数字图像处理

第八讲

频率域图像增强（Part III）

频率域滤波、平滑图像

提纲

- 频率域滤波
  - 频域率性质
  - 频域率滤波基础
  - 空间和频域率对应关系

- 平滑图像
  - 理想低通滤波器
  - 巴特沃斯低通滤波器
  - 高斯低通滤波器

提纲

- 频率域滤波
  - 频域率性质
  - 频域率滤波基础
  - 空间和频域率对应关系

- 平滑图像
  - 理想低通滤波器
  - 巴特沃斯低通滤波器
  - 高斯低通滤波器

频率域性质

- 二维离散傅里叶变换（DFT）

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

  - $f(x,y)$是大小为$M\times N$的数字图像
  - 一般而言，难以将图像内容和频域对应起来
- 图像空间特征和频率分量的一般性关系
  - 变化最慢的分量，与平均灰度成正比

$$F(0,0)=MN\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)=MN\bar{f}(x,y)$$

频率域性质

- 二维离散傅里叶变换（DFT）

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

  - $f(x, y)$是大小为$M \times N$的数字图像
  - 一般而言，难以将图像内容和频域对应起来
- 图像空间特征和频率分量的一般性关系
  - 变化最慢的分量，与平均灰度成正比
  - 低频对应于图像中缓慢变化的灰度（墙）
  - 高频对应于图像中剧烈变化的灰度（边缘）

频率域性质

- 频域率滤波

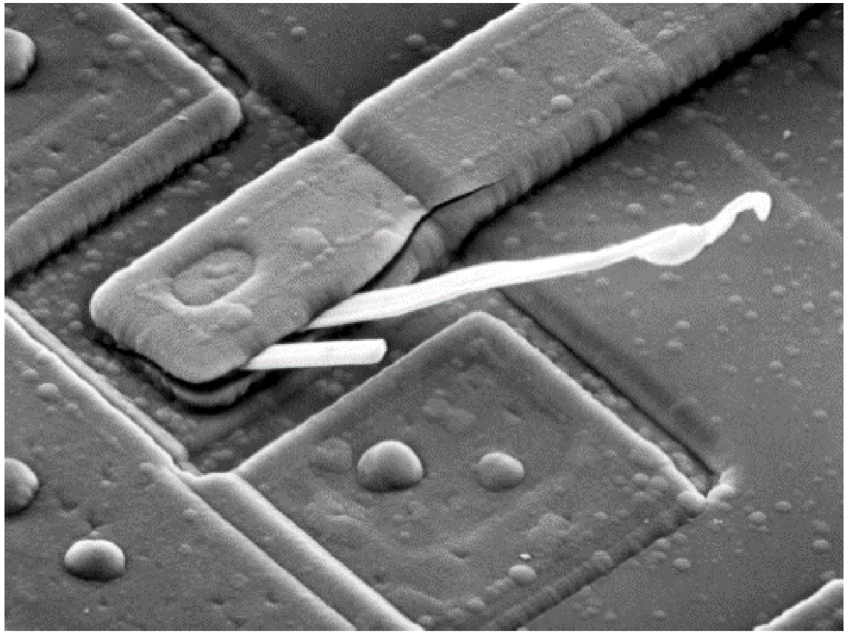
$$\text{空间域} \xrightarrow[\text{变换}]{\text{傅里叶}} \text{频率域} \xrightarrow{\text{滤波}} \text{频率域} \xrightarrow[\text{反变换}]{\text{傅里叶}} \text{空间域}$$

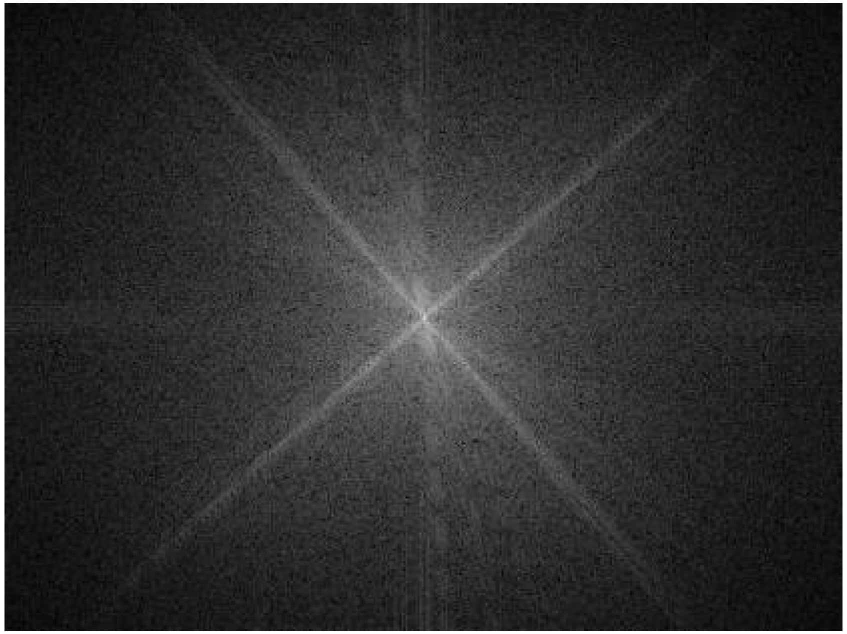
- 傅里叶变换

$$F(u, v) = |F(u, v)| e^{j\phi(u,v)}$$

  - 幅度（傅里叶谱）$|F(u,v)|$、相角$\phi(u,v)$
  - 视觉分析难以利用相角
  - 傅里叶谱可以大致刻画图像

举例

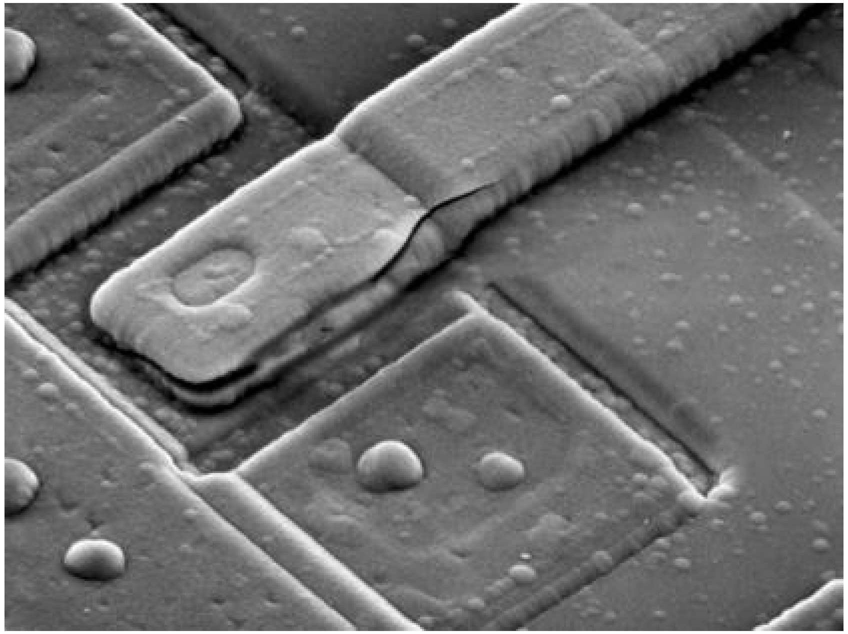


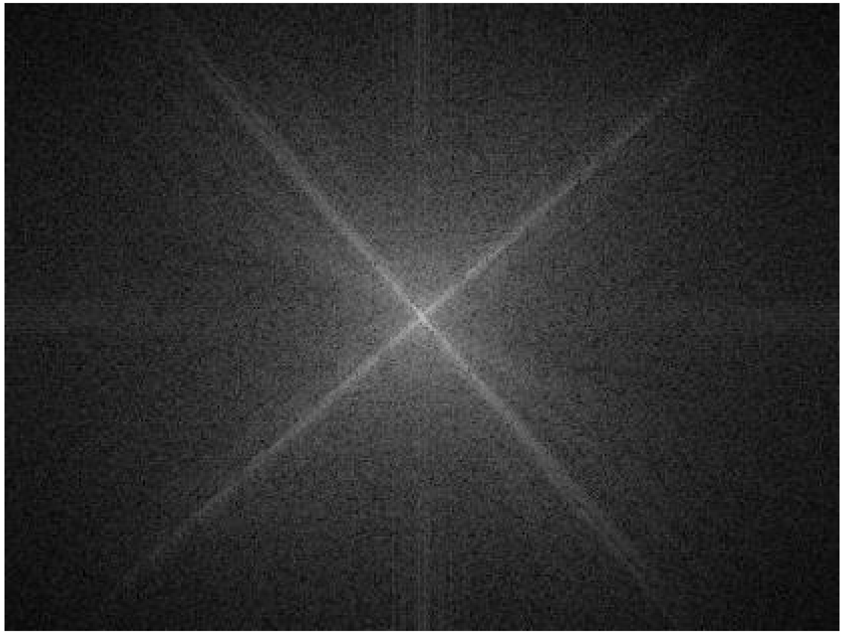


±45度的边缘
白色突出物

±45度方向的分量
垂直略靠左的分量
垂直靠左分量中的0

举例



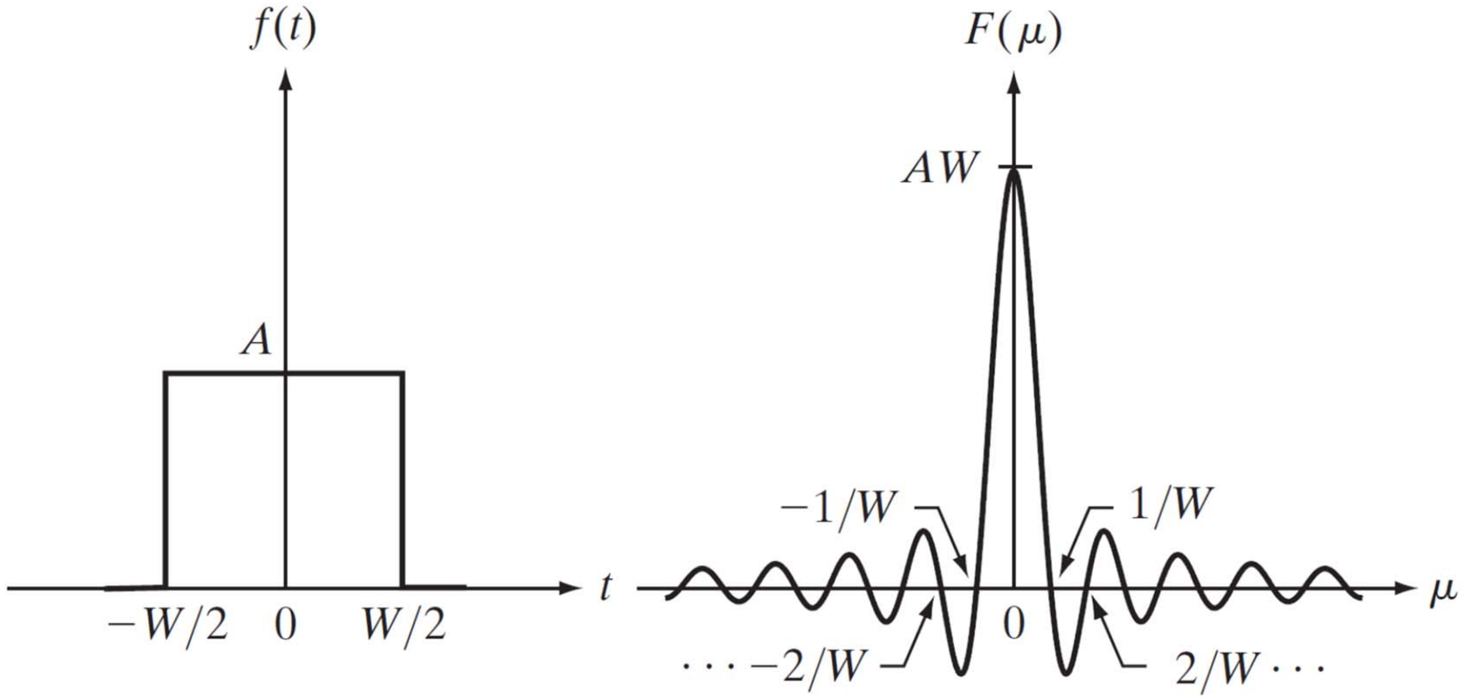


±45度的边缘

±45度方向的分量

举例

- 盒状函数的傅里叶变换



提纲

- 频率域滤波
  - 频域率性质
  - 频域率滤波基础
  - 空间和频域率对应关系

- 平滑图像
  - 理想低通滤波器
  - 巴特沃斯低通滤波器
  - 高斯低通滤波器

频域率滤波基础

- 基本公式

$$g(x, y) = \Im^{-1}[H(u, v)F(u, v)]$$

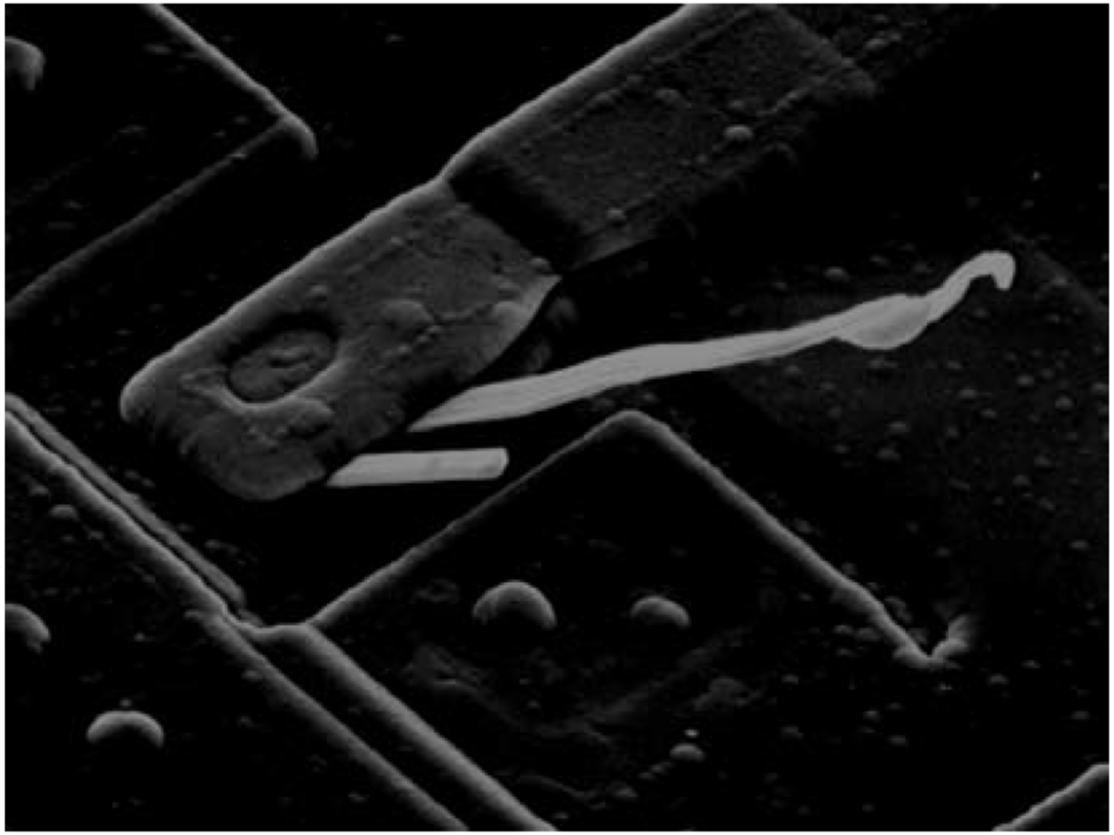
  - $F(u,v) = \Im[f(x,y)]$是图像$f(x,y)$的DFT
  - $H(u,v)$是滤波函数（滤波器）
  - H实对称， f是实数 $\Rightarrow$ g是实数
    - 但存在计算误差，忽略g中虚数
  - 假设$F(u,v)$已经中心化

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$$

  - 只需要考虑中心对称的$H(u,v)$

举例

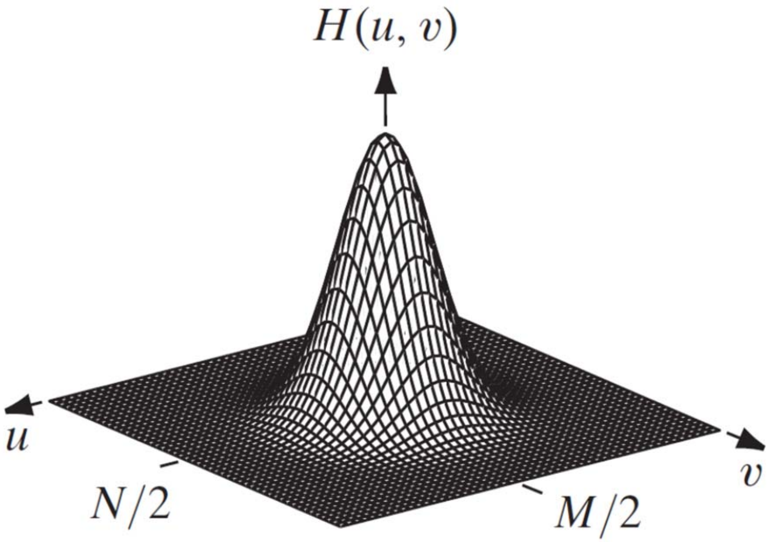
- $H(M/2, N/2) = 0$，其他位置$H(u, v)$=1
- 平均灰度为0

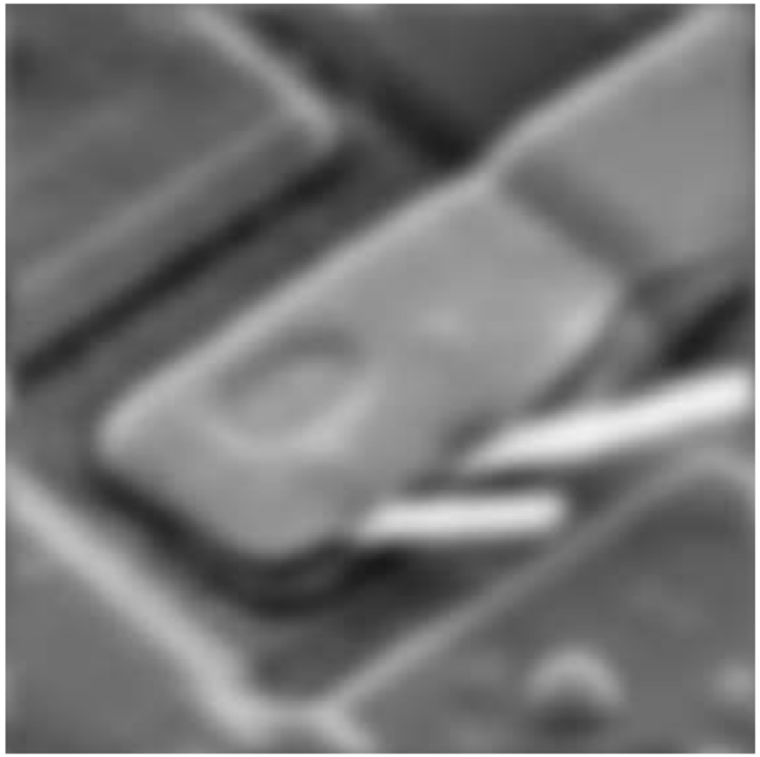


显示时将负数设为**0**

低通滤波器

- 衰减高频而通过低频，模糊图像



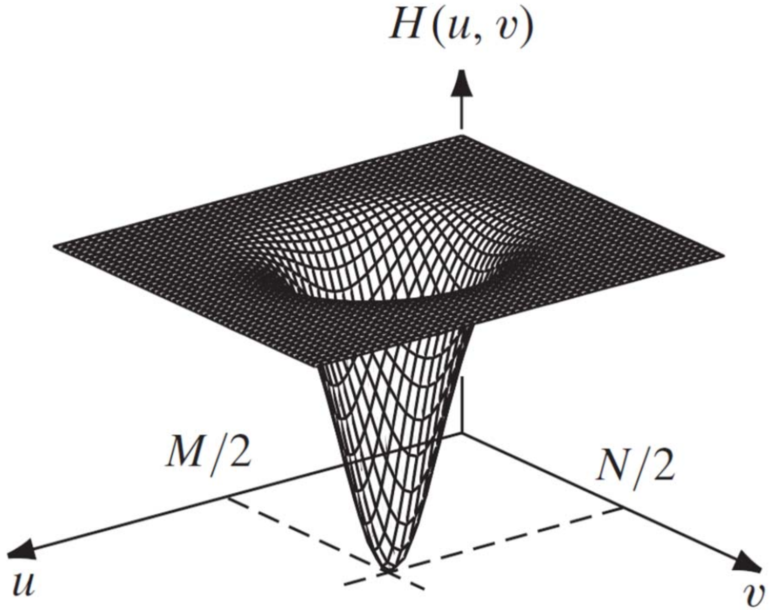


- 低频对应于图像中缓慢变换的灰度

高通滤波器

对比度降低！

- 衰减低频而通过高频，强化细节

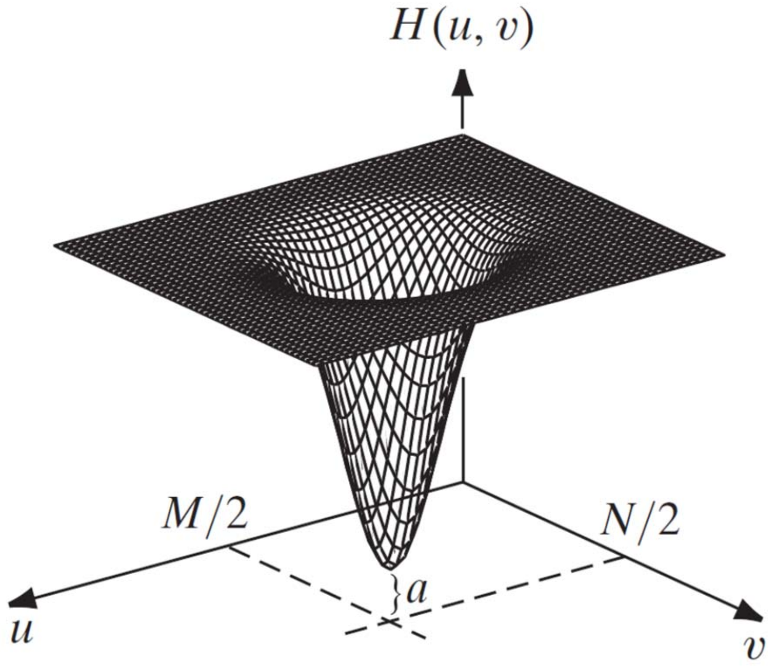


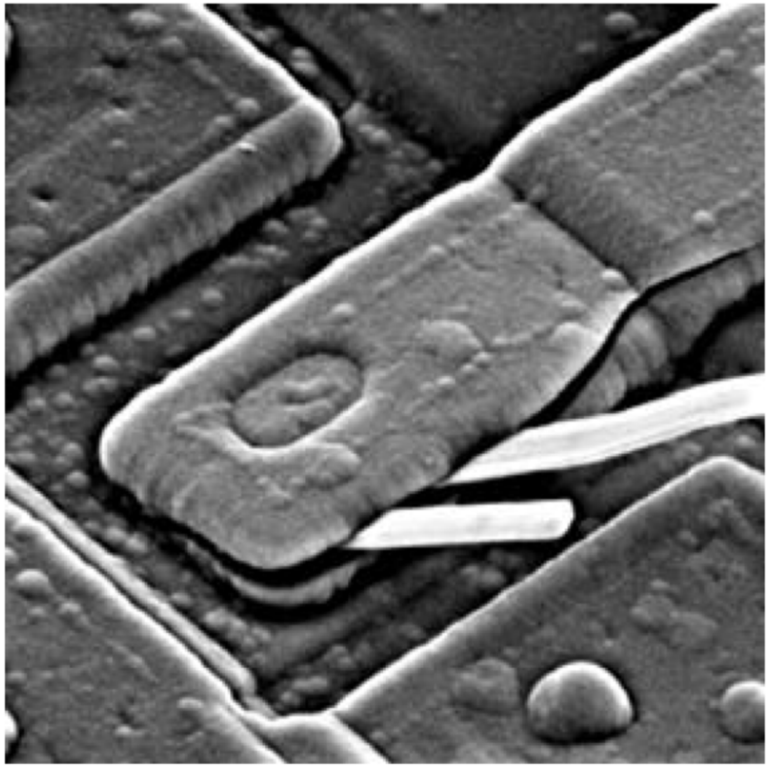
- 高频对应于图像中剧烈变化的灰度

高通滤波器

略微平移
滤波器

- 衰减低频而通过高频，强化细节





- 高频对应于图像中剧烈变化的灰度

二维0填充

- $f(x,y)$是$A \times B$大小的图像
- $h(x,y)$是$C \times D$大小的图像
- 缠绕错误可以避免，如果

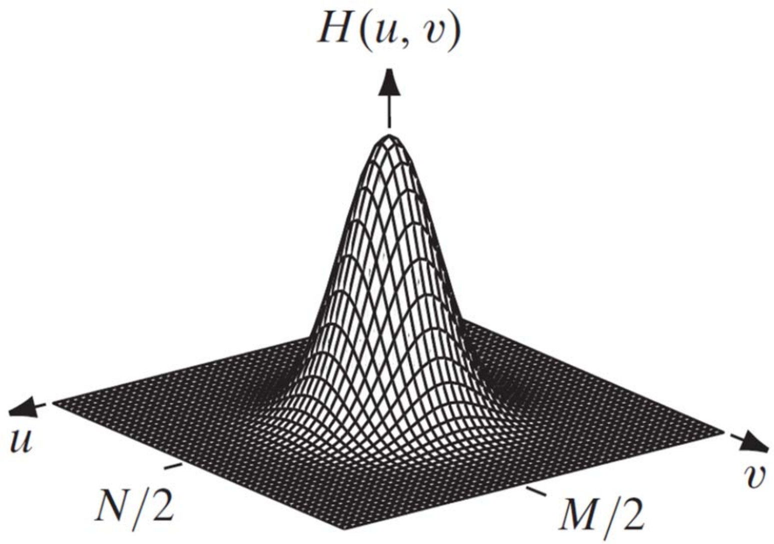
$$f_p(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \le x \le A-1 \quad \text{and} \quad 0 \le y \le B-1 \\ 0 & A \le x \le P \quad \text{or} \quad B \le y \le Q \end{cases}$$

$$h_p(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & 0 \le x \le C-1 \quad \text{and} \quad 0 \le y \le D-1 \\ 0 & C \le x \le P \quad \text{or} \quad D \le y \le Q \end{cases}$$

  - 其中 $P \ge A + C - 1 \quad Q \ge B + D - 1$
  - 选择偶数会让计算更快

不进行0填充

- 低通滤波器



Matlab

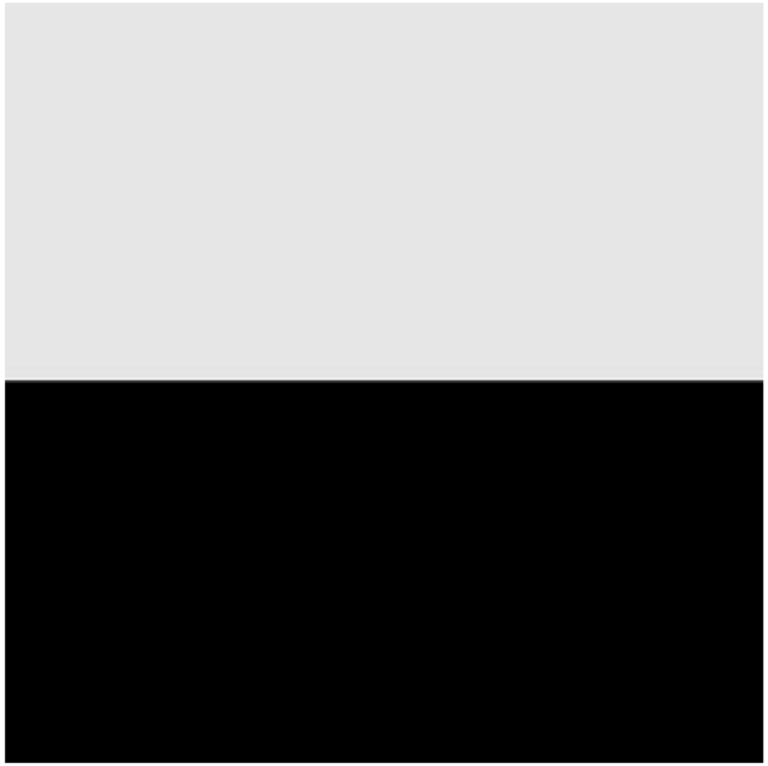
- i = zeros(32,32); i(1:16,:) = 255;
- [m, n] = size(i); idx=ones(m,n);
- for j=1:m
-     idx(j,:)=(j-1)+(0:n-1);
- end
- transfer=(-1).^idx;

- f2=fft2(i.*transfer);
- gausFilter = fspecial('gaussian',[m,n],6);
- filter=f2.*gausFilter;
- i_new=ifft2(filter);

- i_new_new=abs(real(i_new).*transfer);
- imshow(i_new_new);

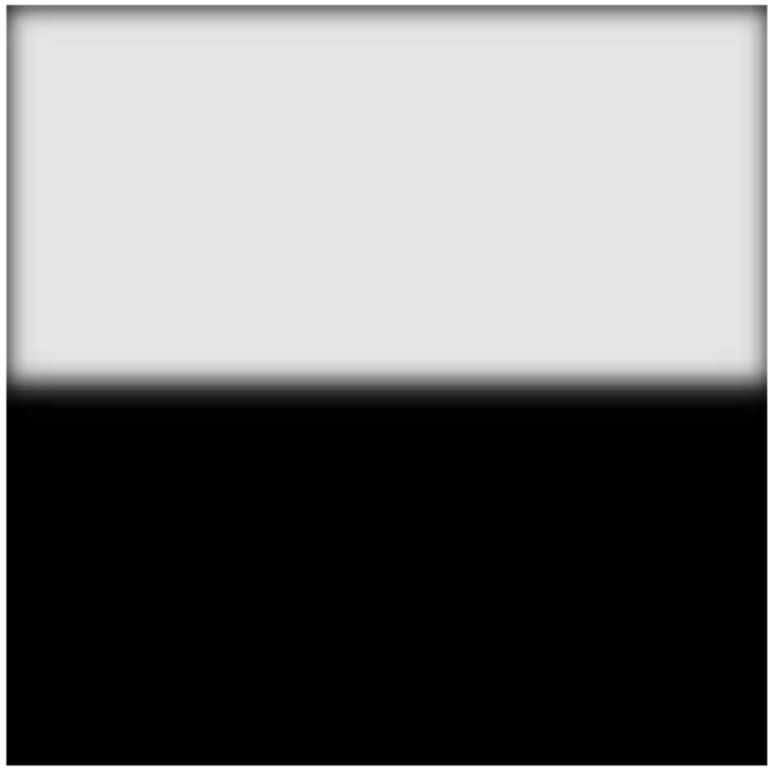
不进行0填充

- 低通滤波器



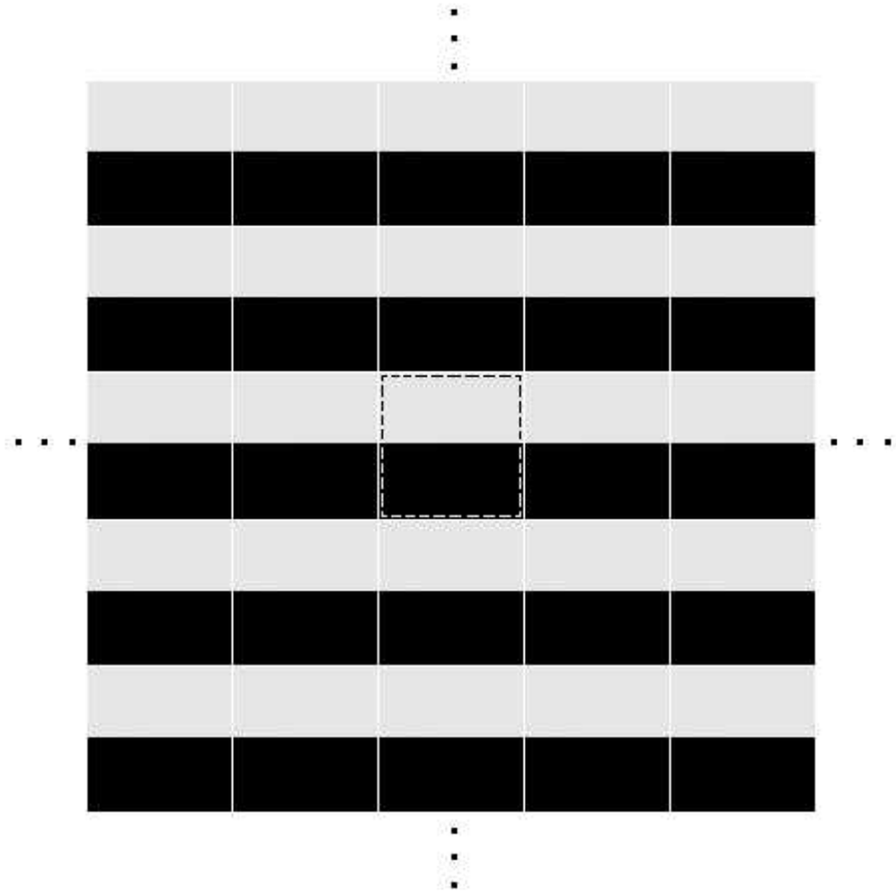
进行0填充

- 低通滤波器



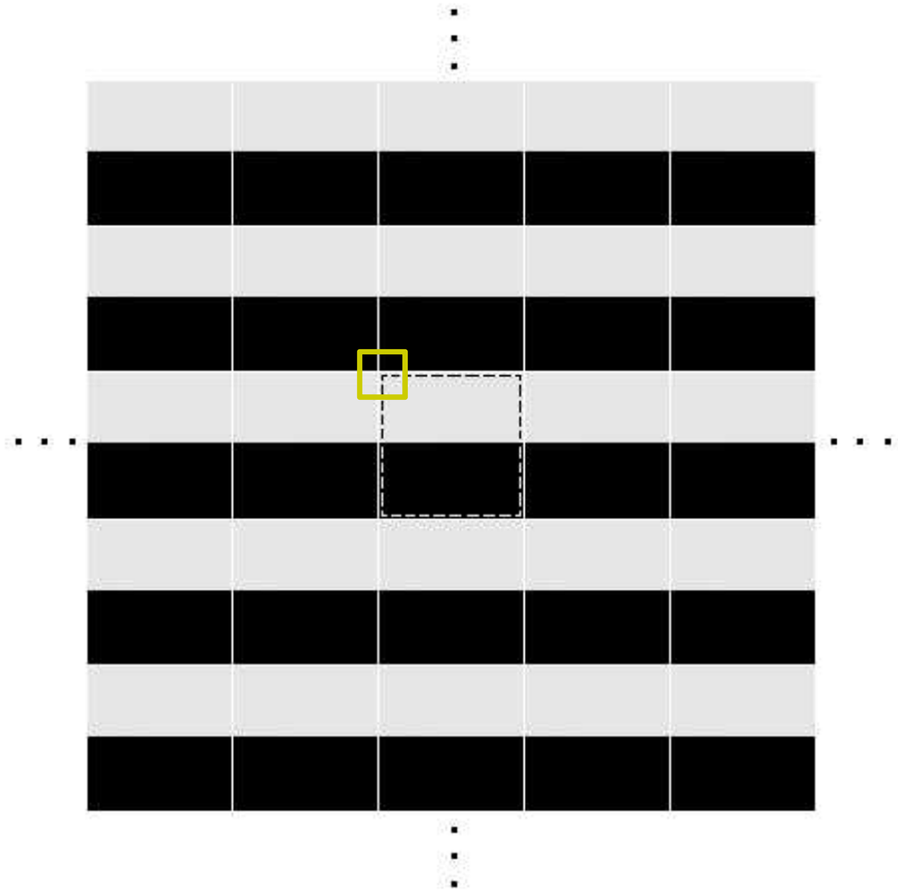
原因分析

- 离散傅里叶变换的固有周期性



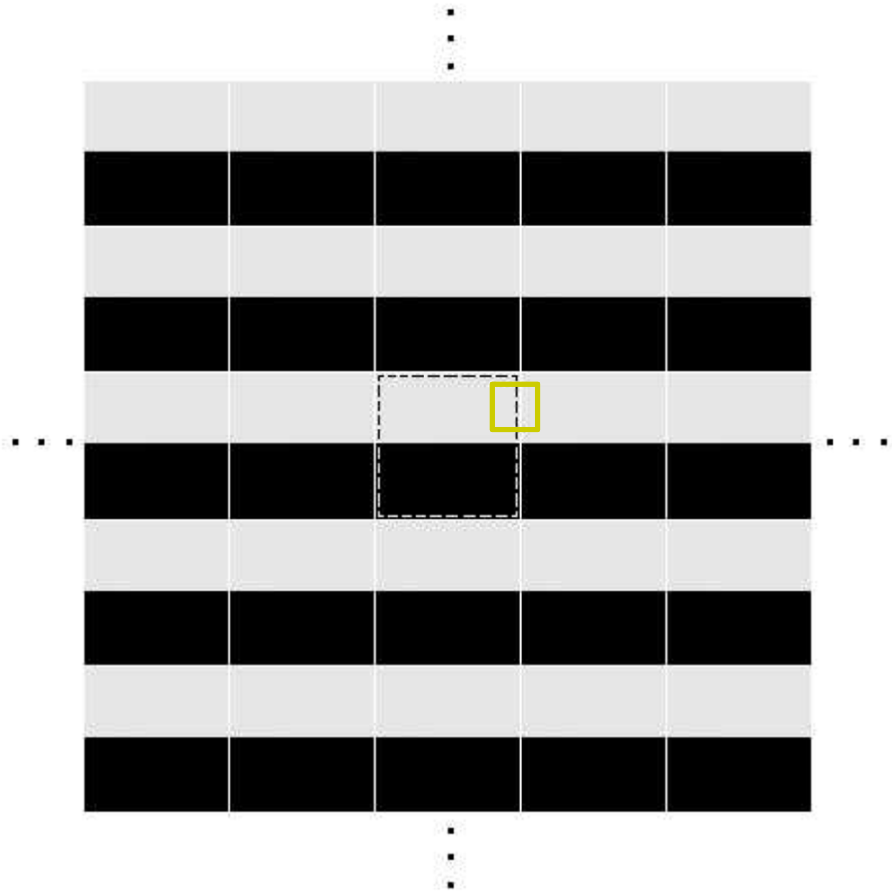
原因分析

- 离散傅里叶变换的固有周期性



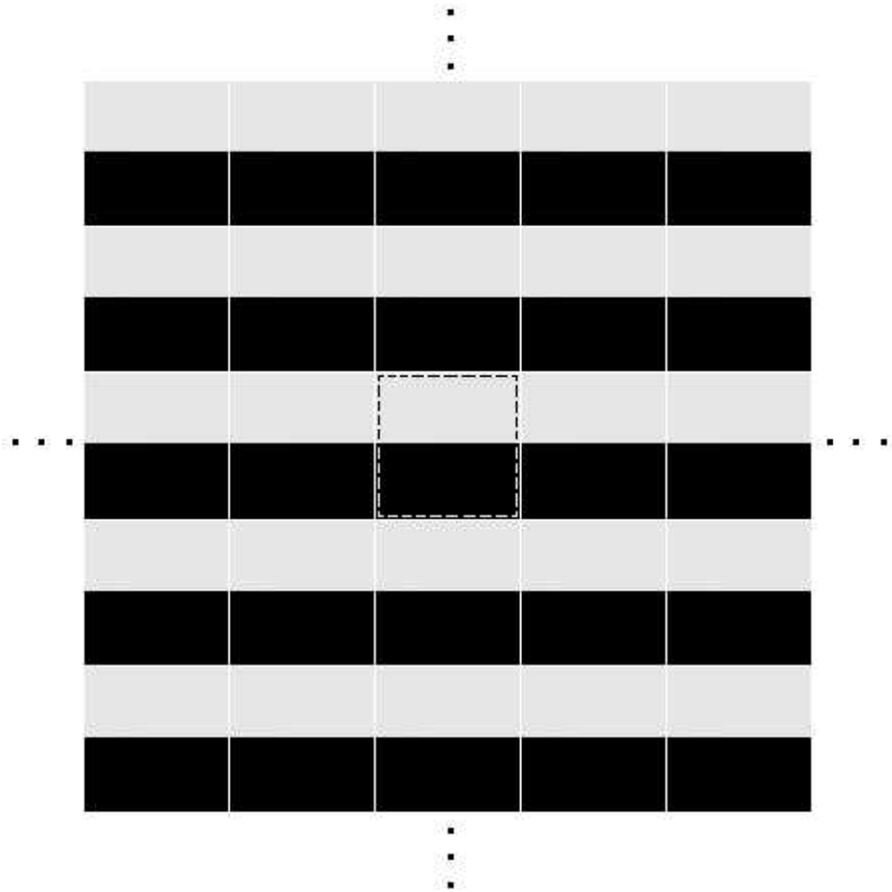
原因分析

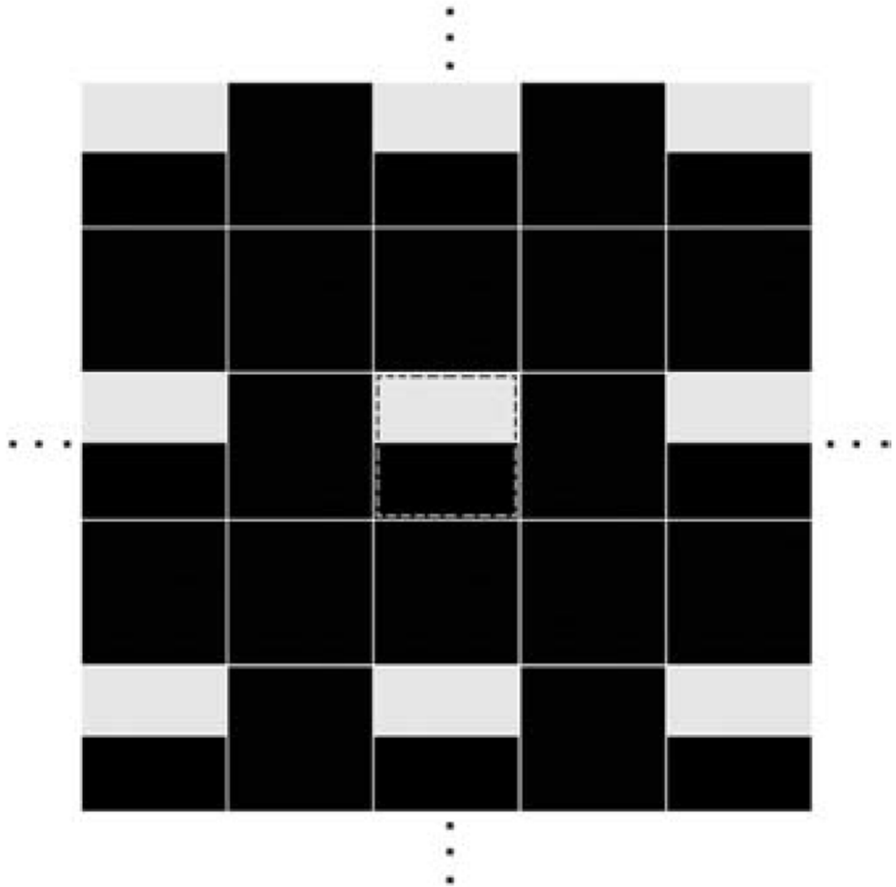
- 离散傅里叶变换的固有周期性



原因分析

- 离散傅里叶变换的固有周期性





如何对频域滤波器0填充？

- 基本公式

$$g(x, y) = \Im^{-1}[H(u, v)F(u, v)]$$

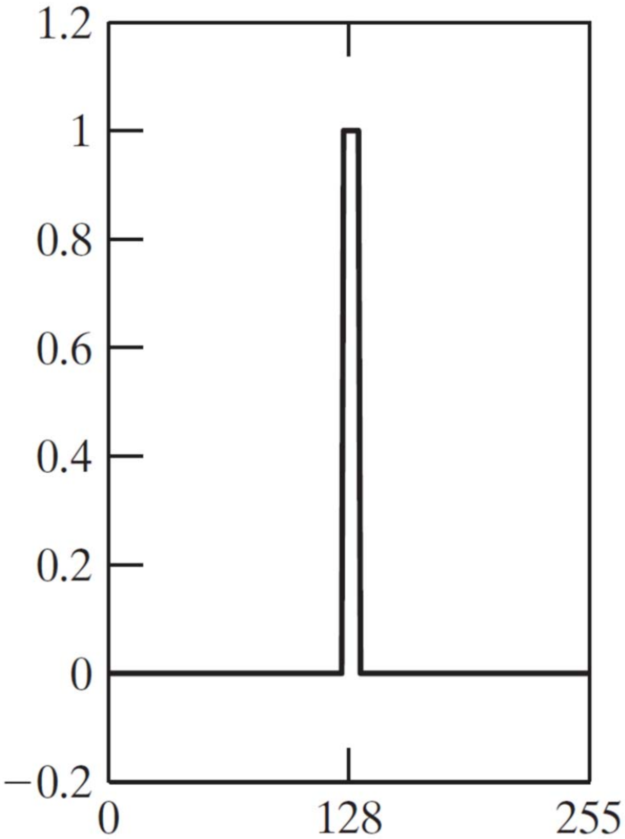
  - 通常直接指定频域滤波器$H(u, v)$

- 第一种方案

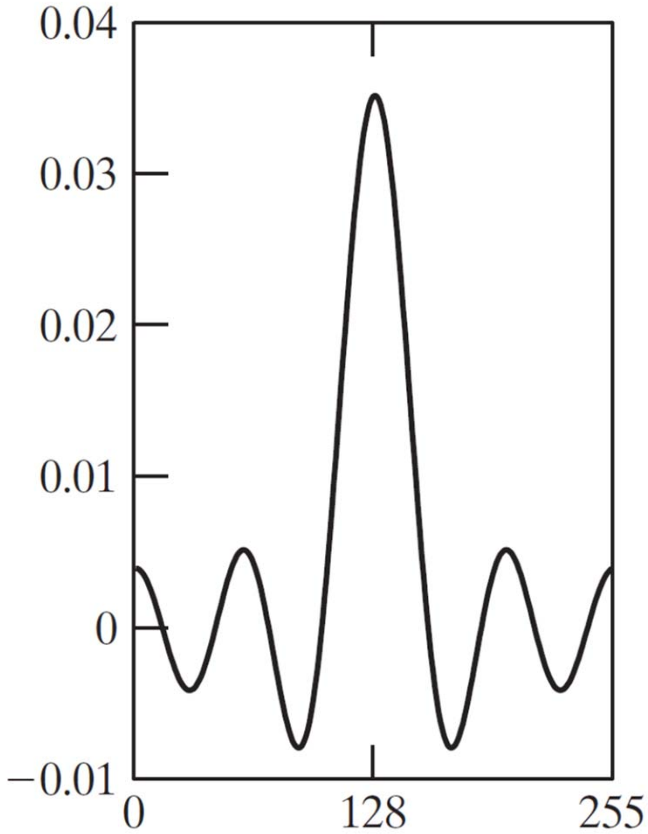
频域滤波器 —傅里叶反变换→ 图像 —0填充→ 图像 —傅里叶变换→ 频域滤波器

举例

- 1维低通滤波器



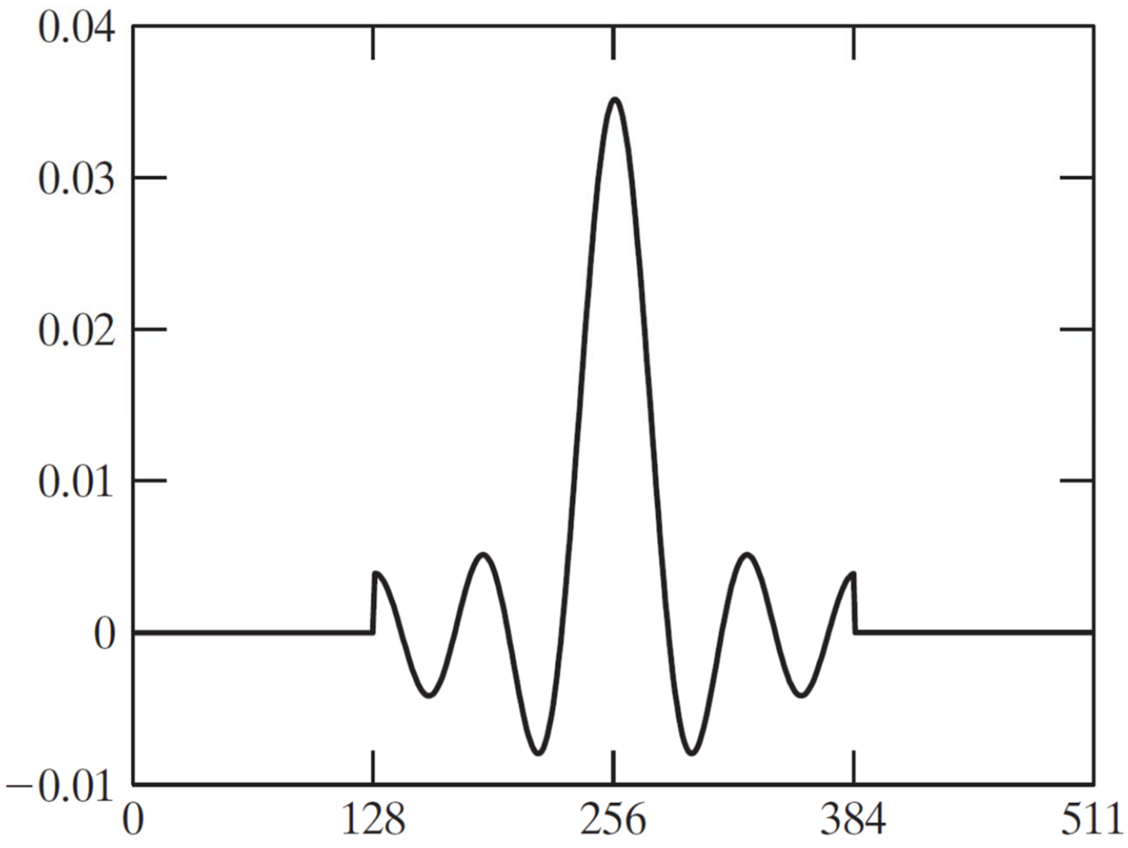
频率域



空间域

举例

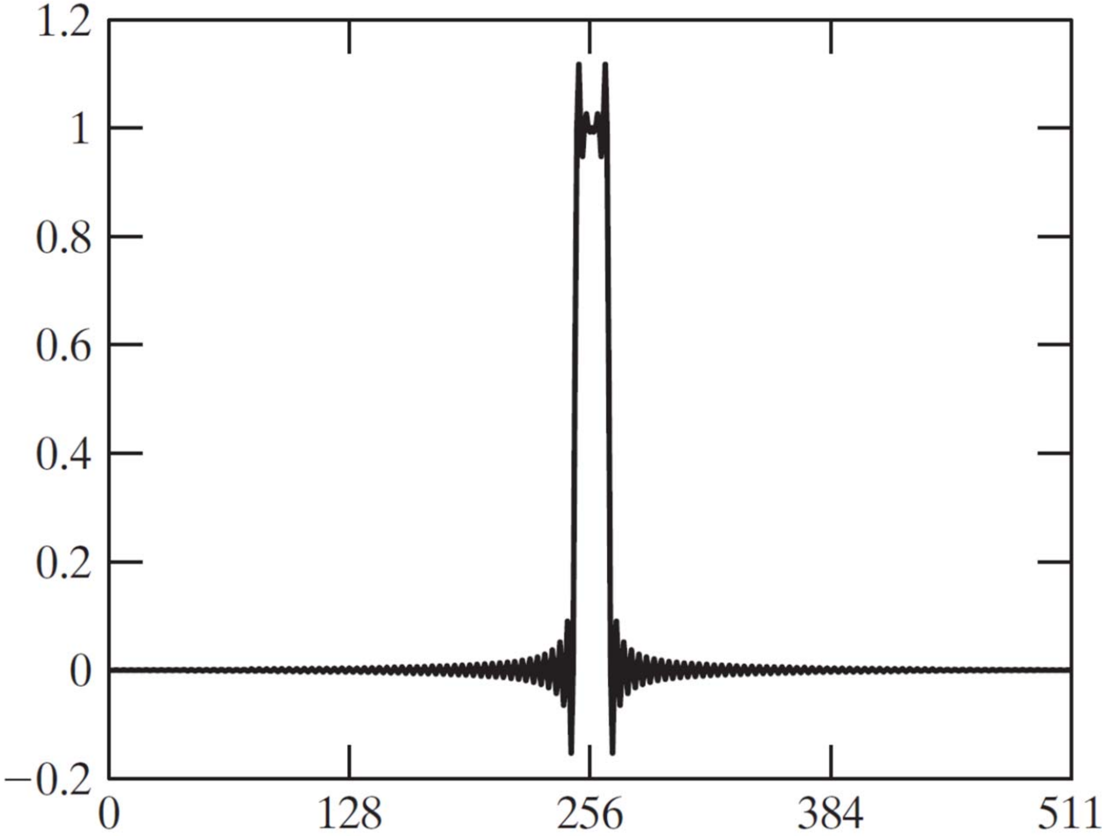
- 1维低通滤波器



空间域0填充

举例

- 1维低通滤波器

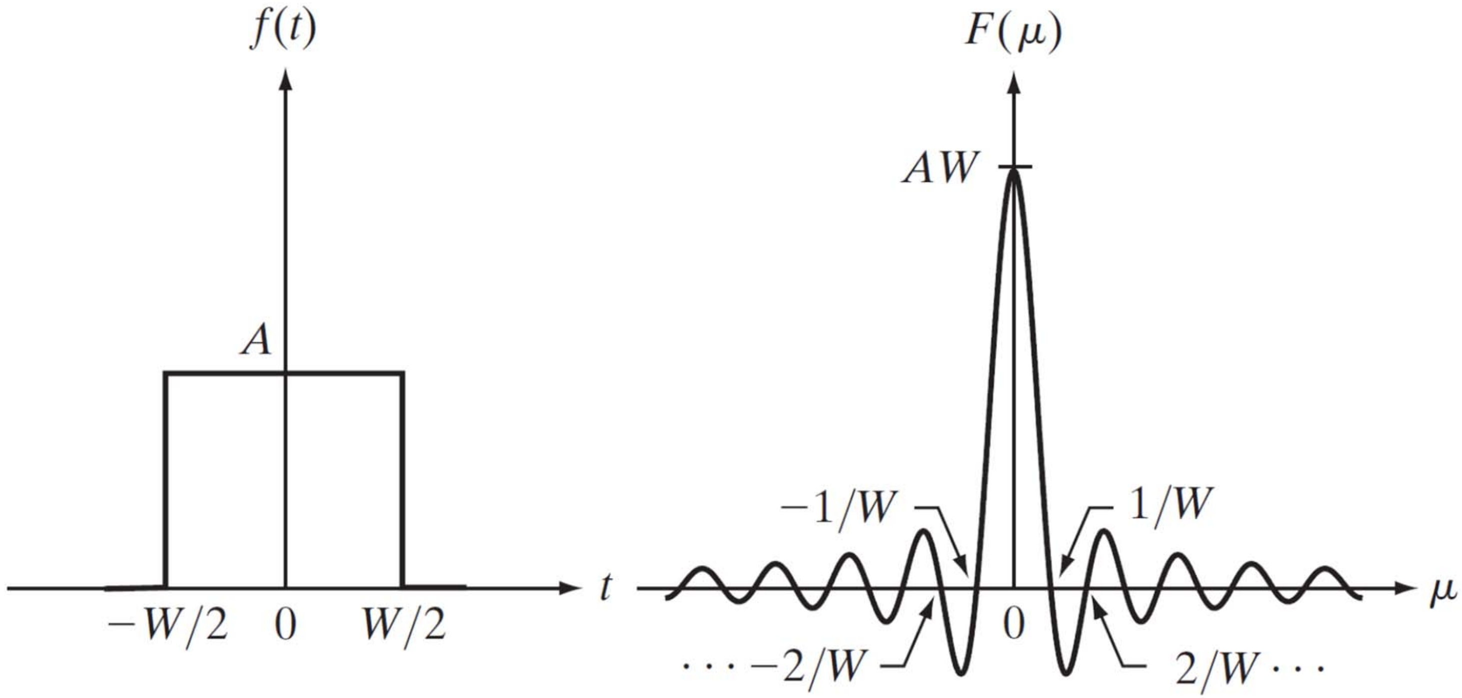


频域率

频率域出现波动！

举例

- 盒状函数的傅里叶变换



第二种方案（更常用）

1. 对图像进行0填充，并计算傅里叶变换
2. 设计与填充后图像一样大的频域滤波器

- 并不能完全避免缠绕错误
- 实际效果很好，比第一种方案更佳

频域滤波器一般流程

1. 给定一副大小为$M \times N$的输入图像$f(x,y)$，选择填充参数P和Q。典型地，我们选择$P = 2M$和$Q = 2N$。
2. 对$f(x,y)$添加必要数量的0，形成大小为$P \times Q$的填充后图像$f_p(x,y)$。
3. 用$(-1)^{x+y}$乘以$f_p(x,y)$移到其变换的中心。
4. 计算来自步骤3的图像的DFT，得到$F(u,v)$。

频域滤波器一般流程

5. 生成一个实的、对称的滤波函数$H(u,v)$，其大小为$P \times Q$，中心在$(\frac{P}{2},\frac{Q}{2})$处。用阵列相乘形成乘积$G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$。
6. 得到处理后的图像：$g_p(x,y) = \{\text{real}\left[\mathfrak{I}^{-1}[G(u,v)]\right]\}(-1)^{x+y}$
7. 通过$g_p(x,y)$的左上象限提取$M \times N$区域，得到最终处理结果$g(x,y)$。

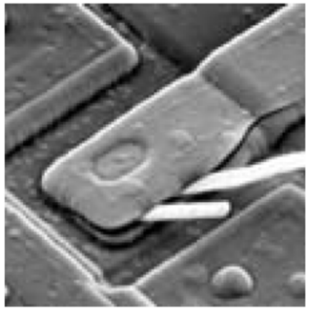
进行0填充

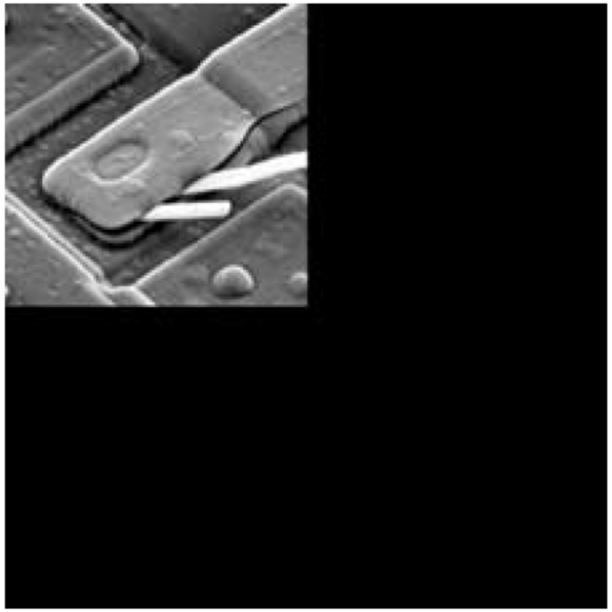
- 低通滤波器

Matlab

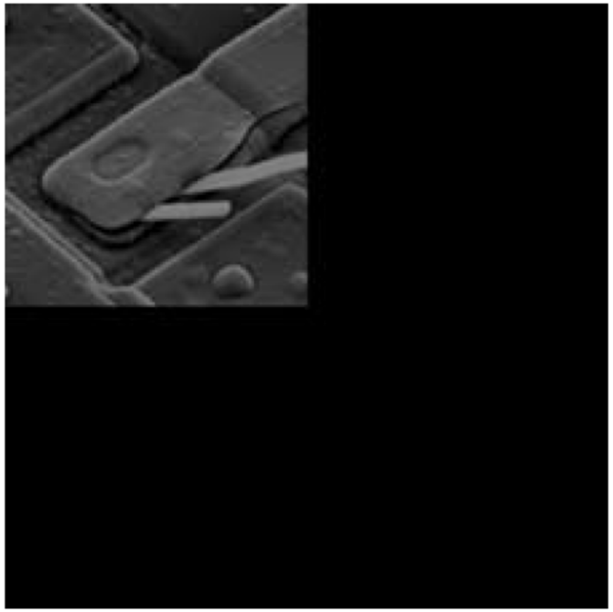
- i = zeros(32,32); i(1:16,:) = 255;
- …… transfer=(-1).^idx;
- f2=fft2(i.*transfer,2*m,2*n);
- [m, n] = size(f2);
- idx=ones(m,n);
- for j=1:m
-     idx(j,:)=(j-1)+(0:n-1);
- end
- transfer=(-1).^idx;
- gausFilter = fspecial('gaussian',[m,n],6);
- filter=f2.*gausFilter;
- i_new=ifft2(filter);
- i_new_new=abs(real(i_new).*transfer);
- imshow(i_new_new);

举例



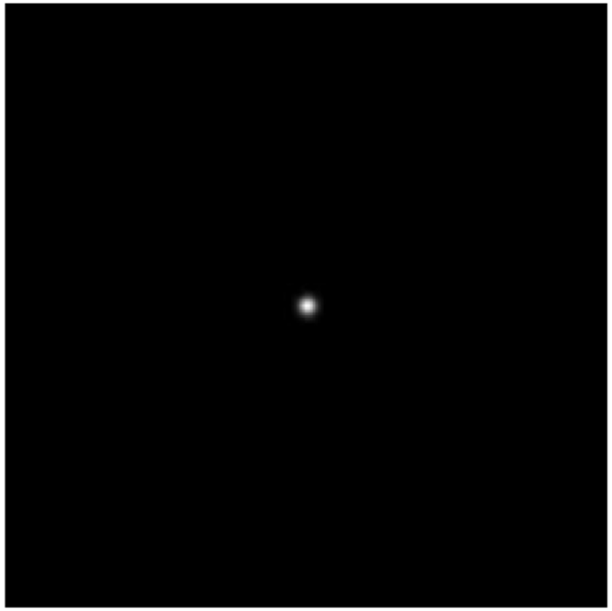


0填充



乘$(-1)^{x+y}$

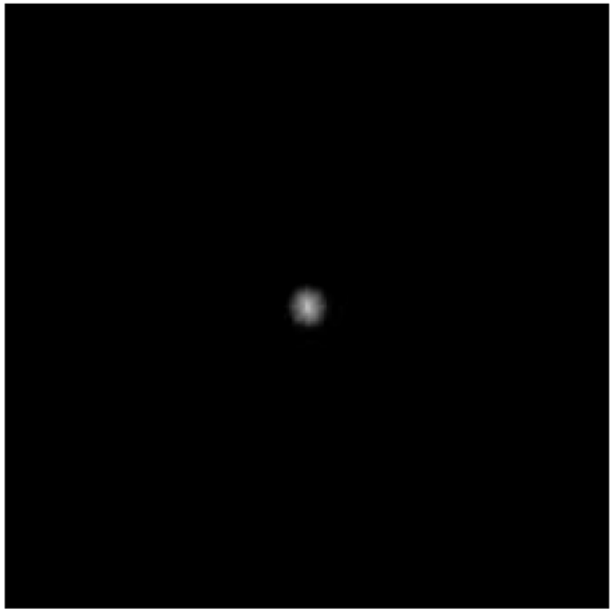
举例



傅里叶谱

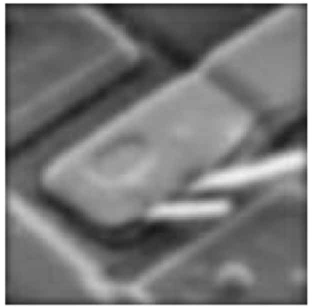
高斯低通滤波器

举例



滤波

IDFT，乘$(-1)^{x+y}$



裁剪

零相移滤波器

- 假设滤波器为实数

$$g(x, y) = \Im^{-1}[H(u, v)F(u, v)]$$

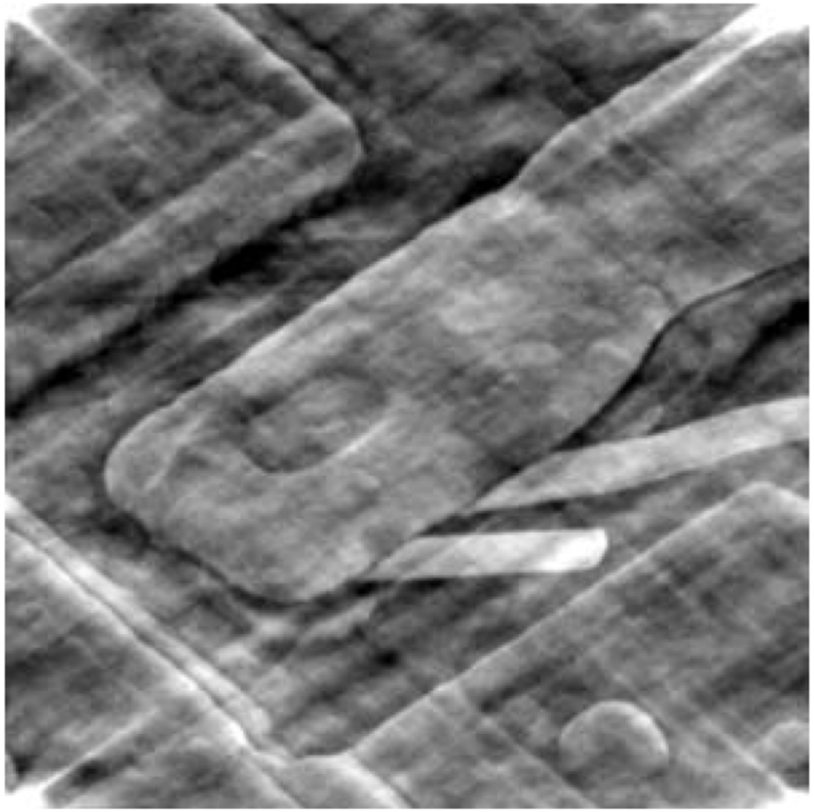
$$g(x, y) = \Im^{-1}\Big[H(u, v)R(u, v) + jH(u, v)I(u, v)\Big]$$

其中

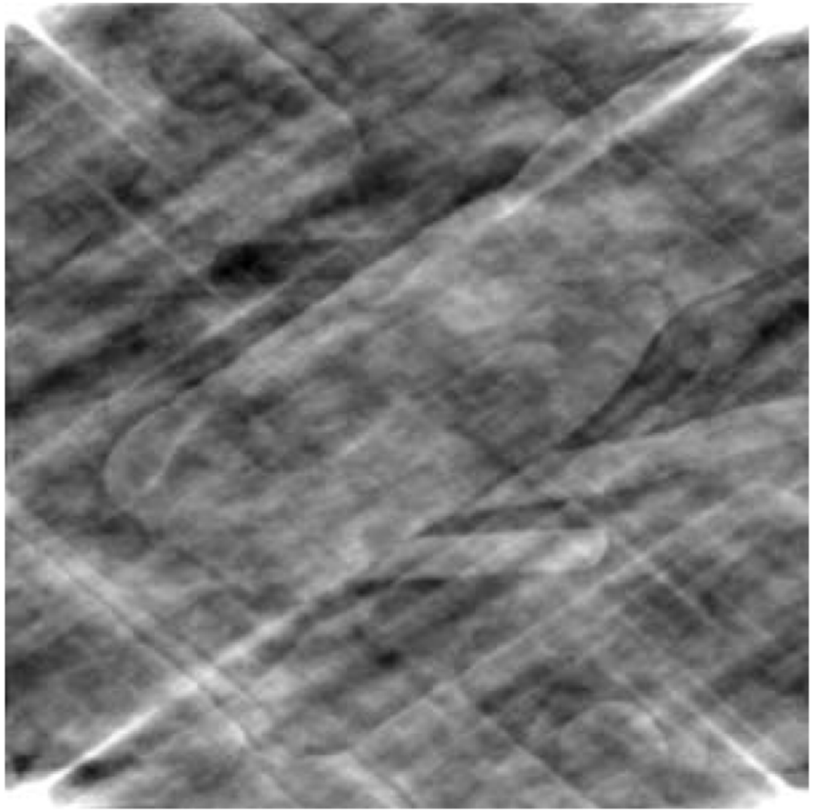
$$F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v)$$

- 相角保持不变！

相角的敏感性



相角乘0.5



相角乘0.25

提纲

- 频率域滤波
  - 频域率性质
  - 频域率滤波基础
  - 空间和频域率对应关系
- 平滑图像
  - 理想低通滤波器
  - 巴特沃斯低通滤波器
  - 高斯低通滤波器

空间滤波 v.s. 频域滤波

- 令$f(x,y)=\delta(x,y)\Rightarrow F(u,v)=1$
- 频率域滤波

$$g(x,y)=\Im^{-1}[H(u,v)F(u,v)]$$
$$=\Im^{-1}[H(u,v)]$$

得到对应的空间滤波器

- 傅里叶变换对

$$h(x,y)\Leftrightarrow H(u,v)$$

频率域滤波器→空间滤波器

- 构造各种频率域滤波器做实验
  - 频率域滤波器更加直观
- 选择合适的频率域滤波器
- 构造空间滤波器来近似频率域滤波器
  - 通常构造“较小”的空间滤波器
  - 空间滤波器更易实现，更高效

频率域滤波器→空间滤波器

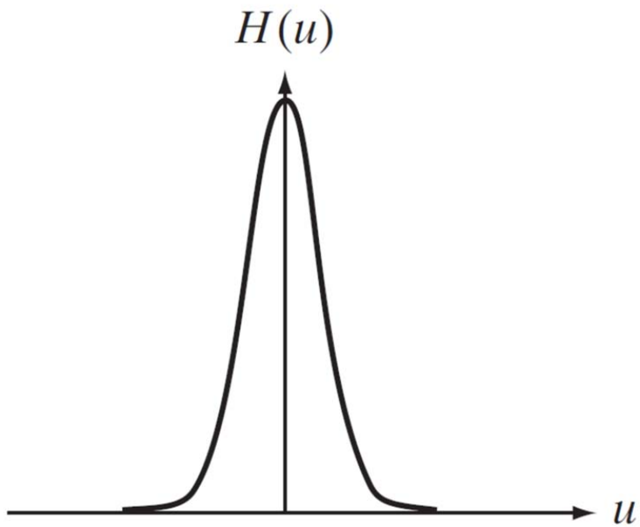
- 一维频率域高斯滤波器

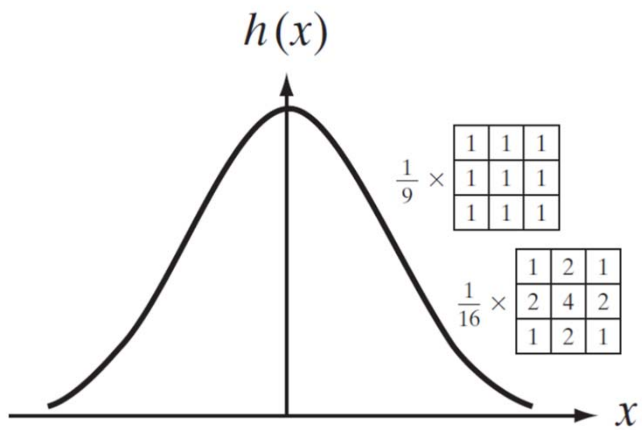
$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma^2}$$

- 空间域对应的滤波器

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma Ae^{-2\pi^2\sigma^2x^2}$$

标准差的
反向关系！





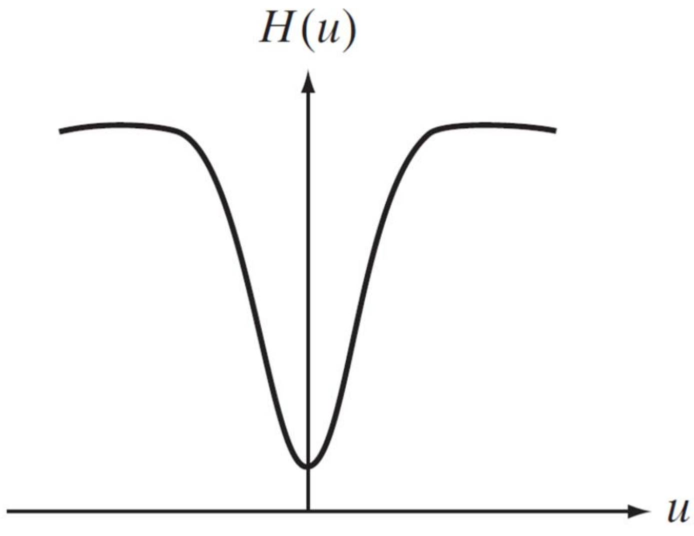
频率域滤波器→空间滤波器

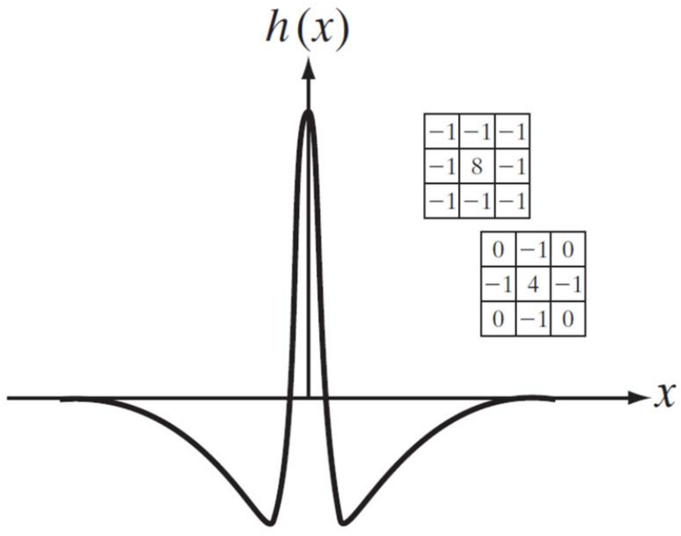
- 利用高斯函数构造高通滤波器

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma_1^2} - Be^{-u^2/2\sigma_2^2}$$

- 空间域对应的滤波器

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma_1 A e^{-2\pi^2\sigma_1^2 x^2} - \sqrt{2\pi}\sigma_2 B e^{-2\pi^2\sigma_2^2 x^2}$$

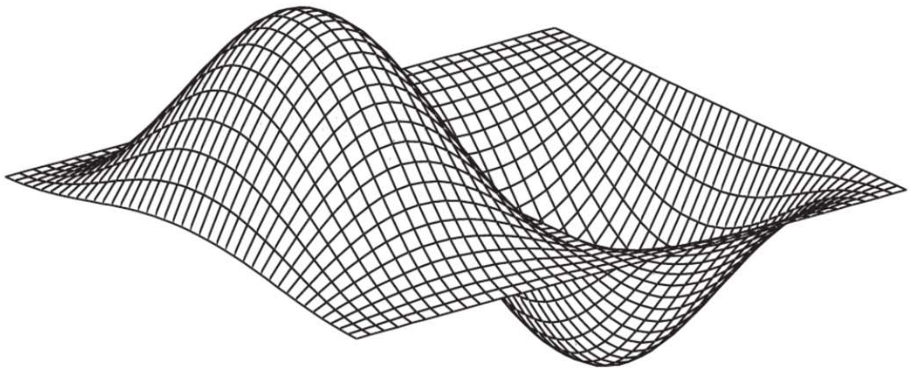


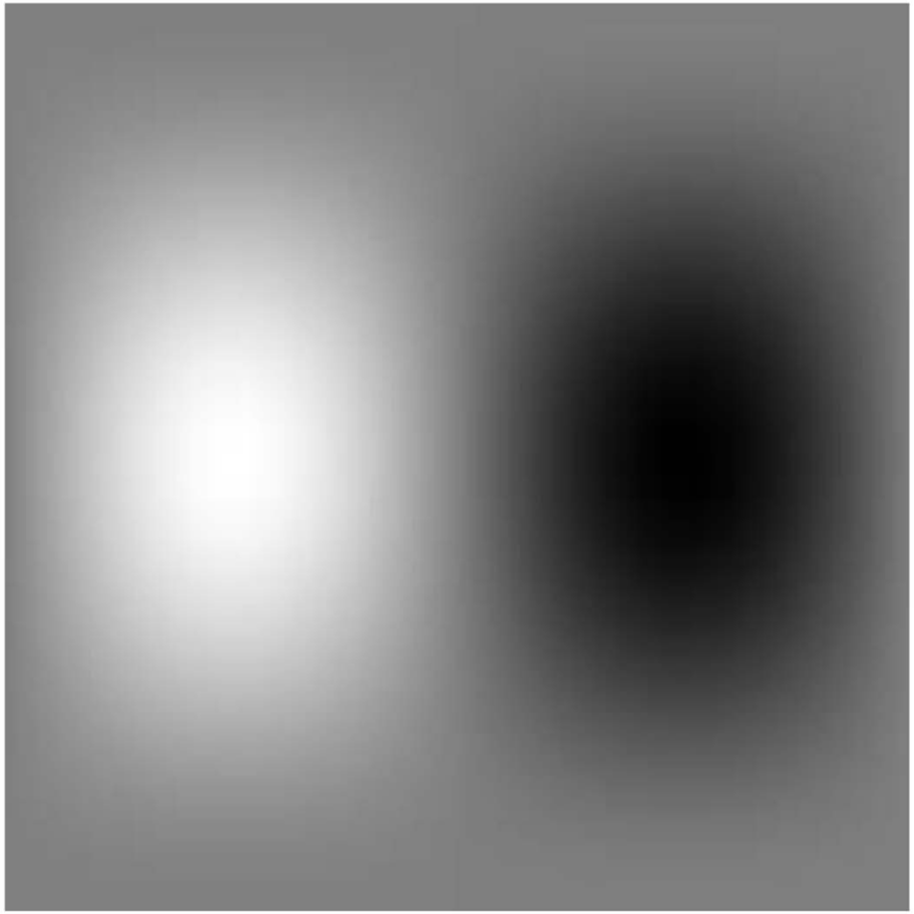


空间滤波器→频率域滤波器

- Sobel算子

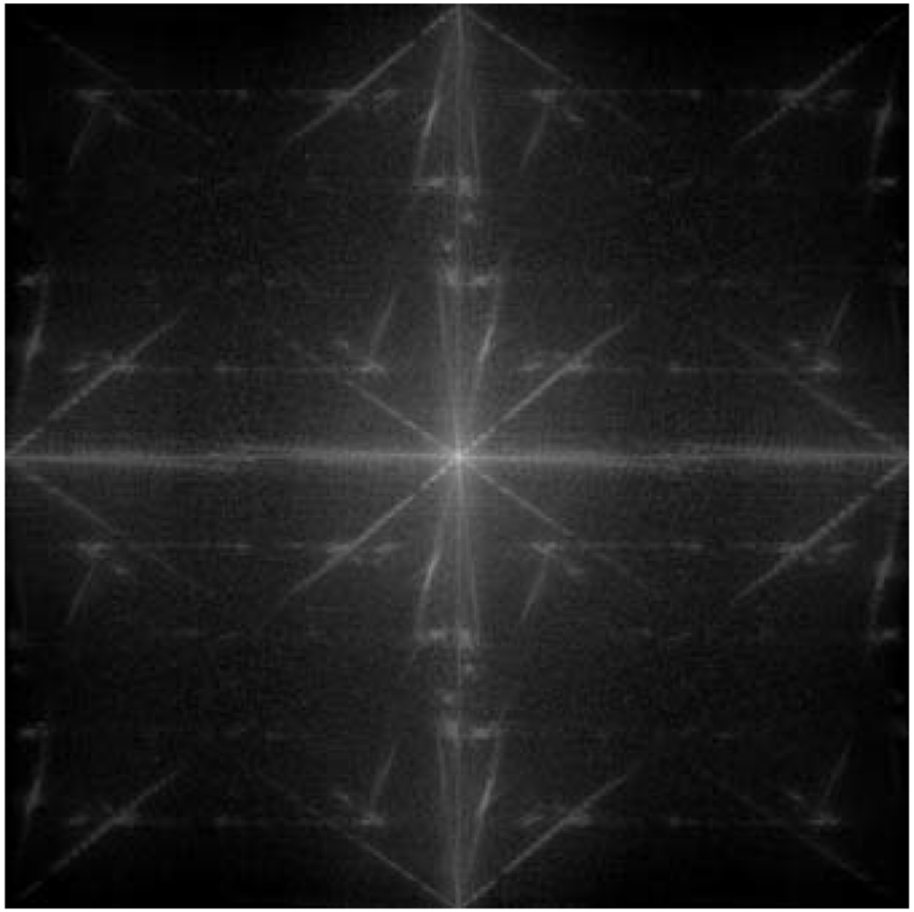
−1	0	1
−2	0	2
−1	0	1





空间滤波器→频率域滤波器

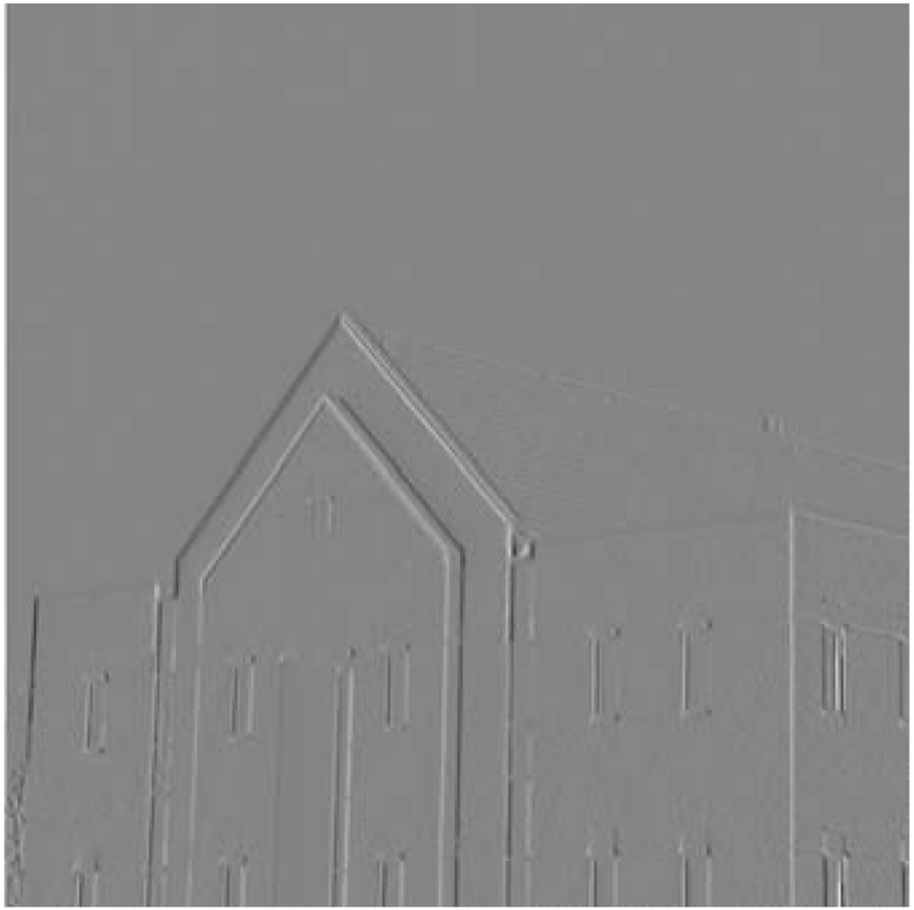
- 待处理图像

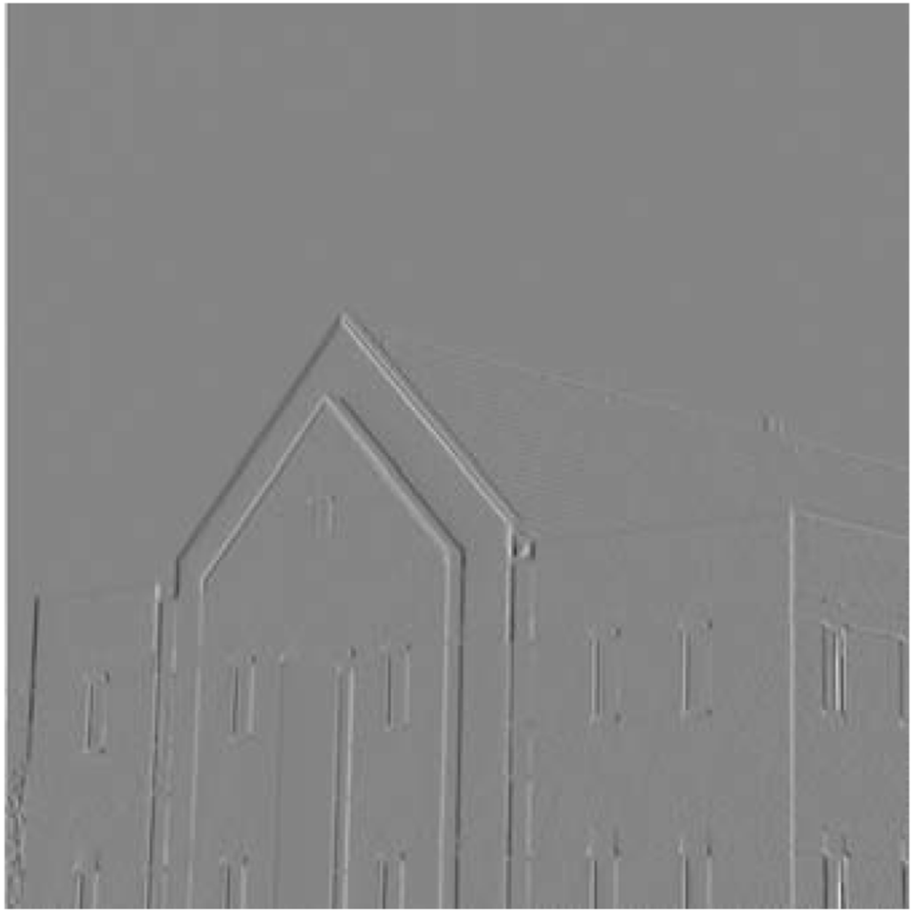


空间滤波器→频率域滤波器

课程作业！

- 滤波结果（空间和频率一致）





提纲

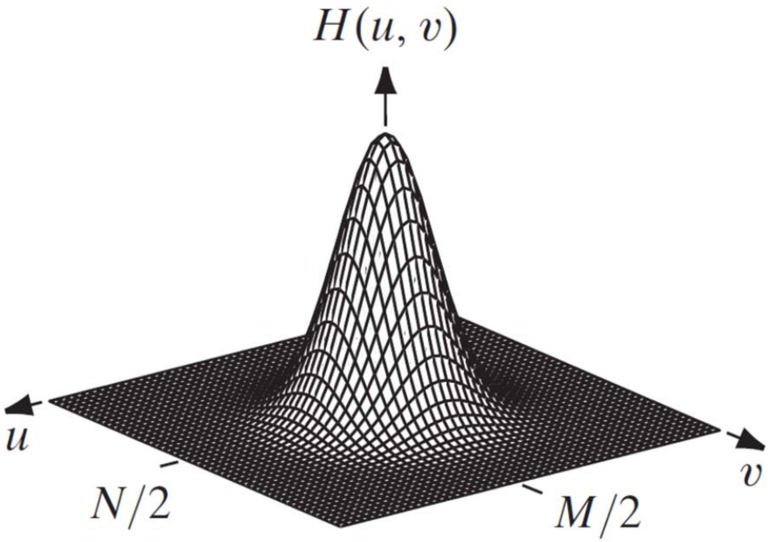
- 频率域滤波
  - 频域率性质
  - 频域率滤波基础
  - 空间和频域率对应关系
- 平滑图像
  - 理想低通滤波器
  - 巴特沃斯低通滤波器
  - 高斯低通滤波器

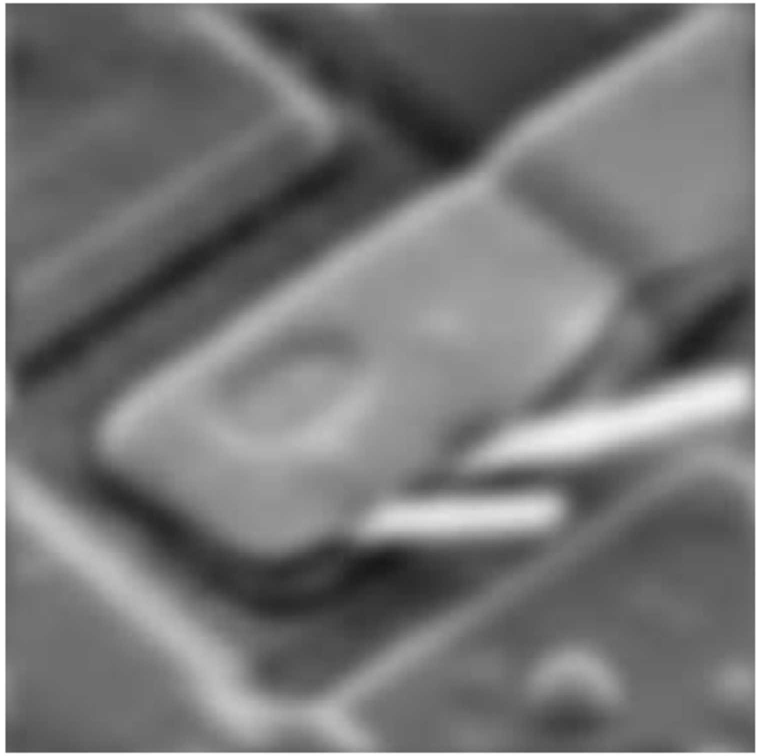
平滑图像

- 傅里叶变换的低频部分
  - 灰度缓慢变化的地方
  - 墙、地板、天空
- 傅里叶变换的高频成分
  - 灰度剧烈变化的地方
  - 边缘、噪声
- 低通滤波器
  - 衰减高频
  - 通过低频

低通滤波器

- 衰减高频而通过低频，模糊图像





- 低频对应于图像中缓慢变换的灰度

提纲

- 频率域滤波
  - 频域率性质
  - 频域率滤波基础
  - 空间和频域率对应关系
- 平滑图像
  - 理想低通滤波器
  - 巴特沃斯低通滤波器
  - 高斯低通滤波器

理想低通滤波器

- 数学定义

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u,v) \le D_0 \\ 0 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

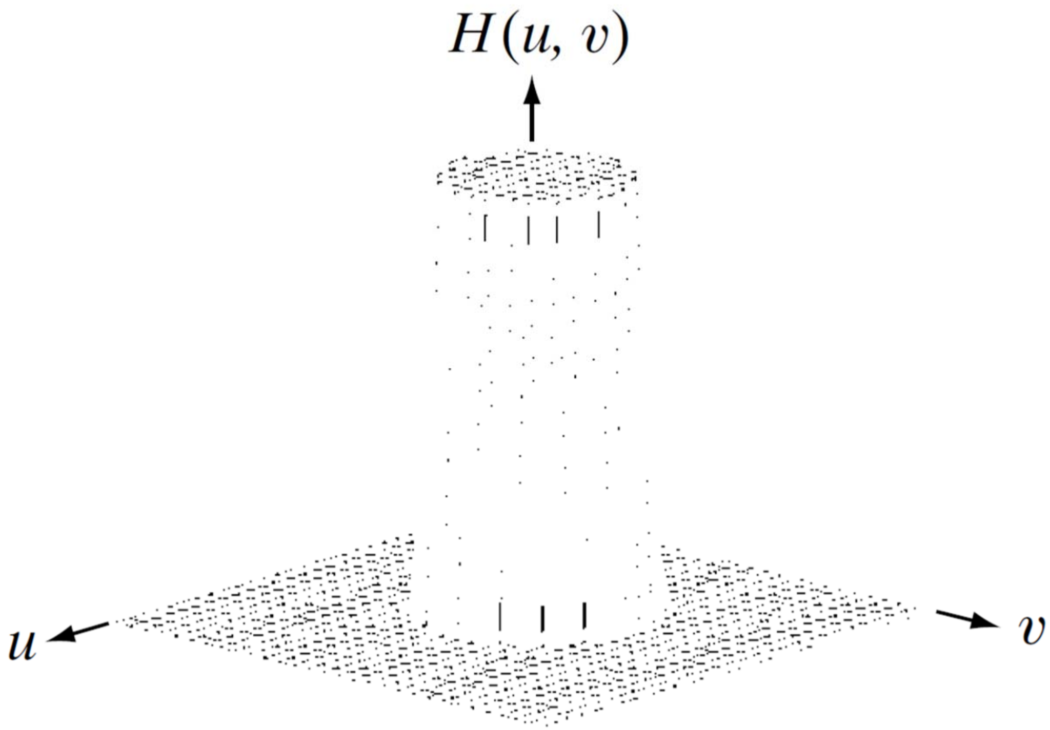
  - D_0为某常数
  - $D(u,v)$为(u,v)到中心的距离

$$D(u,v) = \left[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2\right]^{1/2}$$

- 理想
  - 低频完全保留
  - 高频完全抑制

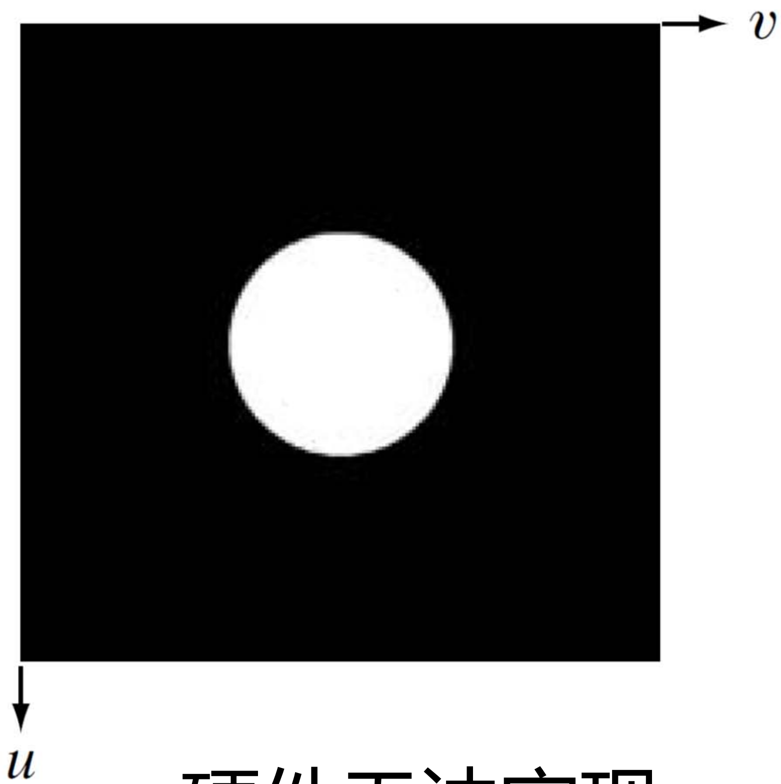
理想低通滤波器

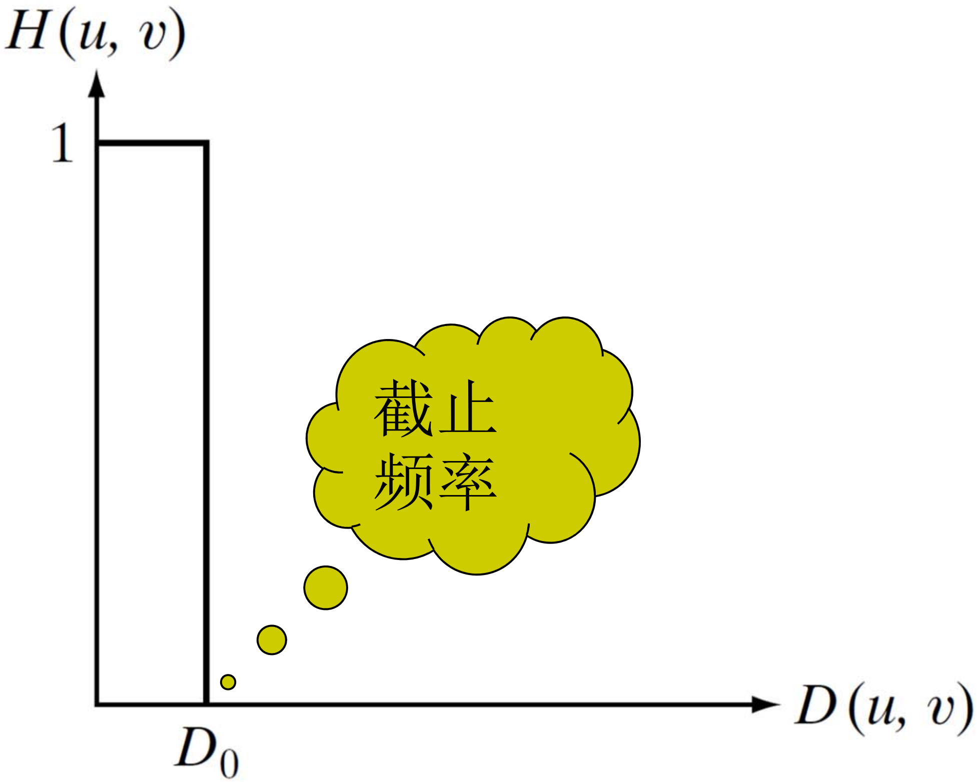
- 透视图



理想低通滤波器

- 图形显示





截面

- 硬件无法实现

傅里叶变换的功率分布

- 总功率

$$P_T = \sum_{u=0}^{P-1} \sum_{v=0}^{Q-1} P(u, v)$$

  - 其中

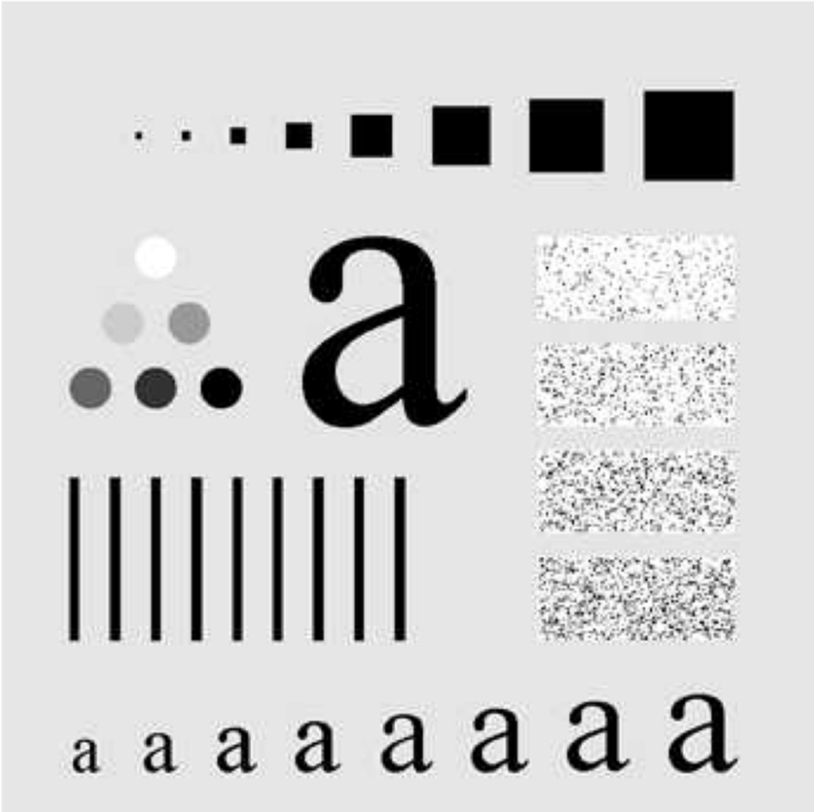
$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

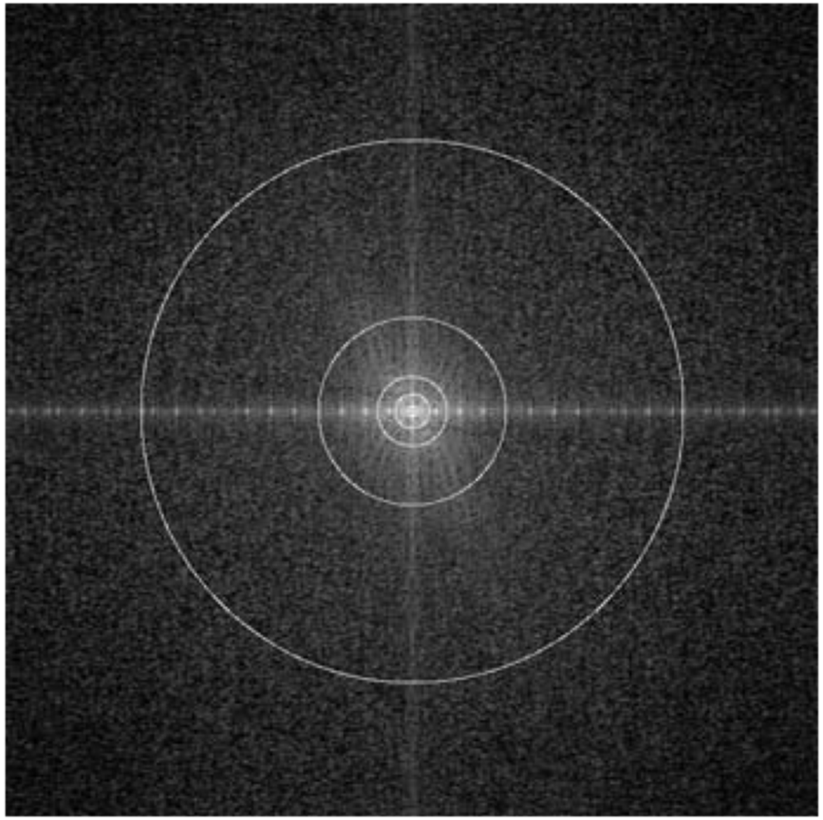
- 半径为D_0的圆包含的功率百分比

$$\alpha = 100\left[\sum_u \sum_v P(u, v)/P_T\right]$$

  - (u, v)属于圆内

举例



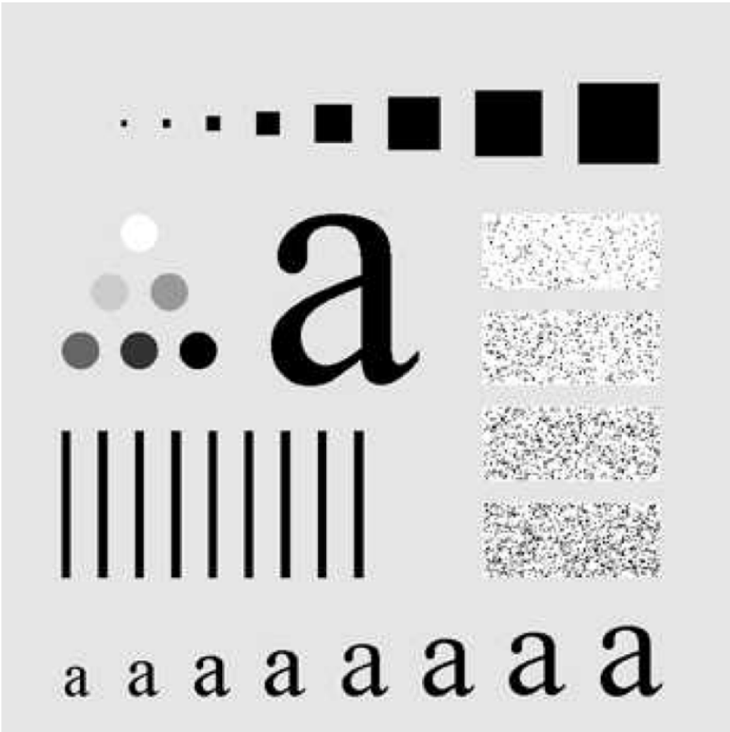


10、30、60、160、460像素宽

87.0%、93.1%、95.7%、97.8%、99.2%的能量

举例

- 利用半径构造低通滤波器



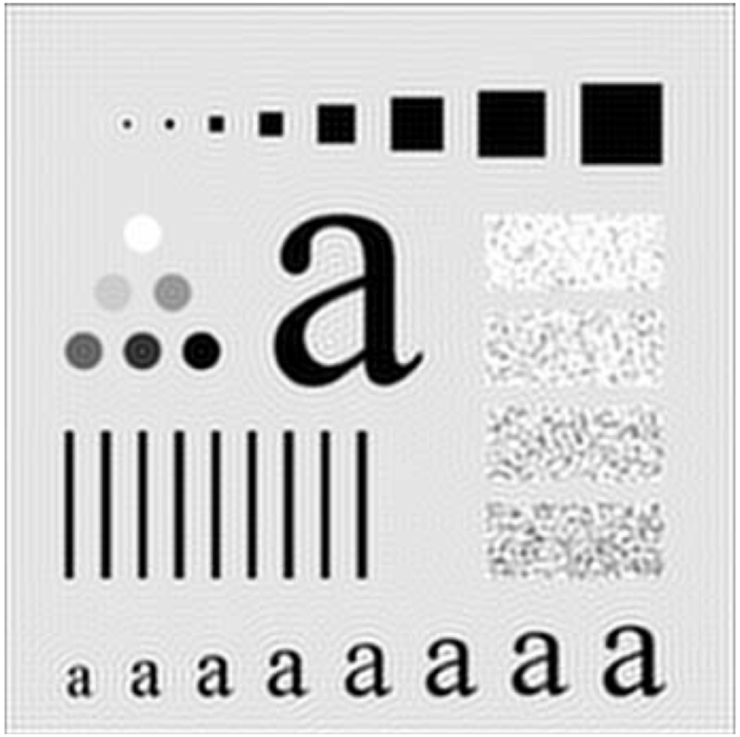
去掉的13%频率包含了形状细节

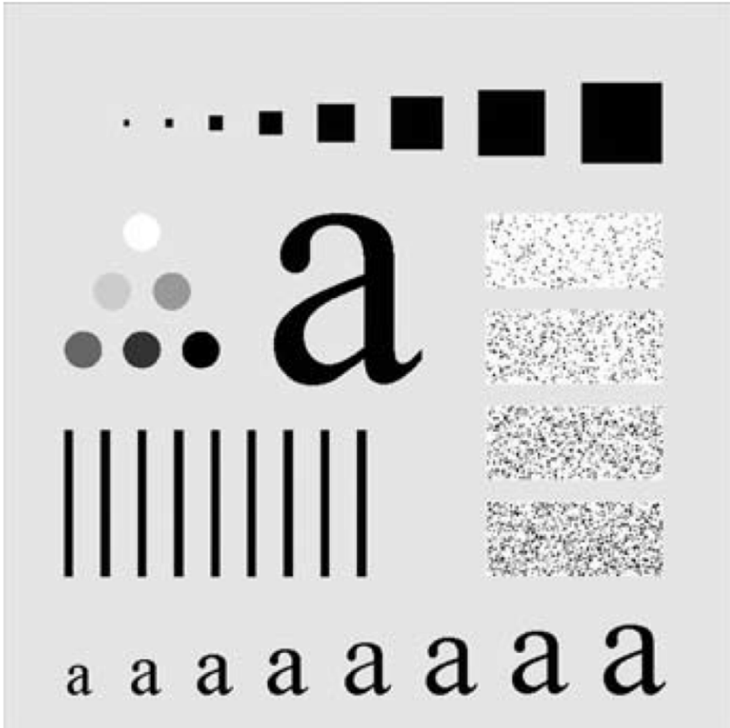
举例

- 观测到振铃（ ringing ）现象

举例

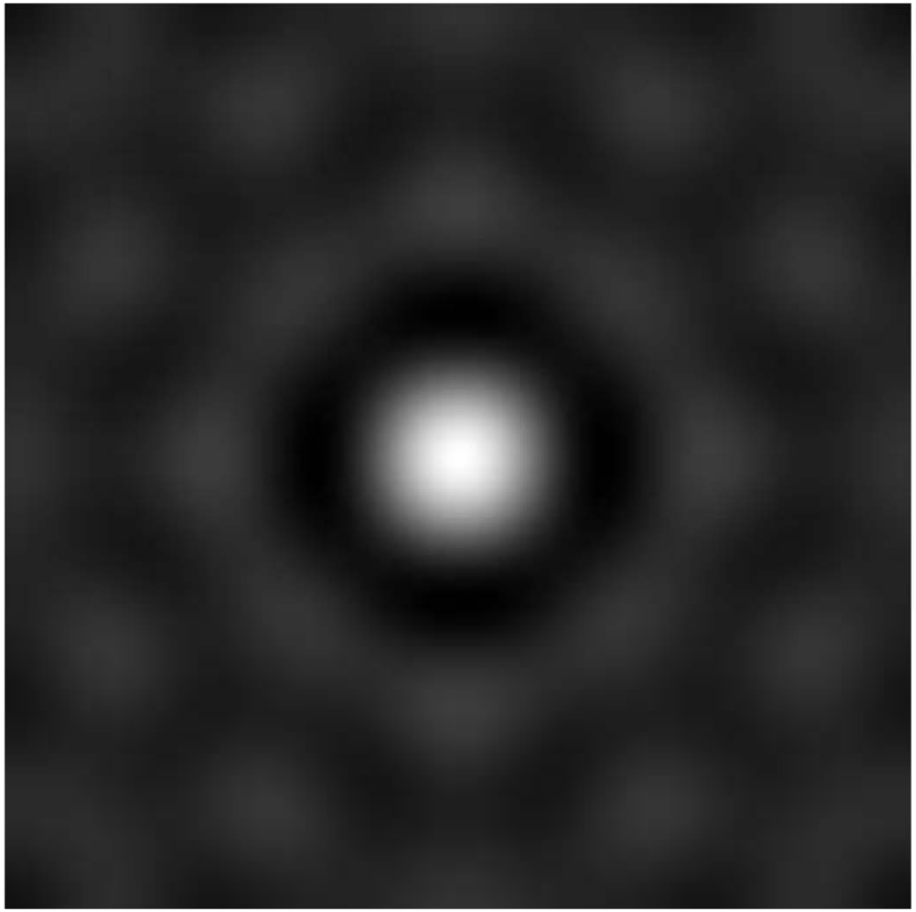
- 观测到振铃，越来越清晰



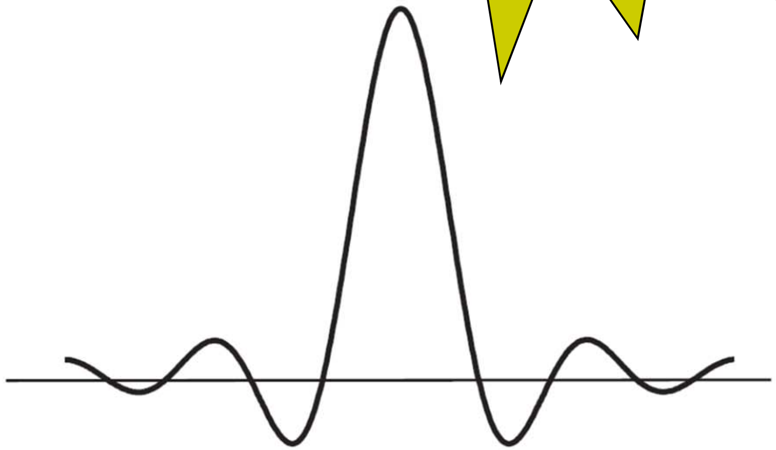


振铃的原因

半径越大，
sinc函数约窄！



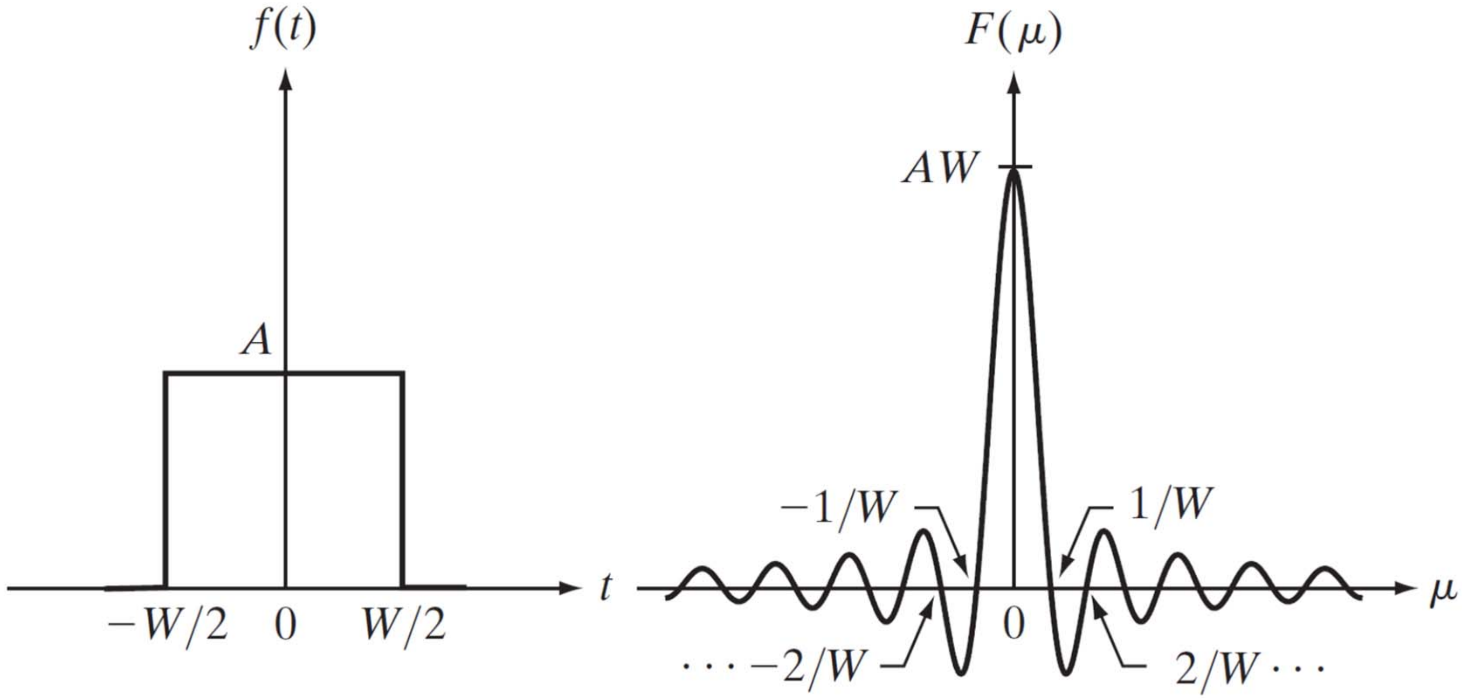
半径为5的低通滤波器对应的空间表示



通过中心的剖面图

举例

- 盒状函数的傅里叶变换



提纲

- 频率域滤波
  - 频域率性质
  - 频域率滤波基础
  - 空间和频域率对应关系

- 平滑图像
  - 理想低通滤波器
  - 巴特沃斯低通滤波器
  - 高斯低通滤波器

巴特沃斯低通滤波器

- n阶巴特沃斯（Butterworth）低通滤波器

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

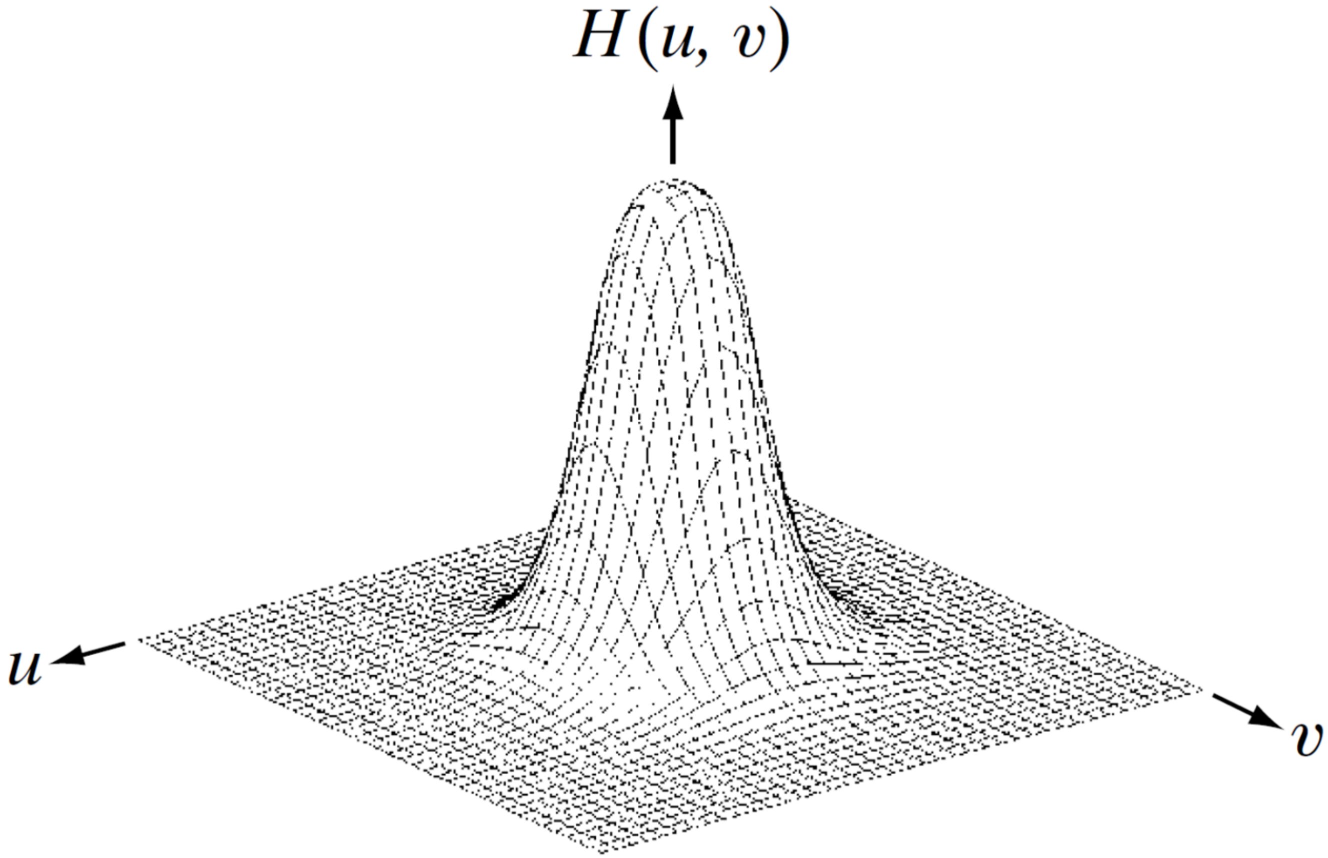
  - $D(u,v)$为(u,v)到中心的距离

$$D(u,v) = \left[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2\right]^{1/2}$$

  - D_0为截止频率

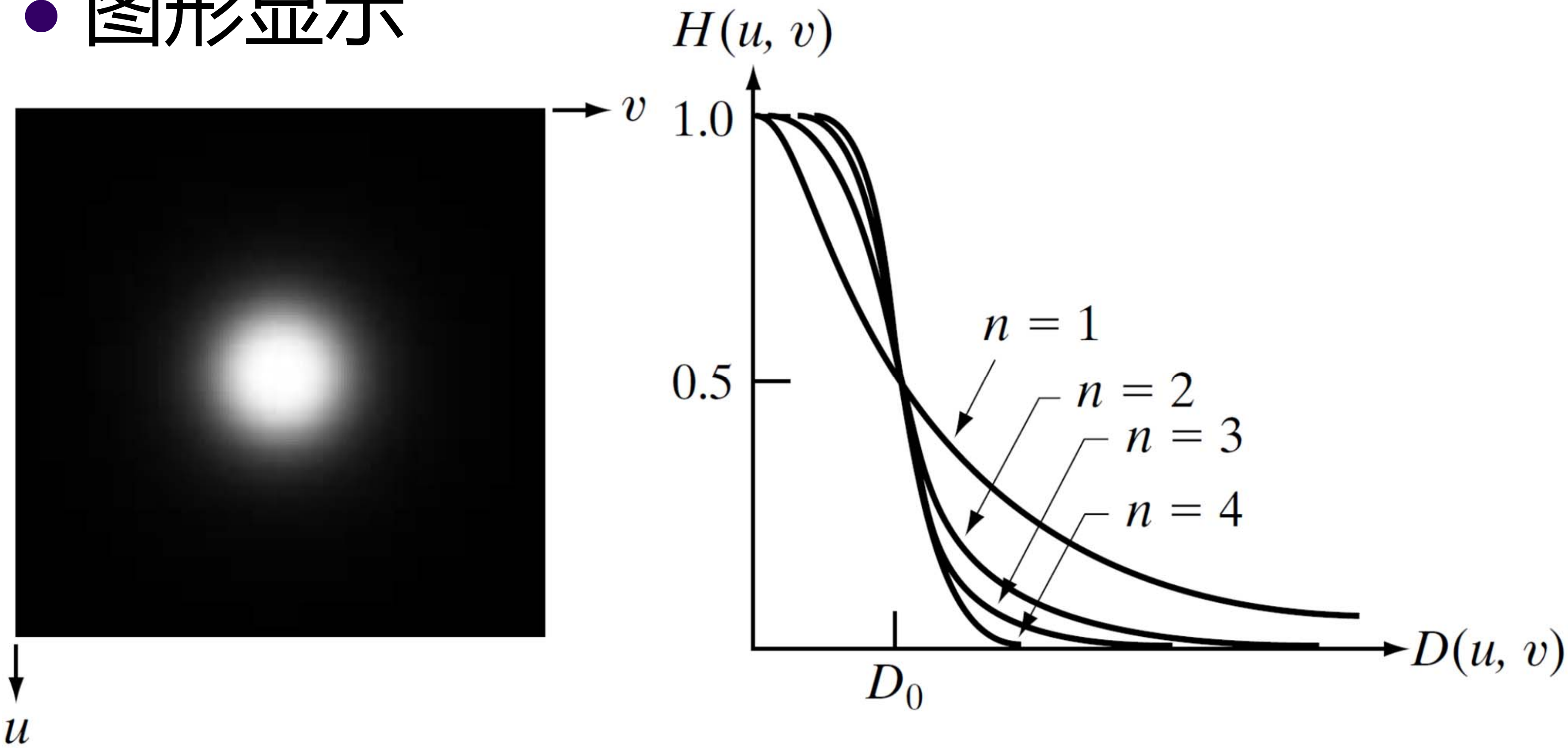
巴特沃斯低通滤波器

- 透视图



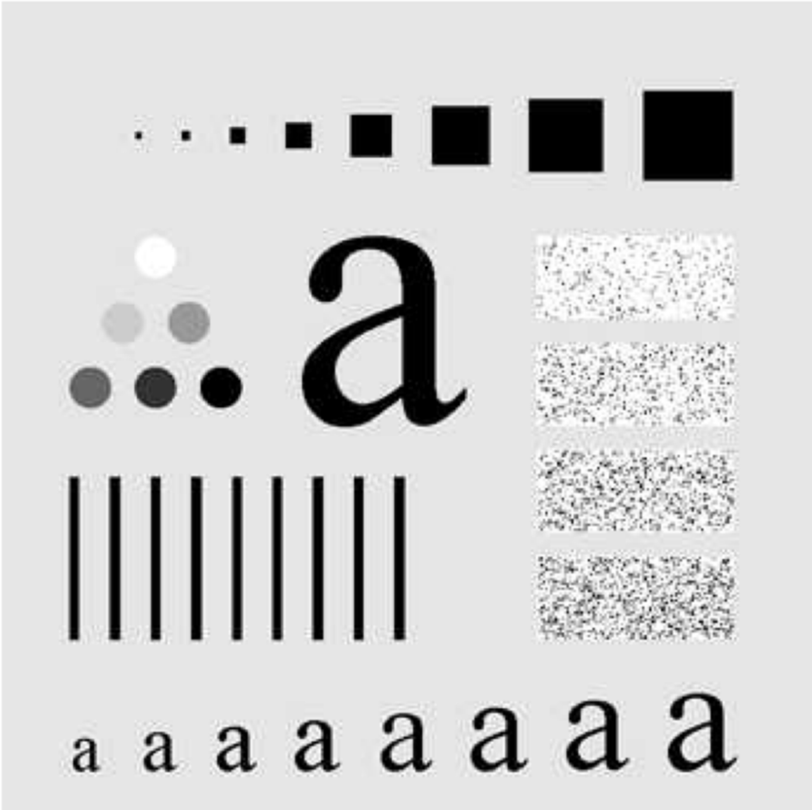
巴特沃斯低通滤波器

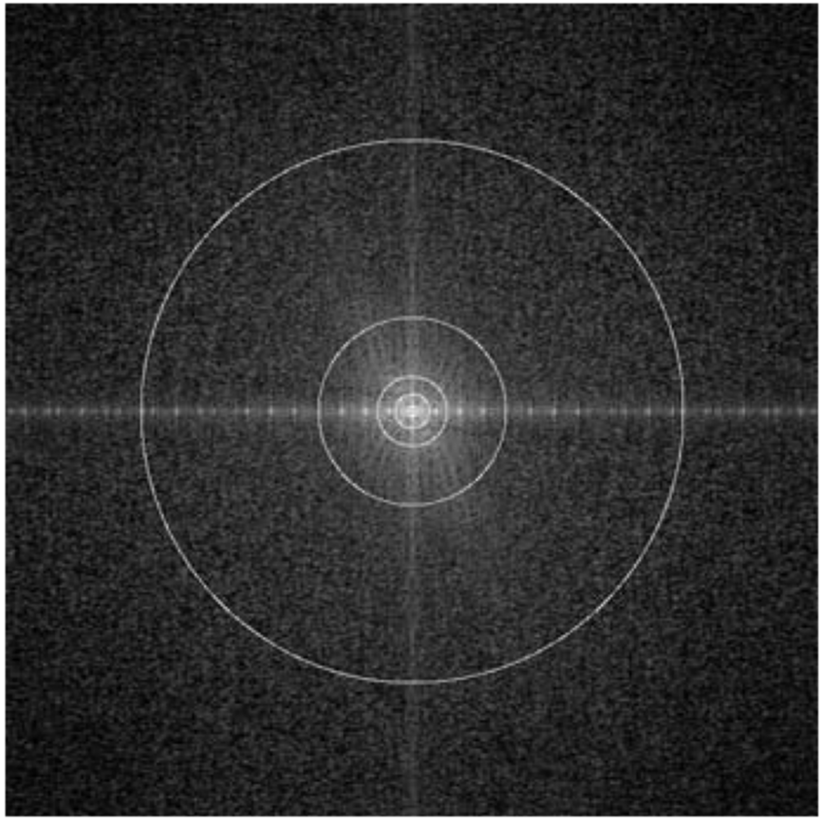
- 图形显示



- 截止频率：$H(u,v)$下降到某个百分比

举例



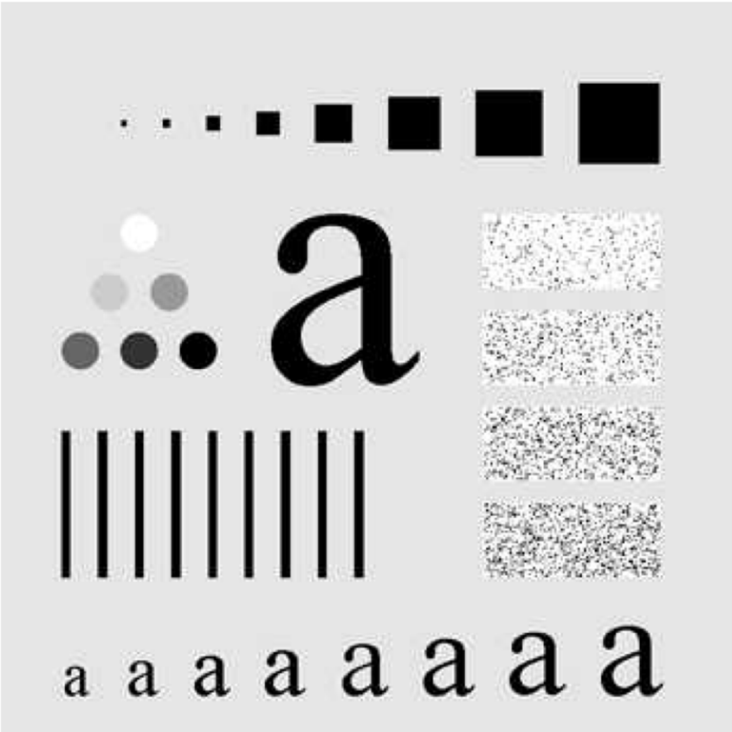


10、30、60、160、460像素宽

87.0%、93.1%、95.7%、97.8%、99.2%的能量

举例

- 利用半径构造巴特沃斯滤波器（$n=2$）

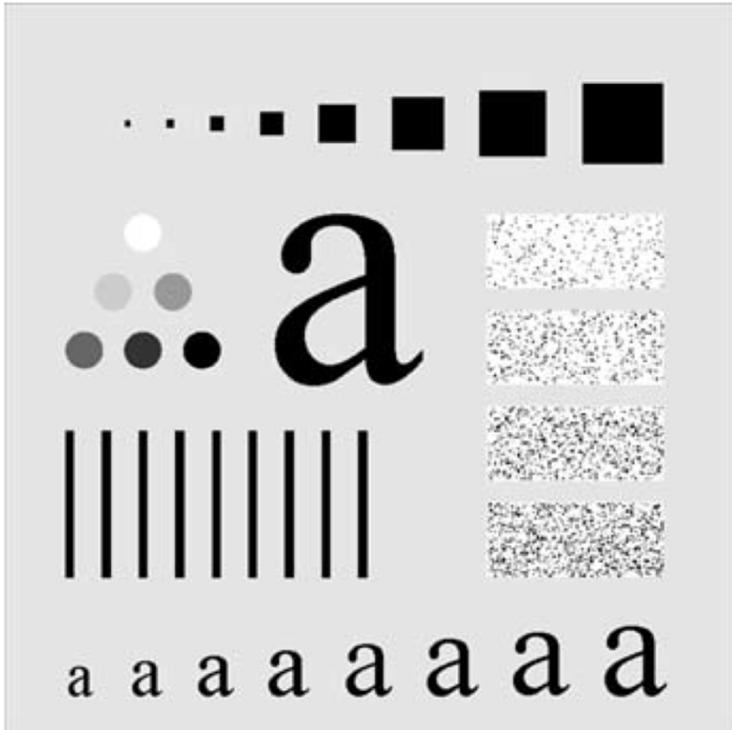


举例

- 没有振铃（ringing）现象

举例

- 没有振铃，越来越清晰

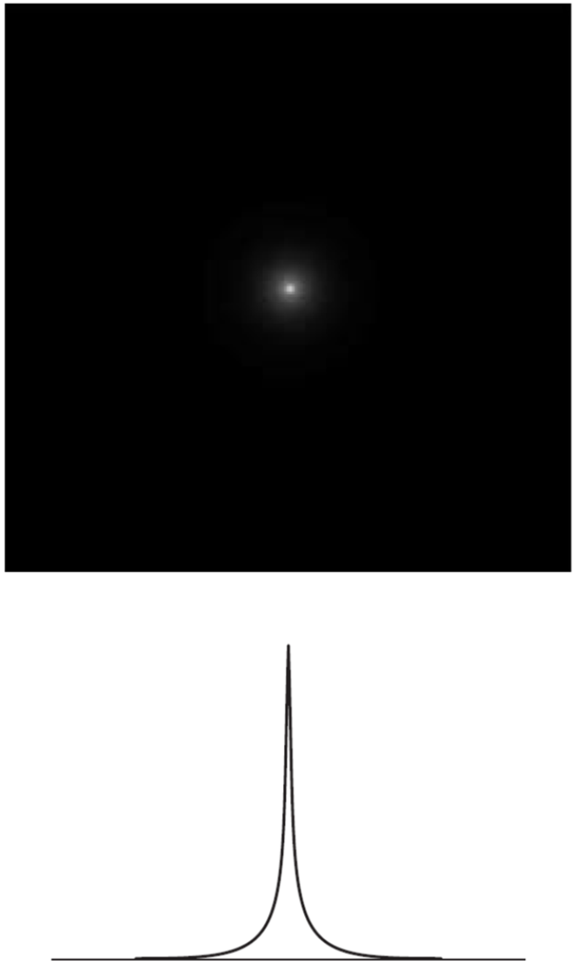


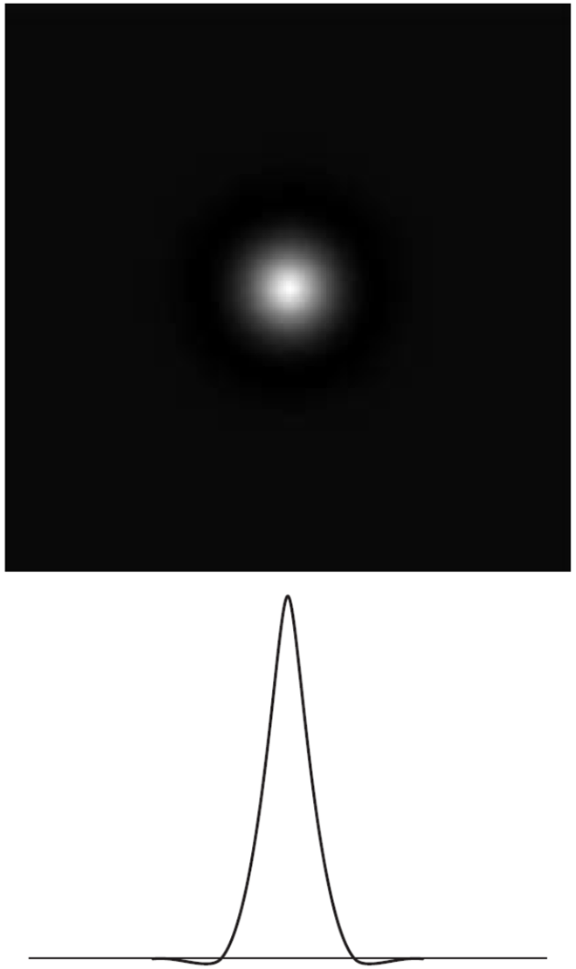
巴特沃斯滤波器的空间表示

$n = 2$，
是比较好
的折中！

- 截止频率为5

$n = 1$



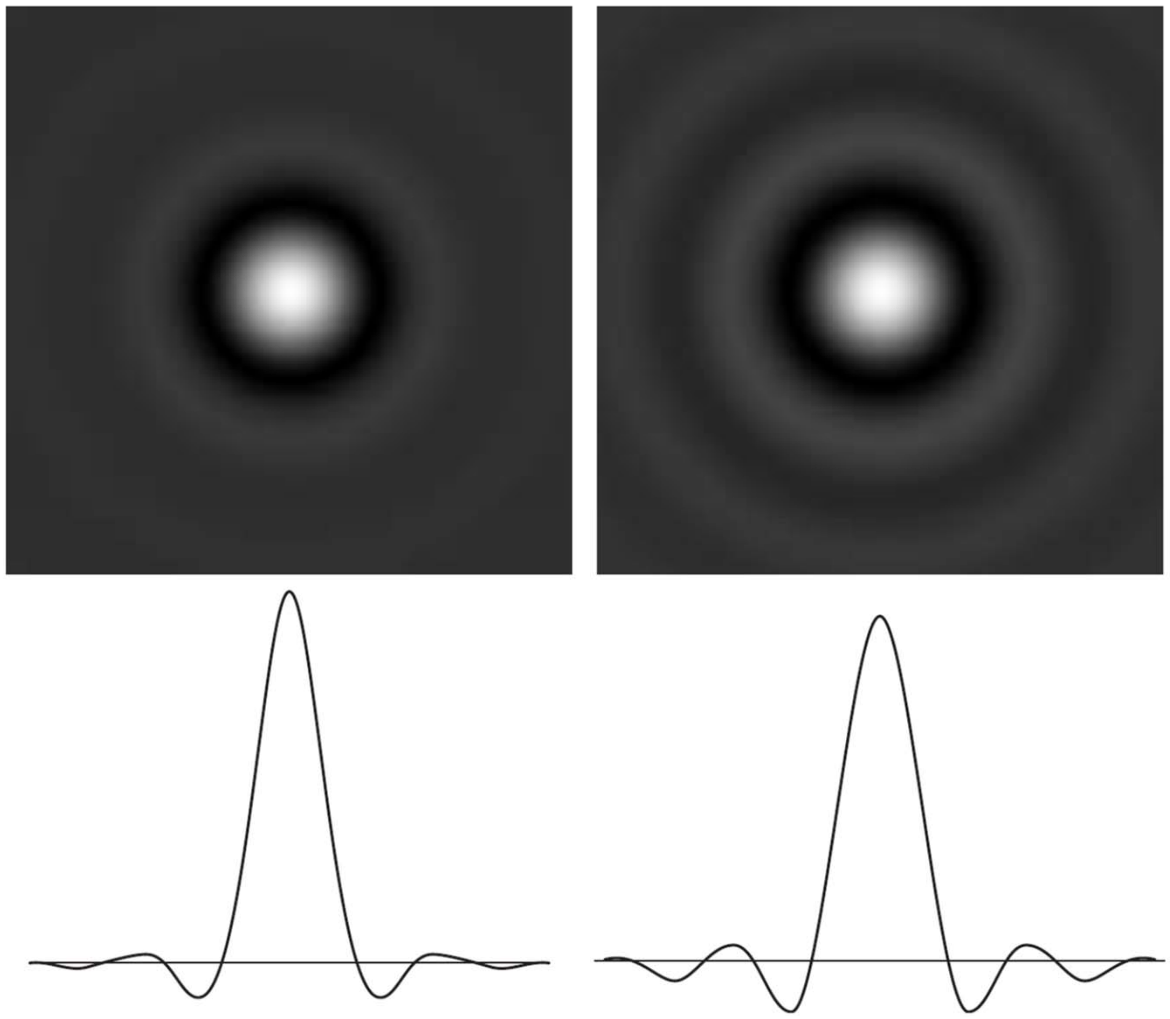


$n = 2$

巴特沃斯滤波器的空间表示

- 截止频率为5

$n = 5$



$n = 20$

提纲

- 频率域滤波
  - 频域率性质
  - 频域率滤波基础
  - 空间和频域率对应关系
- 平滑图像
  - 理想低通滤波器
  - 巴特沃斯低通滤波器
  - 高斯低通滤波器

高斯低通滤波器

- 数学定义

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$$

  - $D(u,v)$为(u,v)到中心的距离

$$D(u,v) = \left[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2\right]^{1/2}$$

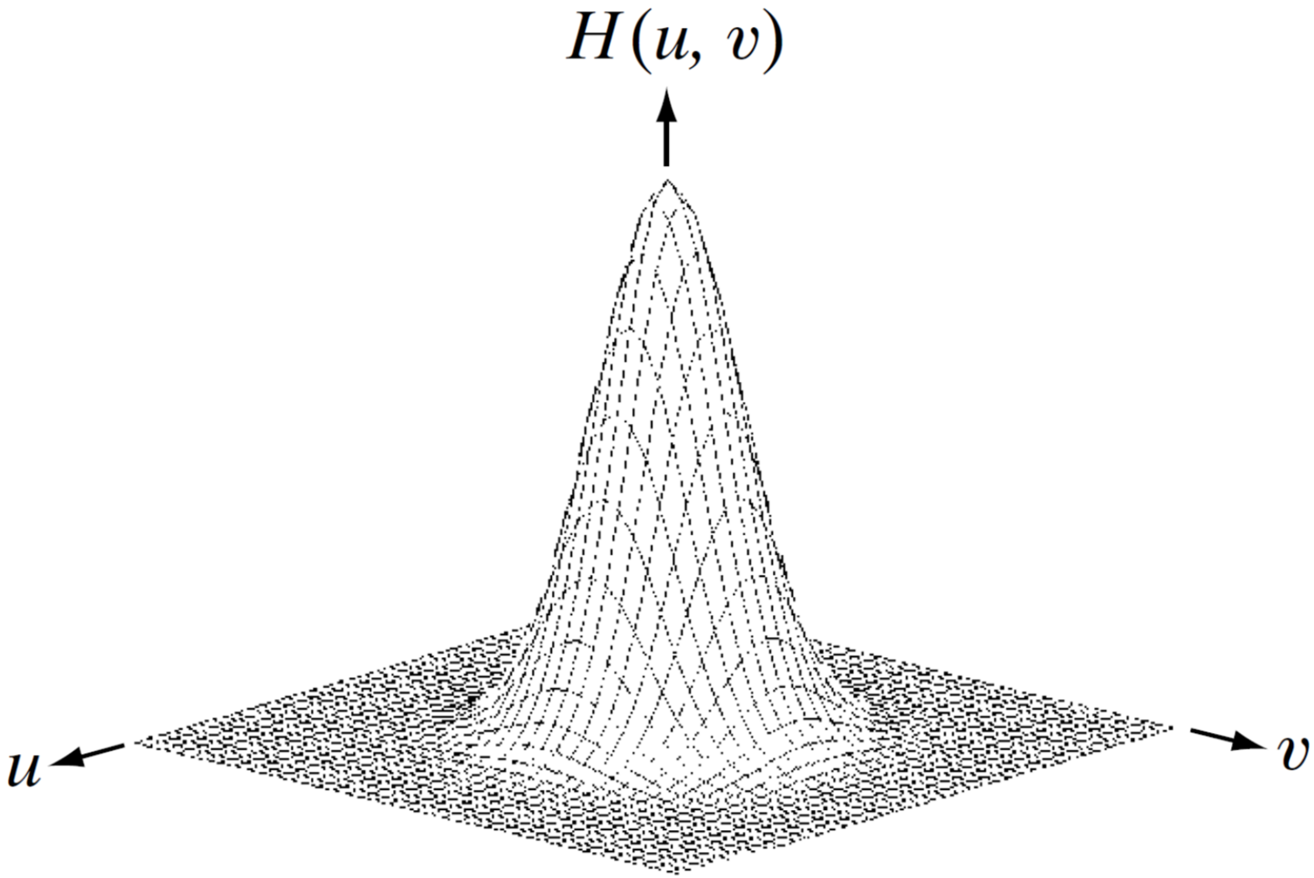
- 令$\sigma = D_0$

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

  - D_0为截止频率
  - 当$D(u,v) = D_0$, $H(u,v) = 0.607$

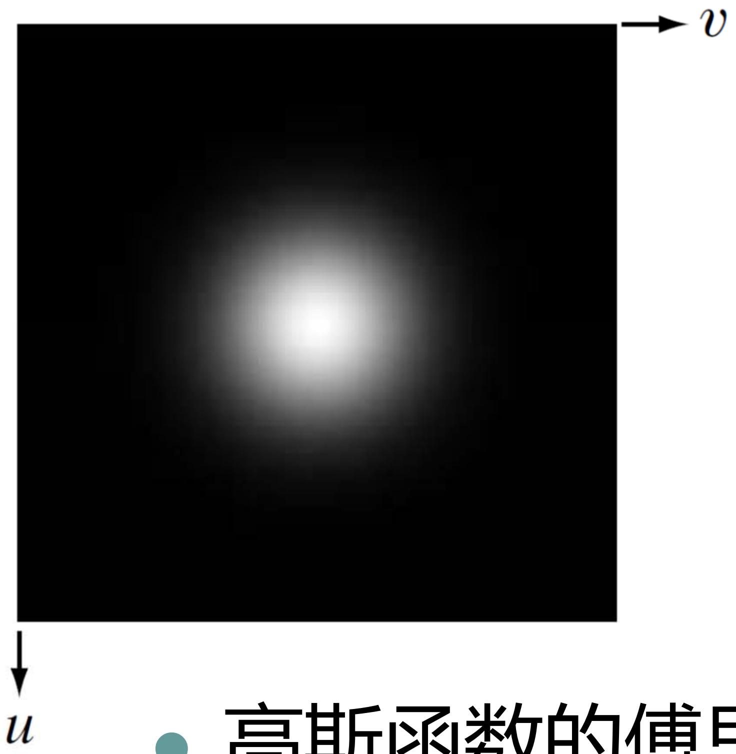
高斯低通滤波器

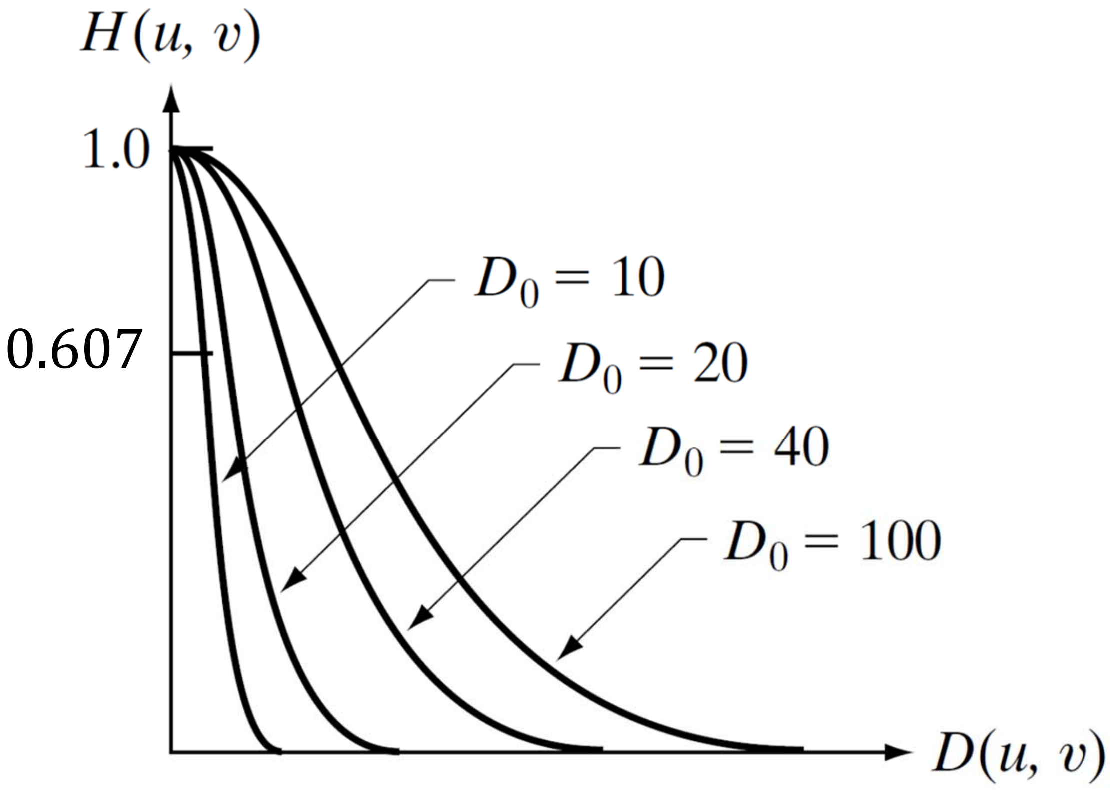
- 透视图



高斯低通滤波器

- 图形显示

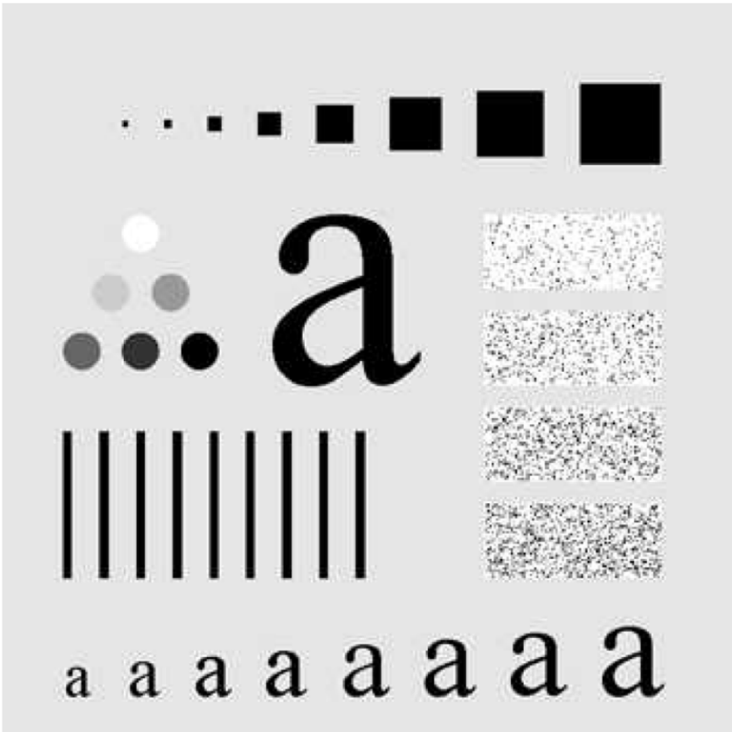




- 高斯函数的傅里叶变换依然是高斯

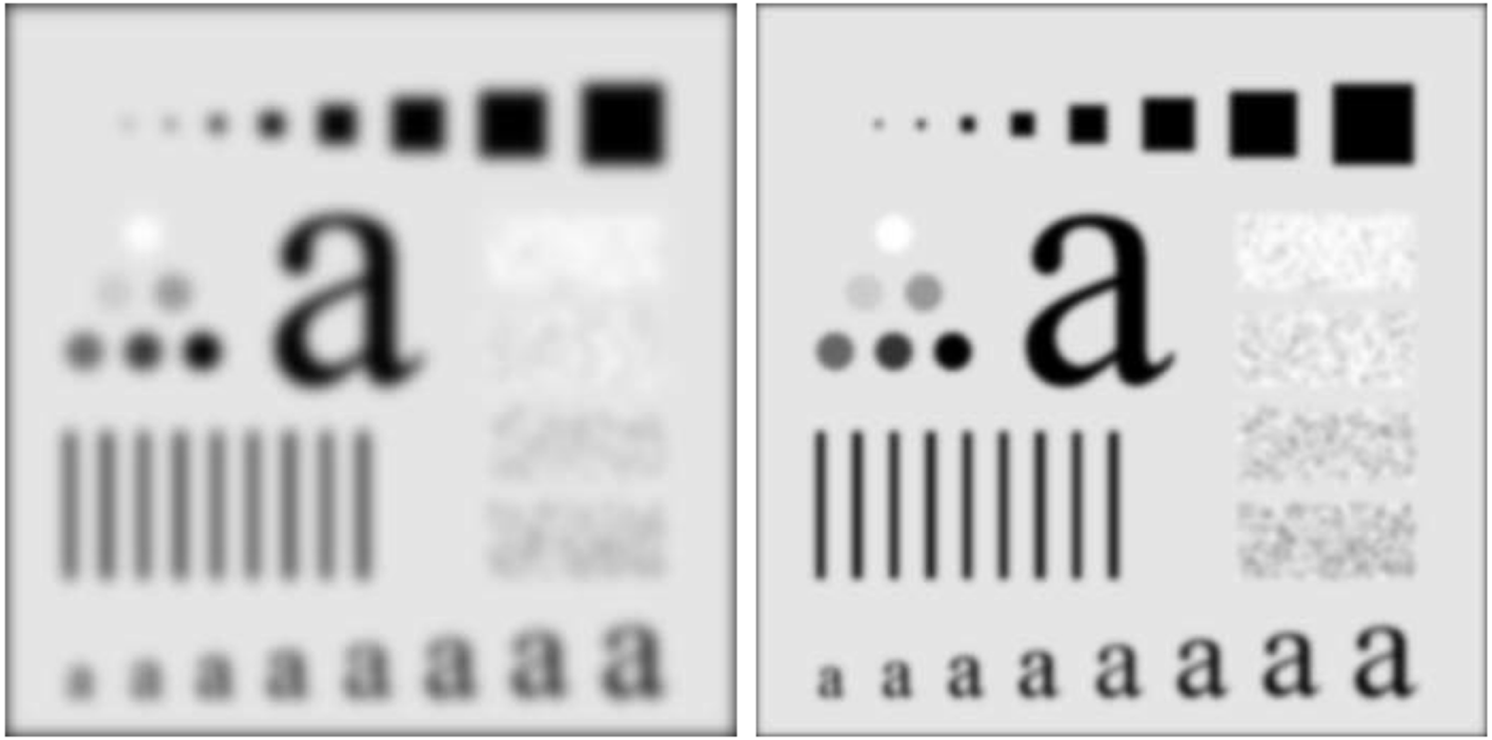
举例

- 利用半径构造高斯低通滤波器

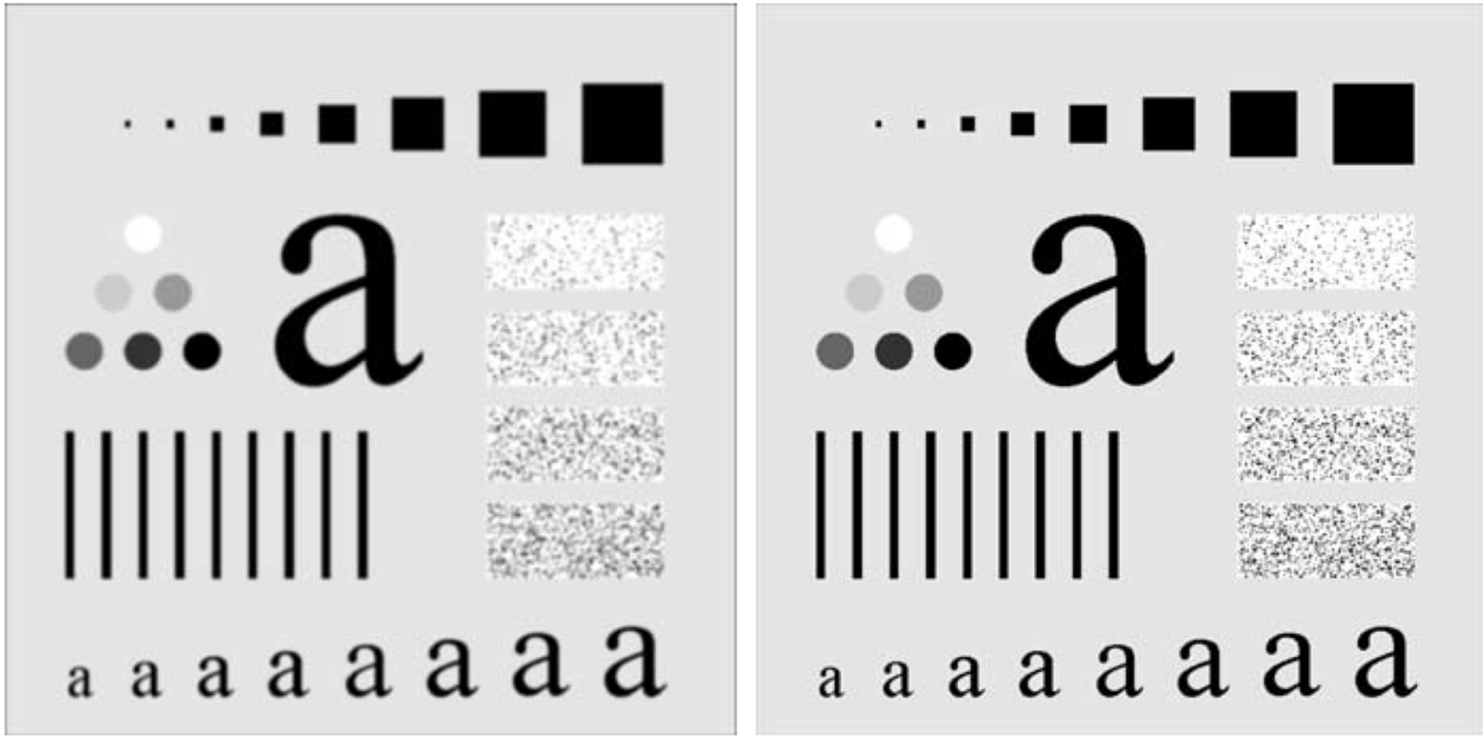
举例

- 没有振铃（ringing）现象



举例

- 没有振铃，越来越清晰



对比

- 巴特沃斯低通滤波器更模糊

巴特沃斯低通滤波器（$n=2$）

高斯低通滤波器

低通滤波器对比

- 理想低通滤波器

$$H(u,v)=\begin{cases}1 & \text{if } D(u,v)\le D_0\\ 0 & \text{if } D(u,v)>D_0\end{cases}$$

- 巴特沃斯低通滤波器

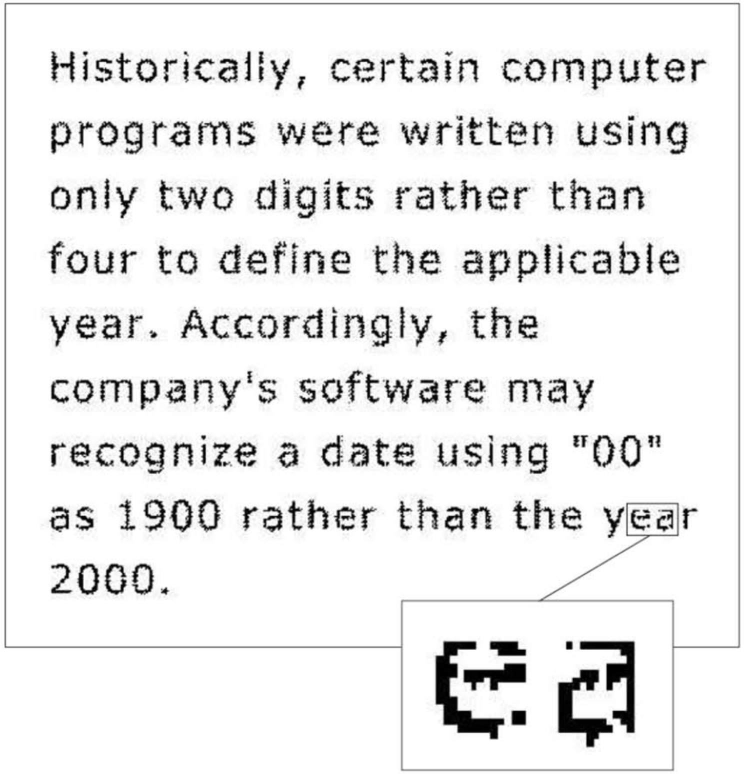
$$H(u,v)=\frac{1}{1+[D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

- 高斯低通滤波器

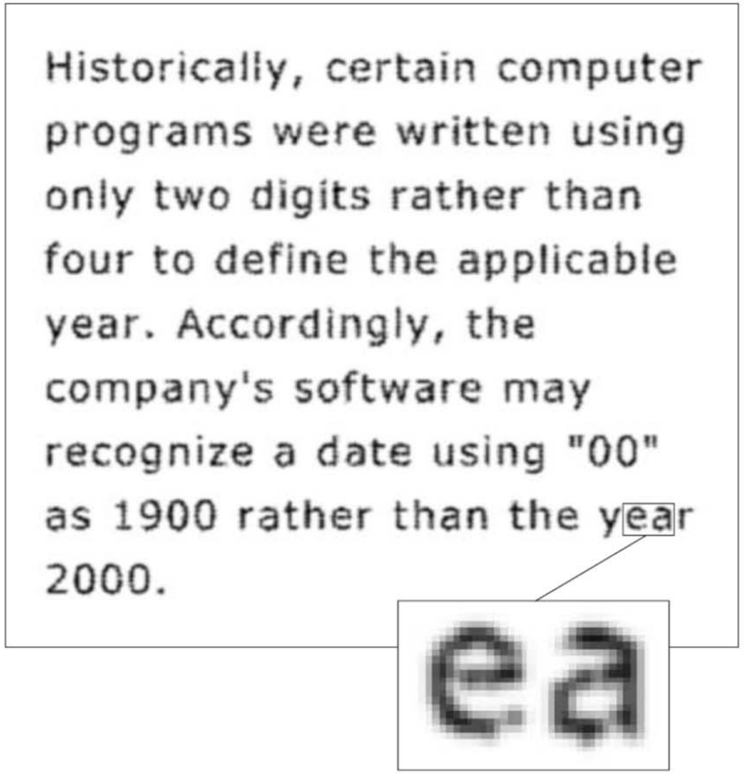
$$H(u,v)=e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

应用——字符识别

- 字符不清晰、断裂，低通滤波器修复



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

高斯低通滤波器($D_0 = 80$)

应用——印刷

课程作业！

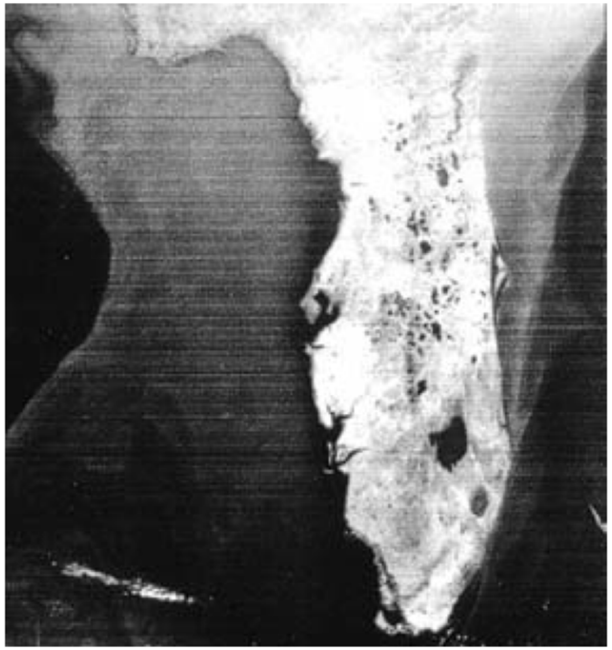
- 图片美容

高斯低通滤波器($D_0 = 100$)

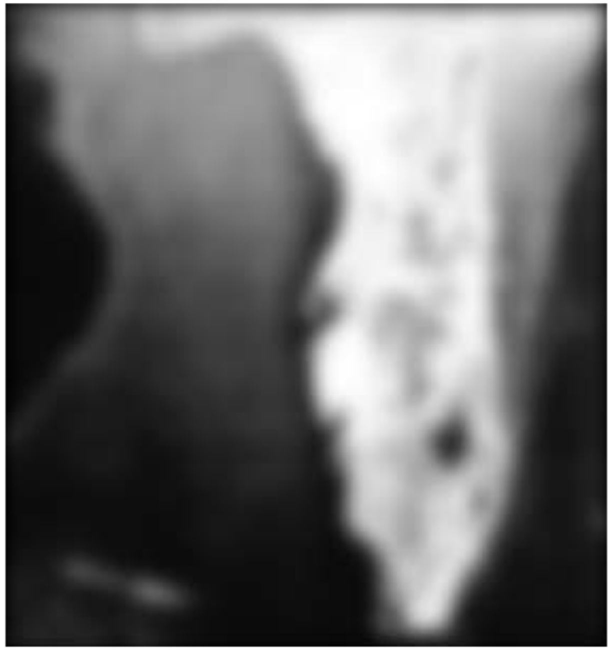
高斯低通滤波器($D_0 = 80$)

应用——卫星图片

- 去掉横线、去掉细节



高斯低通滤波器($D_0 = 50$)



高斯低通滤波器($D_0 = 20$)

下一讲