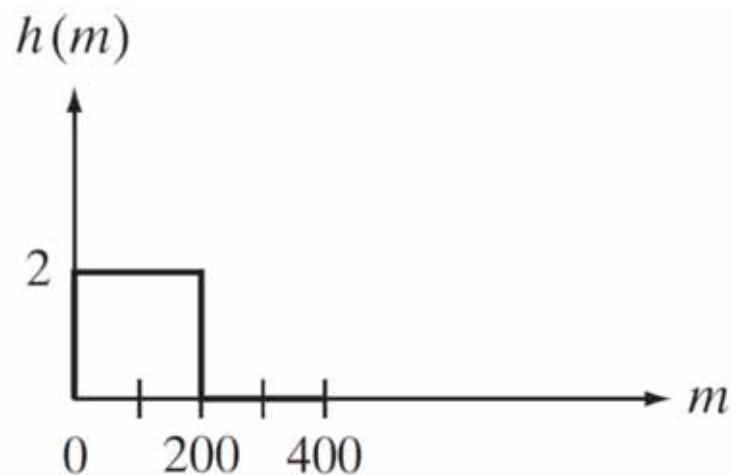
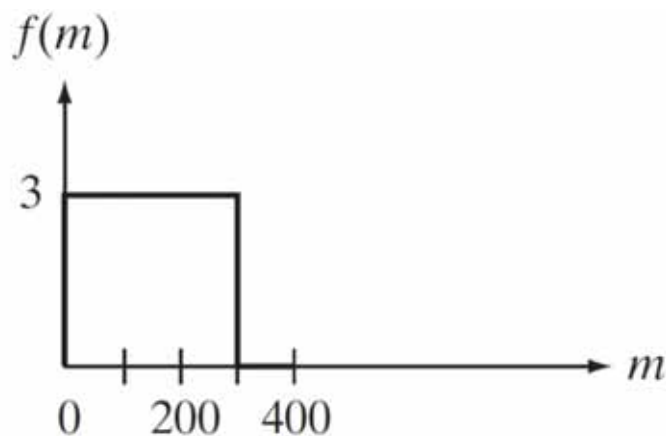
- 直接计算二维离散卷积



举例



- 依据卷积定理，计算二维循环卷积



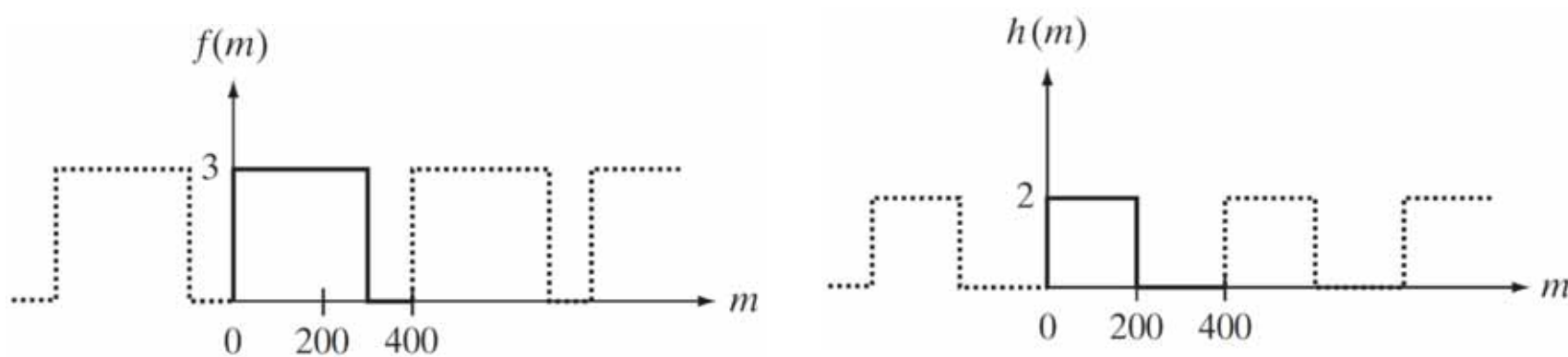
$$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$$

$$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$

举例



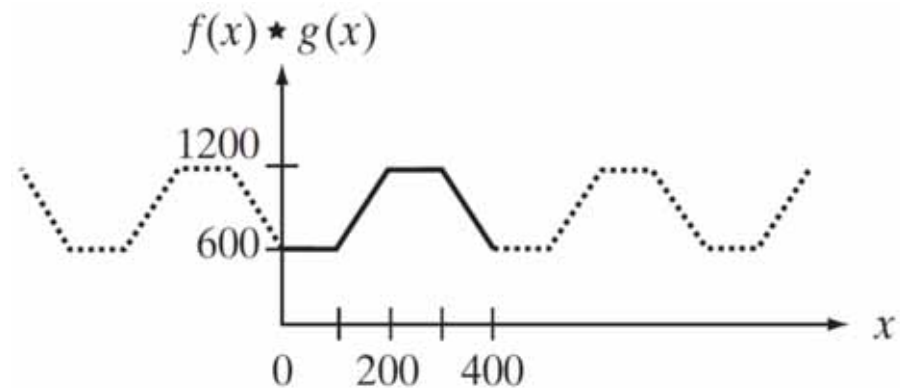
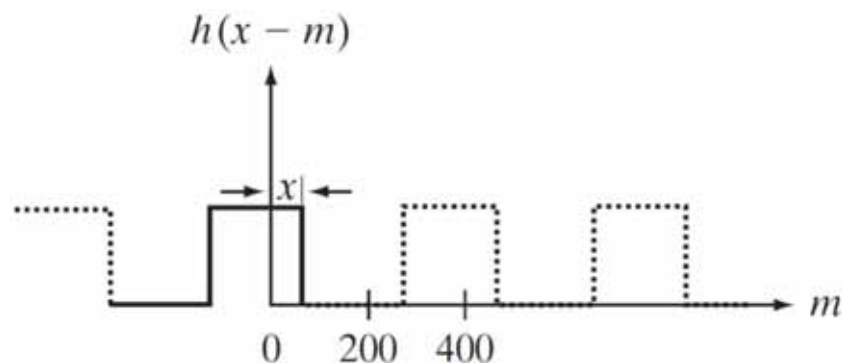
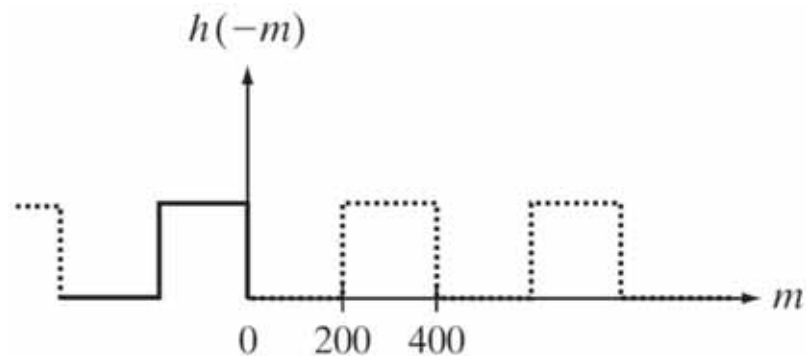
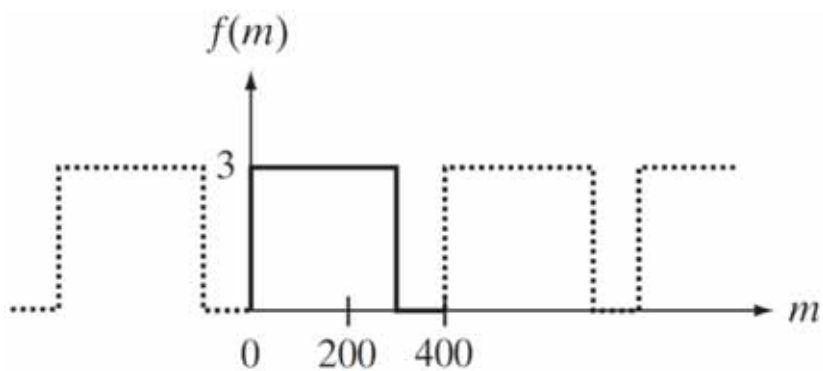
- 依据卷积定理，计算二维循环卷积



举例



- 依据卷积定理，计算二维循环卷积





0填充

- $f(x)$ 有 A 个样本、 $g(x)$ 有 B 个样本
- 对样本后面补0，使其长度为 P
- 缠绕错误可以避免，如果

$$P \geq A + B - 1$$

- 前面的例子，补399个0

要让卷积定理和直接卷积一致，需要0填充。

二维0填充



- $f(x, y)$ 是 $A \times B$ 大小的图像
- $h(x, y)$ 是 $C \times D$ 大小的图像
- 缠绕错误可以避免，如果

$$f_p(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A-1 \quad \text{and} \quad 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq P \quad \text{or} \quad B \leq y \leq Q \end{cases}$$

$$h_p(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & 0 \leq x \leq C-1 \quad \text{and} \quad 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq P \quad \text{or} \quad D \leq y \leq Q \end{cases}$$

- 其中 $P \geq A + C - 1$ $Q \geq B + D - 1$
- 选择偶数会让计算更快



下一讲

