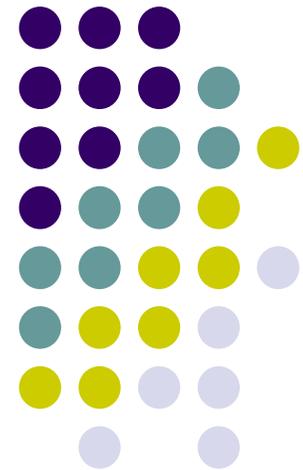


数字图像处理

第九讲

频率域图像增强 (Part IV)
锐化图像、选择性滤波、实现



提纲



- 锐化图像
 - 理想高通、巴特沃斯、高斯高通滤波器
 - 频率域拉普拉斯算子
 - 频率域非锐化掩蔽
 - 同态滤波
- 选择性滤波
 - 带阻滤波器、带通滤波器
 - 陷波滤波器
- 实现



锐化图像

- 傅里叶变换的低频部分
 - 灰度缓慢变化的地方
 - 墙、地板、天空
- 傅里叶变换的高频成分
 - 灰度剧烈变化的地方
 - 边缘、噪声
- 高通滤波器
 - 通过高频
 - 衰减低频

提纲

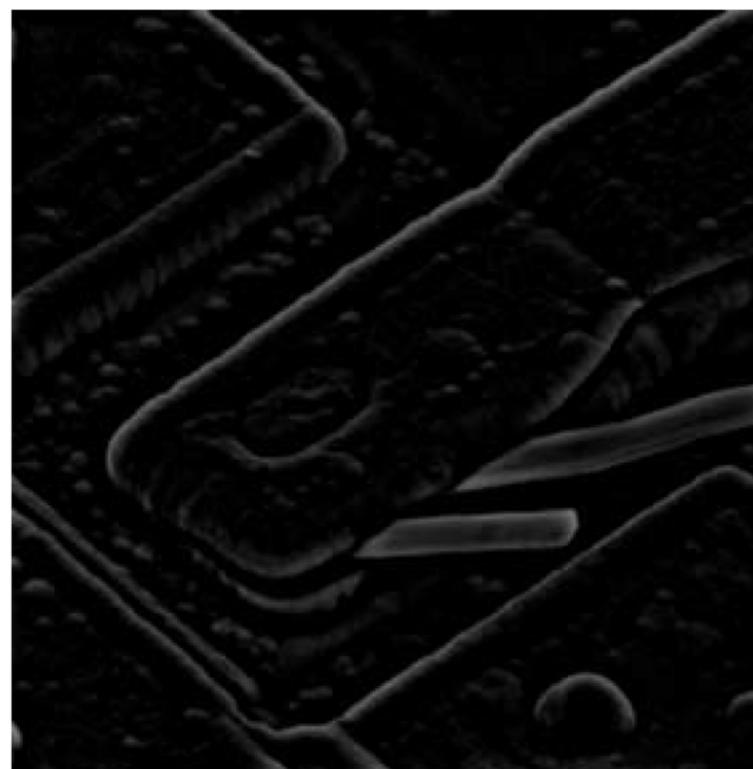
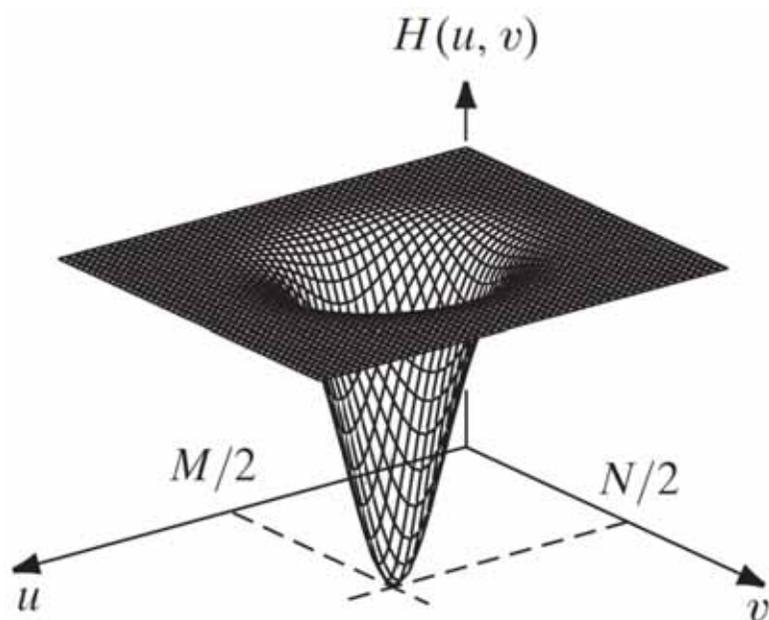


- 锐化图像
 - 理想高通、巴特沃斯、高斯高通滤波器
 - 频率域拉普拉斯算子
 - 频率域非锐化掩蔽
 - 同态滤波
- 选择性滤波
 - 带阻滤波器、带通滤波器
 - 陷波滤波器
- 实现

高通滤波器



- 衰减低频而通过高频，强化细节



- 高频对应于图像中剧烈变化的灰度

高通滤波器



- 从低通滤波器构造高通滤波器

$$H_{\text{HP}}(u, v) = 1 - H_{\text{LP}}(u, v)$$

- $H_{\text{LP}}(u, v)$ 是高通滤波器
- 理想高通滤波器
- 巴特沃斯高通滤波器
- 高斯高通滤波器



理想高通滤波器

- 数学定义

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

- D_0 为某常数
- $D(u, v)$ 为 (u, v) 到中心的距离

$$D(u, v) = \left[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2 \right]^{1/2}$$

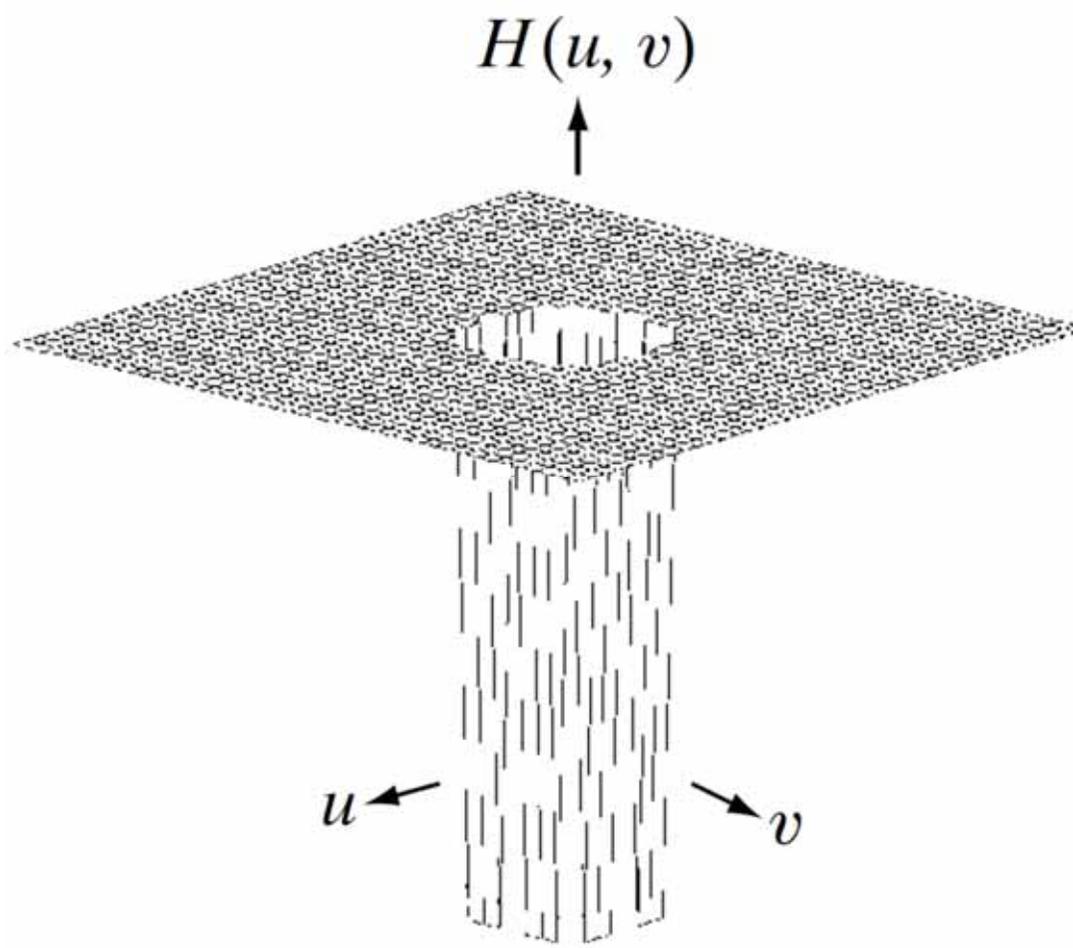
- 理想

- 低频完全抑制
- 高频完全保留

理想高通滤波器



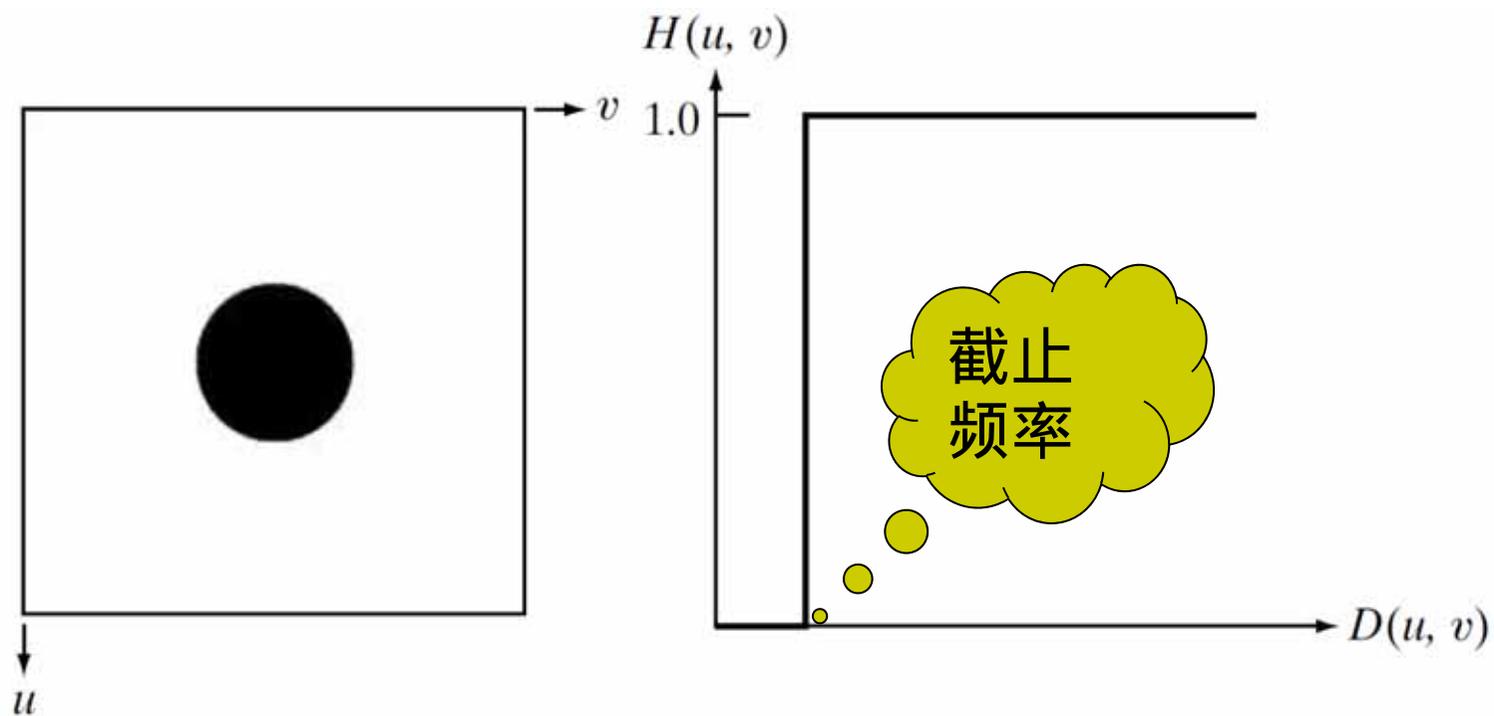
- 透视图



理想高通滤波器



- 图形显示

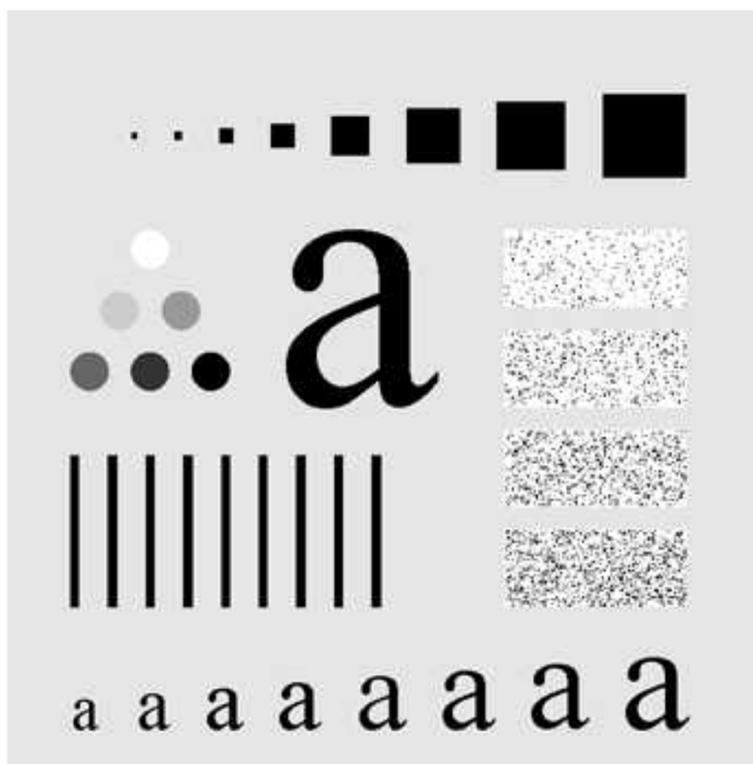


- 硬件无法实现

截面

举例

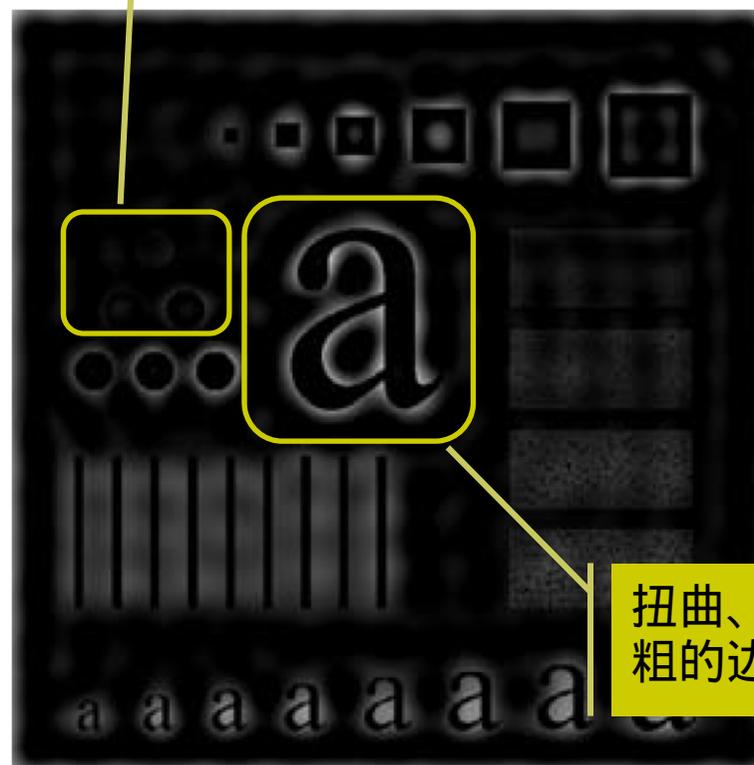
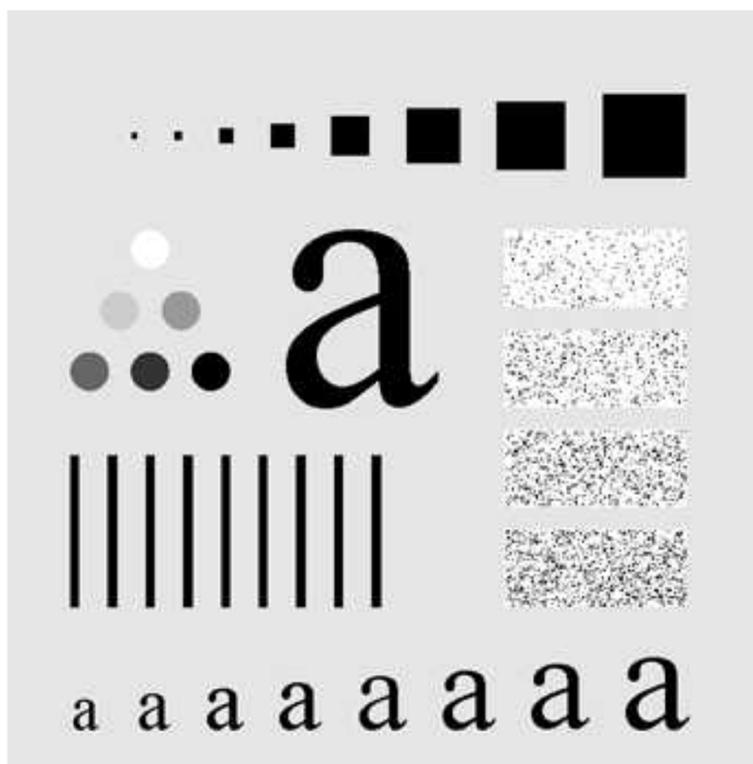
- 产生了振铃现象



$D_0 = 30$ 的高通滤波

举例

- 产生了振铃现象



三个圆圈的边缘不明显

扭曲、加粗的边界

$D_0 = 30$ 的高通滤波



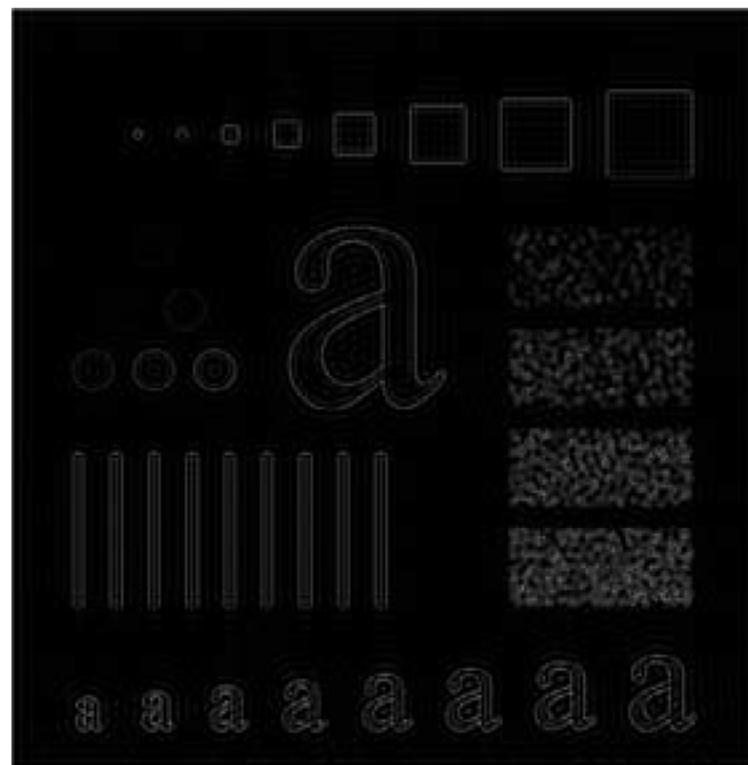
举例



- 振铃有所缓解



$D_0 = 60$ 的高通滤波



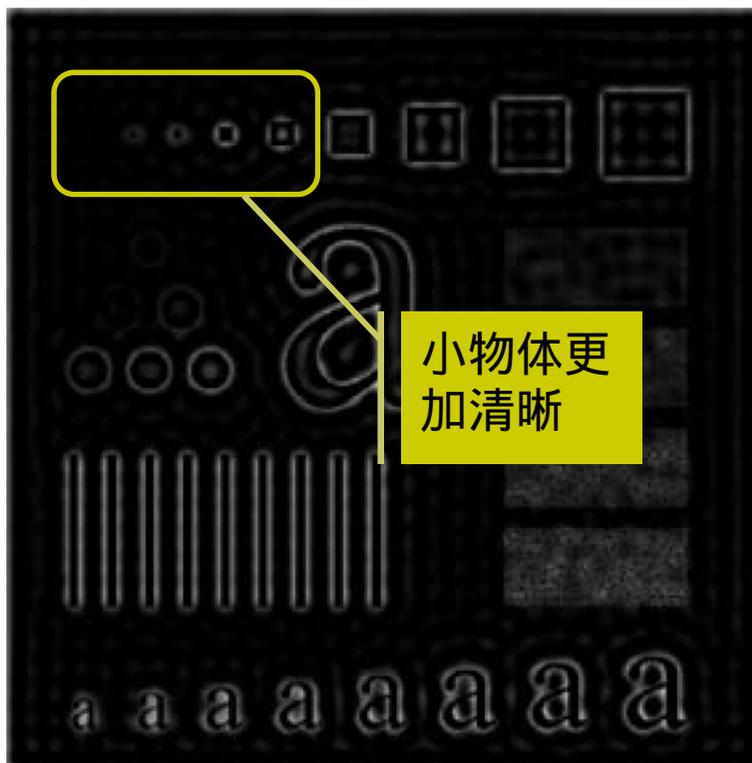
$D_0 = 160$ 的高通滤波

举例

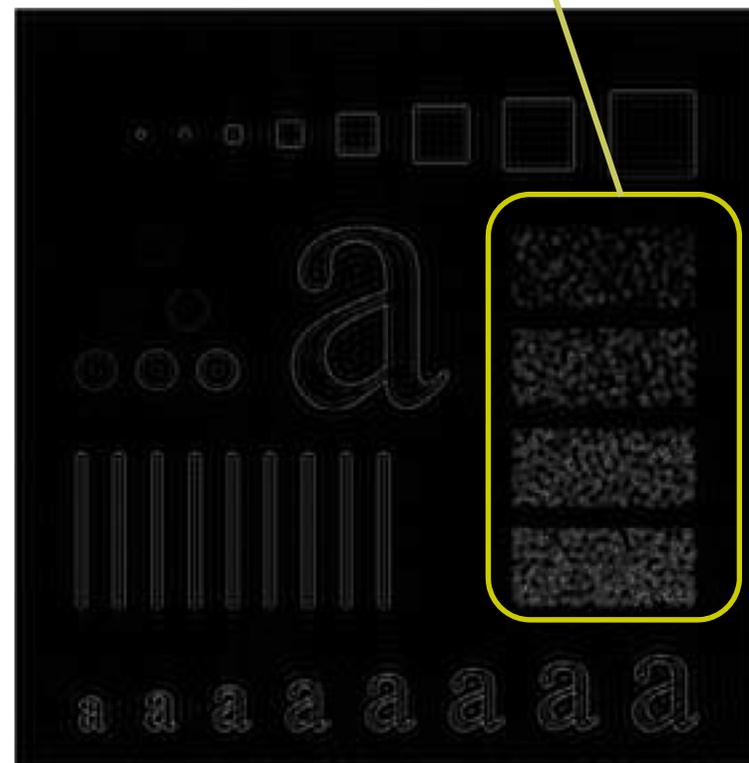
- 振铃有所缓解



细节更加明显



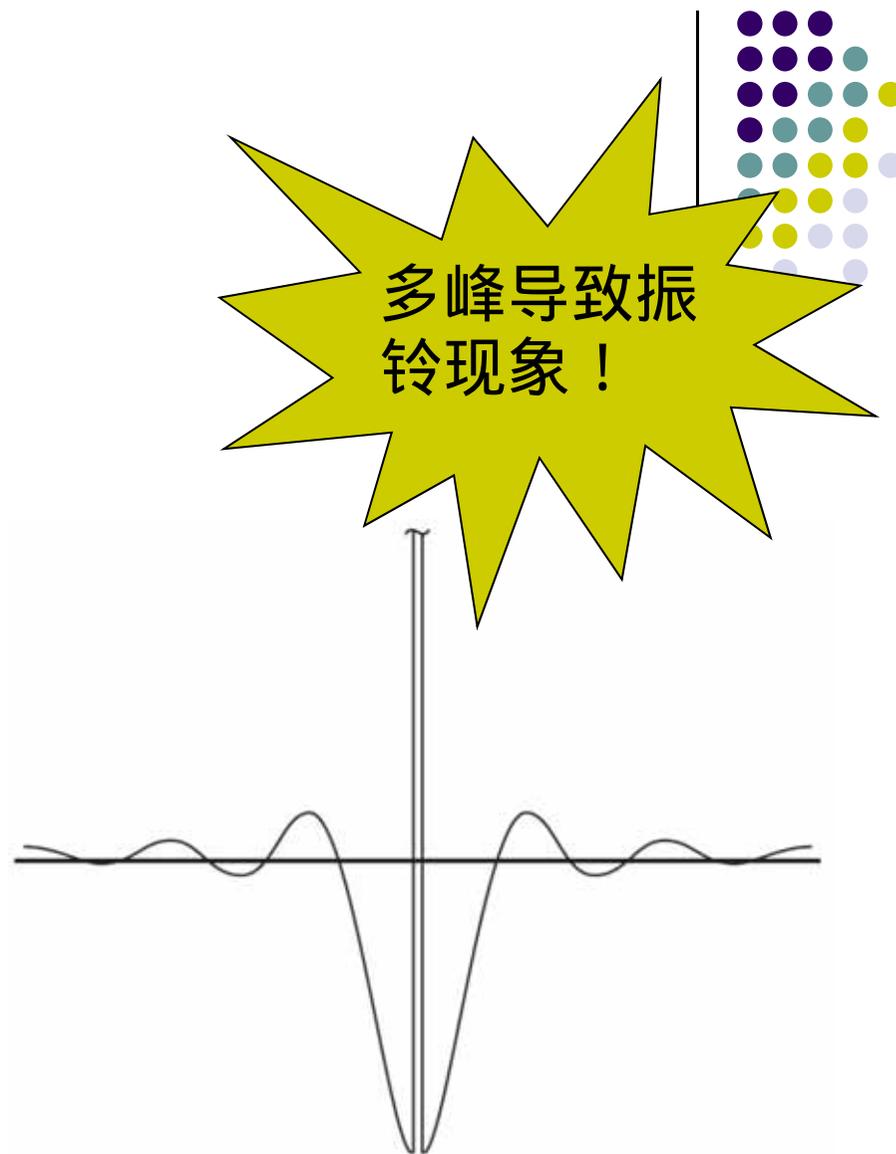
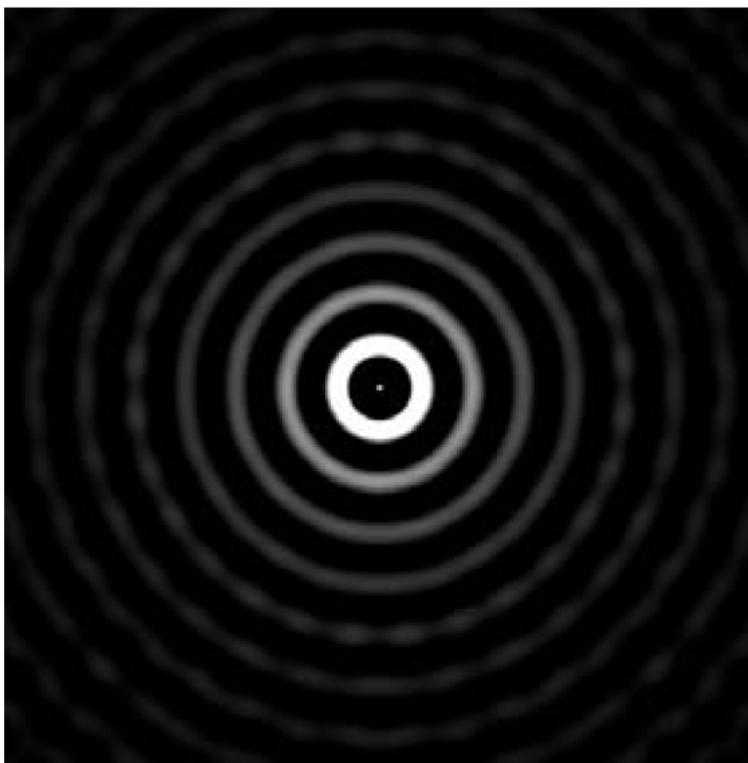
$D_0 = 60$ 的高通滤波



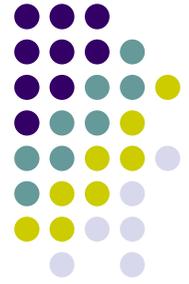
$D_0 = 160$ 的高通滤波

理想高通滤波器

- 空间表示



巴特沃斯高通滤波器



- n 阶巴特沃斯 (Butterworth) 高通滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

- $D(u, v)$ 为 (u, v) 到中心的距离

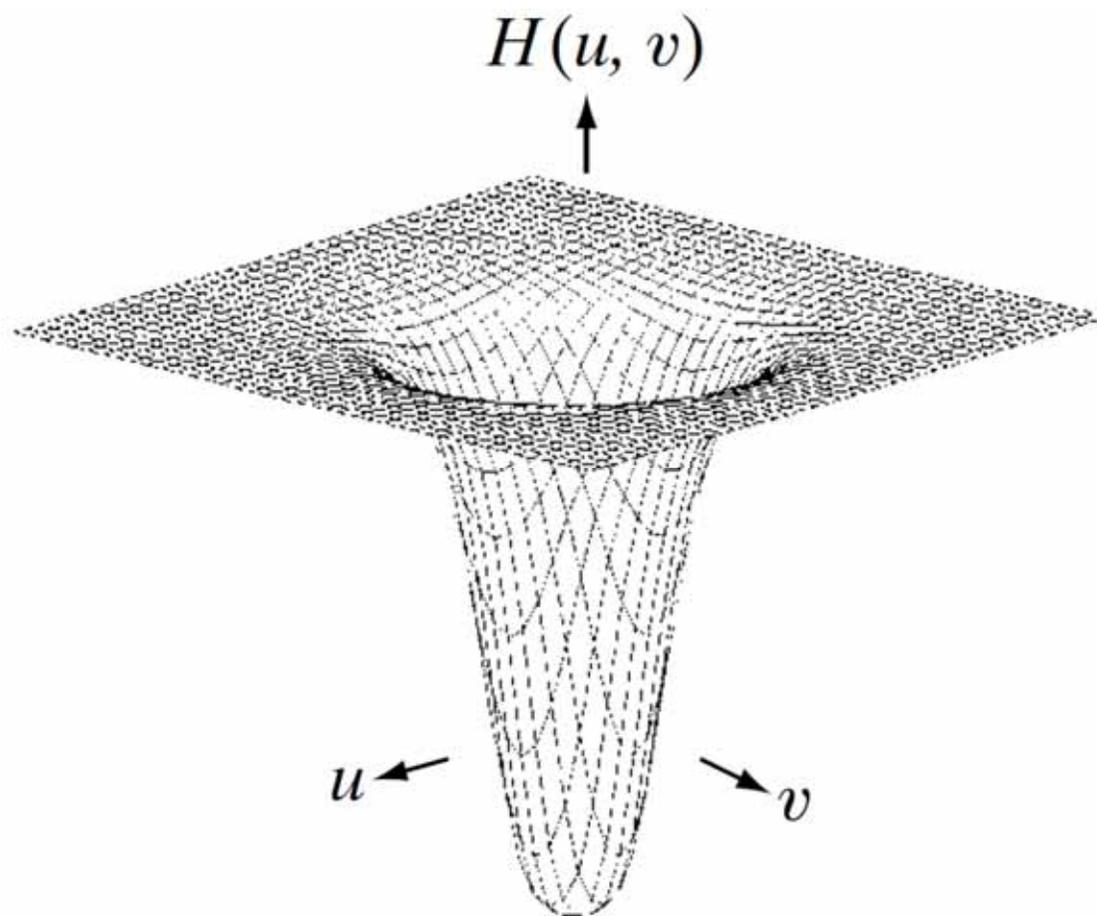
$$D(u, v) = [(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2]^{1/2}$$

- D_0 为截止频率

巴特沃斯高通滤波器



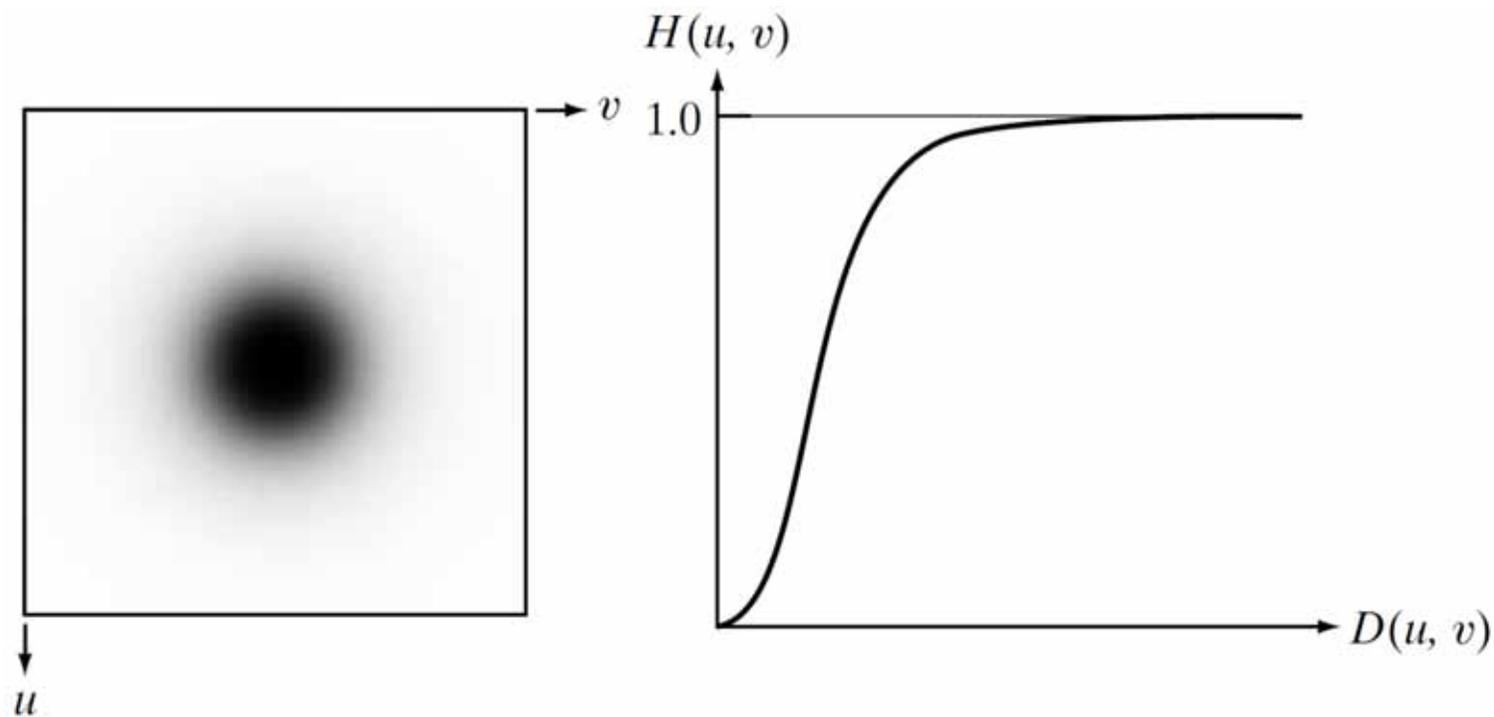
- 透视图



巴特沃斯高通滤波器

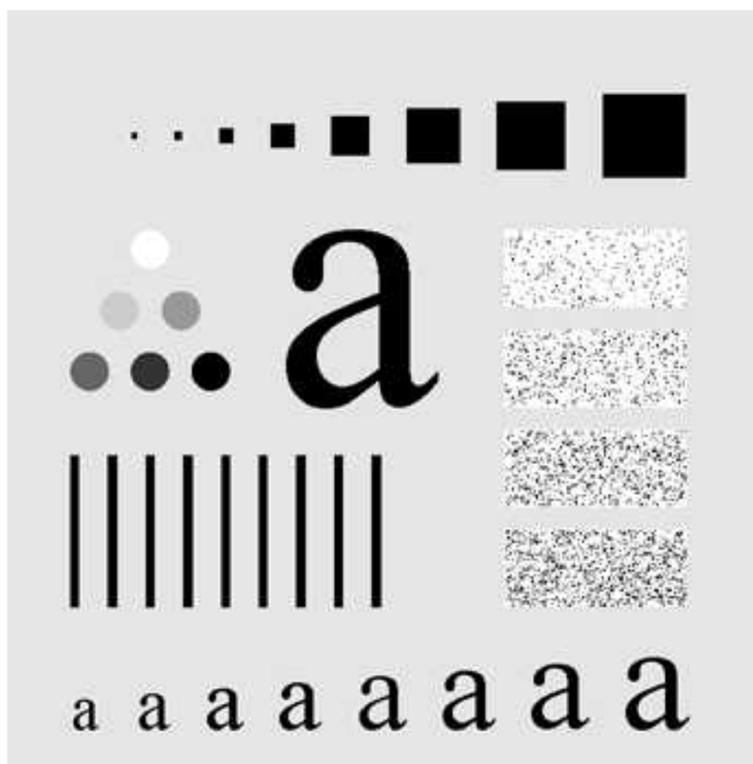


- 图形显示



举例

- 轻微振铃现象



巴特沃斯高通滤波器 $n = 2, D_0 = 30$

举例



- 轻微振铃现象



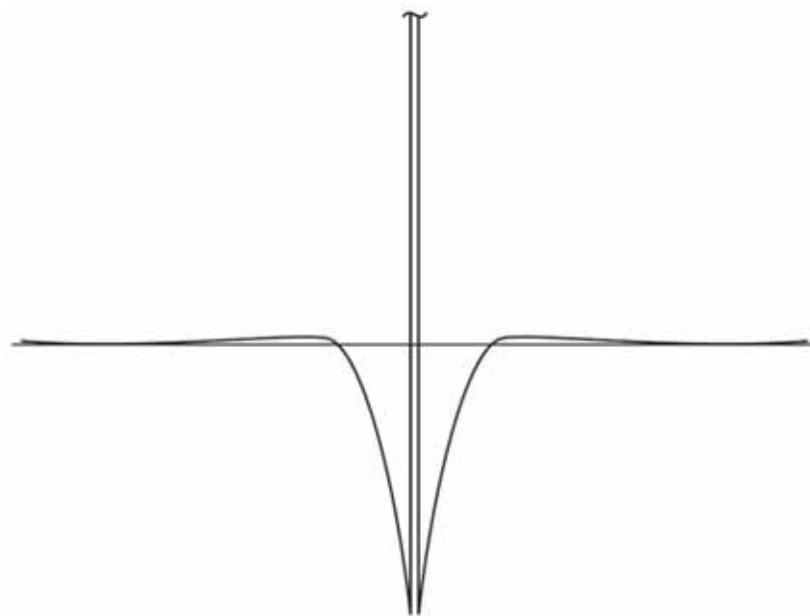
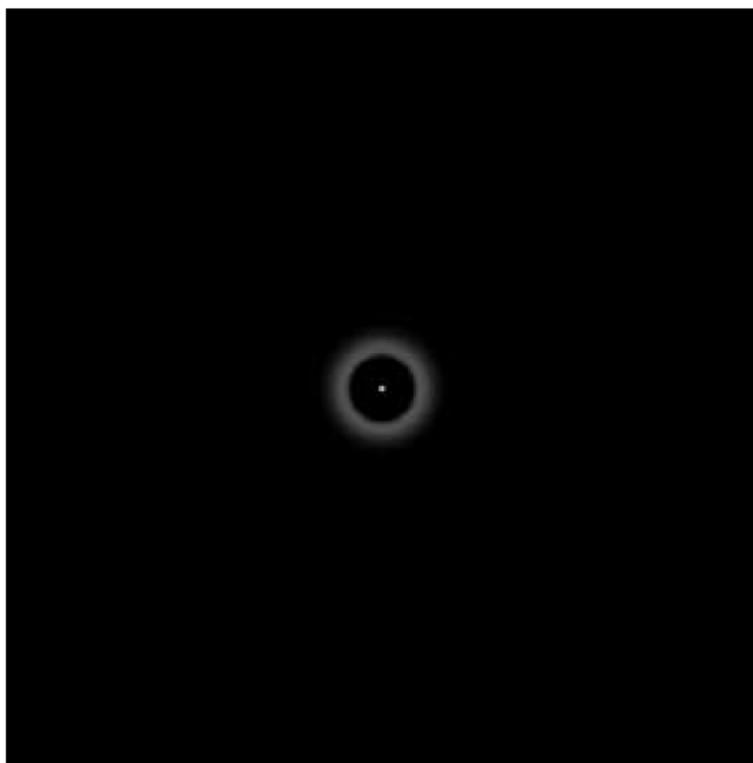
巴特沃斯高通滤波器 $n = 2, D_0 = 60$

巴特沃斯高通滤波器 $n = 2, D_0 = 160$

巴特沃斯高通滤波器



- 空间表示



对比

- $D = 30$



更清晰、失真小



理想高通滤波器



巴特沃斯高通滤波器 $n = 2$

对比

- $D = 60$

对小物体的识别能力相当！



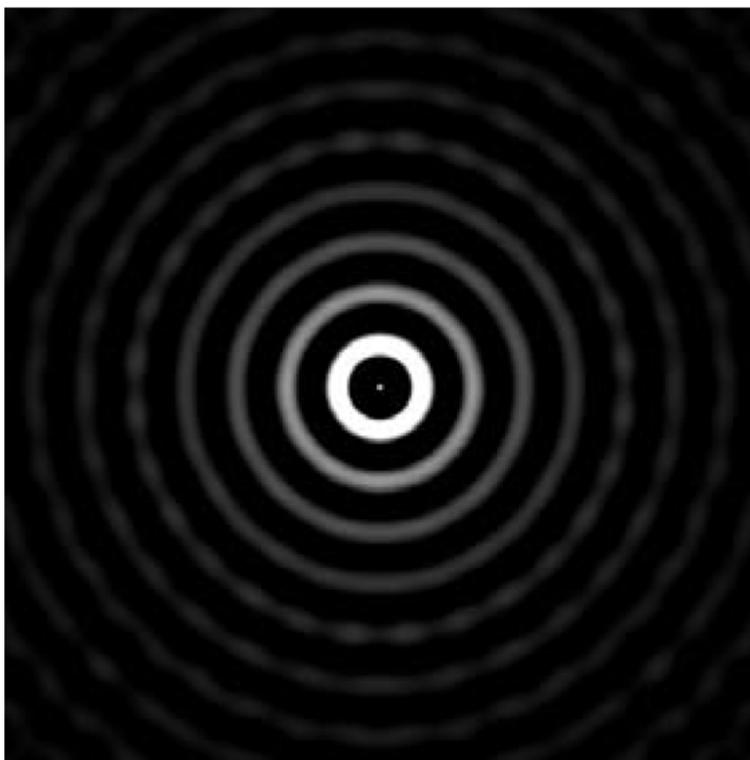
理想高通滤波器



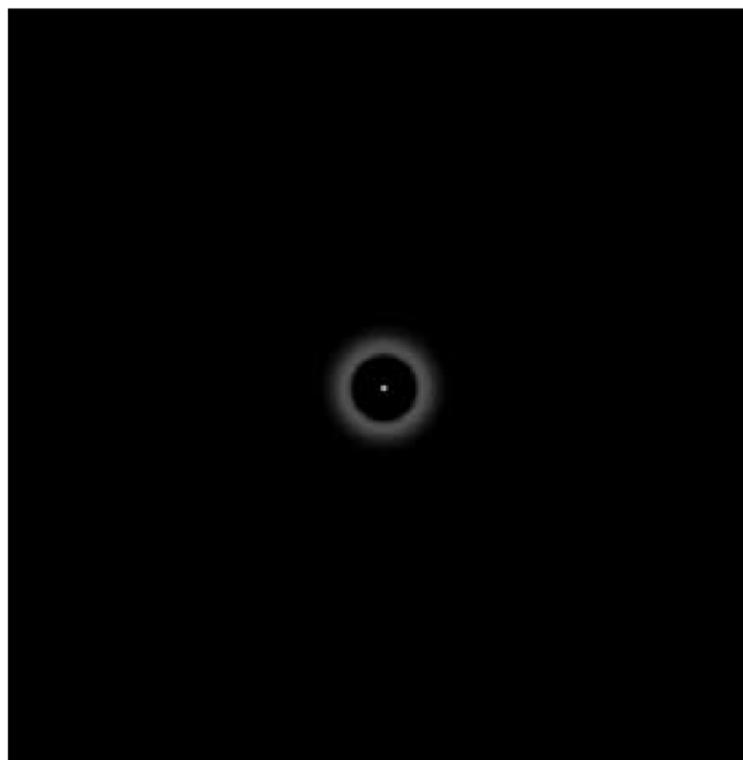
巴特沃斯高通滤波器 $n = 2$

对比

- 空间表示



理想高通滤波器



巴特沃斯高通滤波器 $n = 2$

高斯高通滤波器



- 数学定义

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

- $D(u, v)$ 为 (u, v) 到中心的距离

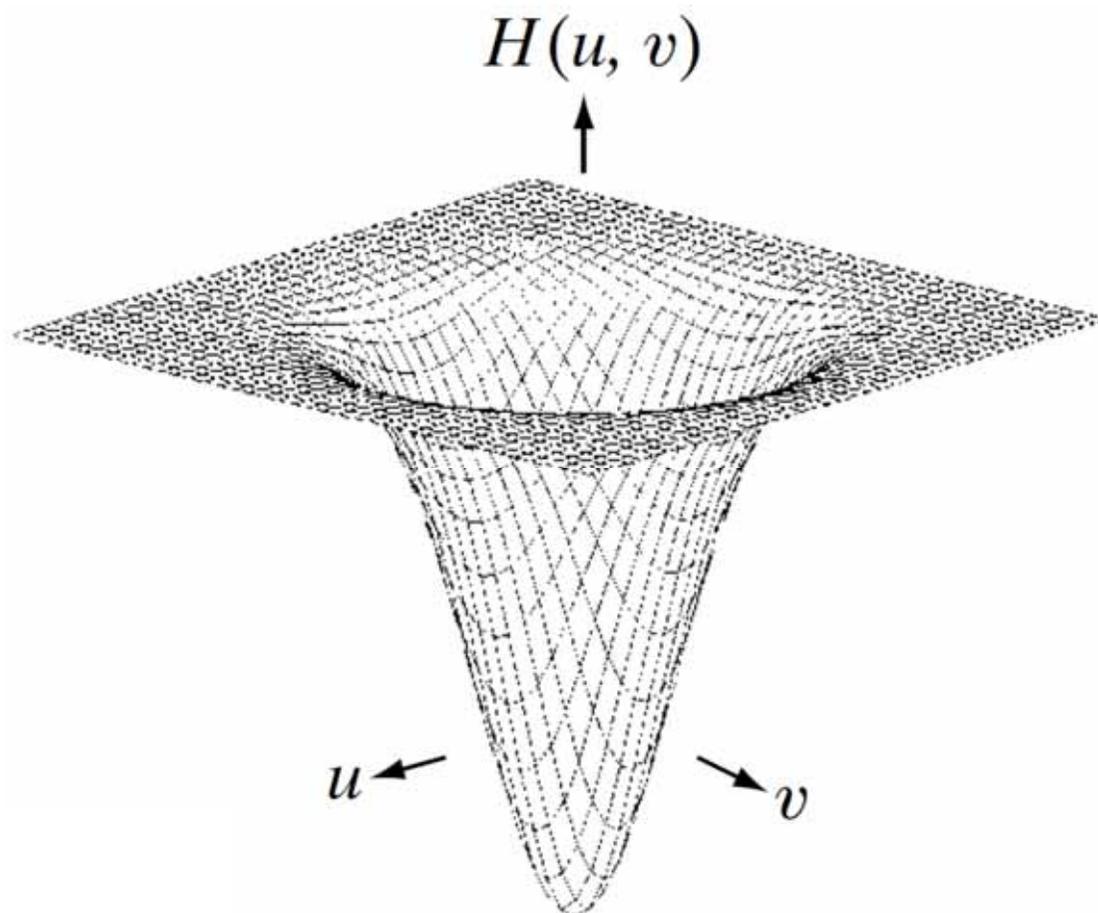
$$D(u, v) = \left[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2 \right]^{1/2}$$

- D_0 为截止频率

高斯高通滤波器



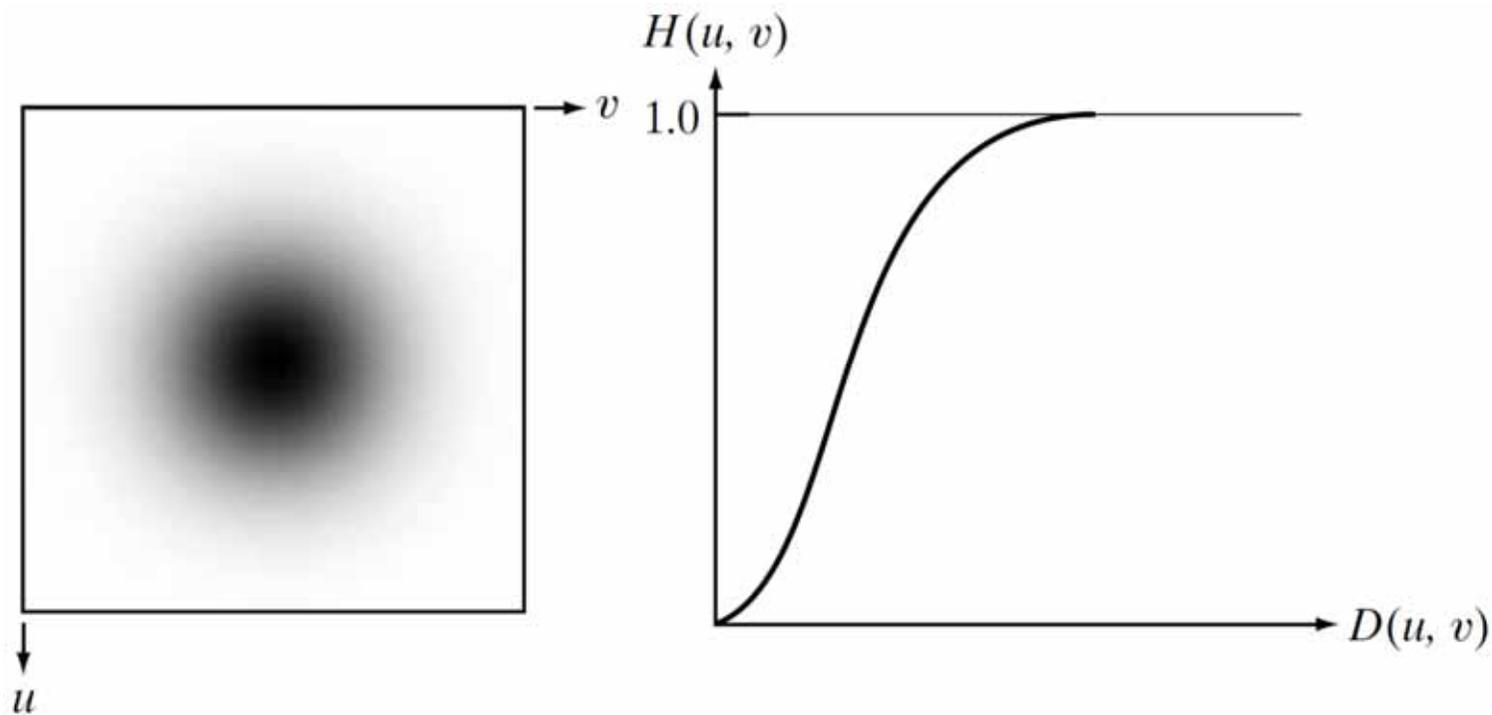
- 透视图



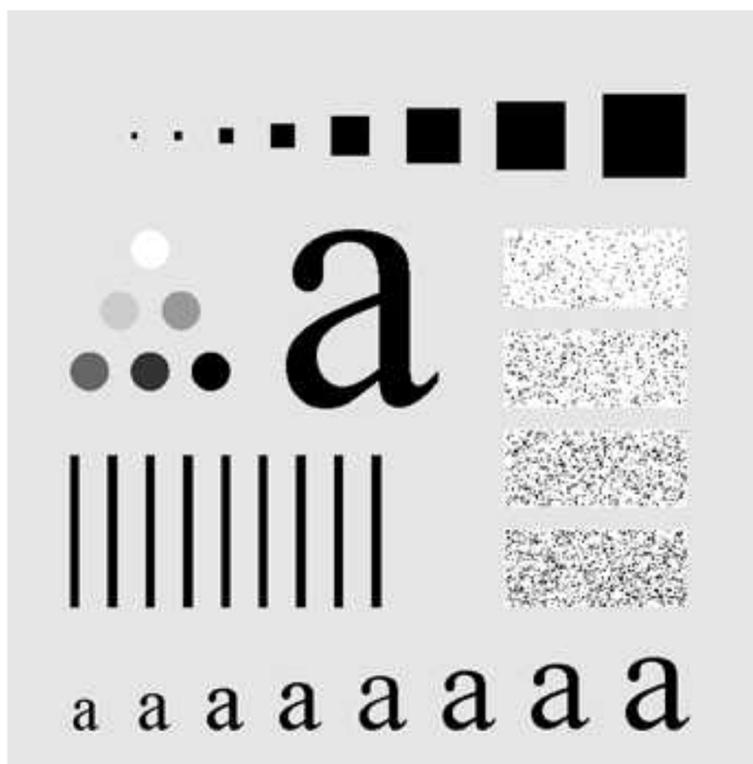
高斯高通滤波器



- 图形显示



举例



$D_0 = 30$ 的高通滤波

举例



$D_0 = 60$ 的高通滤波

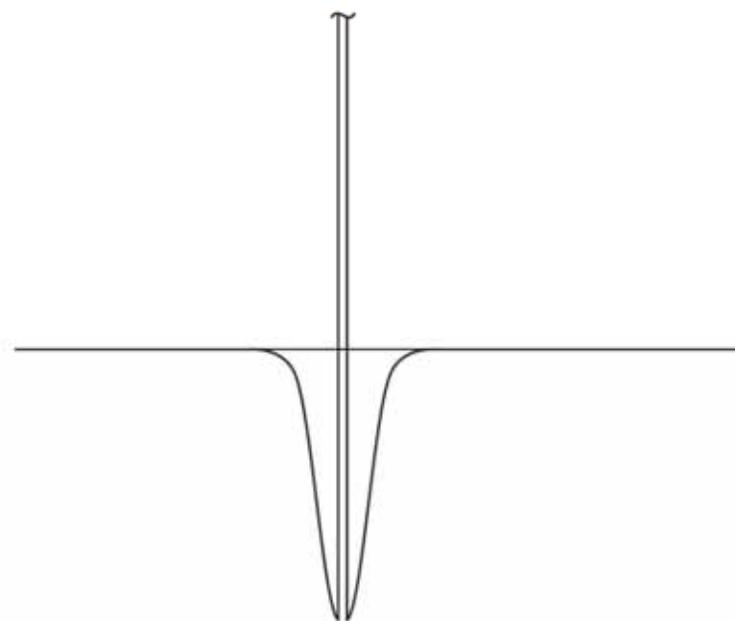
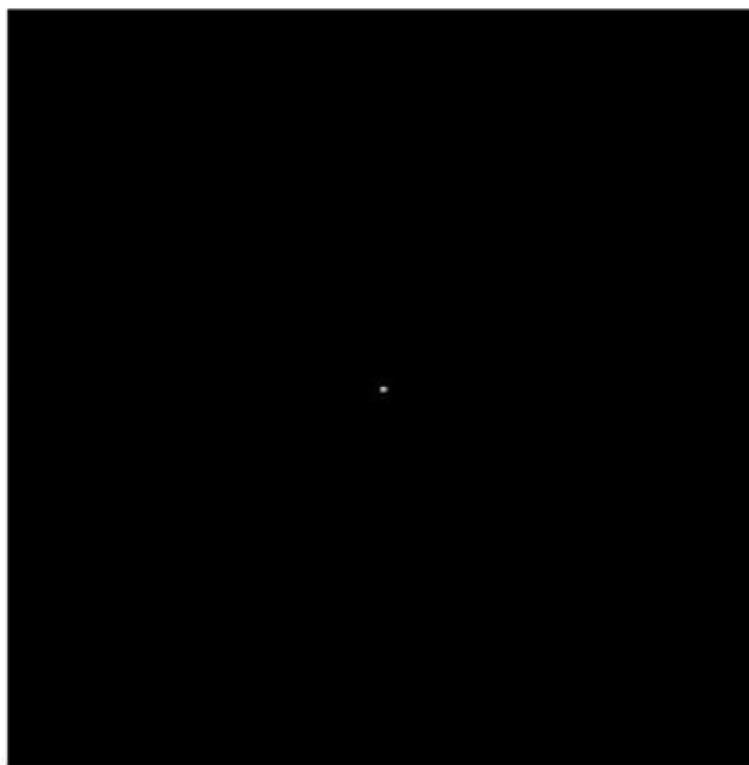


$D_0 = 160$ 的高通滤波

高斯高通滤波器



- 空间表示

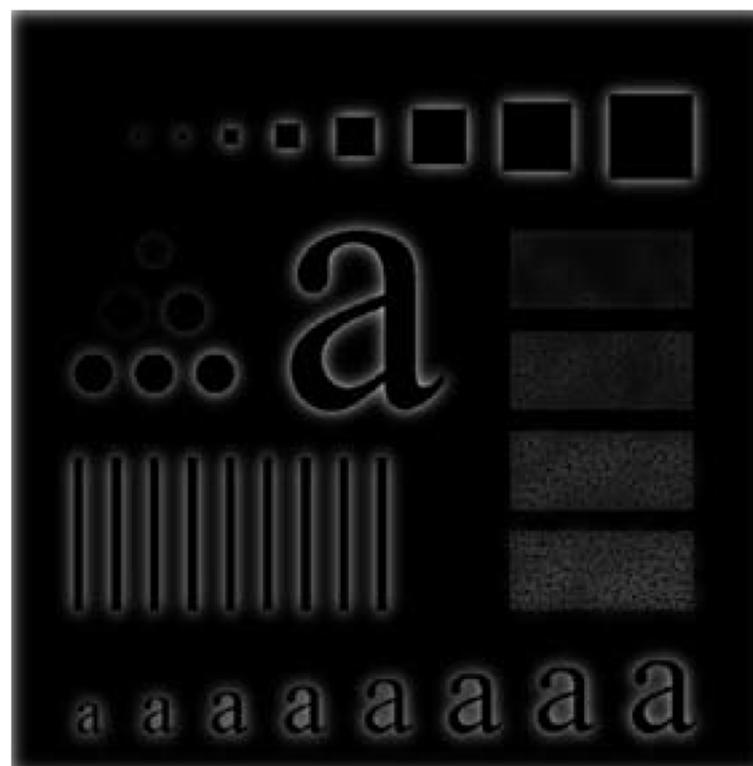


对比

- $D = 30$



巴特沃斯高通滤波器 $n = 2$



高斯高通滤波器

对比



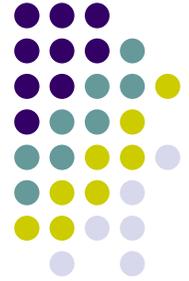
- $D = 60$



巴特沃斯高通滤波器 $n = 2$



高斯高通滤波器



高通滤波器对比

- 理想高通滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

- 巴特沃斯高通滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

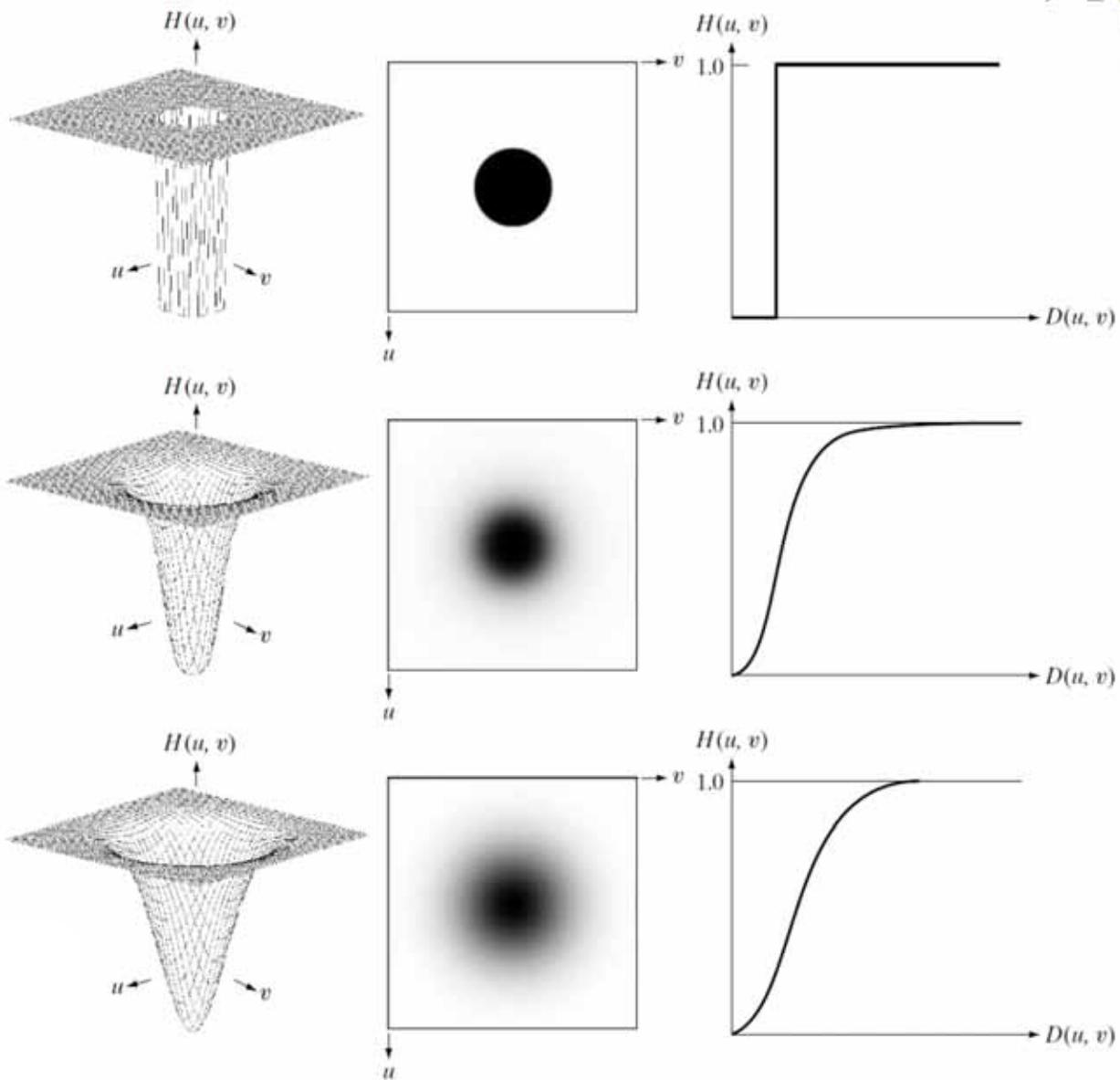
- 高斯高通滤波器

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

高通滤波器对比



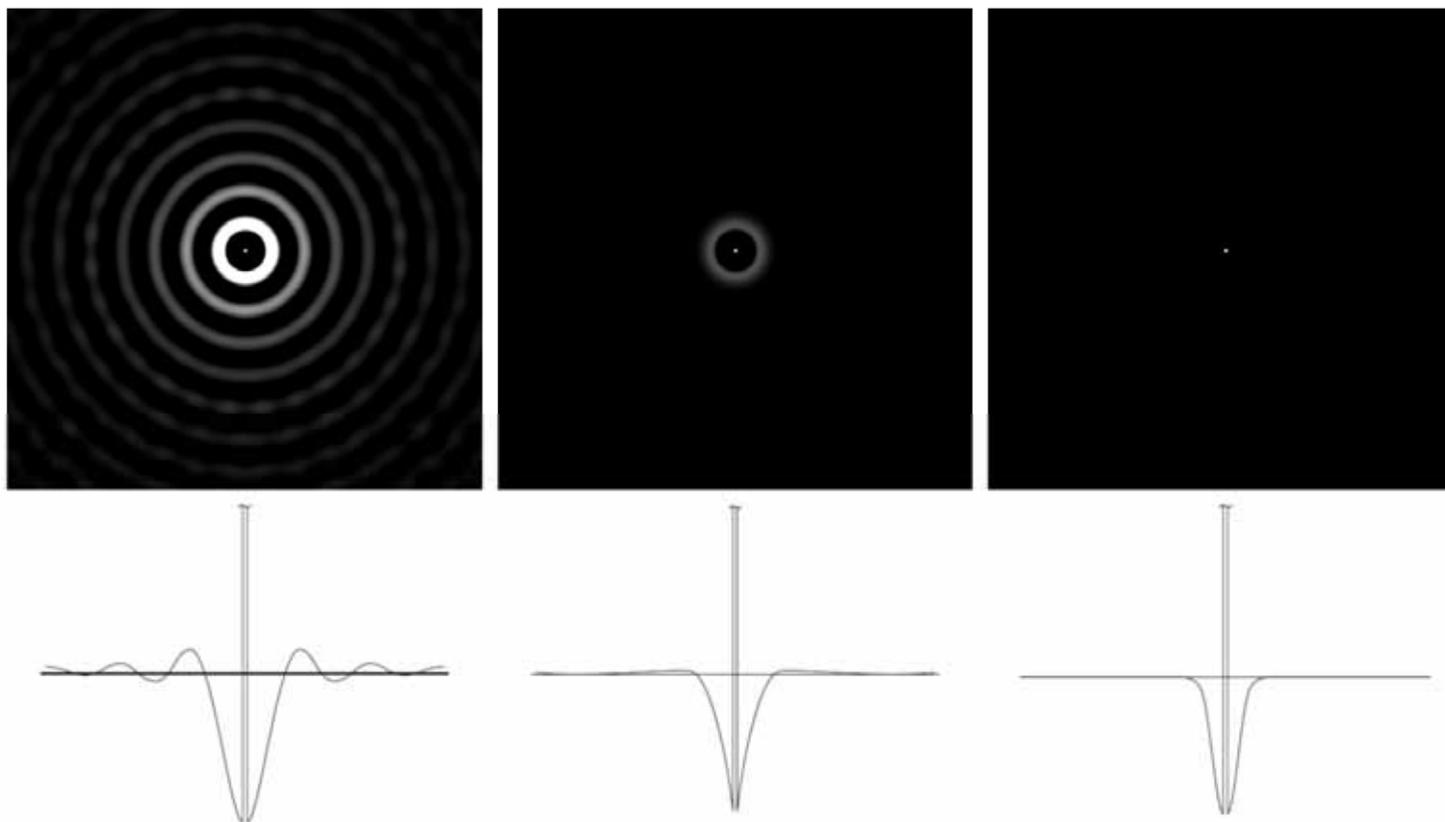
- 频率域



高通滤波器对比



- 空间域



指纹增强

- 去掉斑点、增强纹路



巴特沃斯高通滤波器 $n = 4, D_0 = 50$

指纹增强

- 去掉斑点、增强纹路



阈值法

提纲



- 锐化图像
 - 理想高通、巴特沃斯、高斯高通滤波器
 - 频率域拉普拉斯算子
 - 频率域非锐化掩蔽
 - 同态滤波
- 选择性滤波
 - 带阻滤波器、带通滤波器
 - 陷波滤波器
- 实现



使用二阶微分对图像锐化

- 各向同性滤波器
 - 旋转图像→滤波 = 滤波→旋转结果
- 拉普拉斯算子

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- 线性算子
- 离散拉普拉斯算子

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x + 1, y) + f(x - 1, y) - 2f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y + 1) + f(x, y - 1) - 2f(x, y)$$

拉普拉斯算子



- 标准形式

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x, y) &= f(x + 1, y) + f(x - 1, y) \\ &\quad + f(x, y + 1) + f(x, y - 1) \\ &\quad - 4f(x, y)\end{aligned}$$

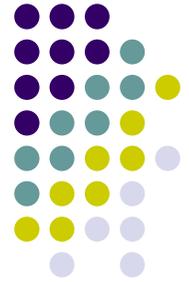
0	1	0
1	-4	1
0	1	0

90度增量
各向同性

- 对角线形式

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

45度增量
各向同性



使用二阶微分对图像锐化

- 拉普拉斯算子结果叠加到图像中

$$g(x, y) = f(x, y) + c [\nabla^2 f(x, y)]$$

- 采用负的中心系数， $c = -1$
- 采用正的中心系数， $c = 1$

0	-1	0	-1	-1	-1
-1	4	-1	-1	8	-1
0	-1	0	-1	-1	-1



频率域的拉普拉斯算子

- 拉普拉斯算子

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- 傅里叶变换

$$\nabla^2 f(t, z) \Leftrightarrow -4\pi^2(\mu^2 + \nu^2)F(\mu, \nu)$$

- 频域滤波器

$$H(u, v) = -4\pi^2(u^2 + v^2)$$

- 频域滤波器（中心化）

$$\begin{aligned} H(u, v) &= -4\pi^2[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2] \\ &= -4\pi^2 D^2(u, v) \end{aligned}$$

频率域的拉普拉斯算子



- 拉普拉斯图像

$$\nabla^2 f(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F(u, v)\}$$

- 频率域滤波、傅里叶反变换
- $F(u, v)$ 是原图像的DFT

- 图像锐化

$$g(x, y) = f(x, y) + c\nabla^2 f(x, y)$$

- $c = -1$
- $f(x, y)$ 归一化到 $[0, 1]$ ，再计算DFT
- $\nabla^2 f(x, y)$ 归一化到 $[-1, 1]$

$f(x, y)$ 和
 $\nabla^2 f(x, y)$ 不在
一个数量级！



频率域的拉普拉斯算子

- 图像锐化

$$g(x, y) = f(x, y) + c\nabla^2 f(x, y)$$

- $c = -1$

- 频域率写法

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \mathfrak{F}^{-1}\{F(u, v) - H(u, v)F(u, v)\} \\ &= \mathfrak{F}^{-1}\{[1 - H(u, v)]F(u, v)\} \\ &= \mathfrak{F}^{-1}\{[1 + 4\pi^2 D^2(u, v)]F(u, v)\} \end{aligned}$$

- 简洁、但同样存在量纲的问题

举例

- 月球图像



原图



频率域拉普拉斯增强

对比

- 月球图像



空间域拉普拉斯增强

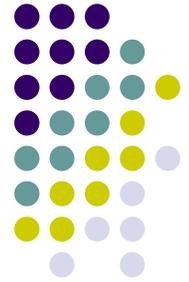


频率域拉普拉斯增强

提纲



- 锐化图像
 - 理想高通、巴特沃斯、高斯高通滤波器
 - 频率域拉普拉斯算子
 - 频率域非锐化掩蔽
 - 同态滤波
- 选择性滤波
 - 带阻滤波器、带通滤波器
 - 陷波滤波器
- 实现



非锐化掩蔽

- 从原图像减去一幅非锐化版本
 1. 模糊原图像
 2. 从原图像减去模糊图像，得到模板
 3. 将模板加到原图像

- 具体公式

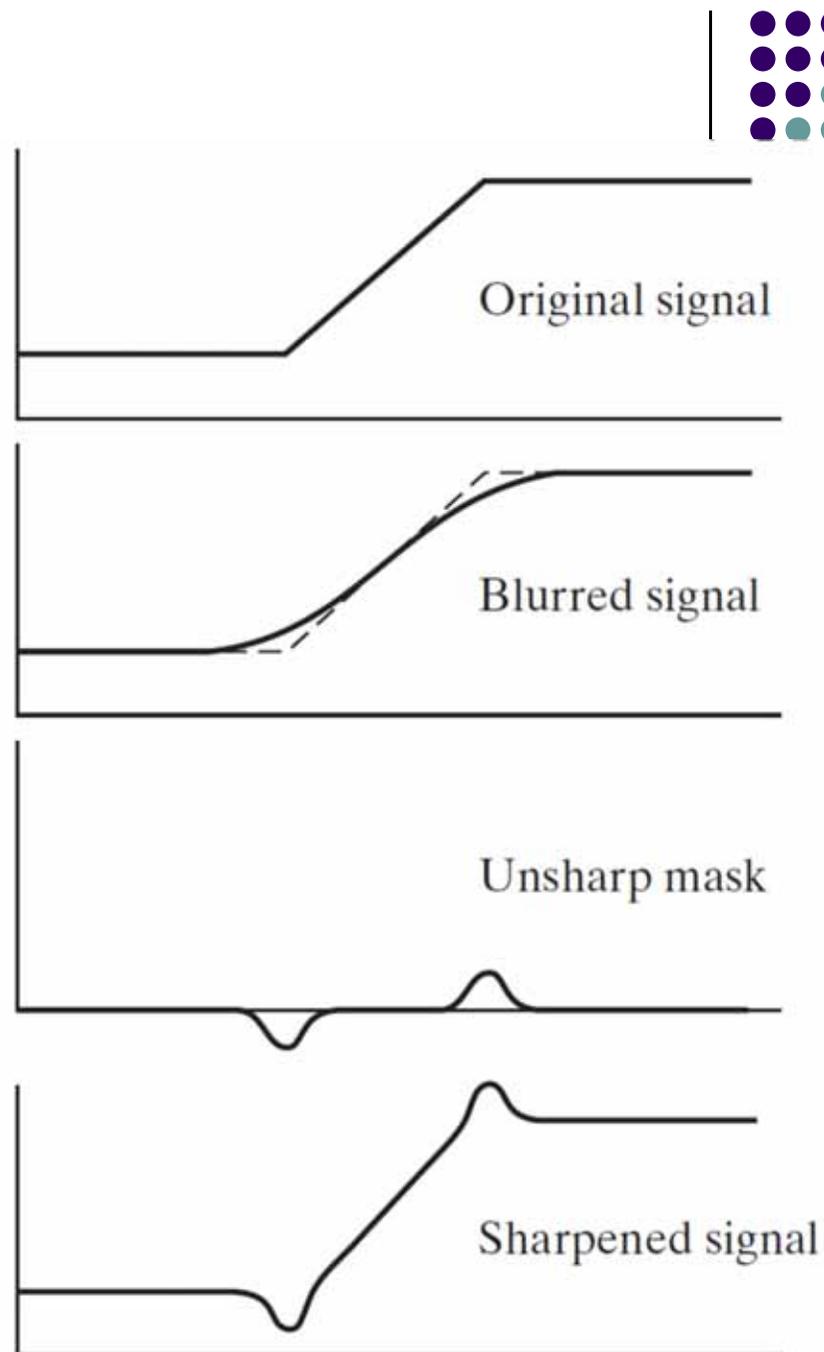
$$g_{\text{mask}}(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y)$$

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{\text{mask}}(x, y)$$

- 模糊图像 $\bar{f}(x, y)$
- 非锐化掩蔽 $k = 1$ ；高提升滤波 $k > 1$

示例

- 非锐化模板
- 二阶微分





频率域非锐化掩蔽

- 基于低通滤波器的非锐化模板

$$g_{\text{mask}}(x, y) = f(x, y) - f_{\text{LP}}(x, y)$$

- 其中

$$f_{\text{LP}}(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}[H_{\text{LP}}(u, v)F(u, v)]$$

- $H_{\text{LP}}(u, v)$ 为低通滤波器
- $F(u, v)$ 是原图像的DFT

- 增强后的图像

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{\text{mask}}(x, y)$$

- 非锐化掩蔽 $k = 1$; 高提升滤波 $k > 1$

频率域非锐化掩蔽



- 增强后的图像

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{\text{mask}}(x, y)$$

- 频域率写法

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\left[1 + k * [1 - H_{\text{LP}}(u, v)]\right]F(u, v)\right\}$$

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\left[1 + k * H_{\text{HP}}(u, v)\right]F(u, v)\right\}$$

- 其中 $H_{\text{HP}}(u, v) = 1 - H_{\text{LP}}(u, v)$

- 高频强调滤波

$$1 + k * H_{\text{HP}}(u, v)$$

频率域非锐化掩蔽



- 增强后的图像

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{\text{mask}}(x, y)$$

- 频域率写法

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{[1 + k * [1 - H_{\text{LP}}(u, v)]]F(u, v)\right\}$$

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{[1 + k * H_{\text{HP}}(u, v)]F(u, v)\right\}$$

- 其中 $H_{\text{HP}}(u, v) = 1 - H_{\text{LP}}(u, v)$

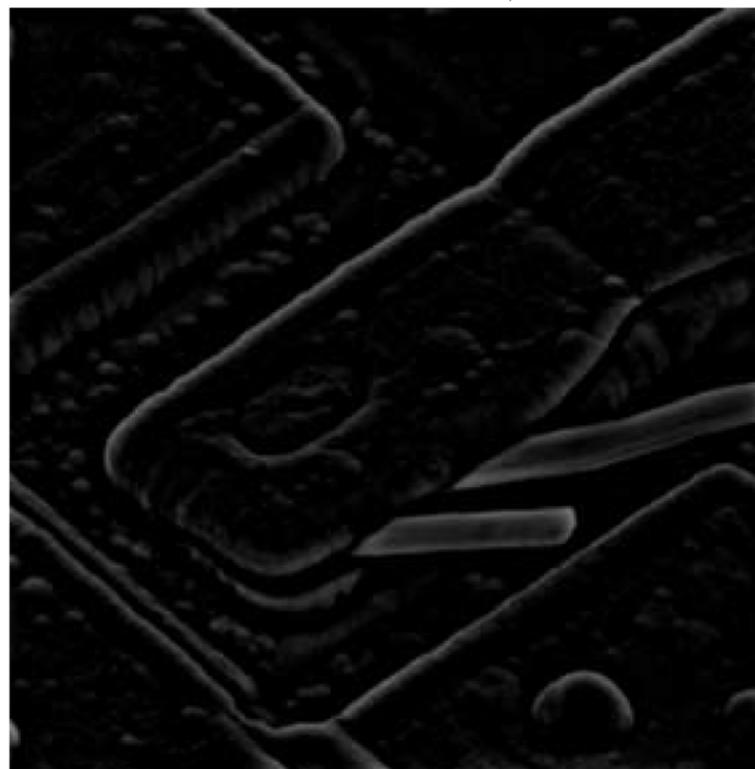
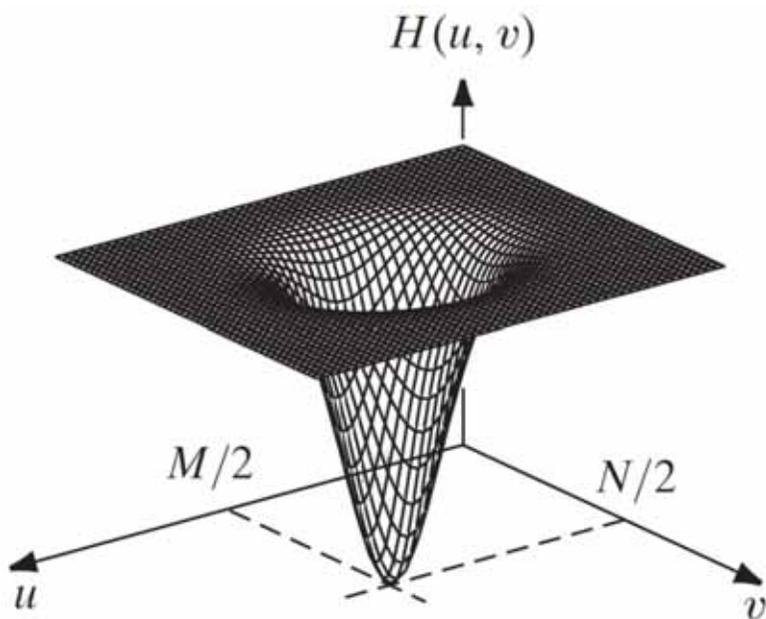
- 高频强调滤波（更一般形式）

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{[k_1 + k_2 * H_{\text{HP}}(u, v)]F(u, v)\right\}$$

高通滤波器

- 衰减低频而通过高频，强化细节

对比度降低！



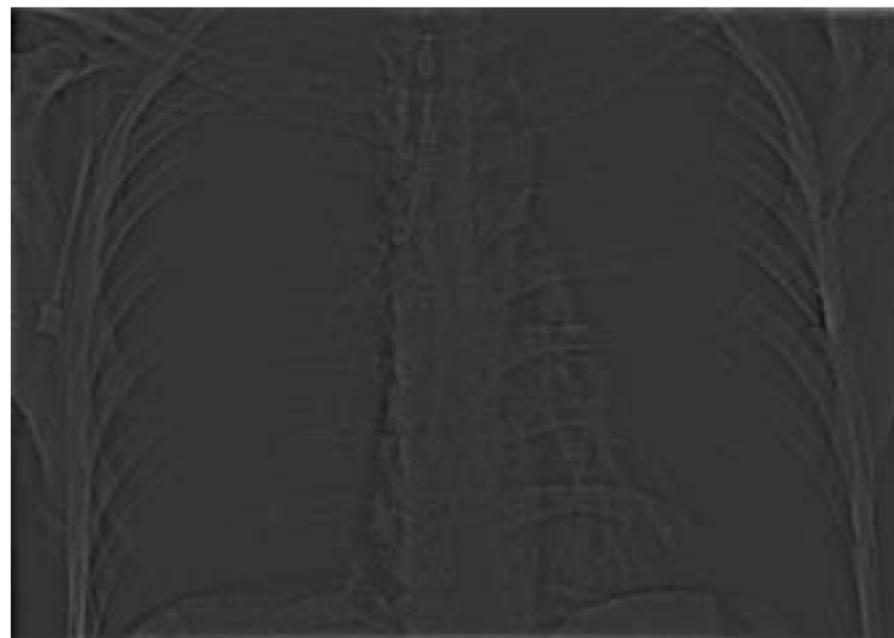
- 高频对应于图像中剧烈变化的灰度

举例

- 胸部X射线



原图



高斯高通滤波器 $D_0 = 40$

举例

- 胸部X射线



高频强调滤波 $k_1 = 0.5, k_2 = 0.75$



直方图均衡

提纲



- 锐化图像
 - 理想高通、巴特沃斯、高斯高通滤波器
 - 频率域拉普拉斯算子
 - 频率域非锐化掩蔽
 - 同态滤波
- 选择性滤波
 - 带阻滤波器、带通滤波器
 - 陷波滤波器
- 实现



同态滤波 (1)

- 照射—反射模型

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

- 照射

$$0 < i(x, y) < \infty$$

- 反射

$$0 < r(x, y) < 1$$

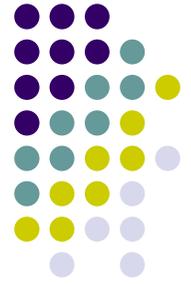
- 注意

$$\mathfrak{S}[f(x, y)] \neq \mathfrak{S}[i(x, y)]\mathfrak{S}[r(x, y)]$$

- 取对数

$$z(x, y) = \ln f(x, y)$$

$$= \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$$



同态滤波（2）

- 对 $z(x, y)$ 傅里叶变换

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{z(x, y)\} &= \mathfrak{F}\{\ln f(x, y)\} \\ &= \mathfrak{F}\{\ln i(x, y)\} + \mathfrak{F}\{\ln r(x, y)\}\end{aligned}$$

- 换言之

$$Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v)$$

- 其中 $F_i(u, v) = \mathfrak{F}\{\ln i(x, y)\}$

- 其中 $F_r(u, v) = \mathfrak{F}\{\ln r(x, y)\}$

- 对 $Z(u, v)$ 滤波

$$\begin{aligned}S(u, v) &= H(u, v)Z(u, v) \\ &= H(u, v)F_i(u, v) + H(u, v)F_r(u, v)\end{aligned}$$

同态滤波 (3)



- 空间域图像

$$s(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{S(u, v)\}$$

$$= \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_i(u, v)\} + \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_r(u, v)\}$$

- 定义

$$i'(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_i(u, v)\}$$

$$r'(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_r(u, v)\}$$

- 空间域图像

$$s(x, y) = i'(x, y) + r'(x, y)$$

同态滤波 (4)



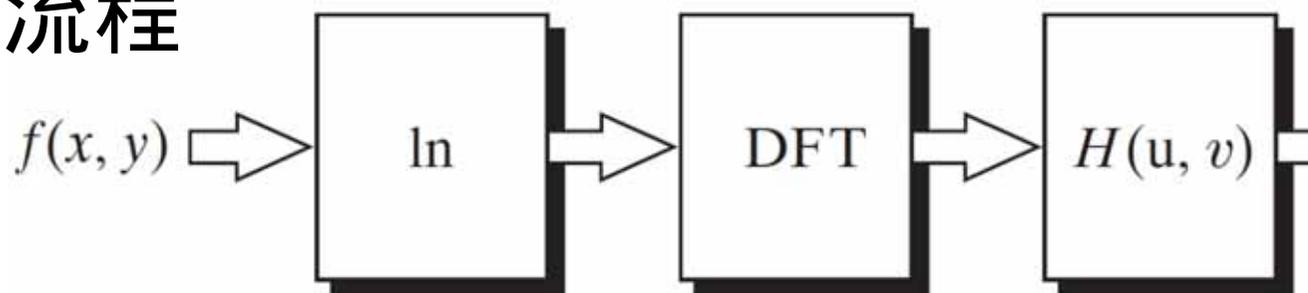
- 取指数

$$g(x, y) = e^{s(x, y)} = e^{i'(x, y)} e^{r'(x, y)} = i_0(x, y) r_0(x, y)$$

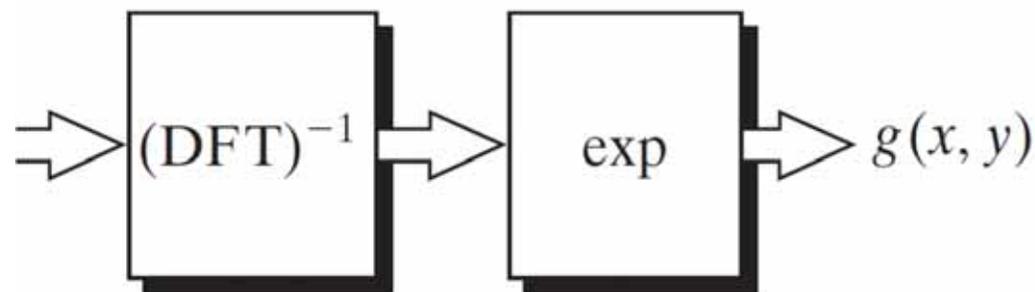
- 其中

$$i_0(x, y) = e^{i'(x, y)} \quad r_0(x, y) = e^{r'(x, y)}$$

- 整体流程



- 注意避免ln 0





讨论

- 照明和反射分量的分离是关键

$$Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v)$$

- 进而实现了**分别滤波**

$$\begin{aligned} S(u, v) &= H(u, v)Z(u, v) \\ &= H(u, v)F_i(u, v) + H(u, v)F_r(u, v) \end{aligned}$$

- 照射分量较为稳定
- 反射分量差异较大
 - 尤其在连接处

讨论



- 照明和反射分量的分离是关键

$$Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v)$$

- 进而实现了**分别滤波**

$$\begin{aligned} S(u, v) &= H(u, v)Z(u, v) \\ &= H(u, v)F_i(u, v) + H(u, v)F_r(u, v) \end{aligned}$$

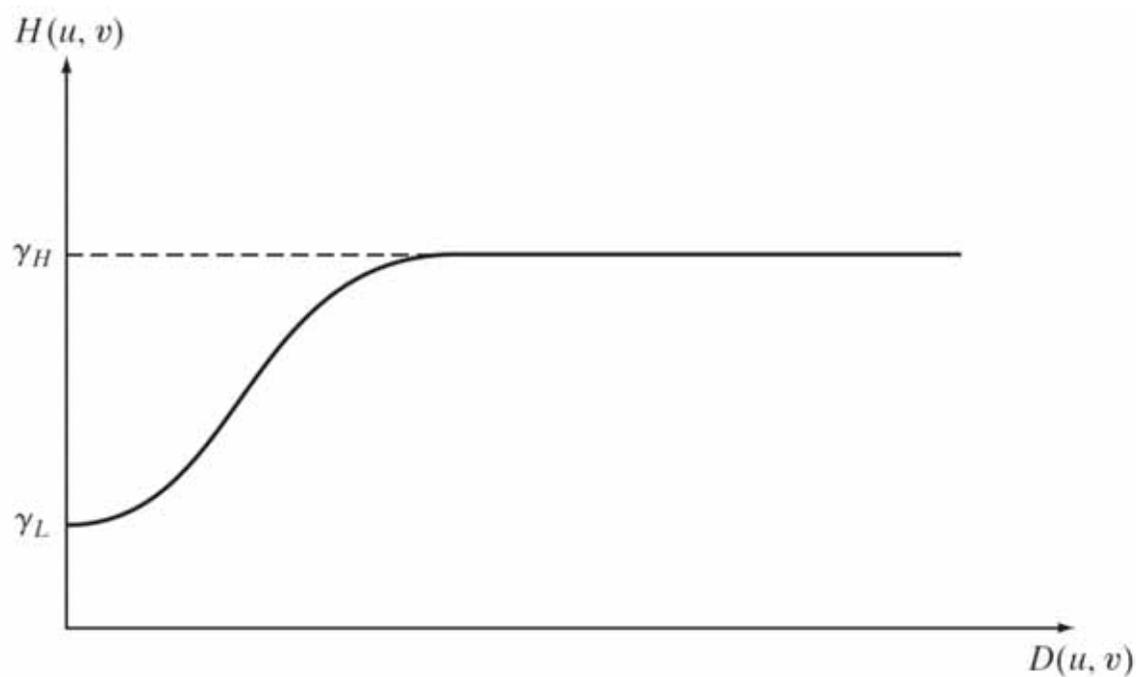
- $Z(u, v)$ 中的**低频成分对应于照射分量**
- $Z(u, v)$ 中的**高频成分对应于反射分量**

同态滤波



- 频域滤波器设计

- $\gamma_L < 1$
- 衰减低频
(照明)
- $\gamma_H > 1$
- 放大高频
(反射)

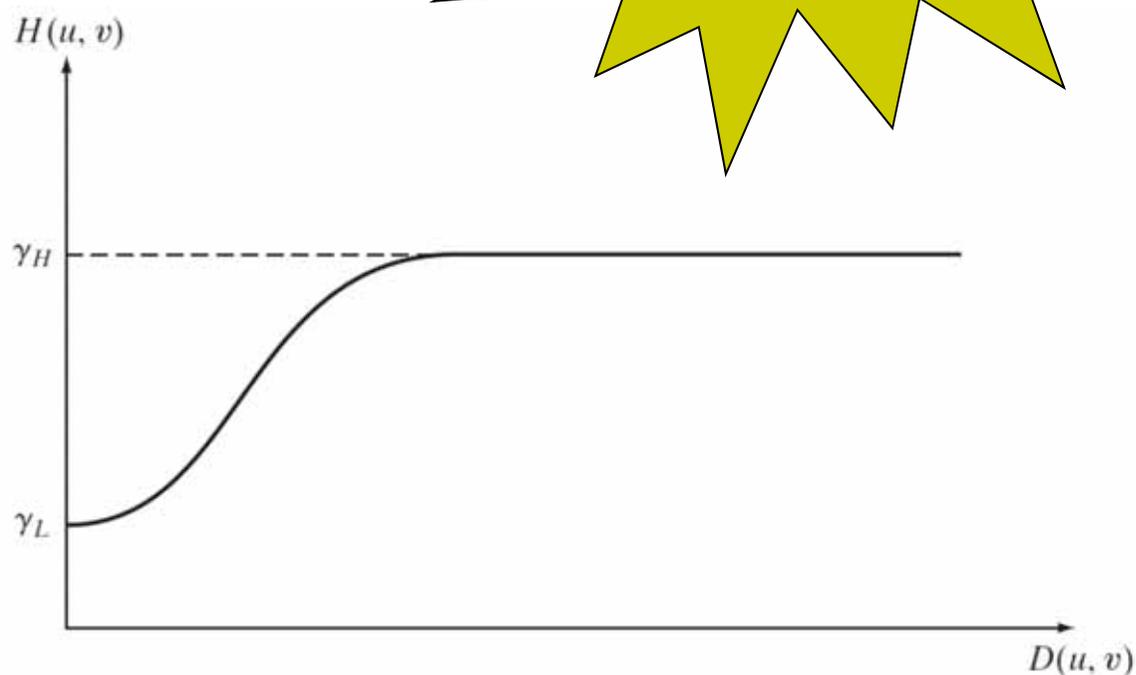


- 压缩灰度范围、增强对比度

同态滤波

- 频域滤波器设计

- $\gamma_L < 1$
- 衰减低频
(照明)
- $\gamma_H > 1$
- 放大高频
(反射)



与“高频强调滤波”相似！

- 实现（基于高斯滤波器）

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left[1 - e^{-c[D^2(u, v)/D_0^2]} \right] + \gamma_L$$

举例



- 两个亮点（肿瘤）导致其他地方较暗



举例



- 两个亮点（肿瘤）导致其他地方较暗

- $\gamma_L = 0.25$

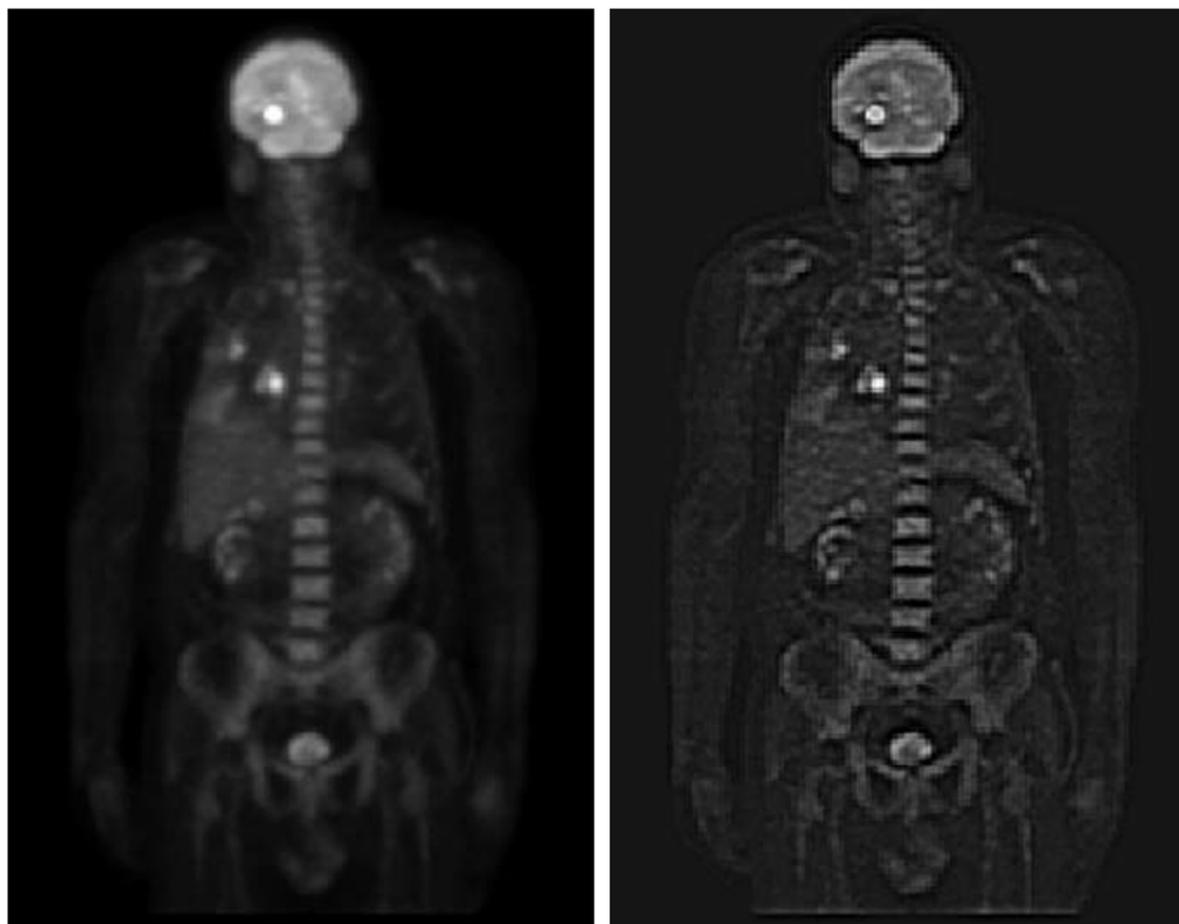
- $\gamma_H = 2$

- $c = 1$

- $D_0 = 80$

- 更加清晰

- 更多细节

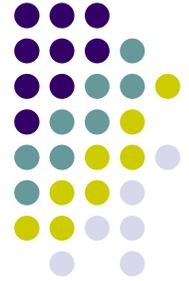


提纲



- 锐化图像
 - 理想高通、巴特沃斯、高斯高通滤波器
 - 频率域拉普拉斯算子
 - 频率域非锐化掩蔽
 - 同态滤波
- 选择性滤波
 - 带阻滤波器、带通滤波器
 - 陷波滤波器
- 实现

选择性滤波

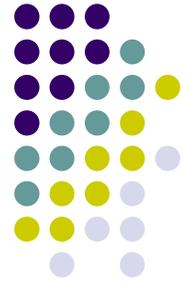


- 前面的滤波器考虑整个频率矩形
- 带阻滤波器、带通滤波器
 - 处理特定频段
- 陷波滤波器 (notch filters)
 - 处理特定区域

提纲



- 锐化图像
 - 理想高通、巴特沃斯、高斯高通滤波器
 - 频率域拉普拉斯算子
 - 频率域非锐化掩蔽
 - 同态滤波
- 选择性滤波
 - 带阻滤波器、带通滤波器
 - 陷波滤波器
- 实现



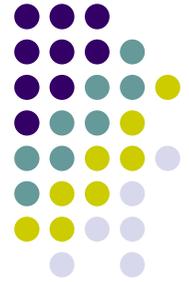
带阻滤波器

- 理想带阻滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- D_0 为截止频率
- W 是带宽
- D 为 (u, v) 到中心的距离

$$D(u, v) = \left[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2 \right]^{1/2}$$



带阻滤波器

- 理想带阻滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 巴特沃斯带阻滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{DW}{D^2 - D_0^2} \right]^{2n}}$$

- 高斯带阻滤波器

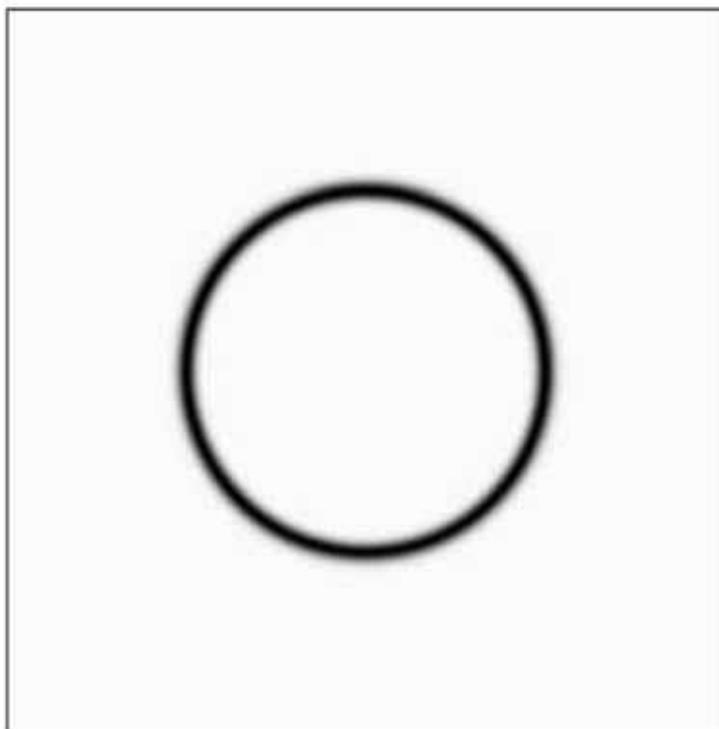
$$H(u, v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2 - D_0^2}{DW} \right]^2}$$



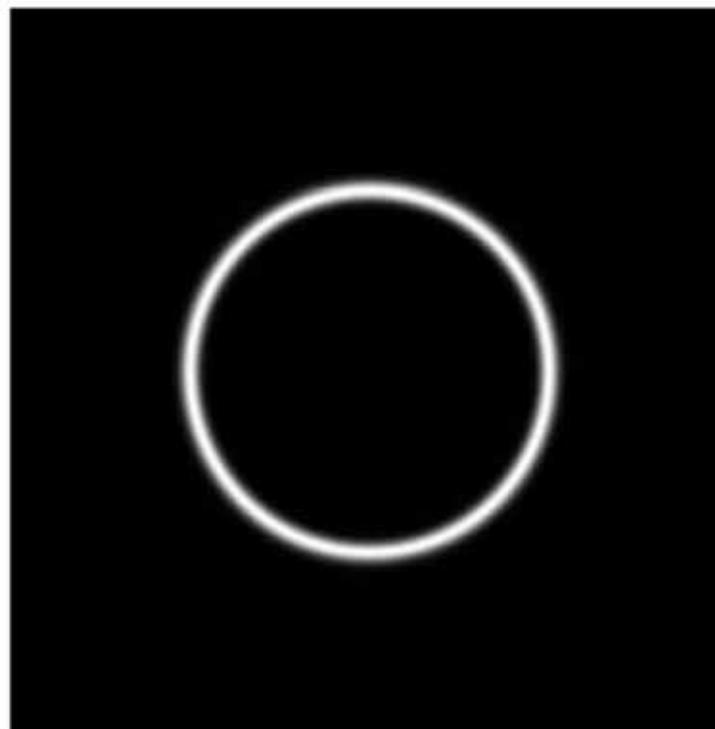
带通滤波器

- 从带阻滤波器构造带通滤波器

$$H_{BP}(u, v) = 1 - H_{BR}(u, v)$$



高斯带阻滤波器

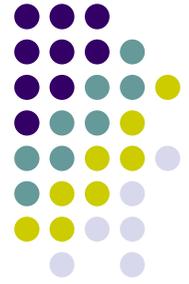


高斯带通滤波器

提纲



- 锐化图像
 - 理想高通、巴特沃斯、高斯高通滤波器
 - 频率域拉普拉斯算子
 - 频率域非锐化掩蔽
 - 同态滤波
- 选择性滤波
 - 带阻滤波器、带通滤波器
 - 陷波滤波器
- 实现



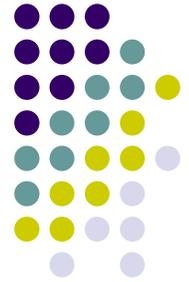
陷波滤波器

1. 处理特定区域
2. 保持对称性

- 在 (u_0, v_0) 存在区域， $(-u_0, -v_0)$ 也存在一个
- 陷波带阻滤波器

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^Q H_k(u, v) H_{-k}(u, v)$$

- $H_k(u, v)$ 是中心在 (u_k, v_k) 的高通滤波器
- $H_{-k}(u, v)$ 是中心在 $(-u_k, -v_k)$ 的高通滤波器
- 中心是相对于 $(M/2, N/2)$ 而言



陷波滤波器

- n 阶巴特沃斯陷波带阻滤波器

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^n \left[\frac{1}{1 + [D_{0k}/D_k(u, v)]^{2n}} \right] \left[\frac{1}{1 + [D_{0k}/D_{-k}(u, v)]^{2n}} \right]$$

- 其中 $D_k(u, v) = [(u - M/2 - u_k)^2 + (v - N/2 - v_k)^2]^{1/2}$

$$D_{-k}(u, v) = [(u - M/2 + u_k)^2 + (v - N/2 + v_k)^2]^{1/2}$$

- 陷波带通滤波器

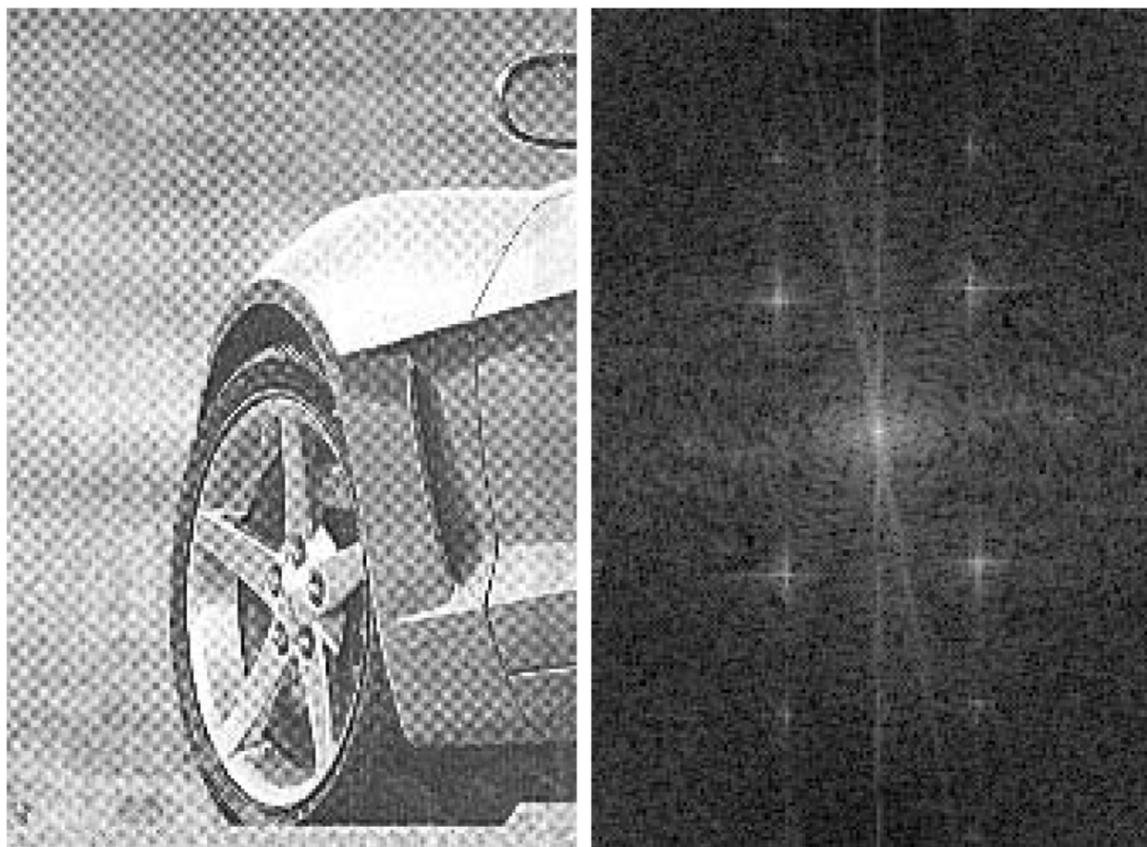
$$H_{NP}(u, v) = 1 - H_{NR}(u, v)$$

- 交互式地改变DFT的局部区域

- 不进行补0填充

举例

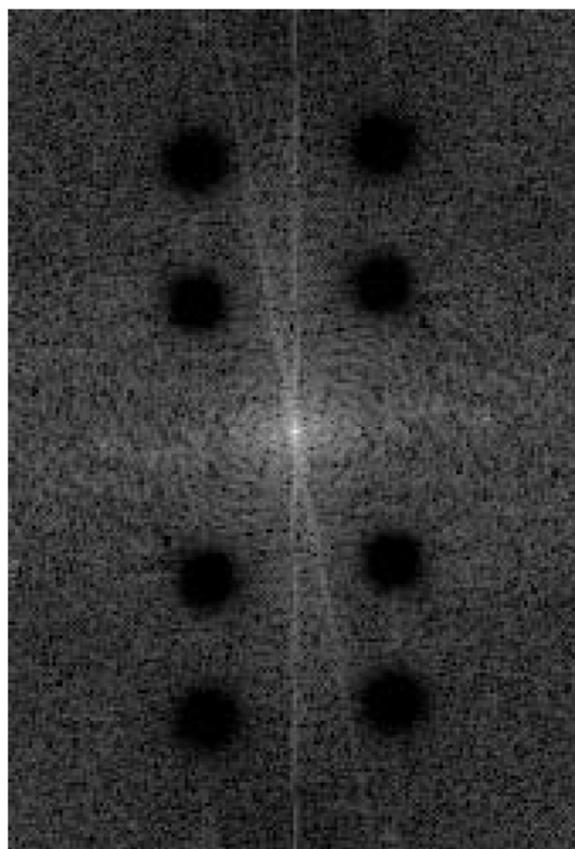
- 莫尔模式



共轭对称的
频率，对应
于原图中的
周期性莫尔
模式

举例

- 应用陷波带阻滤波器



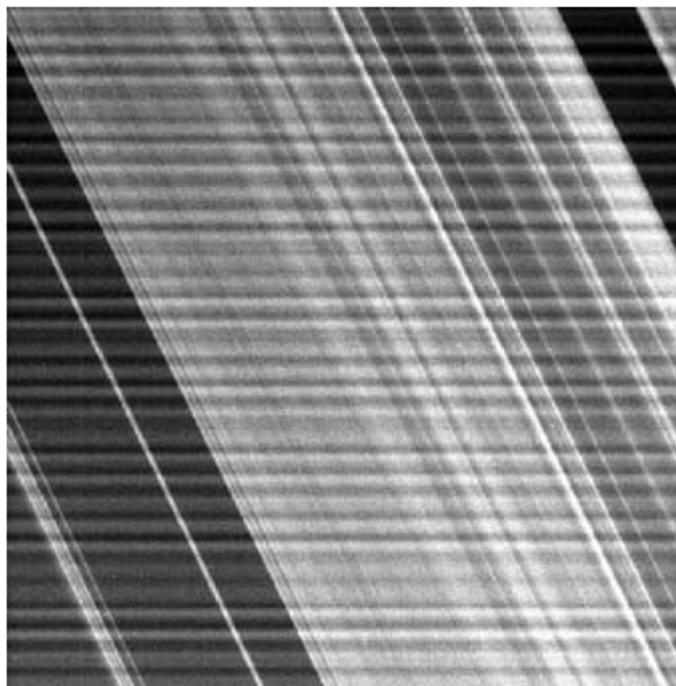
与巴特沃斯陷波带阻滤波器相乘



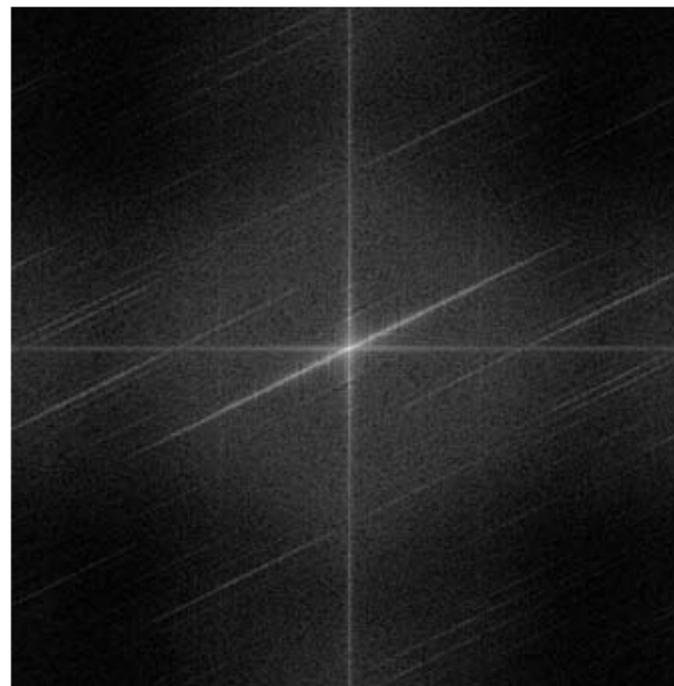
滤波后的图像

举例

- 土星环照片



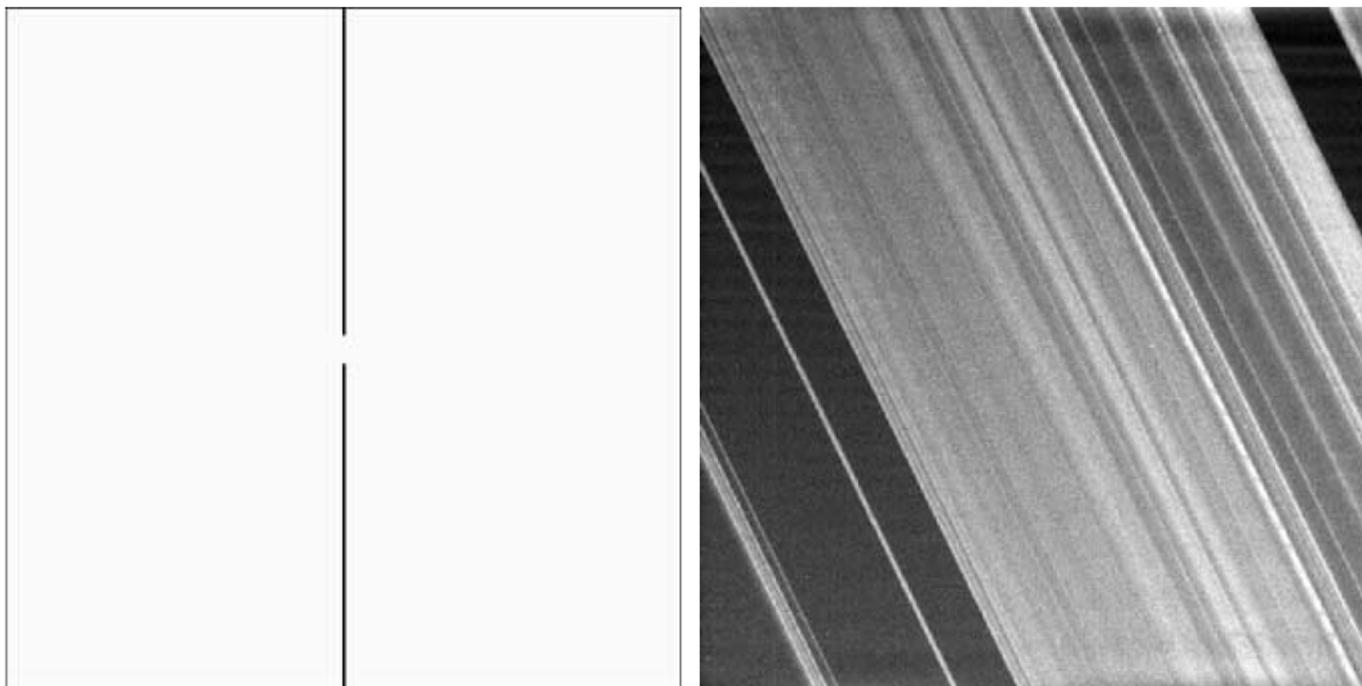
垂直的正弦模式，是由加在摄像机视频信号的AC信号造成



垂直轴上的能量爆发
对应于噪声

举例

- 应用陷波带阻滤波器

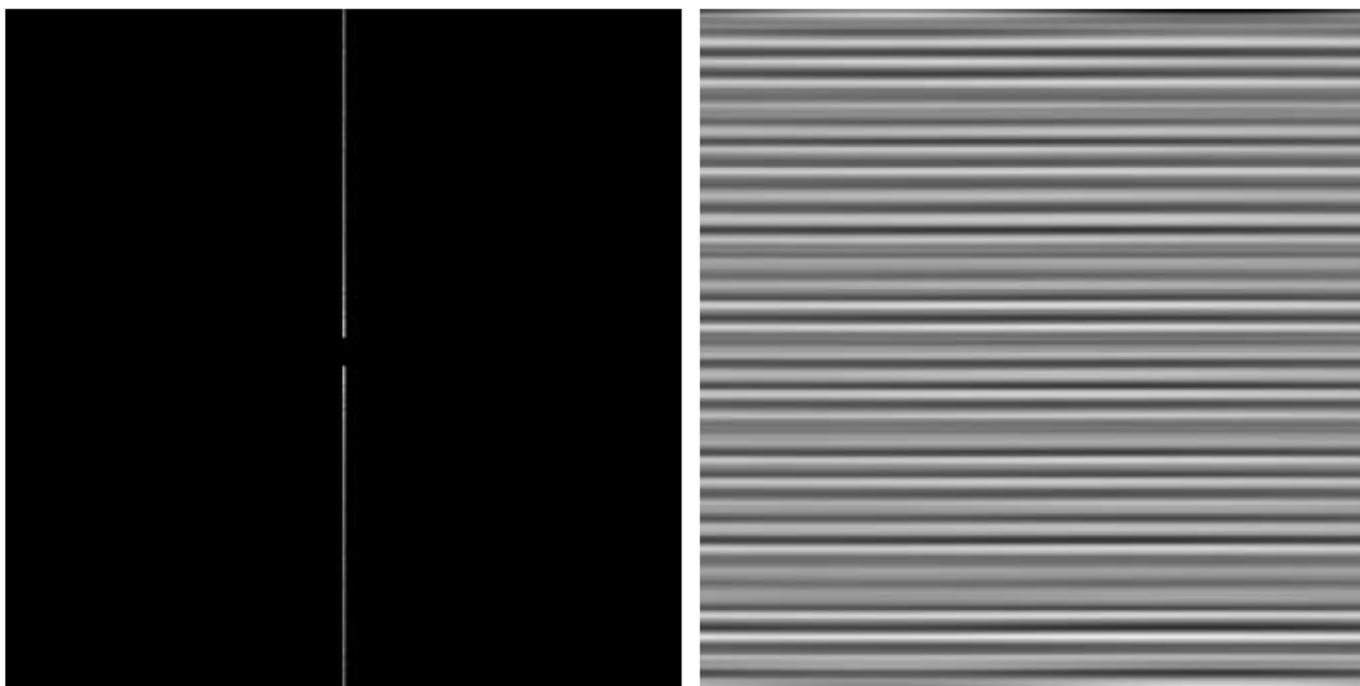


陷波带阻滤波器（黑色为0）

滤波后的图像

举例

- 应用陷波带阻滤波器



陷波带通滤波器（黑色为0）

噪声

提纲



- 锐化图像
 - 理想高通、巴特沃斯、高斯高通滤波器
 - 频率域拉普拉斯算子
 - 频率域非锐化掩蔽
 - 同态滤波
- 选择性滤波
 - 带阻滤波器、带通滤波器
 - 陷波滤波器
- 实现



二维离散傅里叶变换对

- 二维离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- $u = 0, 1, \dots, M - 1, v = 0, 1, \dots, N - 1$
- $f(x, y)$ 是大小为 $M \times N$ 的数字图像

- 二维离散傅里叶反变换 (IDFT)

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- $x = 0, 1, \dots, M - 1, y = 0, 1, \dots, N - 1$

二维DFT的可分离性

通过1维DFT算法计算2维DFT！

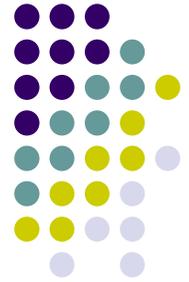
- 二维离散傅里叶变换 (DFT)

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) e^{-j2\pi ux/M} \end{aligned}$$

- 其中 $F(x, v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N}$

- $F(x, v)$ 是 $f(x, y)$ 的第 $x + 1$ 行的1维DFT
- $F(u, v)$ 是 $F(x, v)$ 组成的列的1维DFT

通过DFT计算IDFT



- 二维离散傅里叶反变换 (IDFT)

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- 求共轭

$$MNf^*(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

1. 计算 $F^*(u, v)$ 的DFT
2. 对结果求共轭, 除 MN

二维离散傅里叶变换对



计算复杂度?

- 二维离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- $u = 0, 1, \dots, M - 1, v = 0, 1, \dots, N - 1$
- $f(x, y)$ 是大小为 $M \times N$ 的数字图像

- 二维离散傅里叶反变换 (IDFT)

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- $x = 0, 1, \dots, M - 1, y = 0, 1, \dots, N - 1$

二维离散傅里叶变换对

计算复杂度
 $O(M^2N^2)$

- 二维离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- $u = 0, 1, \dots, M - 1, v = 0, 1, \dots, N - 1$
- $f(x, y)$ 是大小为 $M \times N$ 的数字图像

之前的理论
无法应用

- 二维离散傅里叶反变换 (IDFT)

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- $x = 0, 1, \dots, M - 1, y = 0, 1, \dots, N - 1$

快速傅里叶变换 (FFT)



- 1维离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \quad u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- u 是整数

- 改写
$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) W_M^{ux} \quad u = 0, 1, \dots, M-1$$

- 其中
$$W_M = e^{-j2\pi/M}$$

- 并且假设
$$M = 2^n$$



逐次加倍方法 (1)

- 令 $M = 2K$, 其中 K 为正整数

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{x=0}^{2K-1} f(x) W_{2K}^{ux} \\ &= \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_{2K}^{u(2x)} + \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_{2K}^{u(2x+1)} \end{aligned}$$

- 可以证明 $W_{2K}^{2ux} = W_K^{ux}$

- 因此 $F(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{ux} + \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_K^{ux} W_{2K}^u$

逐次加倍方法 (2)



- 定义

$$F_{\text{even}}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x)W_K^{ux}$$

$$F_{\text{odd}}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1)W_K^{ux}$$

$$u = 0, 1, 2, \dots, K-1$$

$$u = 0, 1, 2, \dots, K-1$$

- 得到

$$F(u) = F_{\text{even}}(u) + F_{\text{odd}}(u)W_{2K}^u$$

- 注意

$$W_K^{u+K} = (e^{-j2\pi/K})^{u+K} = (e^{-j2\pi/K})^u e^{-j2\pi} = (e^{-j2\pi/K})^u = W_K^u$$

$$W_{2K}^{u+K} = (e^{-j\pi/K})^{u+K} = (e^{-j\pi/K})^u e^{-j\pi} = -(e^{-j\pi/K})^u = -W_{2K}^u$$

逐次加倍方法 (3)



- 因此

$$F_{\text{even}}(u + K) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x)W_K^{(u+K)x} = F_{\text{even}}(u)$$

$$F_{\text{odd}}(u + K) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x + 1)W_K^{(u+K)x} = F_{\text{odd}}(u)$$

- 得到

$$\begin{aligned} F(u + K) &= F_{\text{even}}(u + K) + F_{\text{odd}}(u + K)W_{2K}^{u+K} \\ &= F_{\text{even}}(u) - F_{\text{odd}}(u)W_{2K}^u \end{aligned}$$

$$u = 0, 1, 2, \dots, K - 1$$



逐次加倍方法（4）

- 计算 $F(0), \dots, F(K-1)$

$$F(u) = F_{\text{even}}(u) + F_{\text{odd}}(u)W_{2K}^u$$

- 对于 $F(K), \dots, F(2K-1)$

$$F(u+K) = F_{\text{even}}(u) - F_{\text{odd}}(u)W_{2K}^u$$

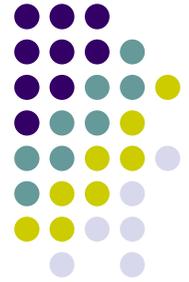
迭代运用
该原理

1. 计算2次 K 个点的DFT

$$F_{\text{even}}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x)W_K^{ux} \quad F_{\text{odd}}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1)W_K^{ux}$$

2. 根据公式得到 $M = 2K$ 个点的DFT

复杂度



- 复数乘法 $m(n) = \frac{1}{2} M \log_2 M$

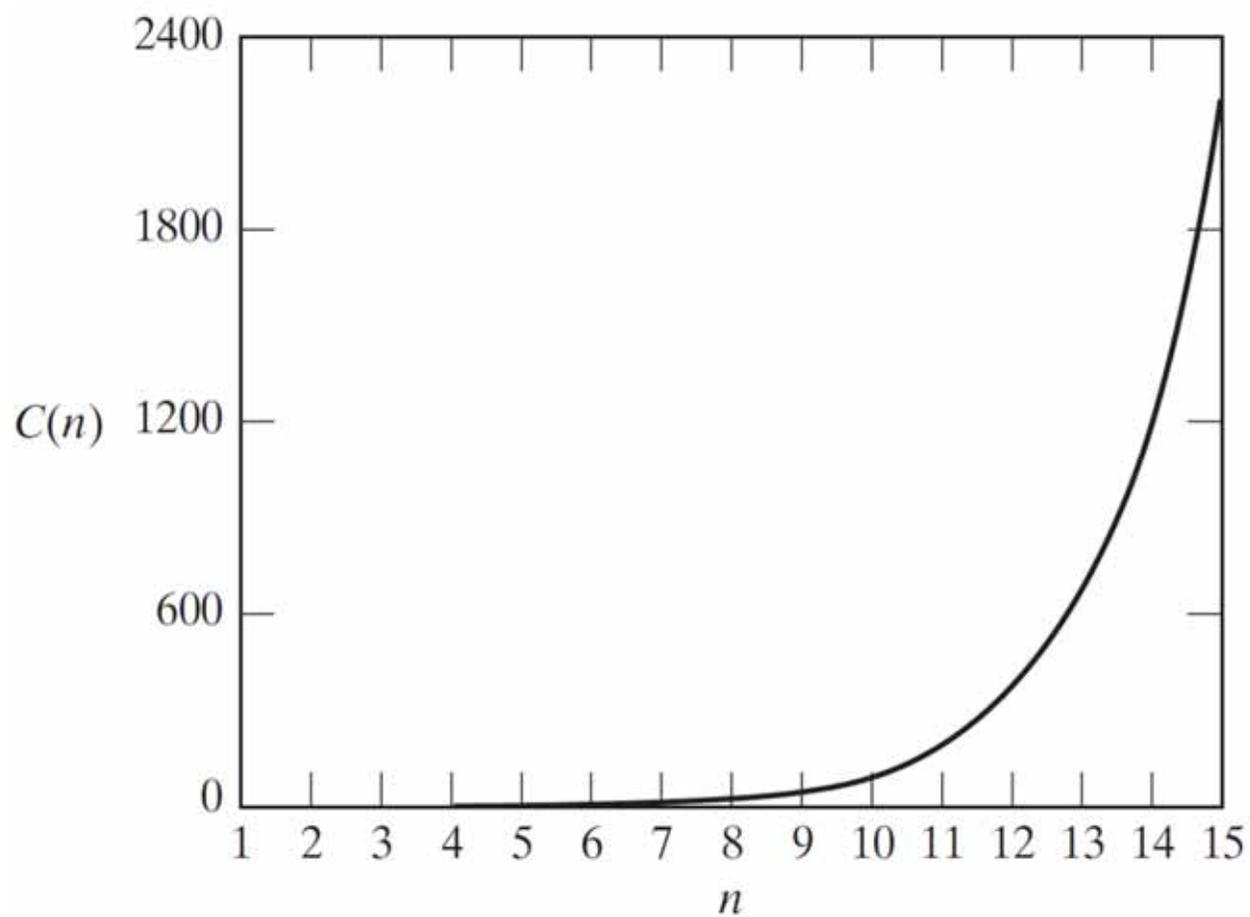
- 复数加法 $a(n) = M \log_2 M$

- 优势 $c(M) = \frac{M^2}{M \log_2 M} = \frac{M}{\log_2 M}$

- 令 $M = 2^n$
 $c(n) = \frac{2^n}{n}$

复杂度

- 优势





下一讲

