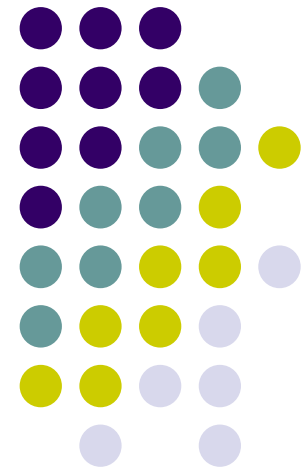


# 数字图像处理

## 第二讲 数字图像基础

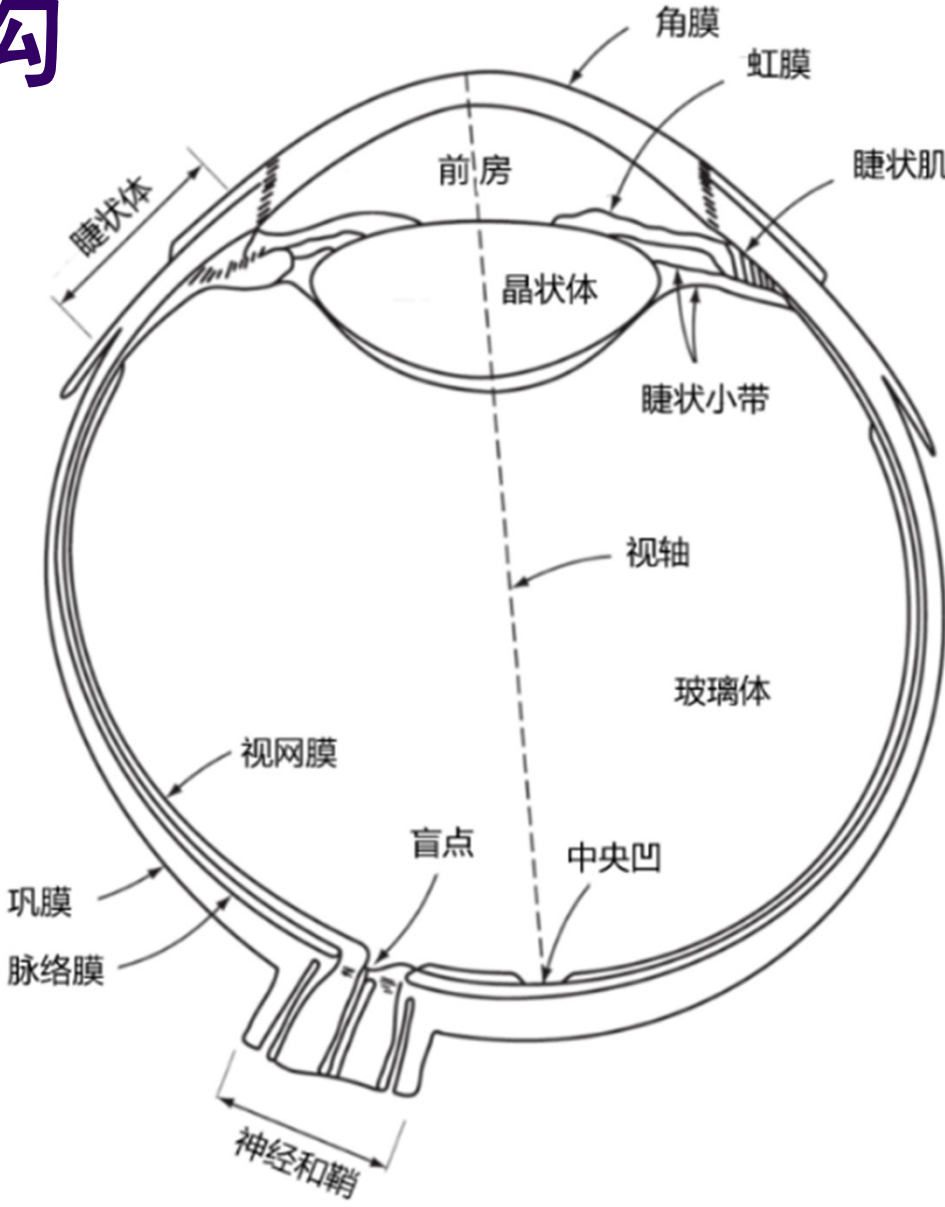


# 提纲

- 视觉感知要素
- 光和电磁波谱
- 图像感知和获取
- 图像取样和量化
- 像素间的关系
- 数学工具



# 人眼结构



# 人眼结构

眼球被角膜和巩膜所包围

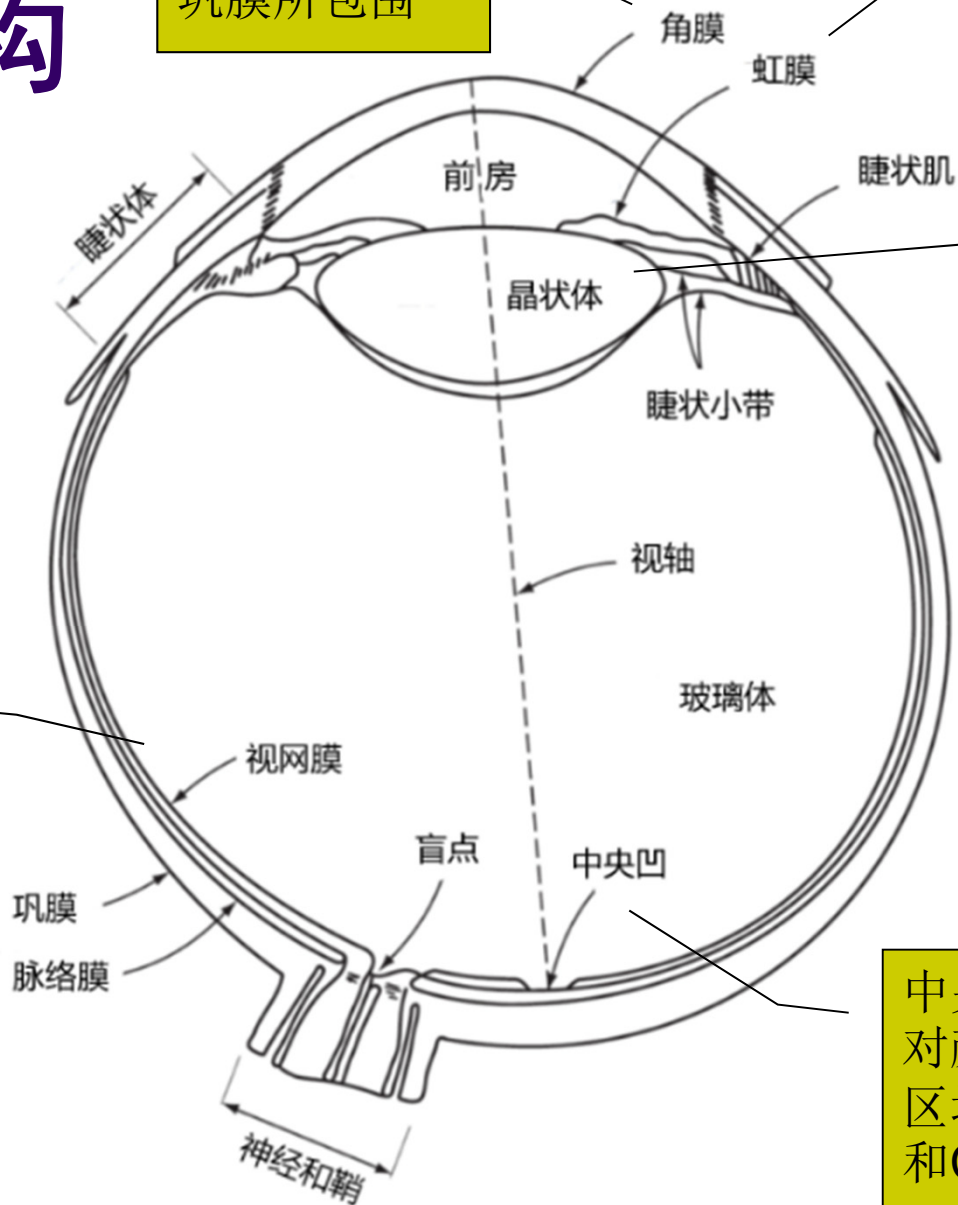
虹膜控制着进入眼睛的光量

光线通过晶状体进入眼睛

物体在视网膜上成像

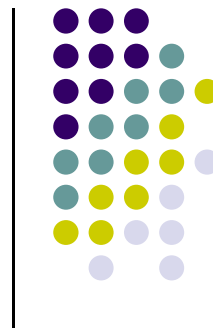
眼球被角膜和巩膜所包围

中央凹是视网膜上对颜色/细节敏感的区域，其分辨能力和CCD相当

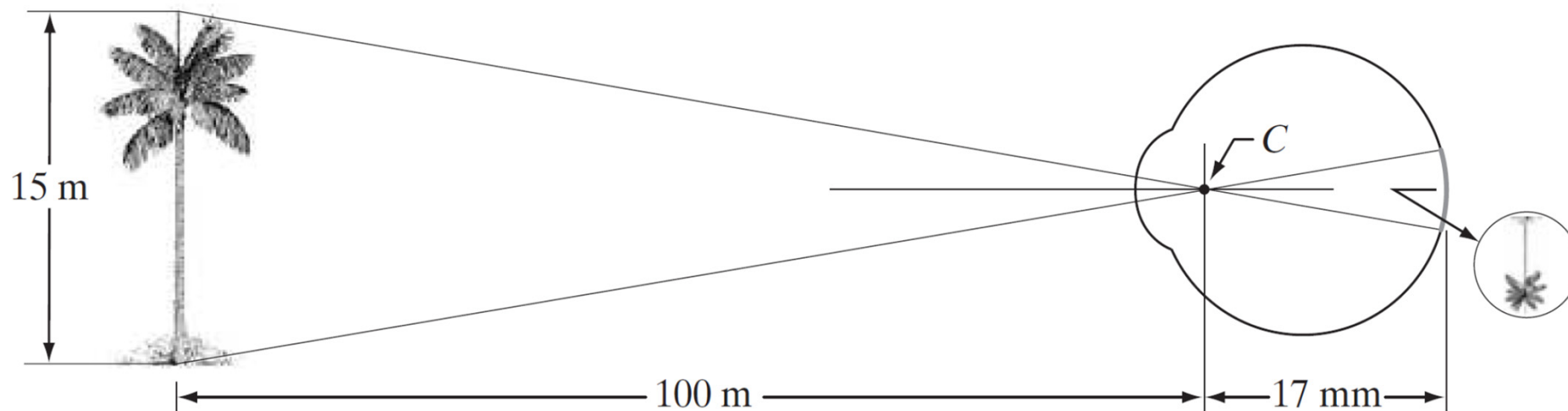




# 人眼结构



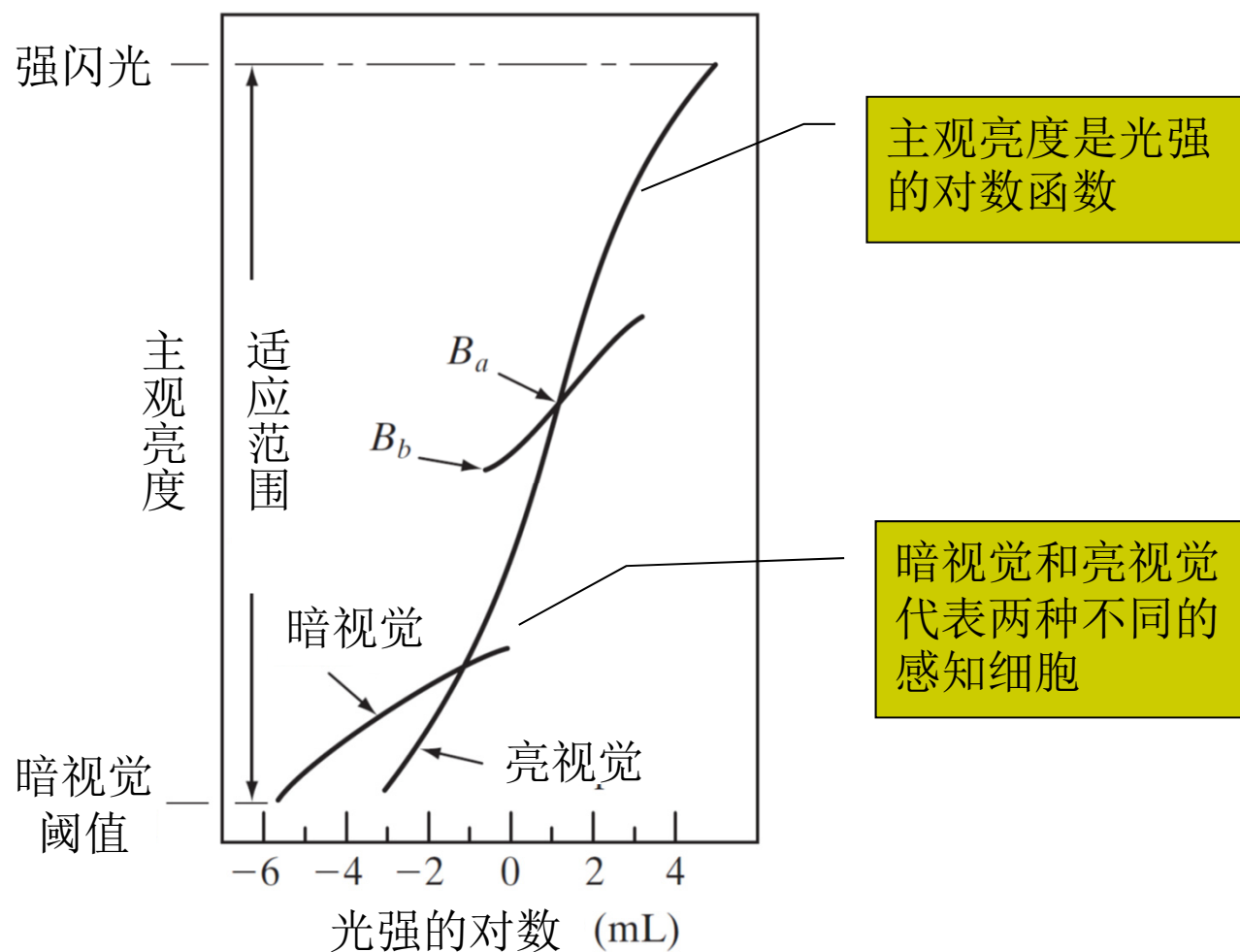
- 成像过程
  - 焦距范围14-17mm



# 亮度适应



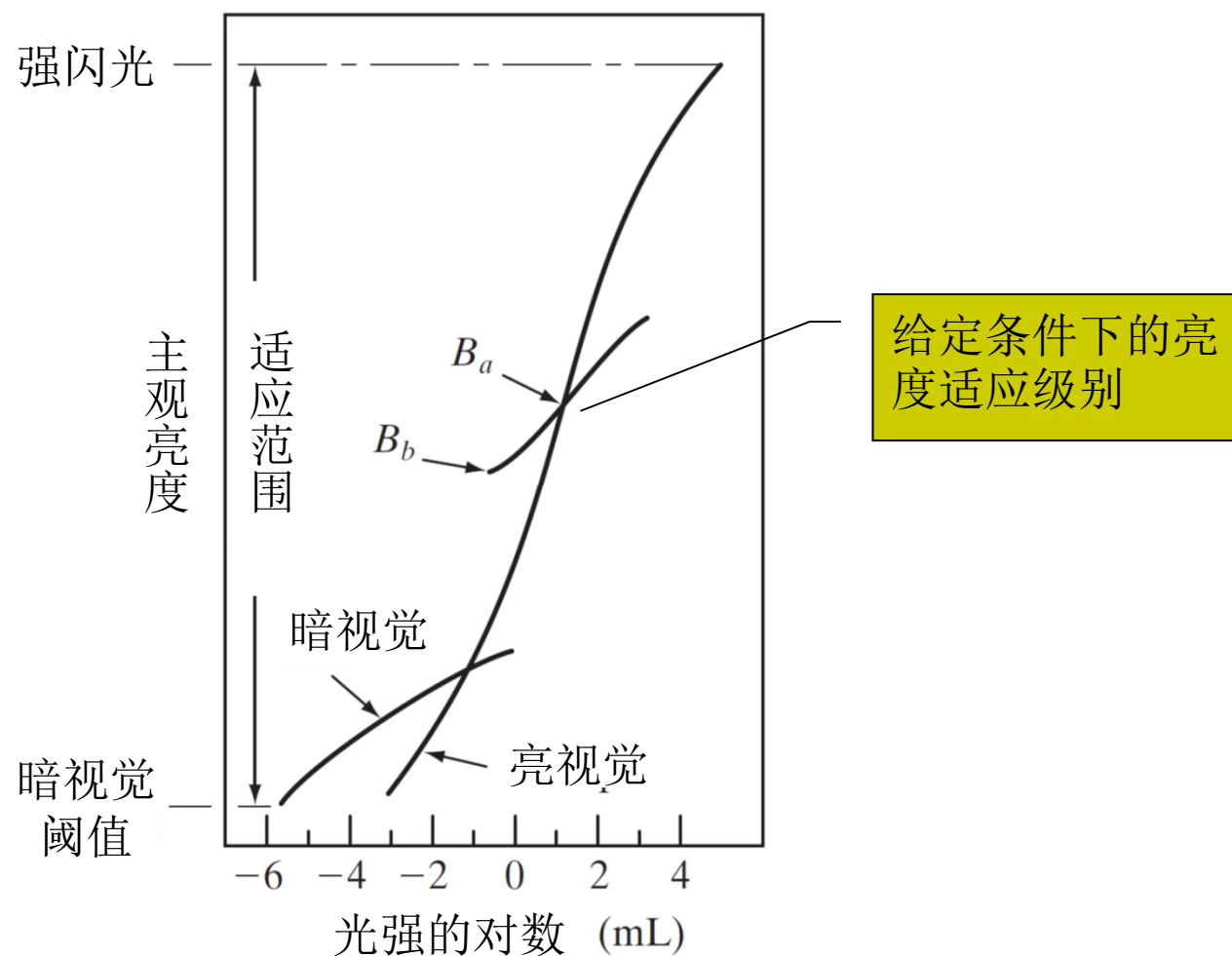
- 人眼可以感知的光强度范围很广



# 亮度适应



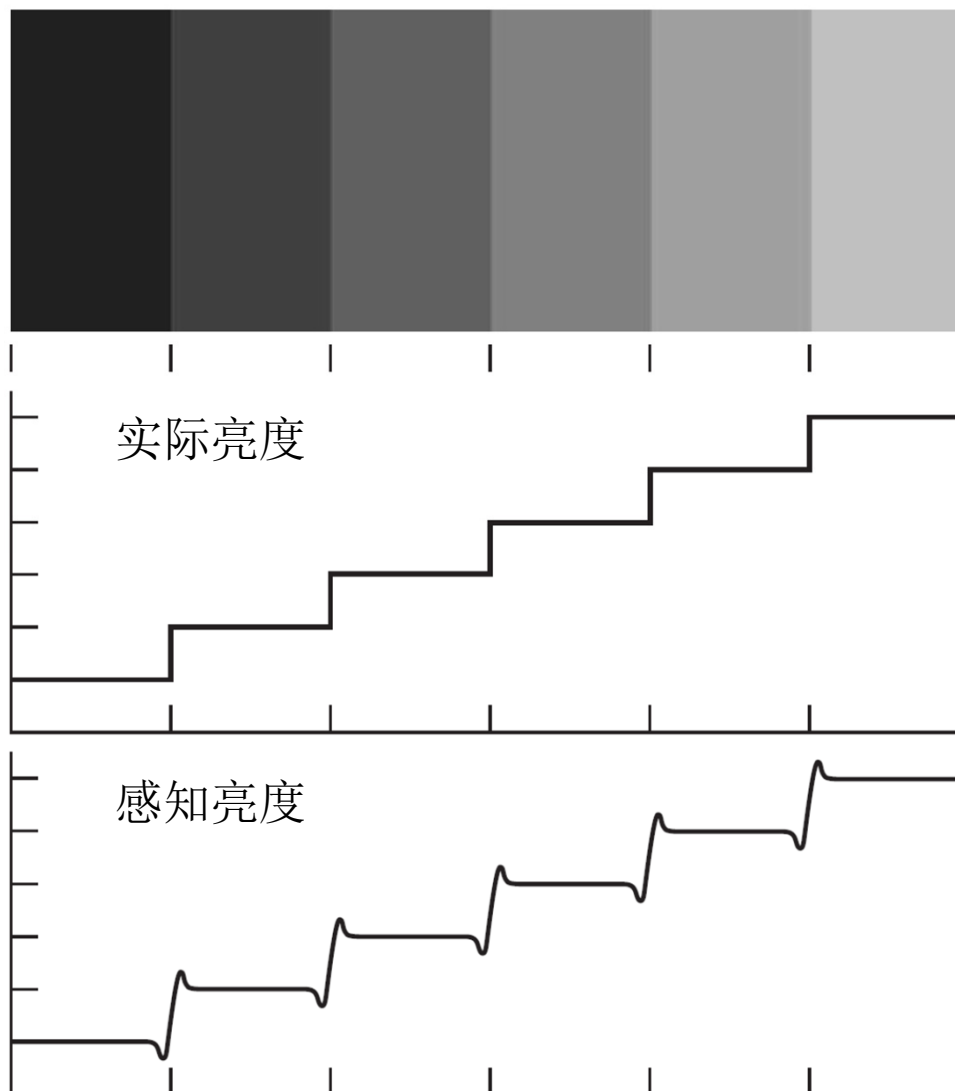
- 人眼可以同时分辨的强度范围有限



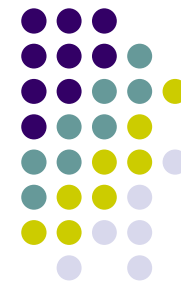
# 感知亮度不是实际亮度的函数



- 马赫带



# 感知亮度不是实际亮度的函数



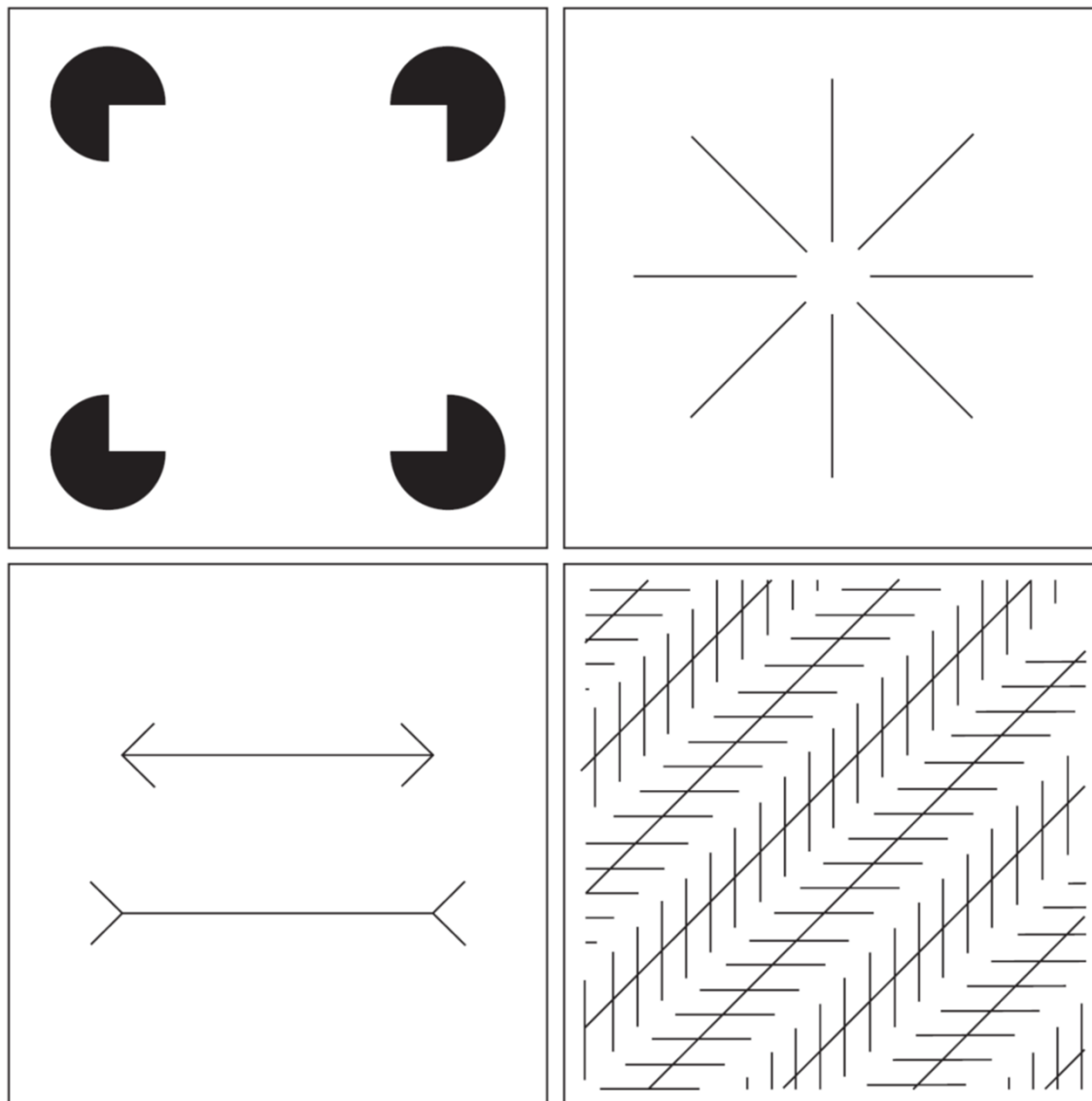
- 同时对比



# 人眼的错觉



眼见  
未必  
为实



# 提纲

- 视觉感知要素
- 光和电磁波谱
- 图像感知和获取
- 图像取样和量化
- 像素间的关系
- 数学工具

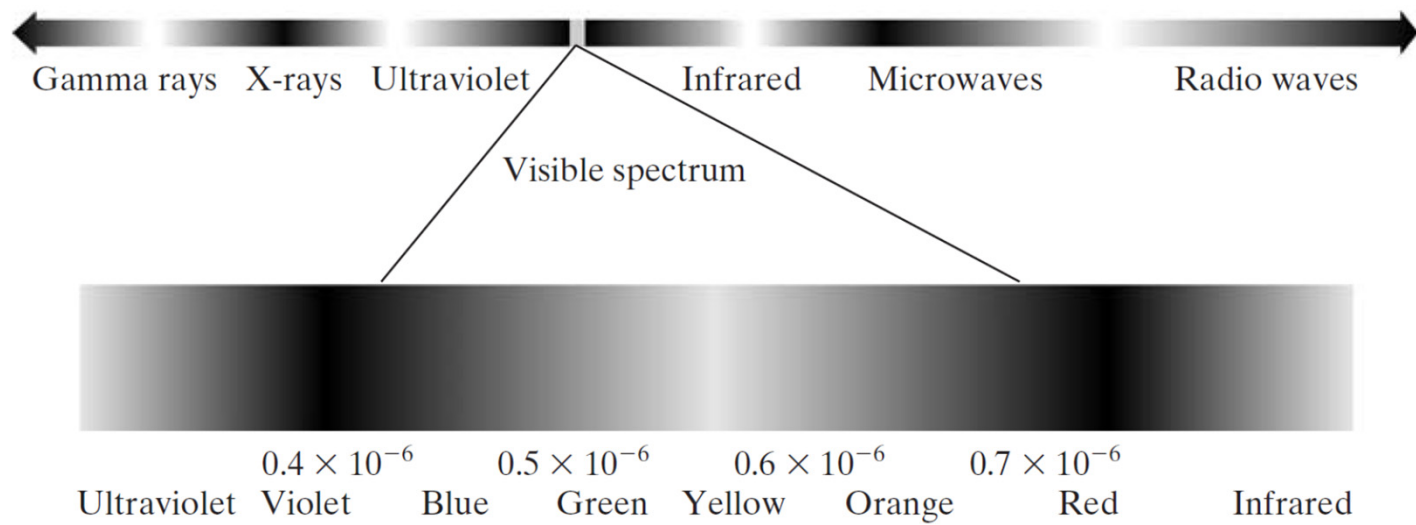
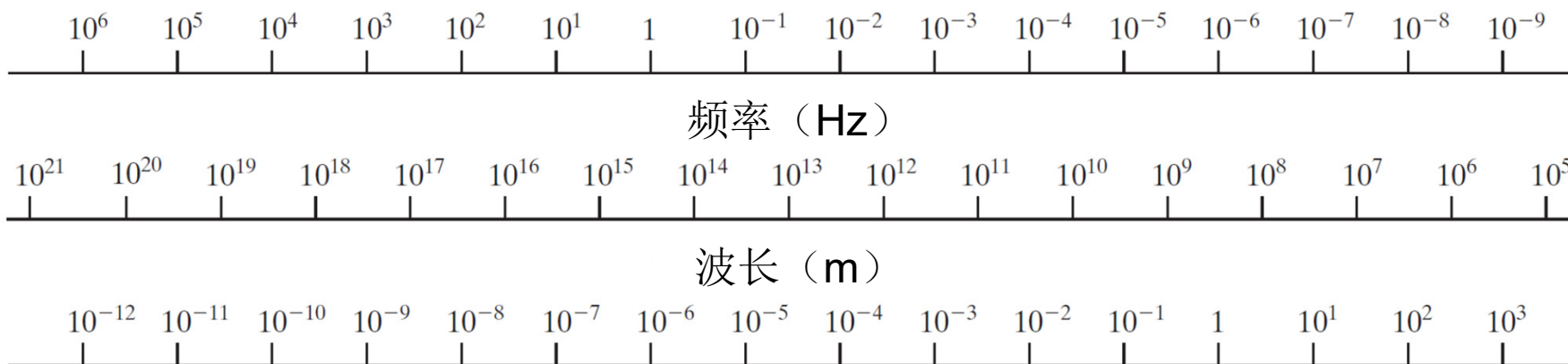


# 电磁波谱

波长  $\lambda = \frac{\text{光速 } c}{\text{频率 } \nu}$ , 能量  $E = \text{普朗克常数 } h \cdot \text{频率 } \nu$



一个光子的能量（电子伏特）





# 可感知的光



- 物体的颜色
  - 均匀反射，则观测到白色
  - 反射特定颜色，则观测到该颜色
- 单色光
  - 没有颜色的光
  - 唯一的属性：强度 (intensity)
  - 感知：黑色、灰色、白色
  - 灰度 (gray level) : 表示强度的数值
  - 单色图像也被称为灰度图像

# 可感知的光



- 彩色光

- 约为0.43微米-0.79微米电磁波



$0.4 \times 10^{-6}$      $0.5 \times 10^{-6}$      $0.6 \times 10^{-6}$      $0.7 \times 10^{-6}$   
Violet    Blue    Green    Yellow    Orange    Red

1. 辐射 (radiance) : 能量 (瓦特)
2. 光强 (luminance) : 感知的能量 (流明)
3. 亮度 (brightness) : 主观描绘

- 观测精度

- 波长必须小于物体的尺寸

# 提纲

- 视觉感知要素
- 光和电磁波谱
- 图像感知和获取
- 图像取样和量化
- 像素间的关系
- 数学工具





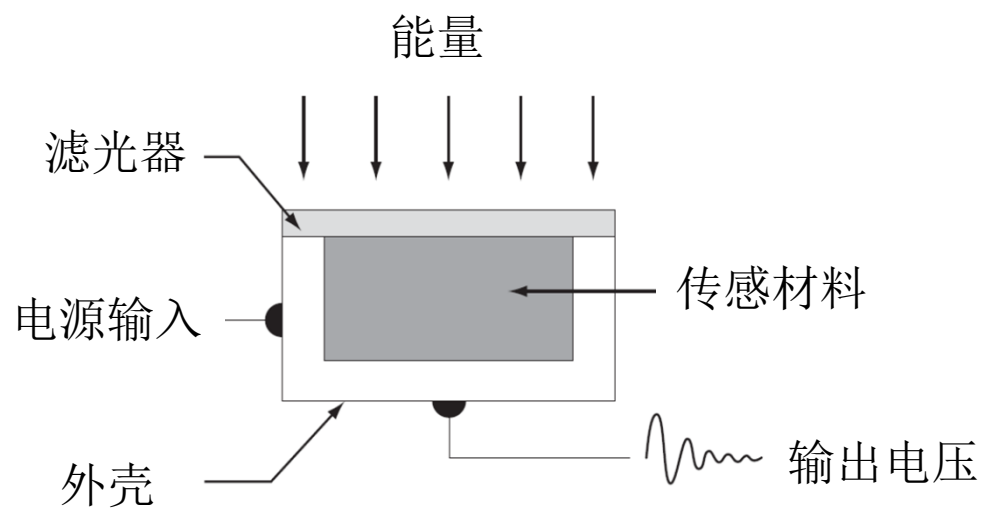
# 图像产生

- 照射源
  - 不局限于可见光
  - X射线、微波、超声波
- 被观测物体
  - 3D物体、分子、沉积岩
  - 反射：日常拍照
  - 透射：X射线诊断
- 光转换器
  - 能量转换为可见光

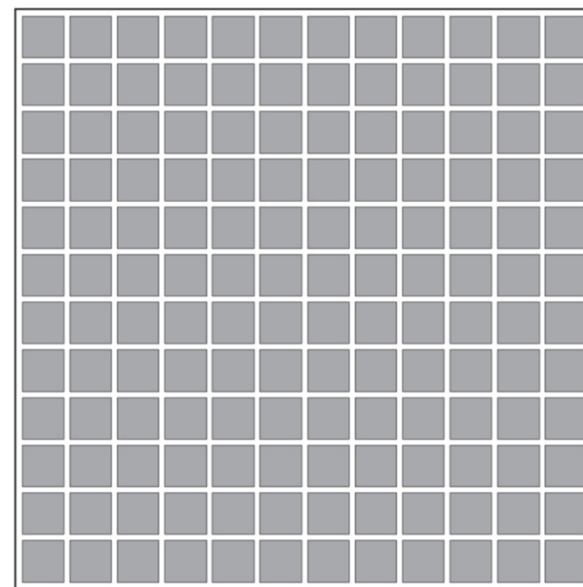
# 传感器



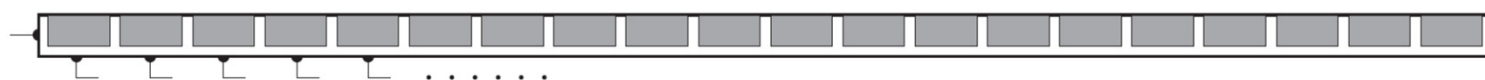
- 将照射能量变化为数字图像



单个成像传感器



阵列传感器

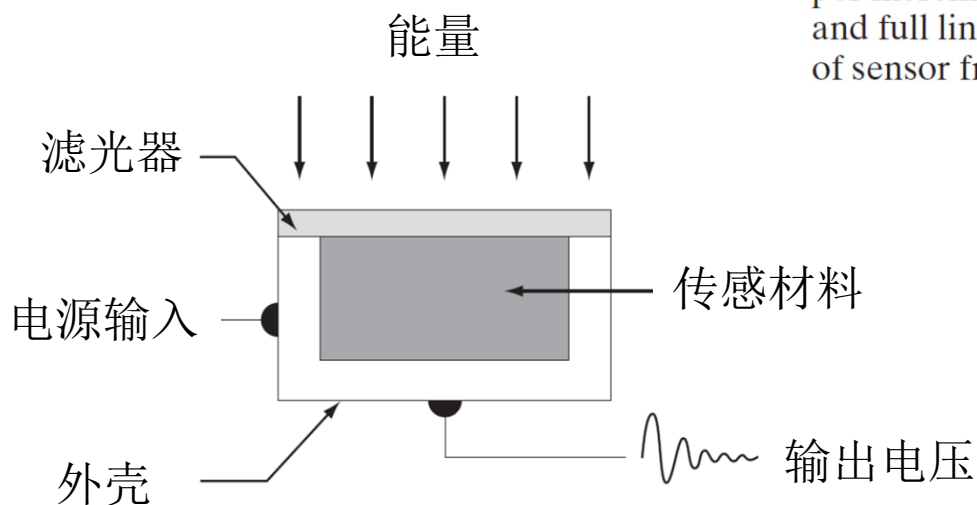
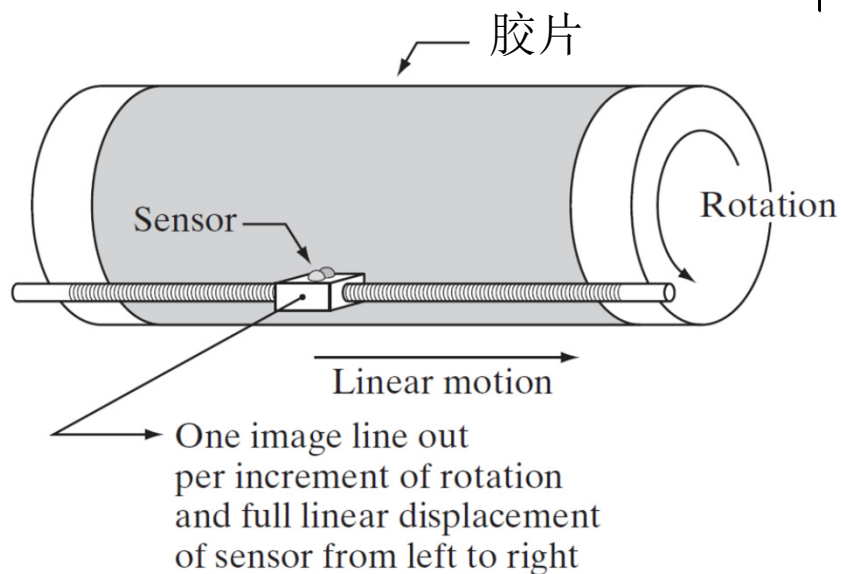


条带传感器

# 单个成像传感器



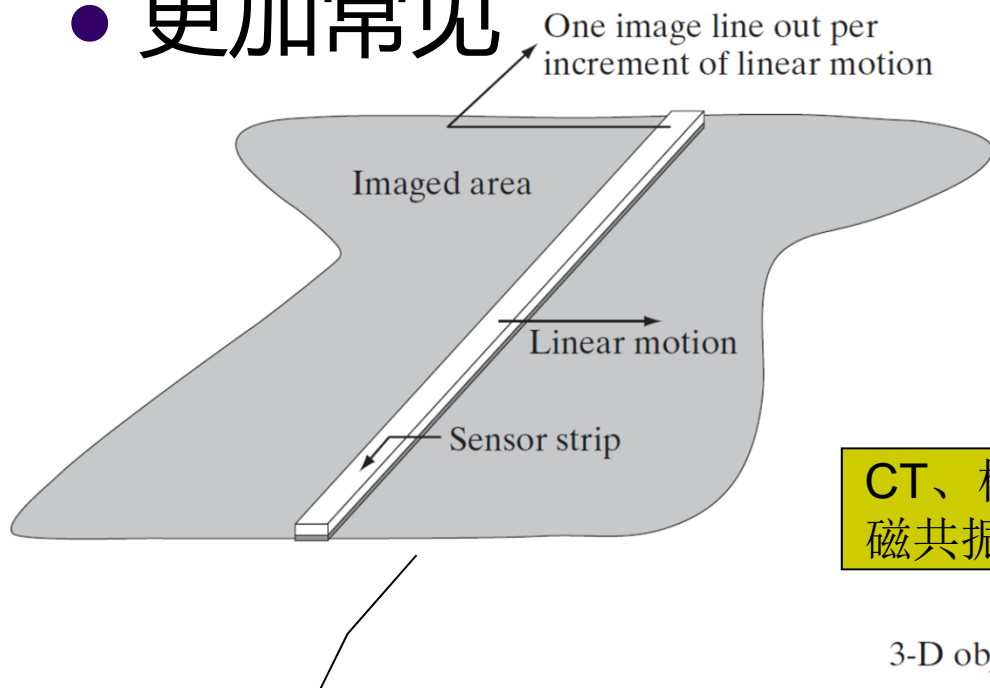
- 光二极管



类似于海报打印

# 条带传感器

- 更加常见



类似于普通激光打印、扫描仪

CT、核磁共振

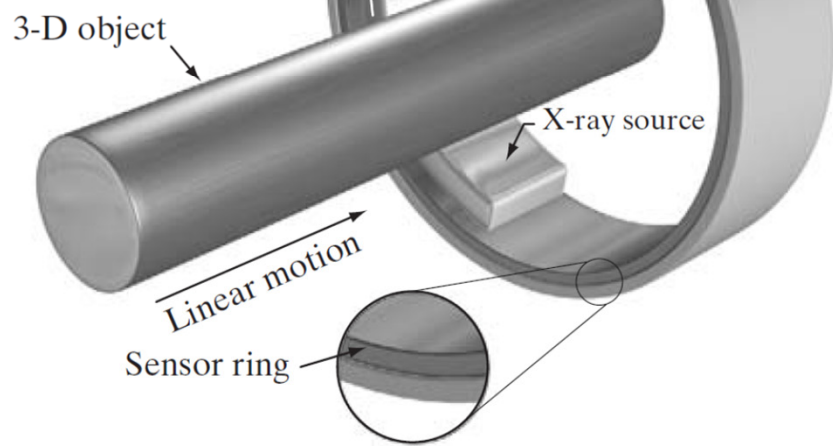
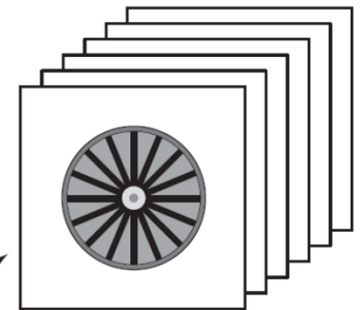
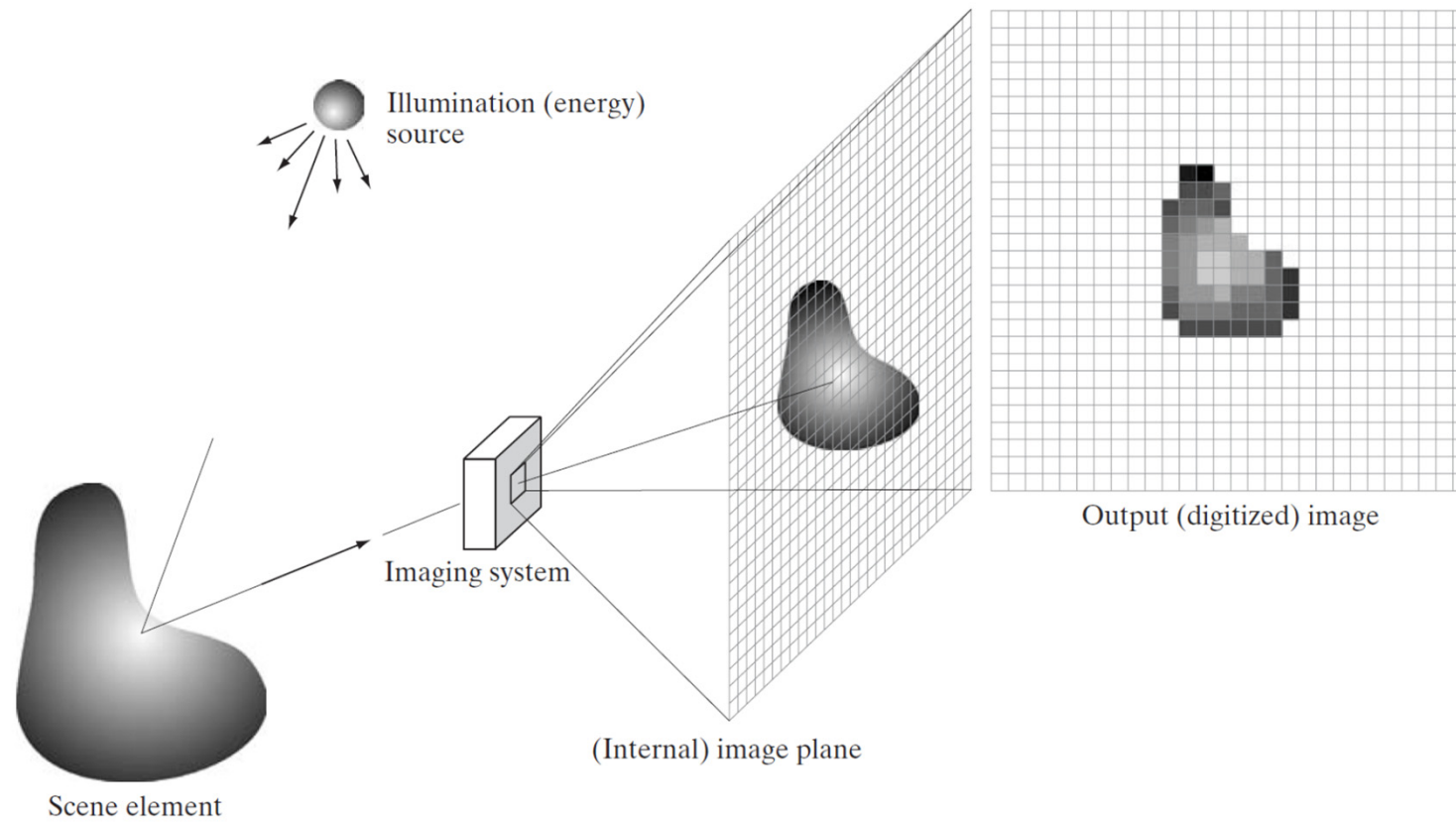


Image reconstruction



# 阵列传感器

- 数码相机、摄像机





# 图像形成模型



- 二维函数  $f(x, y)$

$$0 < f(x, y) < \infty$$

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

- 入射分量  $0 < i(x, y) < \infty$

- 反射分量  $0 < r(x, y) < 1$

- 透射系数

# 举例



- 入射分量  $i(x, y)$ 
  - 晴朗的白天  $90000 \text{ lm/m}^2$
  - 有云的白天  $10000 \text{ lm/m}^2$
  - 晴朗的夜晚  $0.1 \text{ lm/m}^2$
  - 商用办公室  $1000 \text{ lm/m}^2$
- 反射分量  $r(x, y)$ 
  - 黑天鹅绒 0.01
  - 不锈钢 0.65
  - 白色的墙 0.8
  - 雪 0.93



# 灰度范围

- 单色图像的灰度值

$$L_{\min} \leq \ell \leq L_{\max}$$

- 最小值  $L_{\min} = i_{\min} r_{\min}$

- 最大值  $L_{\max} = i_{\max} r_{\max}$

- 商用办公室：[10,1000]

- 灰度范围

- $[L_{\min}, L_{\max}]$

- 归一化到  $[0, L - 1]$

- 0表示黑色，  $L - 1$ 表示白色， 其余为灰色

# 提纲

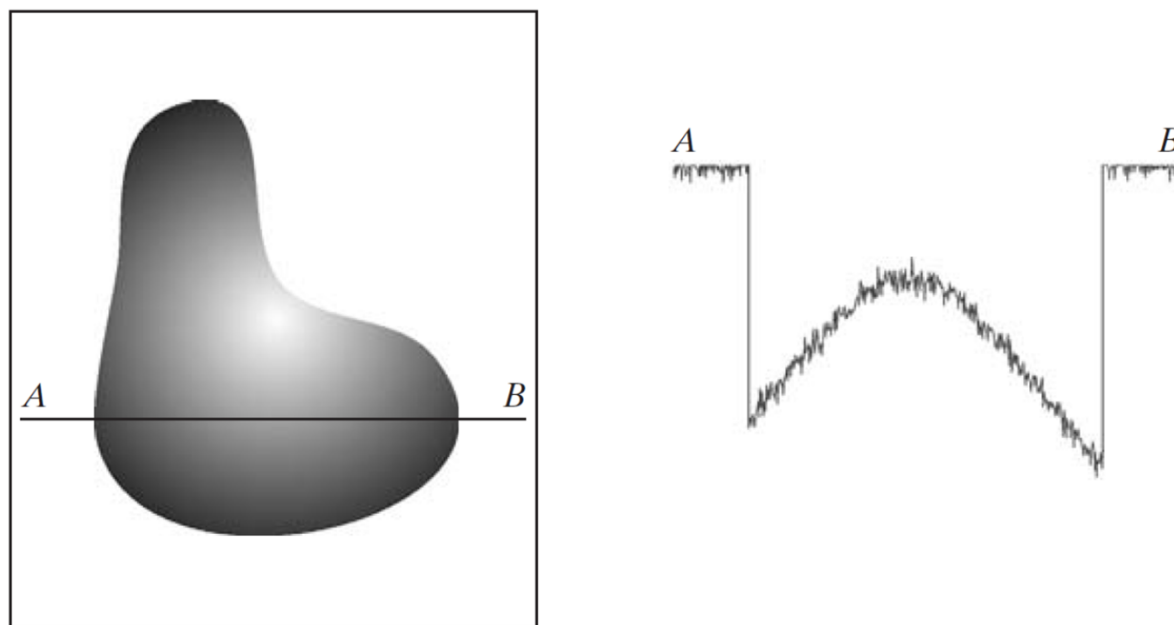
- 视觉感知要素
- 光和电磁波谱
- 图像感知和获取
- 图像取样和量化
- 像素间的关系
- 数学工具



# 基本概念



- 目的：把连续图像转换为数字图像

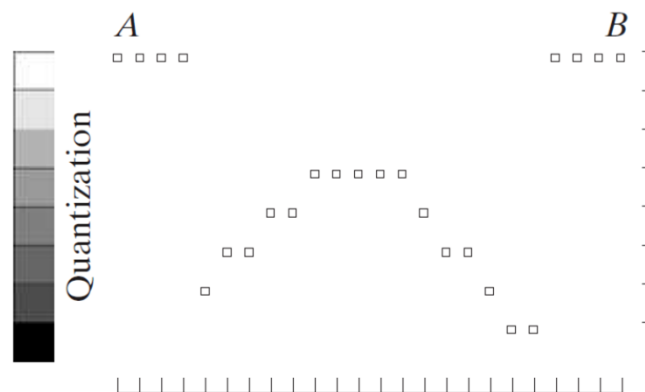
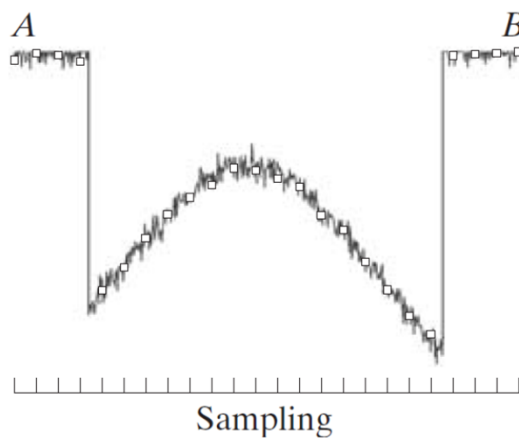
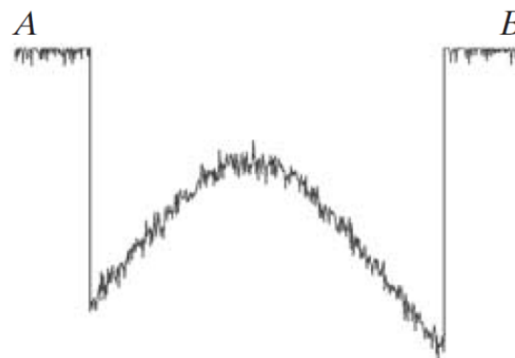
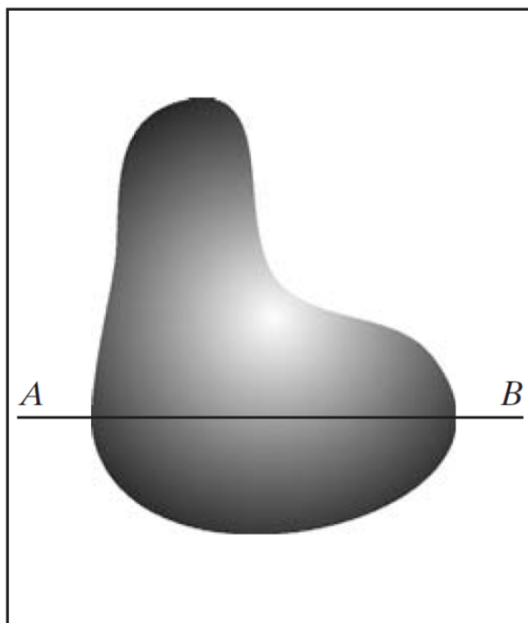


- 取样：对坐标进行数字化
- 量化：对幅值进行数字化

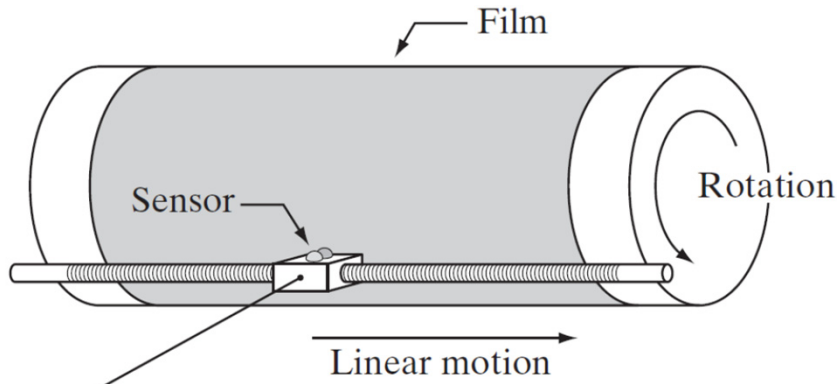
# 基本概念



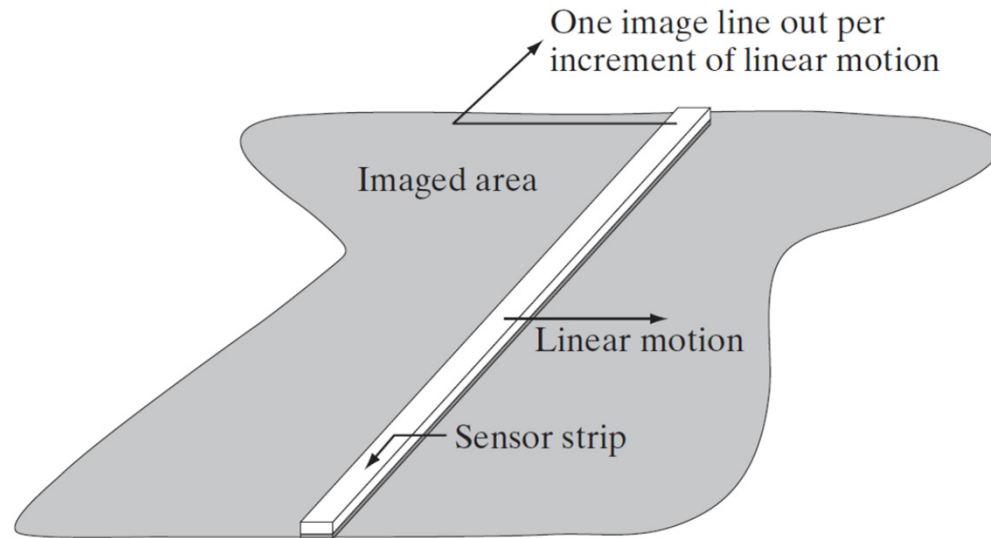
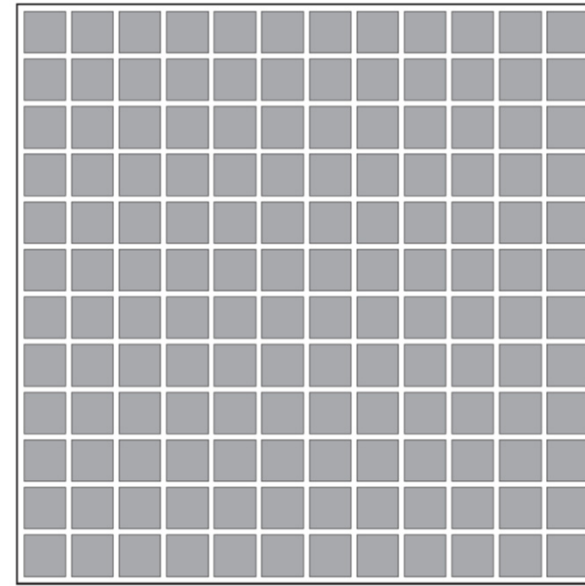
- 举例



# 基本概念

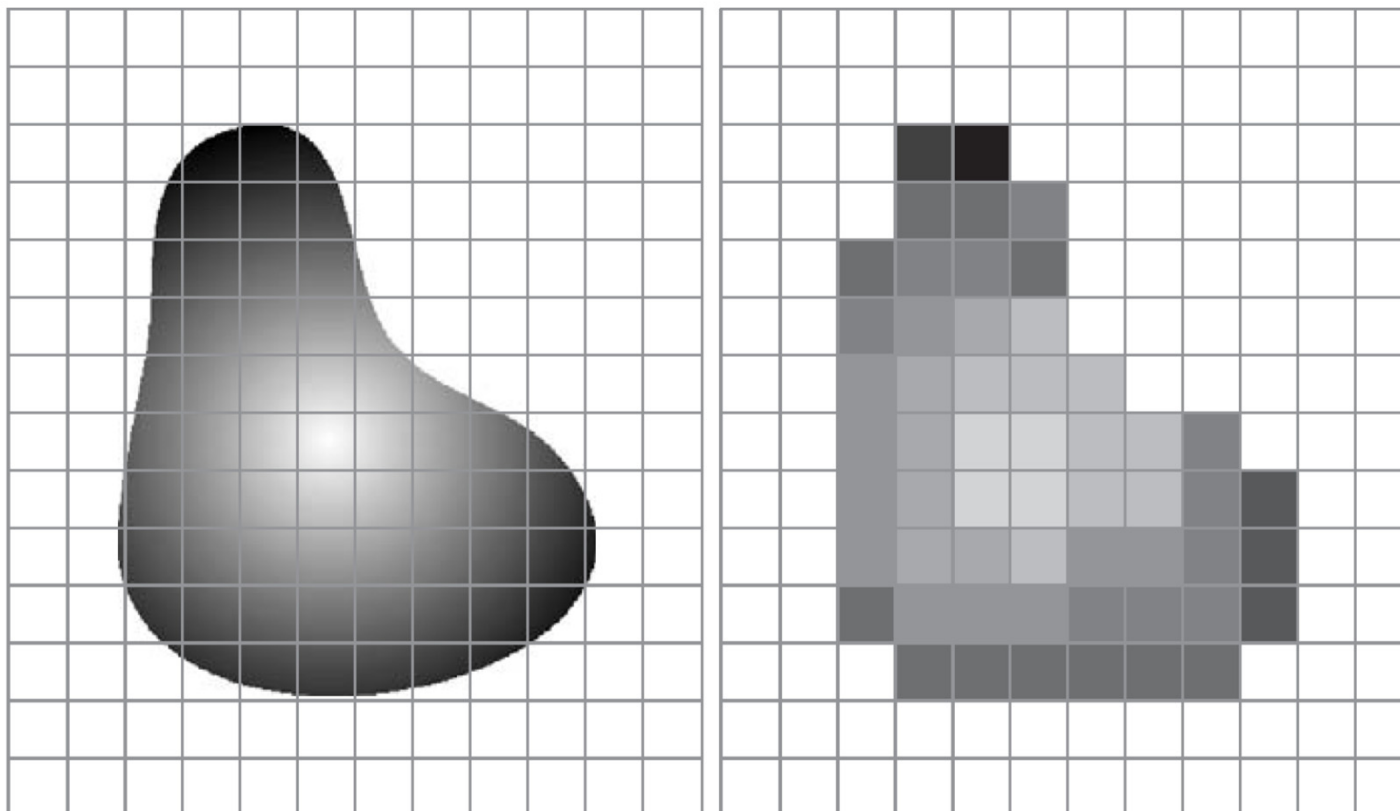


One image line out per increment of rotation and full linear displacement of sensor from left to right



# 基本概念

- 阵列传感器





# 表示数字图像

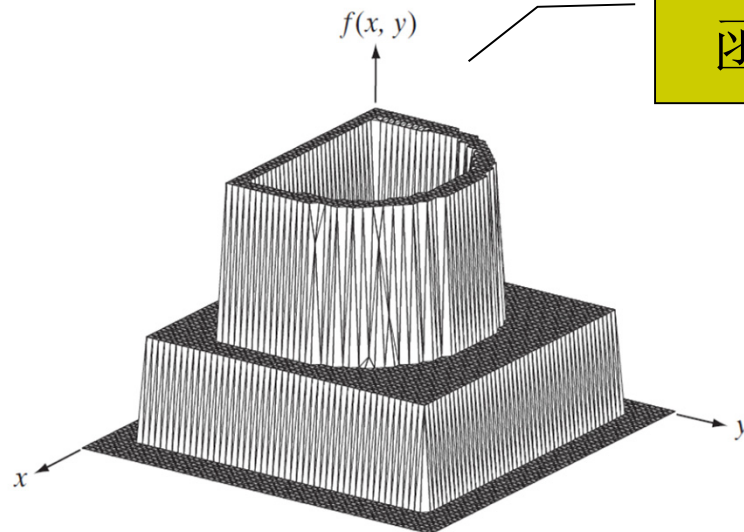


- 2维数组  $f(x, y)$ 
  - 包含  $M$  行、 $N$  列
  - $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$
  - $y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$
  - $f(x, y)$  表示在  $(x, y)$  处的值
- 空间域
  - 图像坐标所张成的实平面
- 空间坐标
  - $x$  和  $y$

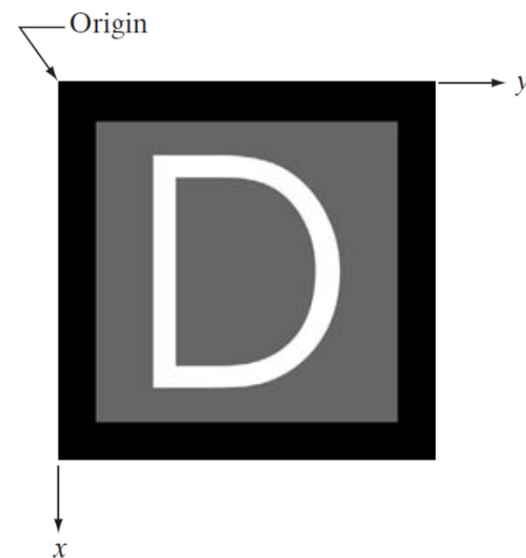
# 表示数字图像



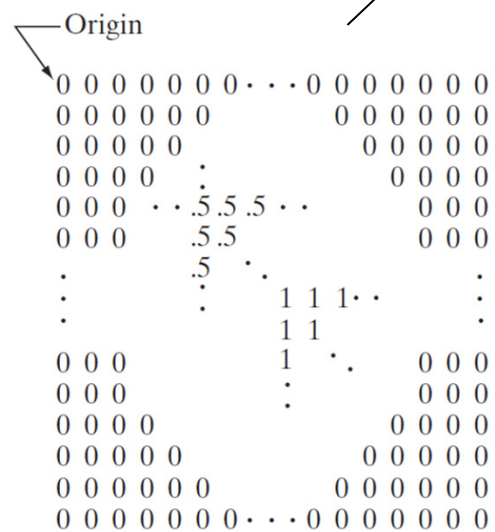
函数



可视的灰度阵列



2维数组



# 表示数字图像



- 公式形式的2维数组

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \cdots & f(0, N - 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \cdots & f(1, N - 1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(M - 1, 0) & f(M - 1, 1) & \cdots & f(M - 1, N - 1) \end{bmatrix}$$

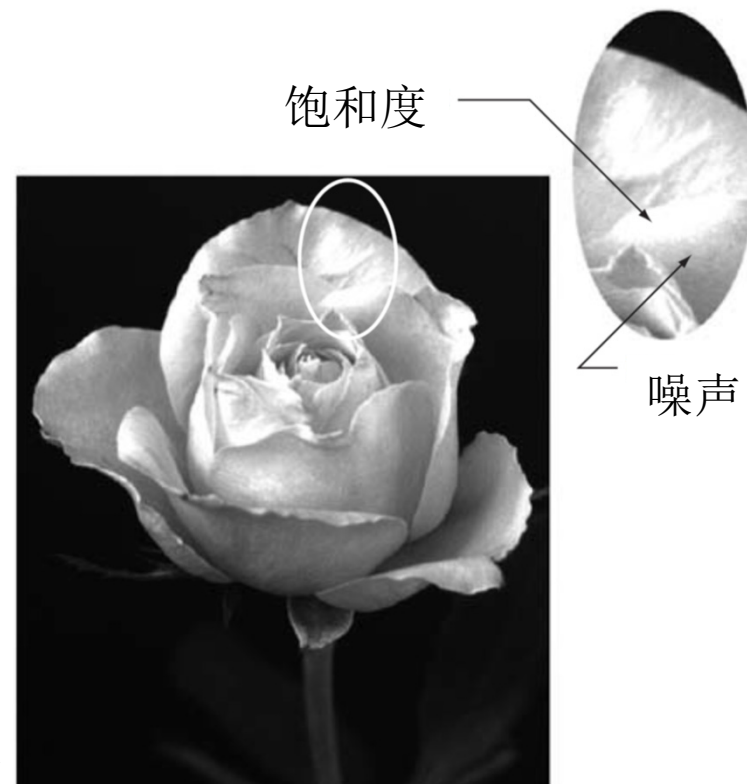
- 右边的元素被称为像素

- 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{M-1,0} & a_{M-1,1} & \cdots & a_{M-1,N-1} \end{bmatrix}$$

# 表示数字图像

- 行数  $M \in Z$
- 列数  $N \in Z$
- 灰度级数  $L = 2^k, k \in Z$ 
  - 灰度值  $[0, L - 1]$  内的整数
- 动态范围
  - 最大可测量灰度和最小可检测灰度的比值
- 图像的对比度
  - 图像内最高和最低灰度之间的差值
  - 动态范围广、对比度高



# 表示数字图像



- 存储一幅图像的比特数

$$b = M \times N \times k$$

- 当  $M = N$  时,  $b = N^2 k$

图像有  $2^k$  个灰度级别时, 称为  $k$  比特图像

$N/k$	1 ( $L = 2$ )	2 ( $L = 4$ )	3 ( $L = 8$ )	4 ( $L = 16$ )	5 ( $L = 32$ )	6 ( $L = 64$ )	7 ( $L = 128$ )	8 ( $L = 256$ )
32	1,024	2,048	3,072	4,096	5,120	6,144	7,168	8,192
64	4,096	8,192	12,288	16,384	20,480	24,576	28,672	32,768
128	16,384	32,768	49,152	65,536	81,920	98,304	114,688	131,072
256	65,536	131,072	196,608	262,144	327,680	393,216	458,752	524,288
512	262,144	524,288	786,432	1,048,576	1,310,720	1,572,864	1,835,008	2,097,152
1024	1,048,576	2,097,152	3,145,728	4,194,304	5,242,880	6,291,456	7,340,032	8,388,608
2048	4,194,304	8,388,608	12,582,912	16,777,216	20,971,520	25,165,824	29,369,128	33,554,432
4096	16,777,216	33,554,432	50,331,648	67,108,864	83,886,080	100,663,296	117,440,512	134,217,728
8192	67,108,864	134,217,728	201,326,592	268,435,456	335,544,320	402,653,184	469,762,048	536,870,912

# 空间和灰度分辨率



- 空间分辨率
  - 图像中可辨别的最小细节的度量
  - 单位距离线对数(line pairs per unit distance)
  - 单位距离点数(dots per unit distance)
    - 单位英寸点数(dots per inch, dpi)
    - 报纸 75 dpi, 杂志 133 dpi, 书 2044 dpi
- 空间单位很重要
  - 图像的像素大小并不能表示清晰程度
  - 像素大小可以用来反映设备的成像能力

# 空间和灰度分辨率



- 灰度分辨率
  - 灰度级别中可体现的最小变化
    - 灰度级别通常是2的整数次幂，如 $2^8 = 256$
  - 用比特数表示灰度分辨率
    - 256个灰度级别意味着8比特灰度分辨率
- 真正可辨别的灰度变化
  - 噪声
  - 饱和度
  - 人类感知能力

# 举例

- 空间分辨率

1250  
dpi



300  
dpi



150  
dpi



72  
dpi





# 举例

- 灰度分辨率

256  
灰度级



128  
灰度级

64  
灰度级



32  
灰度级

# 举例

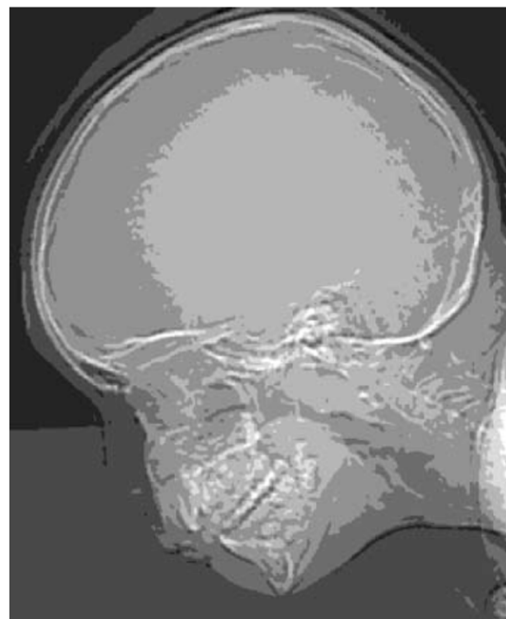
- 灰度分辨率

伪轮廓

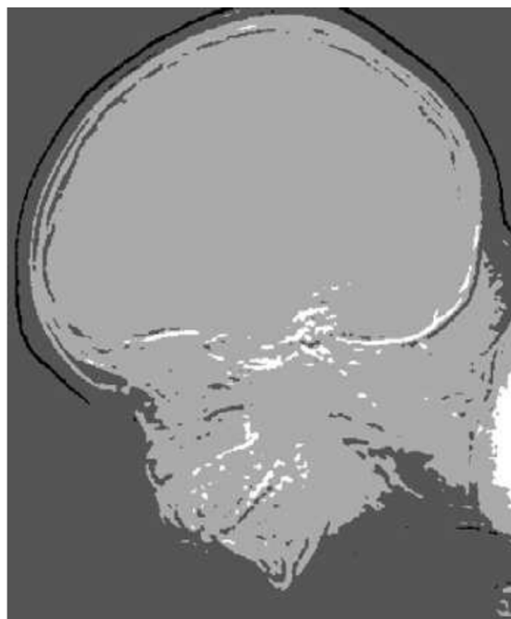
16  
灰度级



8  
灰度级



4  
灰度级



2  
灰度级



# 联合影响



少量细节

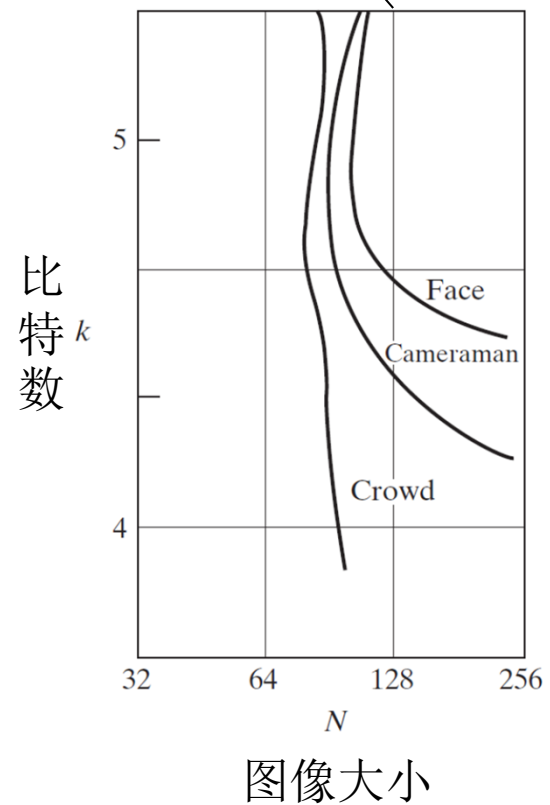


中等细节



大量细节

1. 图像细节越多，需要的比特数越少
2. 增加空间分辨率，可适当降低比特数



# 最佳量化



- 最佳量化：使量化误差最小的量化方法

- 使用均方误差评价量化质量

- 计算过程

- $Z$ 和 $q$ 分别代表图像灰度和其量化值

- $p(Z)$ 为像素灰度概率密度函数

- $Z$ 的取值范围 $[H_1, H_2]$ ，量化层数为 $K$

- 均方误差 
$$\delta^2 = \sum_{k=1}^K \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (Z - q_k)^2 p(Z) dZ$$

- 属于 $[Z_k, Z_{k+1}]$ 的灰度被量化为 $q_k$ ， $k = 1, \dots, K$

# 最佳量化



- 优化问题

$$\min_{Z_1, \dots, Z_{K+1}, q_1, \dots, q_K} \delta^2 = \sum_{k=1}^K \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (Z - q_k)^2 p(Z) dZ$$

- 假设 $p(Z)$ 为均匀分布

$$\begin{aligned} \delta^2 &= p(Z) \sum_{k=1}^K \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (Z - q_k)^2 dZ \\ &= p(Z) \frac{1}{3} \sum_{k=1}^K [(Z_{k+1} - q_k)^3 - (Z_k - q_k)^3] \end{aligned}$$

- 上式分别对 $Z_k$ 和 $q_k$ 求导, 并令等于0

# 最佳量化



- 目标函数 
$$\sum_{k=1}^K [(Z_{k+1} - q_k)^3 - (Z_k - q_k)^3]$$

- 例如对 $Z_2$ 求导

$$0 = -3(Z_2 - q_2)^2 + 3(Z_2 - q_1)^2$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$$

- 以此类推

$$Z_k = \frac{1}{2}(q_{k-1} + q_k), \quad k = 2, 3, \dots, K$$

- $Z_k$  位于 $q_{k-1}$ 和 $q_k$ 的中间

# 最佳量化



- 目标函数 
$$\sum_{k=1}^K [(Z_{k+1} - q_k)^3 - (Z_k - q_k)^3]$$

- 例如对 $q_2$ 求导

$$0 = -3(Z_3 - q_2)^2 + 3(Z_2 - q_2)^2$$

$$q_2 = \frac{1}{2}(Z_3 + Z_2)$$

- 以此类推

$$q_k = \frac{1}{2}(Z_{k+1} + Z_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, K$$

- $q_k$  位于 $Z_k$ 和 $Z_{k+1}$ 的中间

# 最佳量化



- 结论

- $Z_k$  位于  $q_{k-1}$  和  $q_k$  的中间,  $q_k$  位于  $Z_k$  和  $Z_{k+1}$  的中间
- 将区间  $[H_1, H_2]$  分为连续的  $K$  等份

- $\left[ Z_1 = H_1, Z_2 = H_1 + \frac{H_2 - H_1}{K} \right]$

- $\left[ Z_2 = H_1 + \frac{H_2 - H_1}{K}, Z_3 = H_1 + \frac{2(H_2 - H_1)}{K} \right], \dots,$

- $\left[ Z_K = H_1 + \frac{(K-1)(H_2 - H_1)}{K}, Z_{K+1} = H_2 \right]$

- 将  $q_k$  设置为区间  $[Z_k, Z_{k+1}]$  的中心

- $q_k = \frac{1}{2}(Z_{k+1} + Z_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, K$

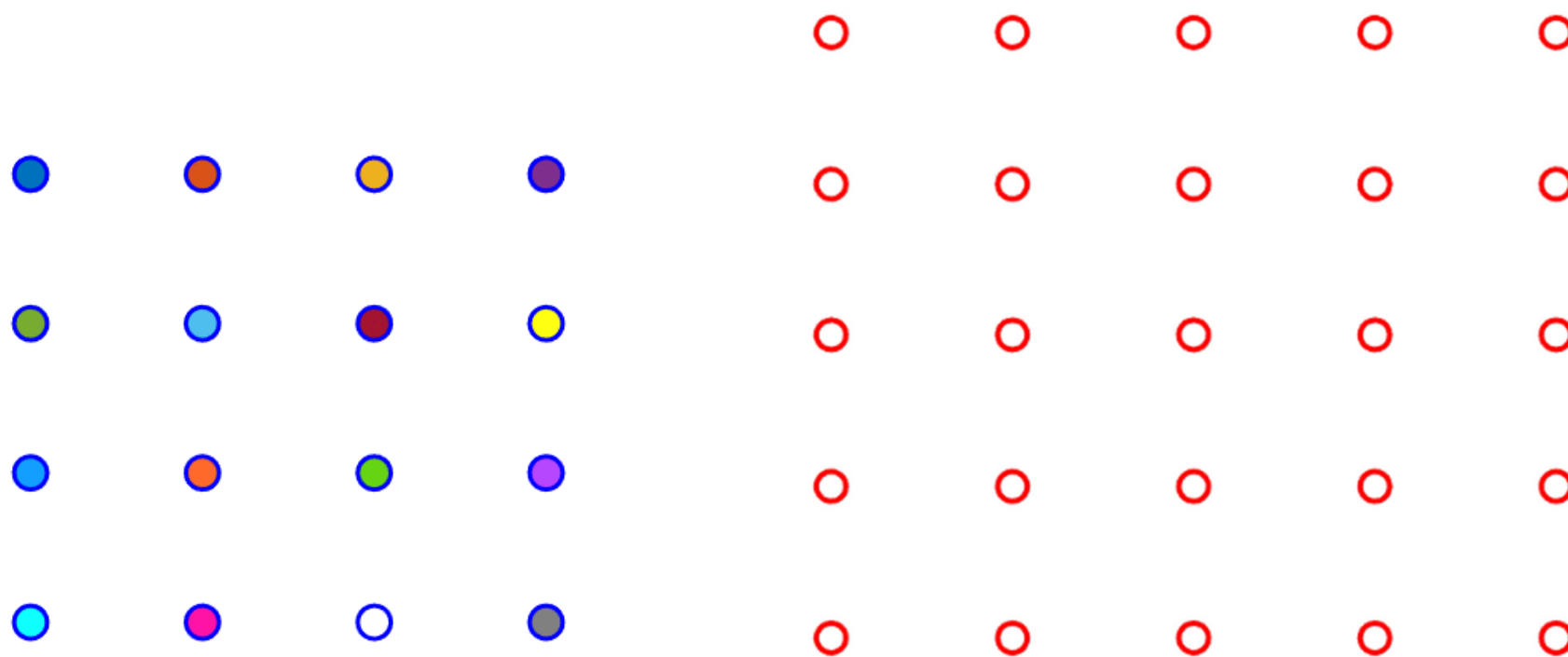
- 量化误差:  $\frac{(H_2 - H_1)^2}{12K^2}$



# 图像内插



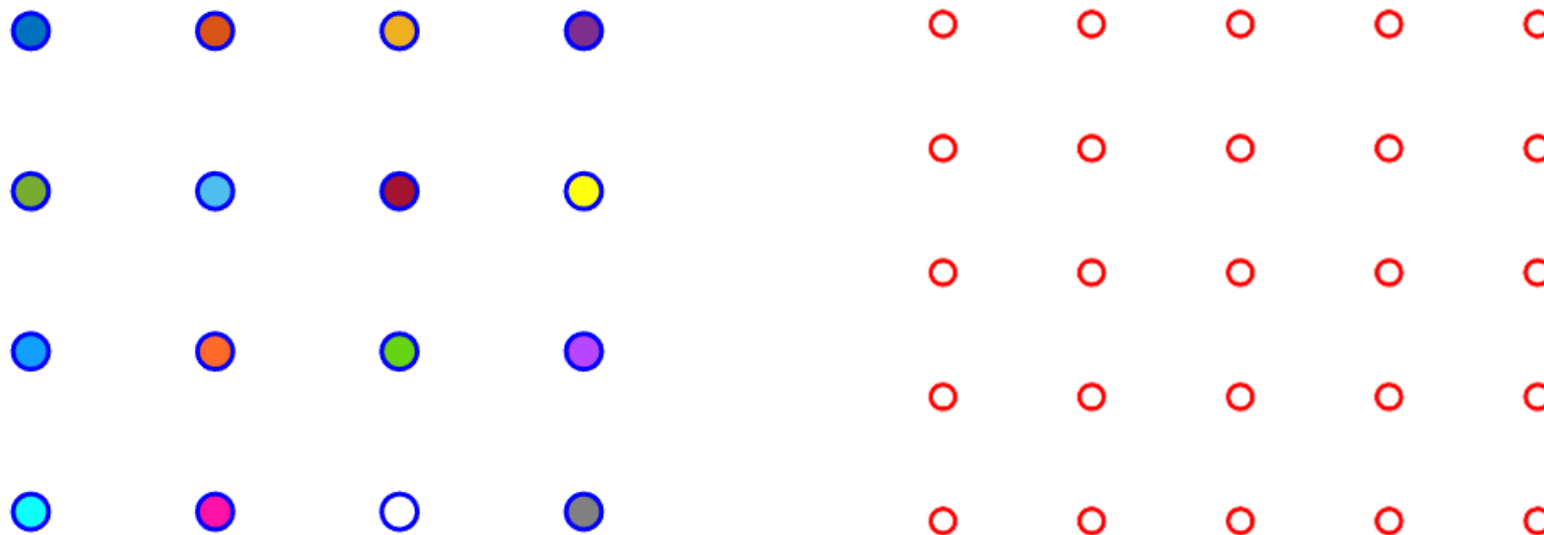
- 用已知数据来估计未知位置的数值
  - 放大、缩小、旋转、几何校正



# 图像内插



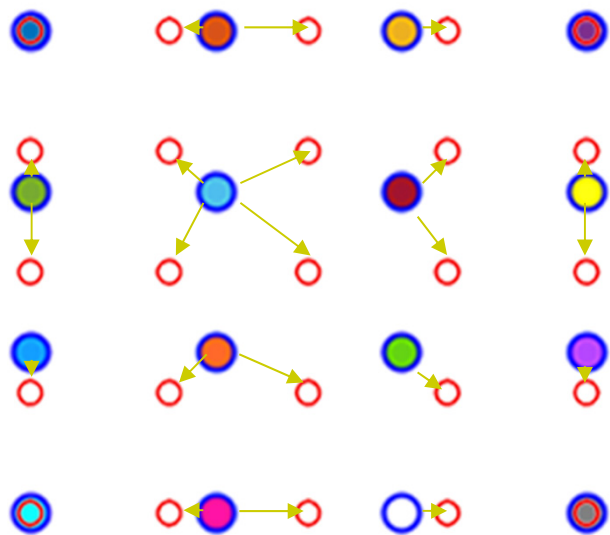
- 用已知数据来估计未知位置的数值
  - 放大、缩小、旋转、几何校正





# 图像内插

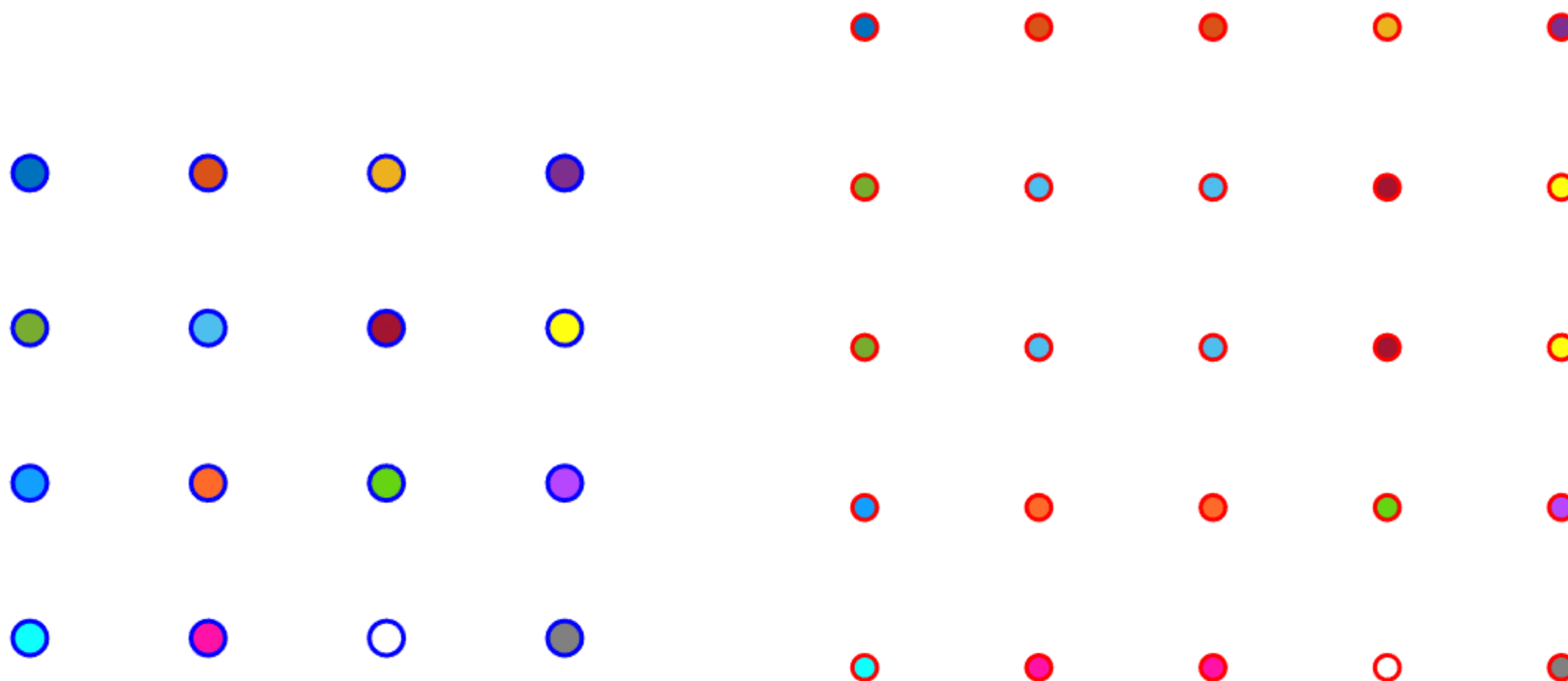
- 用已知数据来估计未知位置的数值
  - 放大、缩小、旋转、几何校正



# 图像内插



- 用已知数据来估计未知位置的数值
  - 放大、缩小、旋转、几何校正

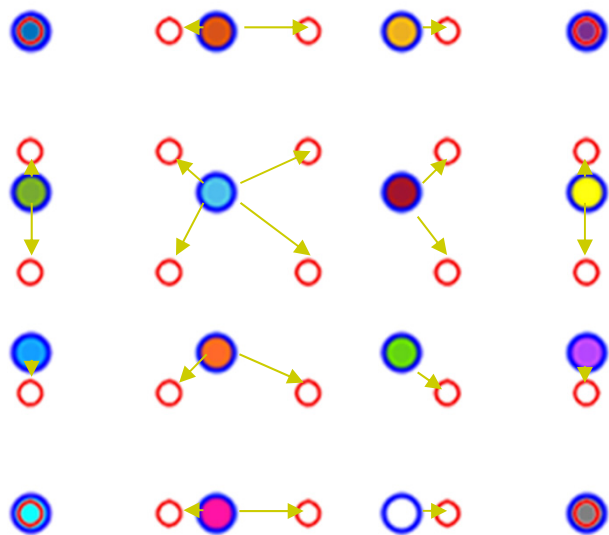


# 图像内插方法



## 1. 最近邻内插

- 使用最近邻的像素进行赋值



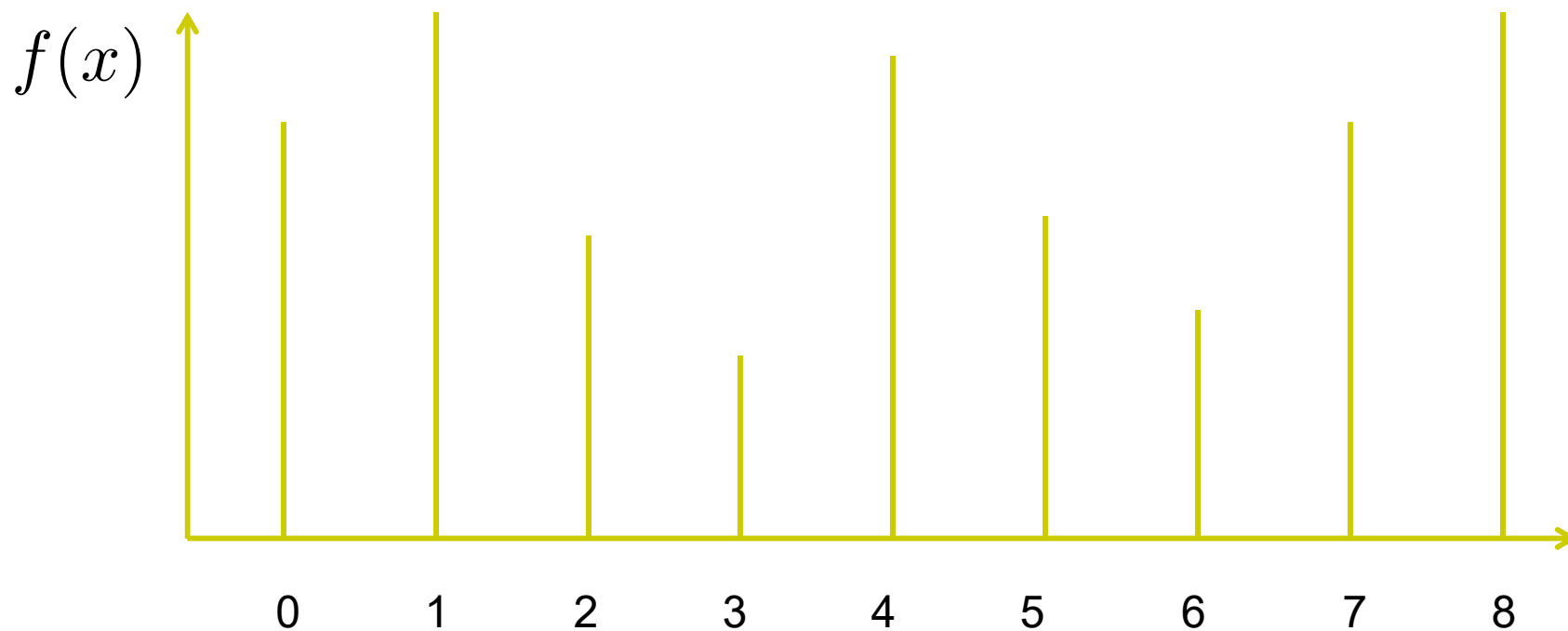
# 图像内插方法



## 1. 最近邻内插

$$f(0) = 10$$

$$f(1) = 12$$



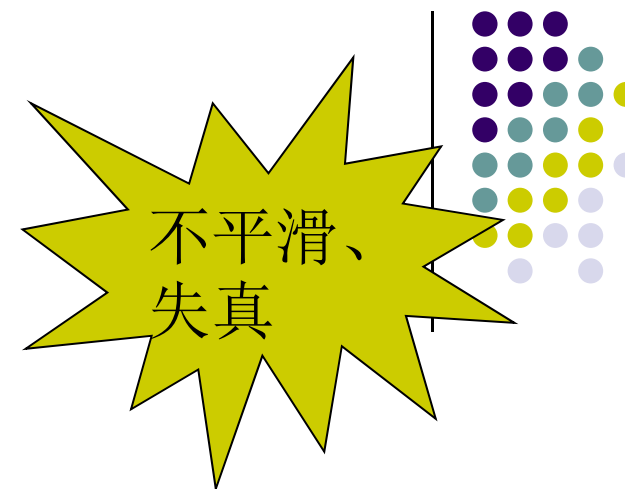
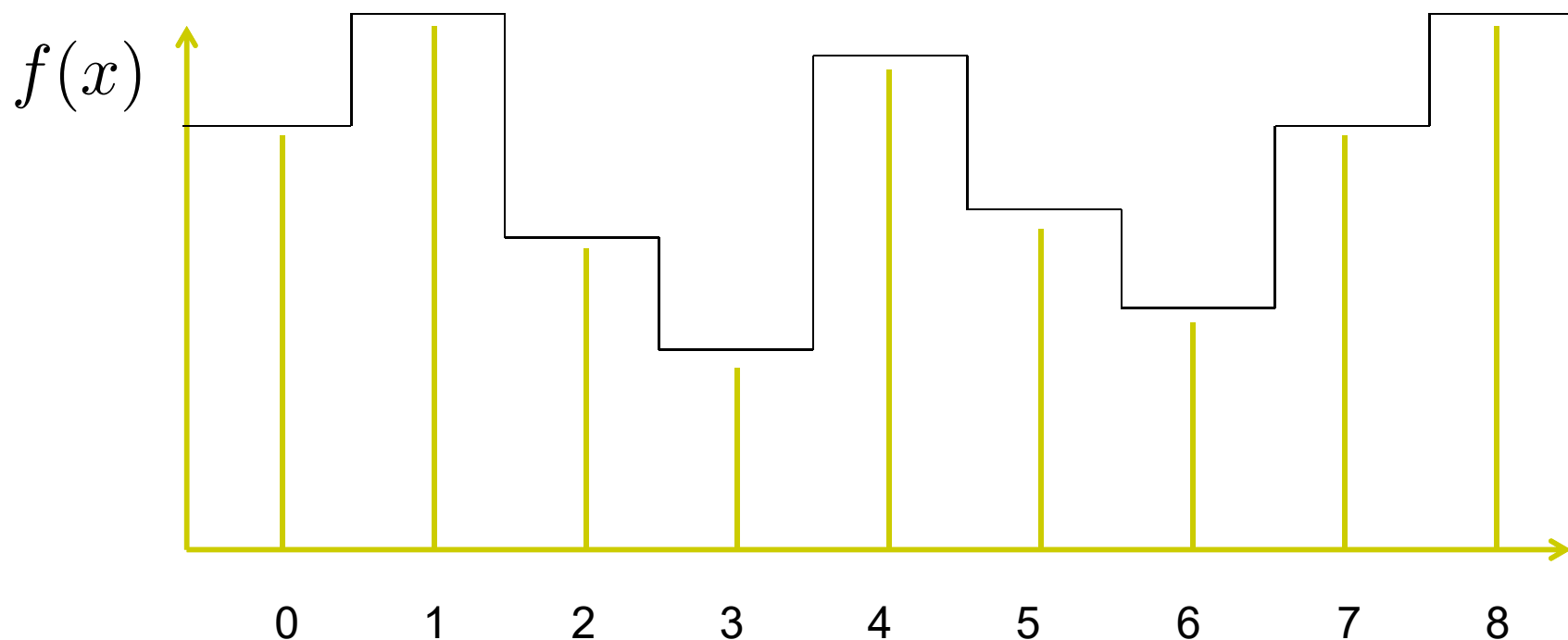
# 图像内插方法

## 1. 最近邻内插

$$f(0) = 10$$

$$f(1) = 12$$

$$f(0.4) = f(0), f(0.6) = f(1), f(0.5) = \dots$$



# 图像内插方法



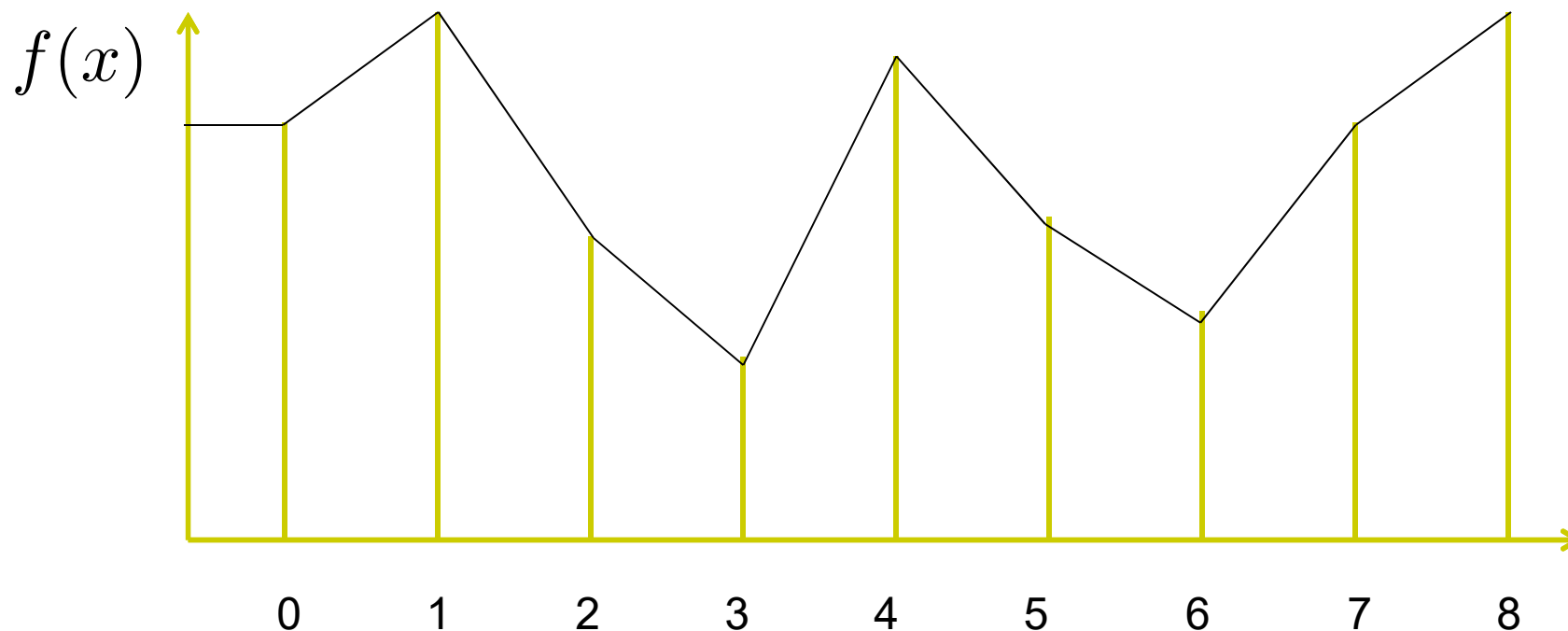
## 2. 双线性内插

- 线性内插

$$f(0) = 10, f(1) = 12$$

$$f(x) = 10 + x * 2$$

$$f(0.4) = 10.8$$





# 图像内插方法



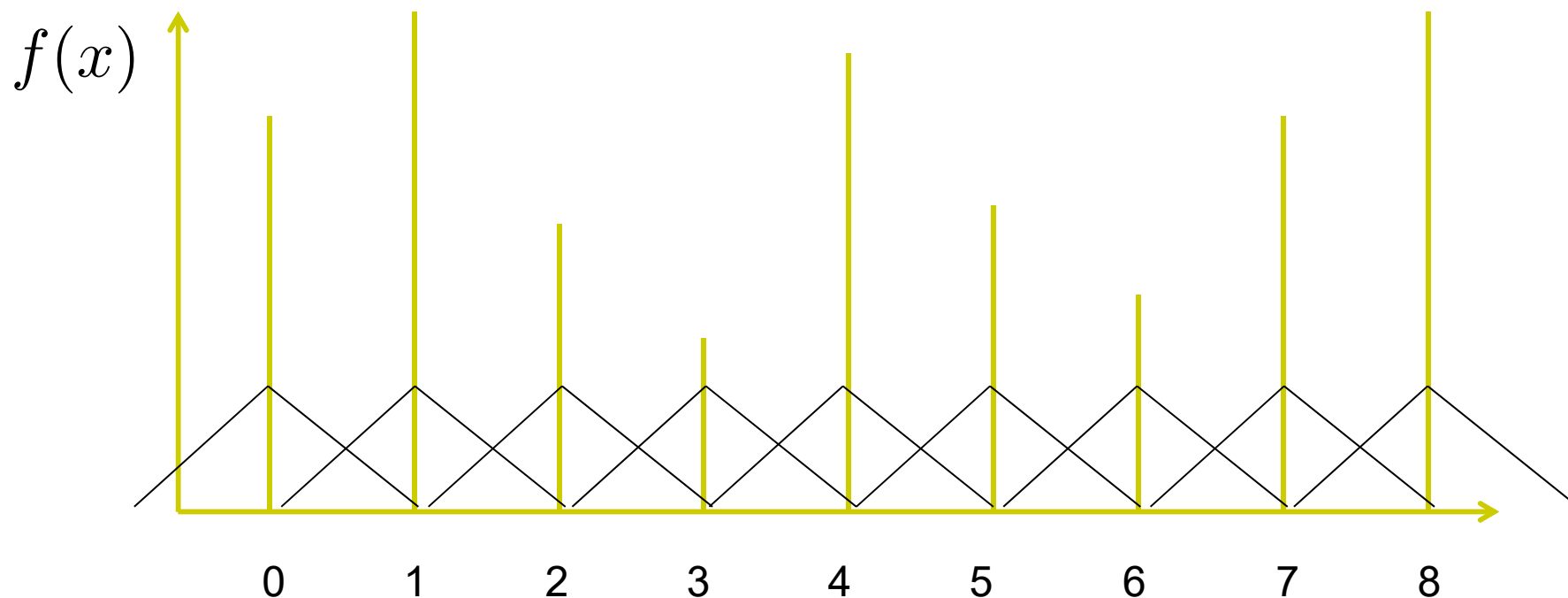
## 2. 双线性内插

$$f(0) = 10, f(1) = 12$$

- 线性内插

$$f(x) = 10 + x * 2$$

$$f(0.4) = 0.6 * 10 + 0.4 * 12 = 6 + 4.8 = 10.8$$



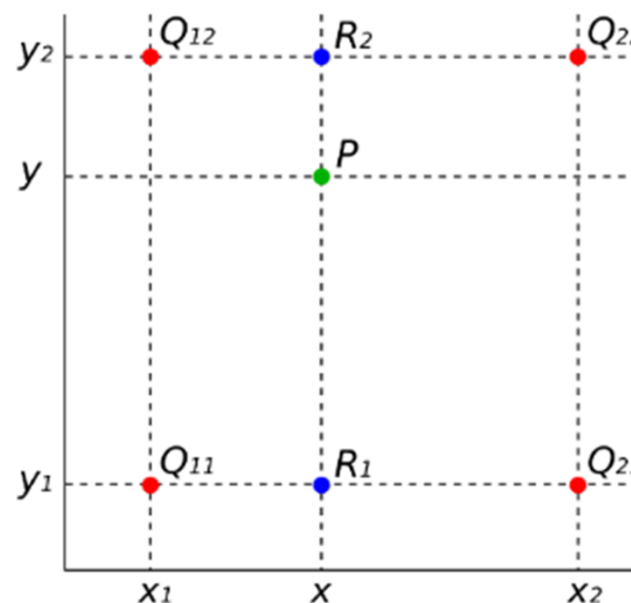


# 图像内插方法



## 2. 双线性内插

$$f(x, y_1) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{21}),$$
$$f(x, y_2) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{22}).$$



$$f(x, y) \approx \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(x, y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f(x, y_2)$$
$$= \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} \left( \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{21}) \right) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \left( \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{22}) \right)$$
$$= \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (f(Q_{11})(x_2 - x)(y_2 - y) + f(Q_{21})(x - x_1)(y_2 - y) + f(Q_{12})(x_2 - x)(y - y_1) + f(Q_{22})(x - x_1)(y - y_1))$$
$$= \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \begin{bmatrix} x_2 - x & x - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(Q_{11}) & f(Q_{12}) \\ f(Q_{21}) & f(Q_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 - y \\ y - y_1 \end{bmatrix}.$$



# 图像内插方法

## 2. 双线性内插

- 书上的版本

$$f(x, y) \approx a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy,$$

- 利用4个近邻构造方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_1 & y_2 & x_1 y_2 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(Q_{11}) \\ f(Q_{12}) \\ f(Q_{21}) \\ f(Q_{22}) \end{bmatrix}$$

- 求解方程组

# 图像内插方法



## 2. 双线性内插

- 书上的版本

$$f(x, y) \approx a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy,$$

- 利用4个近邻构造方程组

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{f(Q_{11})x_2y_2}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)} + \frac{f(Q_{12})x_2y_1}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)} + \frac{f(Q_{21})x_1y_2}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)} + \frac{f(Q_{22})x_1y_1}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}, \\ a_1 &= \frac{f(Q_{11})y_2}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)} + \frac{f(Q_{12})y_1}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)} + \frac{f(Q_{21})y_2}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)} + \frac{f(Q_{22})y_1}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)}, \\ a_2 &= \frac{f(Q_{11})x_2}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)} + \frac{f(Q_{12})x_2}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)} + \frac{f(Q_{21})x_1}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)} + \frac{f(Q_{22})x_1}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)}, \\ a_3 &= \frac{f(Q_{11})}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)} + \frac{f(Q_{12})}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)} + \frac{f(Q_{21})}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)} + \frac{f(Q_{22})}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}. \end{aligned}$$

# 图像内插方法



## 2. 双线性内插

- 其他形式

$$f(x, y) \approx b_{11} f(Q_{11}) + b_{12} f(Q_{12}) + b_{21} f(Q_{21}) + b_{22} f(Q_{22}),$$

- 根据前面的结果, 可得

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_1 & y_2 & x_1 y_2 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \end{bmatrix}^{-1} \right)^T \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \end{bmatrix}$$

# 图像内插方法



## 3. 双三次内插

- 函数 $f$ , 一阶导数 $f_x$ 和 $f_y$ , 二阶导数 $f_{xy}$
- 四个坐标点 $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,1)$

- 计算插值函数

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j.$$

$$p_x(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} i x^{i-1} y^j,$$

$$p_y(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x^i j y^{j-1},$$

$$p_{xy}(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} i x^{i-1} j y^{j-1}.$$

- 共有16个系数
- 仅利用 $f$ 在四个坐标点上的信息

# 图像内插方法



## 3. 双三次内插

- 依据函数值建立等式

1.  $f(0, 0) = p(0, 0) = a_{00},$

2.  $f(1, 0) = p(1, 0) = a_{00} + a_{10} + a_{20} + a_{30},$

3.  $f(0, 1) = p(0, 1) = a_{00} + a_{01} + a_{02} + a_{03},$

4.  $f(1, 1) = p(1, 1) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij}.$

- 依据一阶导数 $f_x$ 建立等式

1.  $f_x(0, 0) = p_x(0, 0) = a_{10},$

2.  $f_x(1, 0) = p_x(1, 0) = a_{10} + 2a_{20} + 3a_{30},$

3.  $f_x(0, 1) = p_x(0, 1) = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13},$

4.  $f_x(1, 1) = p_x(1, 1) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij}i,$



# 图像内插方法



## 3. 双三次内插

- 依据一阶导数 $f_y$ 建立等式

5.  $f_y(0, 0) = p_y(0, 0) = a_{01},$

6.  $f_y(1, 0) = p_y(1, 0) = a_{01} + a_{11} + a_{21} + a_{31},$

7.  $f_y(0, 1) = p_y(0, 1) = a_{01} + 2a_{02} + 3a_{03},$

8.  $f_y(1, 1) = p_y(1, 1) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}j.$

- 依据二阶导数 $f_{xy}$ 建立等式

1.  $f_{xy}(0, 0) = p_{xy}(0, 0) = a_{11},$

2.  $f_{xy}(1, 0) = p_{xy}(1, 0) = a_{11} + 2a_{21} + 3a_{31},$

3.  $f_{xy}(0, 1) = p_{xy}(0, 1) = a_{11} + 2a_{12} + 3a_{13},$

4.  $f_{xy}(1, 1) = p_{xy}(1, 1) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}ij.$

# 图像内插方法



## 3. 双三次内插

- 离散情况下的导数近似

$$f_x(x, y) \approx \frac{f(x + h, y) - f(x - h, y)}{2h}$$

$$f_y(x, y) \approx \frac{f(x, y + k) - f(x, y - k)}{2k}$$

$$f_{xx}(x, y) \approx \frac{f(x + h, y) - 2f(x, y) + f(x - h, y)}{h^2}$$

$$f_{yy}(x, y) \approx \frac{f(x, y + k) - 2f(x, y) + f(x, y - k)}{k^2}$$

$$f_{xy}(x, y) \approx \frac{f(x + h, y + k) - f(x + h, y - k) - f(x - h, y + k) + f(x - h, y - k)}{4hk}$$



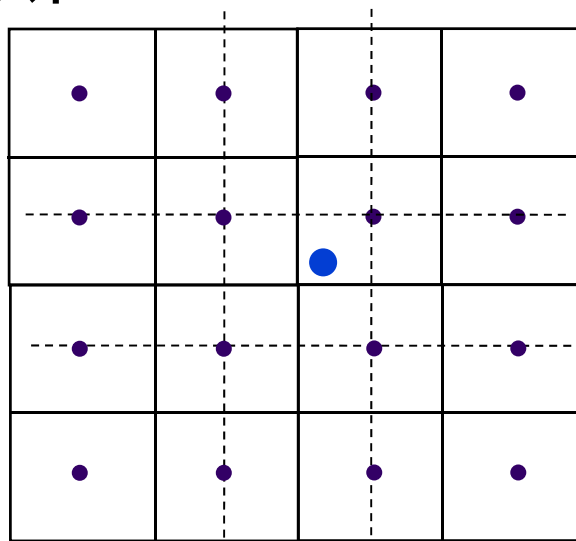
# 图像内插方法

## 3. 双三次内插

- 书上的版本

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j.$$

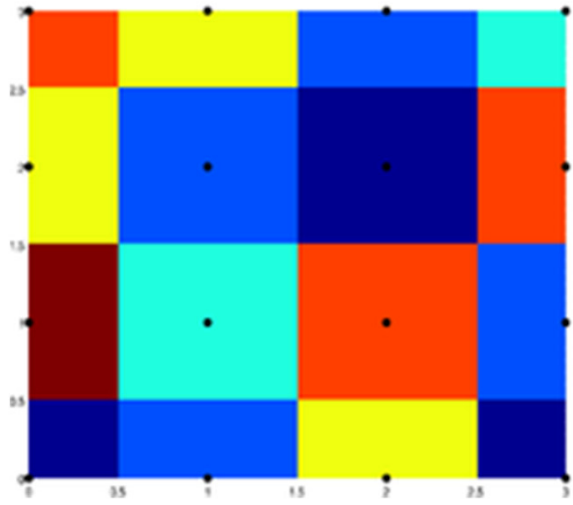
- 寻找16个近邻



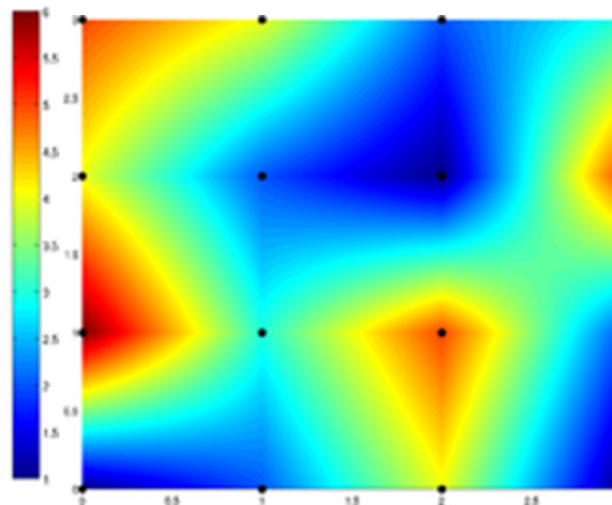
- 列出方程组，求解系数

# 举例

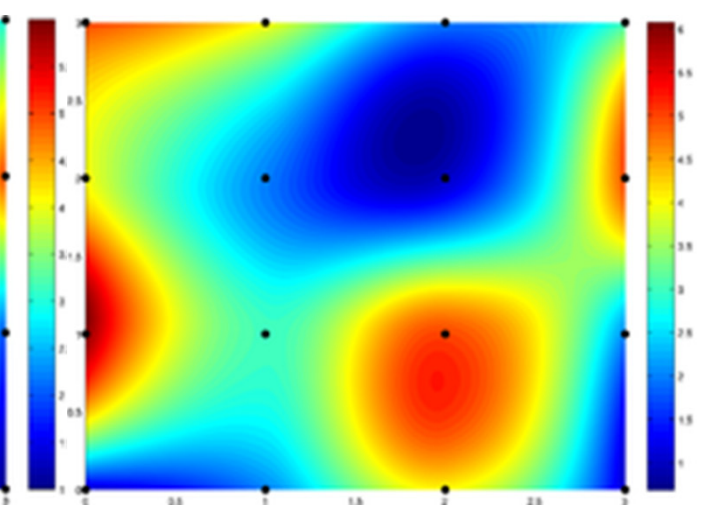
- 平滑程度



最近邻内插



双线性内插



双三次内插

# 举例

先缩小再放大



72  
dpi



最近邻内插



双线性内插



双三次内插

# 举例

先缩小再放大



150  
dpi



最近邻内插



双线性内插



双三次内插

# 提纲

- 视觉感知要素
- 光和电磁波谱
- 图像感知和获取
- 图像取样和量化
- 像素间的关系
- 数学工具



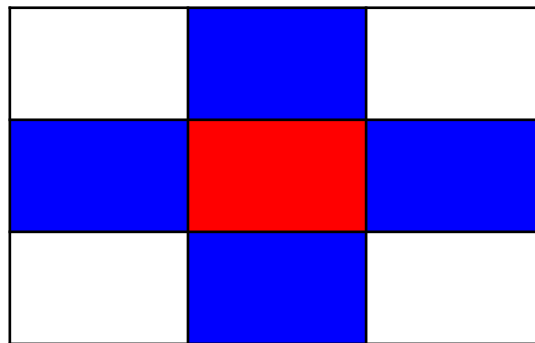


# 相邻像素

## 1. 像素 $p = (x, y)$ 的4邻域 $N_4(p)$

- 4个垂直或水平的相邻像素

$$(x + 1, y), (x - 1, y), (x, y + 1), (x, y - 1)$$



- 边界像素的邻域可能出界



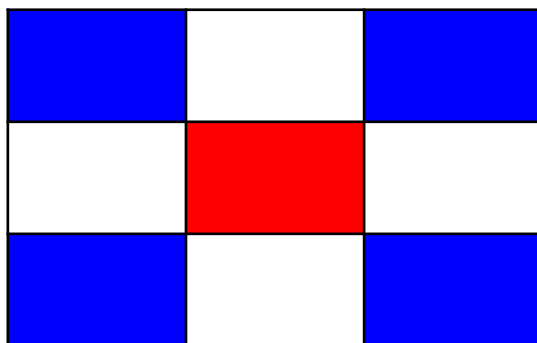
# 相邻像素



2. 像素  $p = (x, y)$  的4对角邻域  $N_D(p)$

- 4个对角相邻的像素

$(x + 1, y + 1), (x + 1, y - 1), (x - 1, y + 1), (x - 1, y - 1)$



- 边界像素的邻域可能出界

# 相邻像素

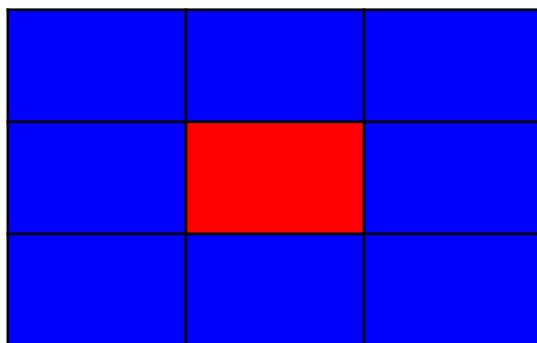


## 3. 像素 $p = (x, y)$ 的8邻域 $N_8(p)$

- 4邻域  $N_4(p)$  + 4对角邻域  $N_D(p)$

$(x + 1, y), (x - 1, y), (x, y + 1), (x, y - 1)$

$(x + 1, y + 1), (x + 1, y - 1), (x - 1, y + 1), (x - 1, y - 1)$



- 边界像素的邻域可能出界

# 邻接性



- 令 $V$ 是用于定义邻接性的灰度值集合
  - 对于二值图像,  $V = \{1\}$ 或 $V = \{0\}$
  - 对于非二值图像,  $V$ 是灰度级任意一个子集, 比如 $V = \{128, 129, \dots, 255\}$
- 1. 4邻接 (4-adjacency)
  - $p$ 和 $q$ 的灰度值均属于集合 $V$
  - $q$ 属于 $p$ 的4邻域, 即 $q \in N_4(p)$

# 邻接性



## 2. 8邻接 (8-adjacency)

- $p$ 和 $q$ 的灰度值均属于集合 $V$
- $q$ 属于 $p$ 的8邻域, 即 $q \in N_8(p)$

## 3. $m$ 邻接 ( $m$ -adjacency)

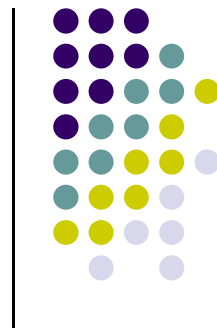
- $p$ 和 $q$ 的灰度值均属于集合 $V$

a)  $q$ 属于 $p$ 的4邻域, 即 $q \in N_4(p)$

a')  $q$ 属于 $p$ 的4对角邻域, 即 $q \in N_D(p)$ , 并且 $N_4(p) \cap N_4(q)$ 中没有元素的灰度属于 $V$

消除歧义

# 举例



- $V = \{1\}$

0	1	1
0	1	0
0	0	1

0	1	---	1
0	1	---	0
0	0	---	1

8邻接

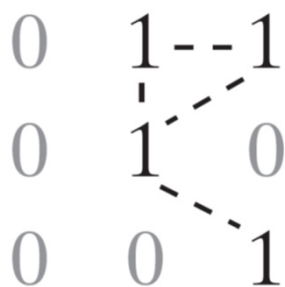
0	1	---	1
0	1		0
0	0	---	1

$m$ 邻接

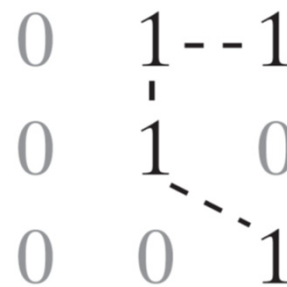


# 连通性

- 像素  $p = (x, y)$  和  $q = (s, t)$  之间的通路 (path)  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ 
  - 其中  $(x_0, y_0) = (x, y), (x_n, y_n) = (s, t)$
  - $(x_i, y_i)$  和  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  是邻接的,  $1 \leq i \leq n$ 
    - 4邻接、8邻接、 $m$ 邻接
    - 4通路、8通路、 $m$ 通路



8通路



$m$ 通路

# 连通性



- 像素  $p = (x, y)$  和  $q = (s, t)$  之间的通路 (path)  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ 
  - 其中  $(x_0, y_0) = (x, y), (x_n, y_n) = (s, t)$
  - $(x_i, y_i)$  和  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  是邻接的,  $1 \leq i \leq n$ 
    - 4邻接、8邻接、 $m$ 邻接
    - 4通路、8通路、 $m$ 通路
  - $n$  为通路的长度
- 闭合通路:  $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$

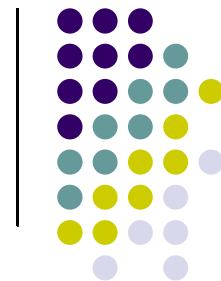
# 连通性



- $S$ 为图像中的像素集合
- 像素 $p$ 和 $q$ 在 $S$ 中是**连通的** (connected)
  - $p$ 和 $q$ 之间存在一个通路
  - 该通路的元素属于集合 $S$
- $S$ 的**连通分量** (connected component)
  - 对于任意的 $p \in S$ ,  $S$ 中与其连通的像素集合
- $S$ 被称为**连通集** (connected set)
  - $S$ 只有1个连通分量



# 区域



- 令 $R$ 是图像中的像素子集

- $R$ 为一个**区域** (region)

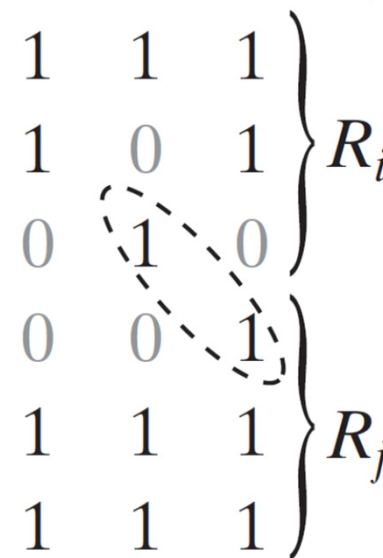
- $R$ 是一个连通集

- 区域 $R_i$ 和 $R_j$ 是**邻接的** (adjacent)

- $R_i$ 和 $R_j$ 的并集形成一个连通集

- 4邻接、 8邻接

- 不邻接的区域称为**不连接** (disjoint)



# 边界



- 图像中包含 $K$ 个不连接的区域 $R_1, \dots, R_K$ 
  - 这些区域都不接触图像的边界
- 图像的前景 (foreground)
  - $R_u = R_1 \cup \dots \cup R_K$
- 图像的背景 (background)
  - $R_u$ 的补集 $(R_u)^c$
- 区域 $R$ 的边界 (boundary)
  - 与 $R$ 补集相邻的像素集合
  - 这些点至少有一个背景邻点

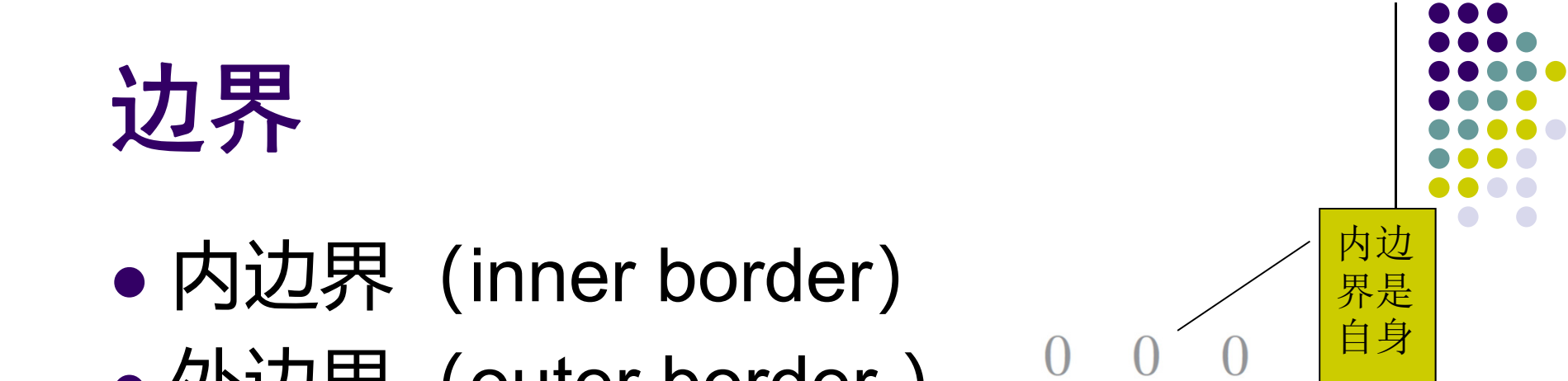
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	0	0

区域和背景之间的邻接使用8邻接

# 边界

- 内边界 (inner border)
- 外边界 (outer border )
  - 在背景中定义的边界
  - 通常是**闭合通路**

0	0	0
0	1	0
0	1	0
0	1	0
0	1	0
0	0	0



内边界是自身

- $R$ 是整幅图像
  - 边界定义为第一行、第一列、最后一行、最后一列组成的集合

# 边缘



- 边缘 (edge)
  - 灰度值的导数超过某阈值的像素
  - 是一个局部的概念，即局部灰度发生变化
- 边界
  - 通常形成闭合通路
  - 是一个整体的概念
- 二值图像
  - 边界和边缘的定义重合



# 距离度量

- 三个像素点

- $p = (x, y), q = (s, t), z = (v, w)$

- $D$ 是距离函数

- (a)  $D(p, q) \geq 0$  ( $D(p, q) = 0$  iff  $p = q$ ),

- (b)  $D(p, q) = D(q, p)$ , and

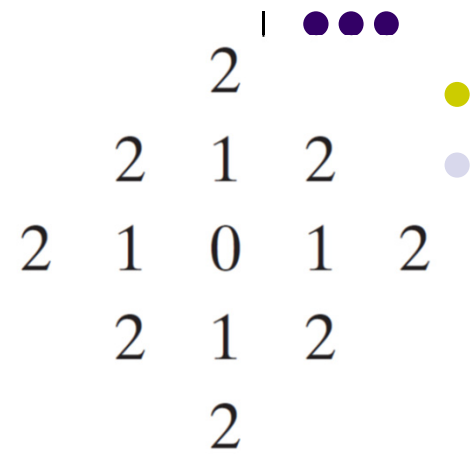
- (c)  $D(p, z) \leq D(p, q) + D(q, z)$ .

- 欧氏距离

$$D_e(p, q) = \left[ (x - s)^2 + (y - t)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

- 距某点欧氏距离  $\leq r$  的点组成一个圆

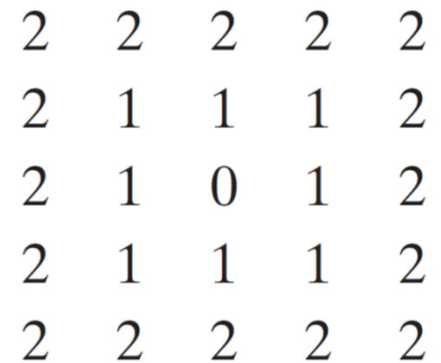
# 距离度量



- $D_4$ 距离 (城市街区距离)

$$D_4(p, q) = |x - s| + |y - t|$$

- 距某点 $D_4$ 距离 $\leq r$ 的点组成一个菱形



- $D_8$ 距离 (棋盘距离)

$$D_8(p, q) = \max(|x - s|, |y - t|)$$

- 距某点 $D_8$ 距离 $\leq r$ 的点组成一个正方形

# 距离度量



- $D_m$  距离
  - 两点之间最短的  $m$  通路的长度
  - 依赖于通路上的像素值和邻接点的像素值

	$q$	<b>1</b>
$p$	1	
<b>1</b>		

- 当  $(p, q)$  分别取  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,1)$ , 从左下方的 **1** 到右上方的 **1** 的  $D_m$  距离分别是多少?
- 2、3、3、4

# 提纲

- 视觉感知要素
- 光和电磁波谱
- 图像感知和获取
- 图像取样和量化
- 像素间的关系
- 数学工具





# 数学工具



- 阵列与矩阵操作
- 线性和非线性操作
- 算术操作
- 集合和逻辑操作
- 空间操作
- 向量和矩阵操作
- 图像变换
- 概率方法



# 阵列与矩阵操作

- 阵列相乘

- 逐元素操作

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

- 本书默认的操作为阵列操作

- 矩阵相乘

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

# 线性和非线性操作



- 算子 $H$

$$H[f(x, y)] = g(x, y)$$

- $H$ 是线性算子

$$\begin{aligned} H[a_i f_i(x, y) + a_j f_j(x, y)] &= a_i H[f_i(x, y)] + a_j H[f_j(x, y)] \\ &= a_i g_i(x, y) + a_j g_j(x, y) \end{aligned}$$

- +是阵列求和
- $a_i, a_j$ 是任意的系数,  $f_i, f_j$ 是任意的图像
- 加性 (additivity)
- 同质性 (homogeneity)

# 举例



- 求和算子 $\Sigma$

$$\Sigma [a_i f_i(x, y) + a_j f_j(x, y)] = \Sigma a_i f_i(x, y) + \Sigma a_j f_j(x, y)$$

- +是阵列求和

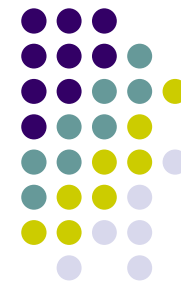
$$= a_i \Sigma f_i(x, y) + a_j \Sigma f_j(x, y)$$

- 最大值操作

$$= a_i g_i(x, y) + a_j g_j(x, y)$$

$$\begin{aligned} \max \left\{ (1) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \right\} &= \max \left\{ \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \right\} \\ &= -2 \end{aligned}$$

# 举例



- 求和算子 $\Sigma$

$$\Sigma [a_i f_i(x, y) + a_j f_j(x, y)] = \Sigma a_i f_i(x, y) + \Sigma a_j f_j(x, y)$$

- +是阵列求和

$$= a_i \Sigma f_i(x, y) + a_j \Sigma f_j(x, y)$$

- 最大值操作

$$= a_i g_i(x, y) + a_j g_j(x, y)$$

$$(1) \max \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right\} + (-1) \max \left\{ \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \right\} = 3 + (-1)7$$
$$= -4$$

# 算术操作



- 4种算术操作
  - 阵列操作

$$s(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

$$d(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$$

$$p(x, y) = f(x, y) \times g(x, y)$$

$$v(x, y) = f(x, y) \div g(x, y)$$

- $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$
- $y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$

# 加法操作



- 图像去噪  $g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$ 
  - $f(x, y)$ 表示真实图像,  $g(x, y)$ 表示观测图像
  - $\eta(x, y)$ 表示噪声, 假设噪声独立、0均值
  - 对 $K$ 幅不同的图像求平均

$$\bar{g}(x, y) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K g_i(x, y)$$

- 无偏估计

$$E\{\bar{g}(x, y)\} = f(x, y)$$

- 优势  $\sigma_{\bar{g}(x,y)}^2 = \frac{1}{K} \sigma_{\eta(x,y)}^2$   $\sigma_{\bar{g}(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sigma_{\eta(x,y)}$

# 加法操作



- 对 $K$ 幅加性噪声图像进行平均，可以使图像的平方信噪比提高 $K$ 倍

- 平方信噪比 
$$P(x, y) = \frac{f^2(x, y)}{E\{\eta^2(x, y)\}}$$

- 平均图像

$$g_i(x, y) = f(x, y) + \eta_i(x, y), \quad E\{\eta_i(x, y)\} = 0$$

$$\bar{g}(x, y) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K [f(x, y) + \eta_i(x, y)] = f(x, y) + \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \eta_i(x, y)$$

$$\bar{P}(x, y) = \frac{f^2(x, y)}{E\left\{\frac{1}{K^2} \left[\sum_{i=1}^K \eta_i(x, y)\right]^2\right\}}$$



# 加法操作



- 对 $K$ 幅加性噪声图像进行平均, 可以使图像的平方信噪比提高 $K$ 倍

- 平方信噪比  $P(x, y) = \frac{f^2(x, y)}{E\{\eta^2(x, y)\}}$

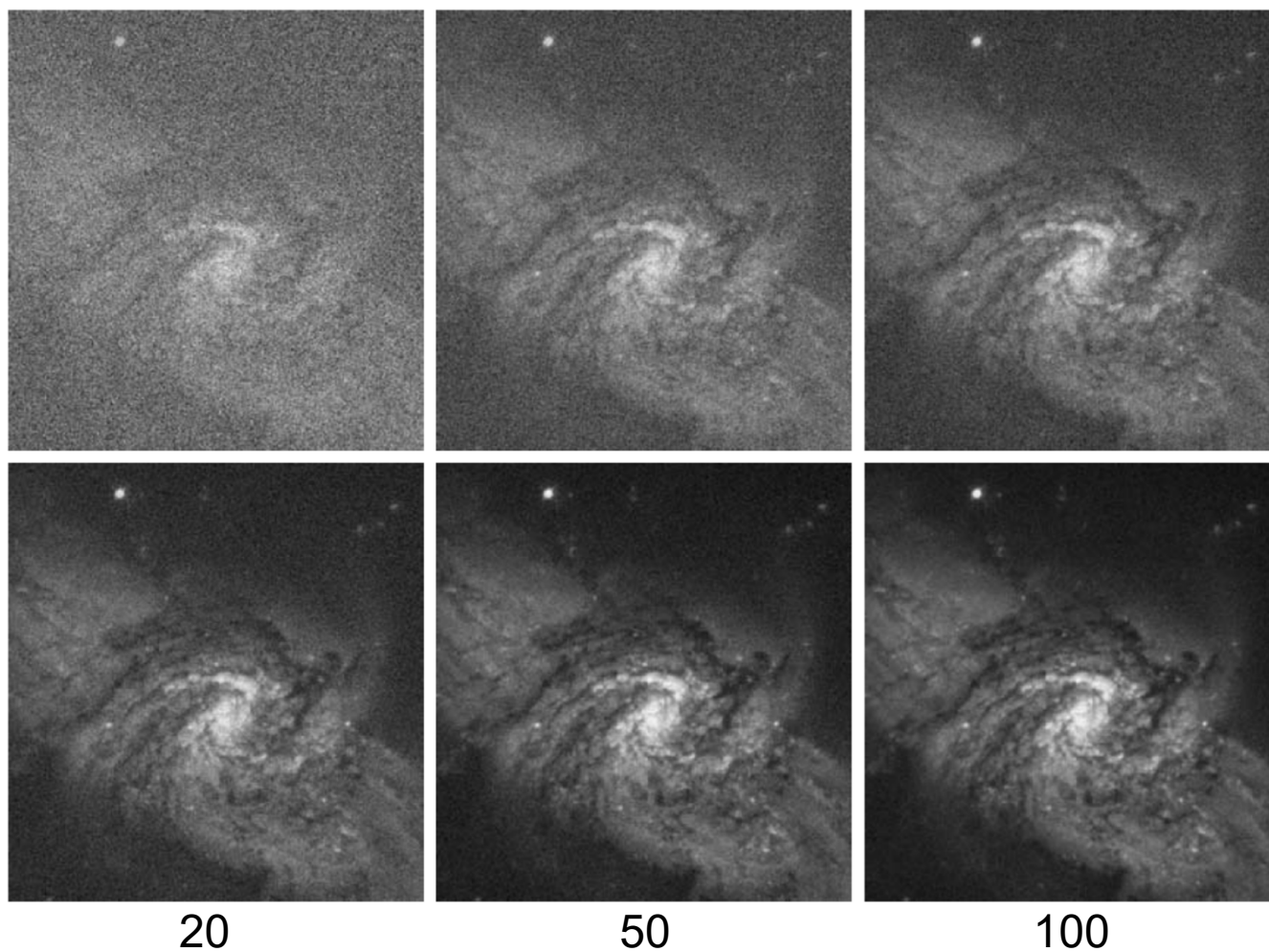
- 平均图像  $E\{[\eta_1(x, y) + \eta_2(x, y)]^2\}$   
 $= E\{\eta_1^2(x, y) + \eta_2^2(x, y)\} + 2E\{\eta_1(x, y)\}E\{\eta_2(x, y)\}$   
 $= E\{\eta_1^2(x, y)\} + E\{\eta_2^2(x, y)\}$

$$\bar{P}(x, y) = \frac{f^2(x, y)}{\frac{1}{K^2} \sum_{i=1}^K E\{\eta_i^2(x, y)\}} = \frac{K f^2(x, y)}{E\{\eta^2(x, y)\}} = KP(x, y)$$

# 举例

- 天文学


使用高斯  
噪声模拟



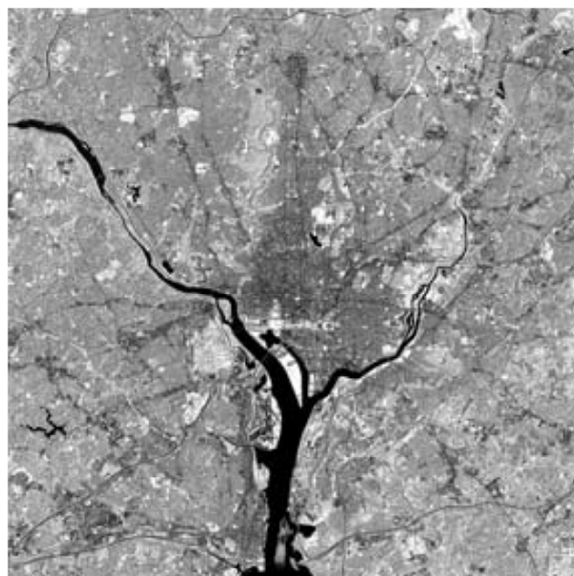
# 减法操作

- 增强图像之间差异

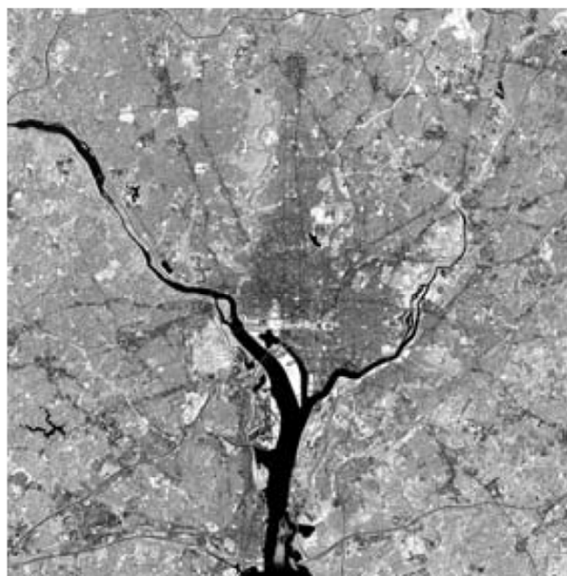
$$d(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$$



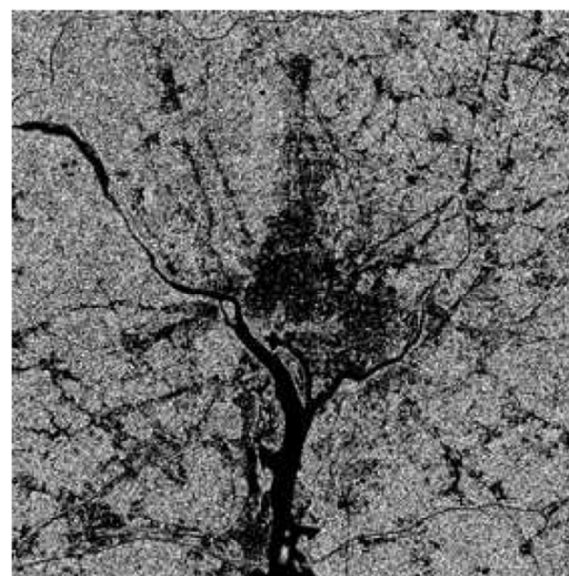
黑色 (0) 表示没有差异



华盛顿的红外图像



最低比特位置为0



图像之间差异

# 举例

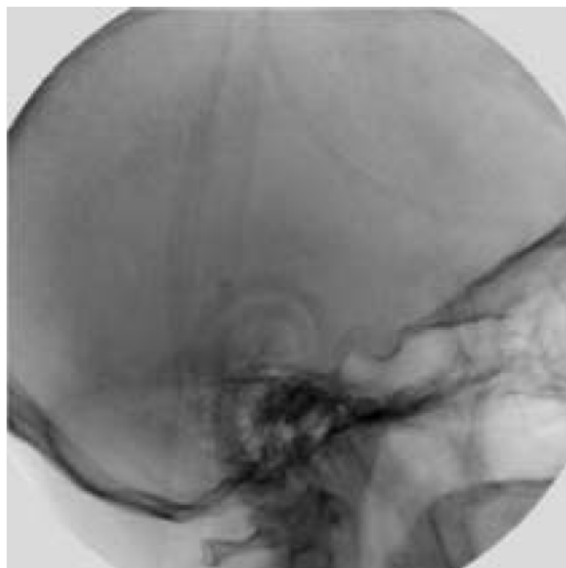


- 模板模式放射成像

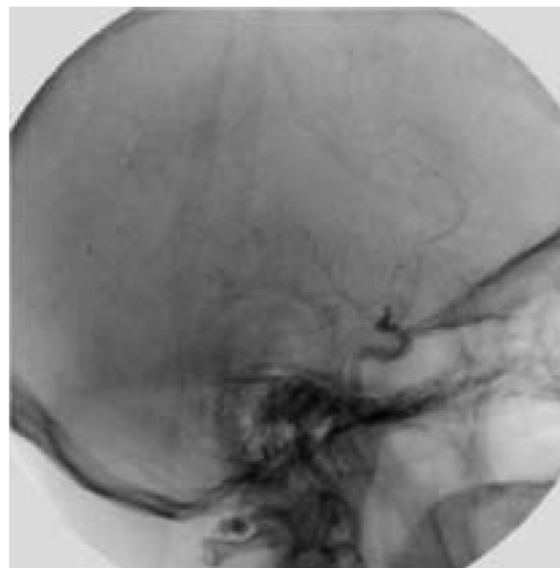
$$g(x, y) = f(x, y) - h(x, y)$$

- 模板 $h(x, y)$ 是病人部分身体的X射线图像
- 活体图像 $f(x, y)$ 是注入造影剂后的X射线图像

模板  
图像



活体  
图像



# 举例

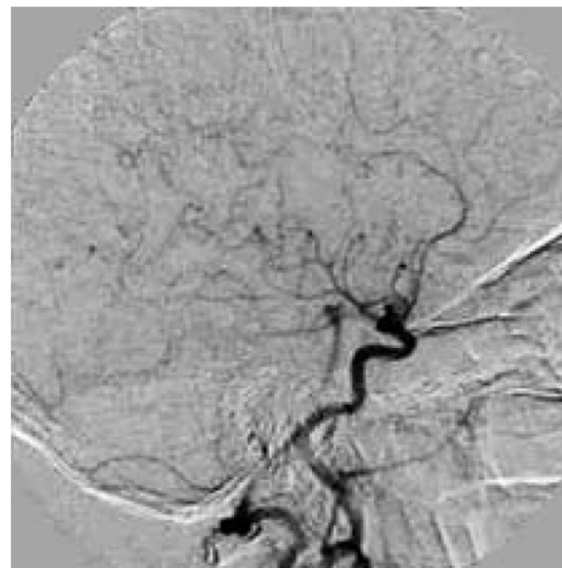
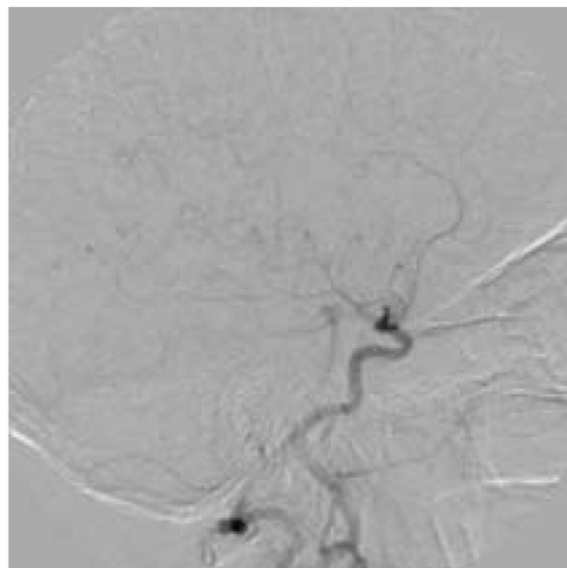


- 模板模式放射成像

$$g(x, y) = f(x, y) - h(x, y)$$

- 模板 $h(x, y)$ 是病人部分身体的X射线图像
- 活体图像 $f(x, y)$ 是注入造影剂后的X射线图像

差值  
图像



对比度  
增强



# 乘法和除法操作

- 阴影矫正

$$g(x, y) = f(x, y)h(x, y)$$

- $h(x, y)$ 表示已知阴影函数

- $g(x, y)$ 表示观测图像

- 真实图像

$$f(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$$

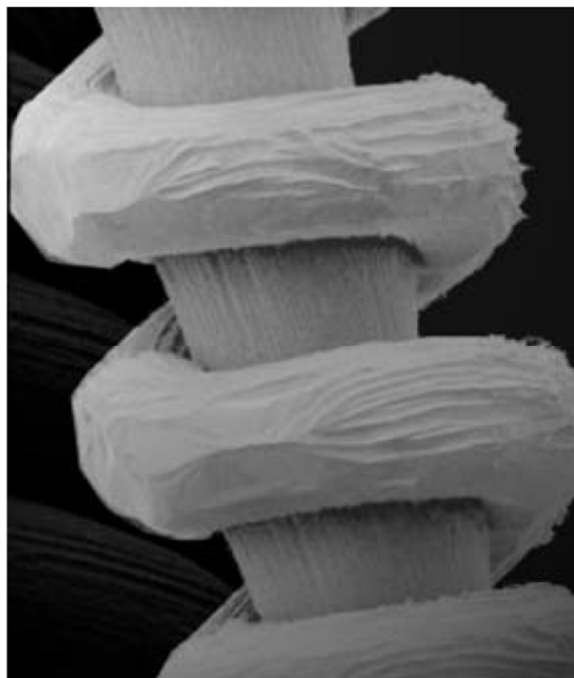
- 估计阴影函数  $h(x, y) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$

- $f(x, y)$ 是已知的图像



# 举例

- 阴影校正



钨丝放大图像



阴影模式



校正后的图像

# 举例

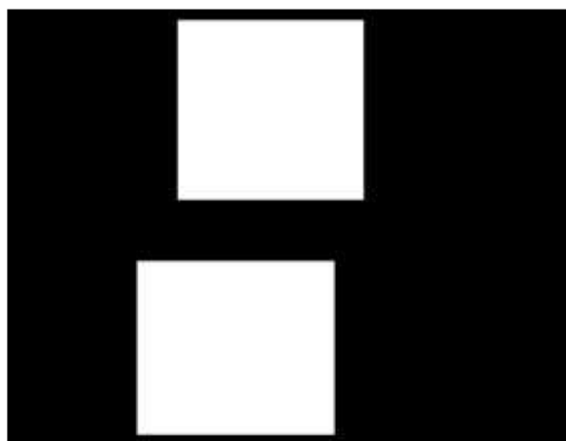


- 模板操作/感兴趣区域操作

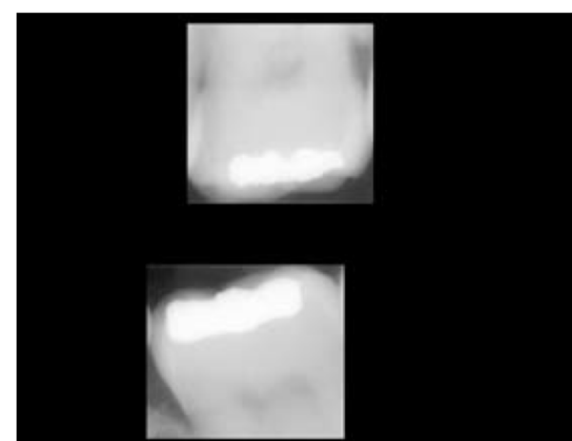
黑色 (0)  
白色 (1)



牙齿的X射线图像



感兴趣的模板



相乘后的图像





# 灰度归一化

- 算术操作的结果可能不属于 $[0,255]$
- 简单的做法
  - 负数设置为0, 大于255设置为255

- 保持更多的信息

$$f_m = f - \min(f)$$

$$f_s = K \left[ f_m / \max(f_m) \right]$$

- $f_s \in [0, K]$

# 集合操作



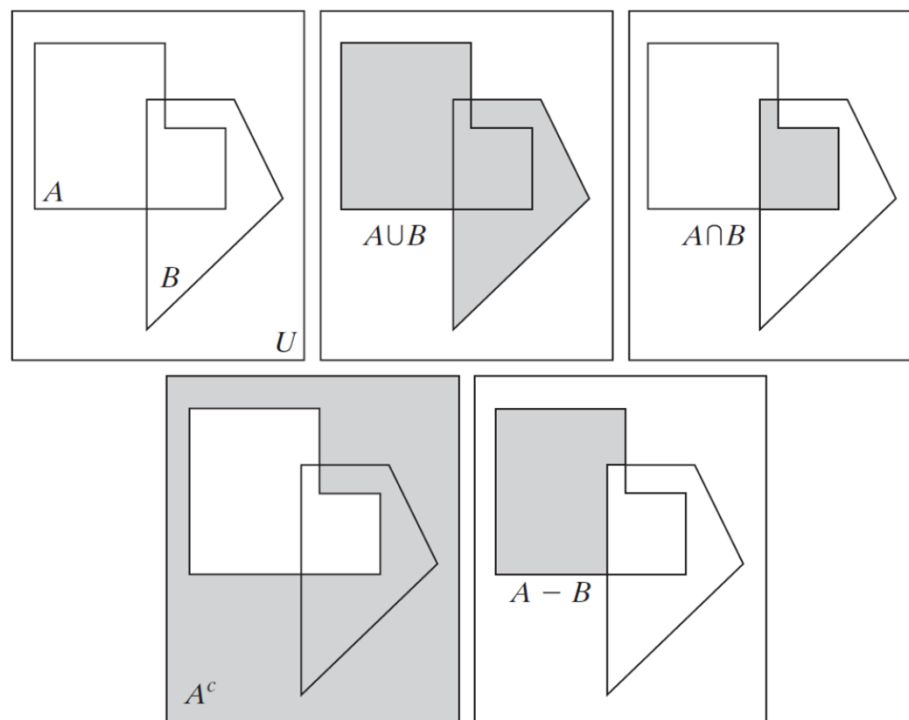
- $a = (a_1, a_2)$  是  $A$  的元素:  $a \in A$
- $a$  不是  $A$  的元素:  $a \notin A$
- 空集:  $\emptyset$
- 全集:  $U$
- $A$  是  $B$  的子集:  $A \subseteq B$
- 集合  $A$  和  $B$  的并集:  $A \cup B$
- 集合  $A$  和  $B$  的交集:  $A \cap B$
- 集合  $A$  和  $B$  互斥:  $A \cap B = \emptyset$

# 集合操作



- 集合 $A$ 的补集:  $A^c = \{w | w \notin A\} = U - A$
- 集合 $A$ 和 $B$ 的差:

$$A - B = \{w | w \in A, w \notin B\} = A \cap B^c$$





# 灰度图像的集合操作

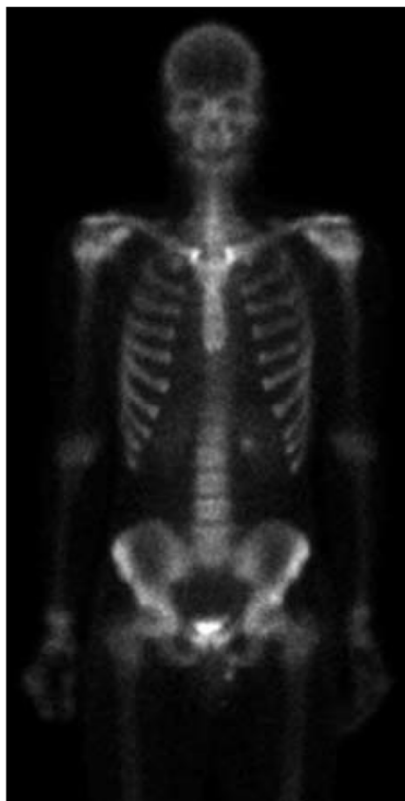
- 灰度图像集合  $A$
- 元素为三元组  $(x, y, z)$ 
  - $x$ 和 $y$ 是空间坐标,  $z$ 是灰度
- 集合  $A$ 的补集 (大小不变)

$$A^c = \{(x, y, K - z) \mid (x, y, z) \in A\}$$

- $K = 2^k - 1$ , 其中 $k$ 为比特数
- 集合  $A$ 和  $B$ 的并集

$$A \cup B = \left\{ \max_z(a, b) \mid a \in A, b \in B \right\}$$

# 举例



原图



补集操作  
得到的负像

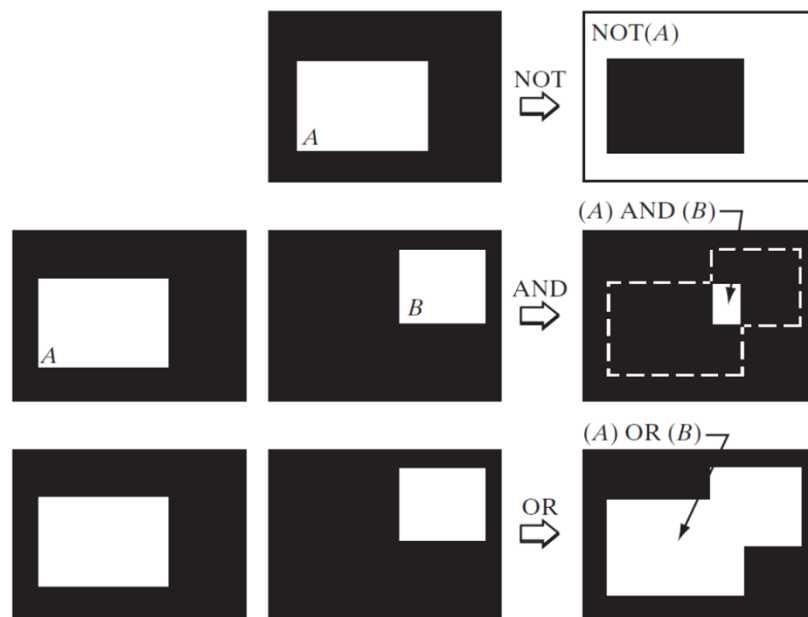


与常数图像（3倍均值）  
的并集



# 逻辑操作

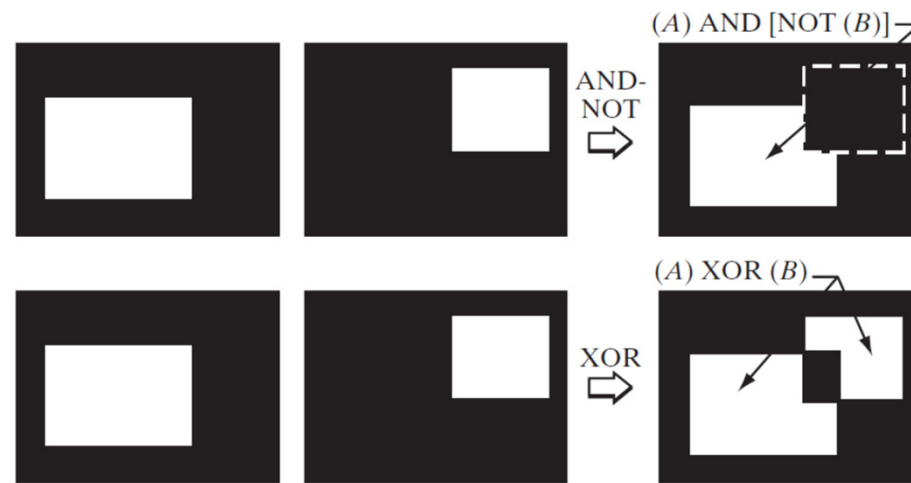
- 二值图像
  - 前景 (1值)、背景 (0值)
- OR、AND、NOT逻辑操作
  - 集合的并、交和求补操作





# 逻辑操作

- 属于A不属于B操作
- XOR操作



- 功能完备操作
  - AND、OR和NOT

# 空间操作



- 直接在图像像素上进行的操作
  1. 单像素操作
  2. 邻域操作
  3. 几何空间变换



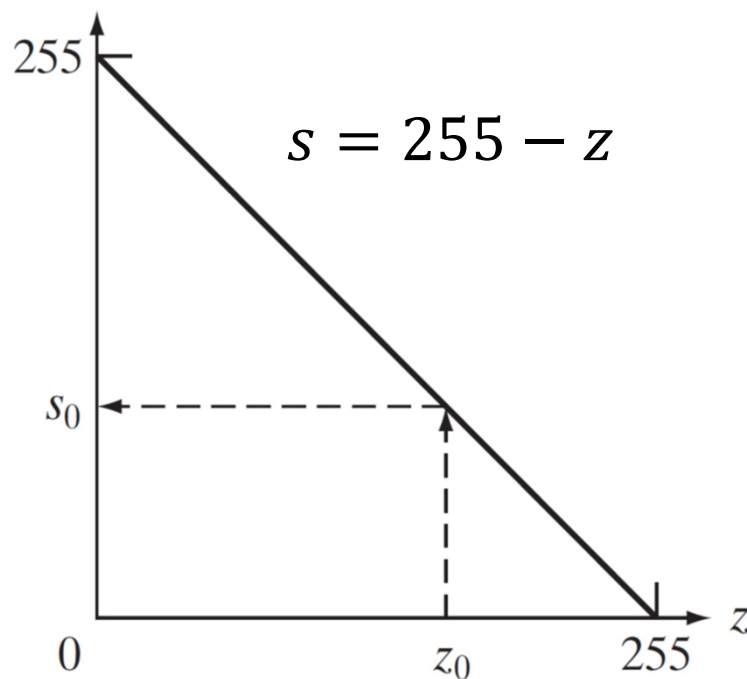


# 单像素操作

- 以灰度为基础改变单个像素的值

$$s = T(z)$$

- $z$ 是原像素的灰度,  $s$ 是处理后的灰度

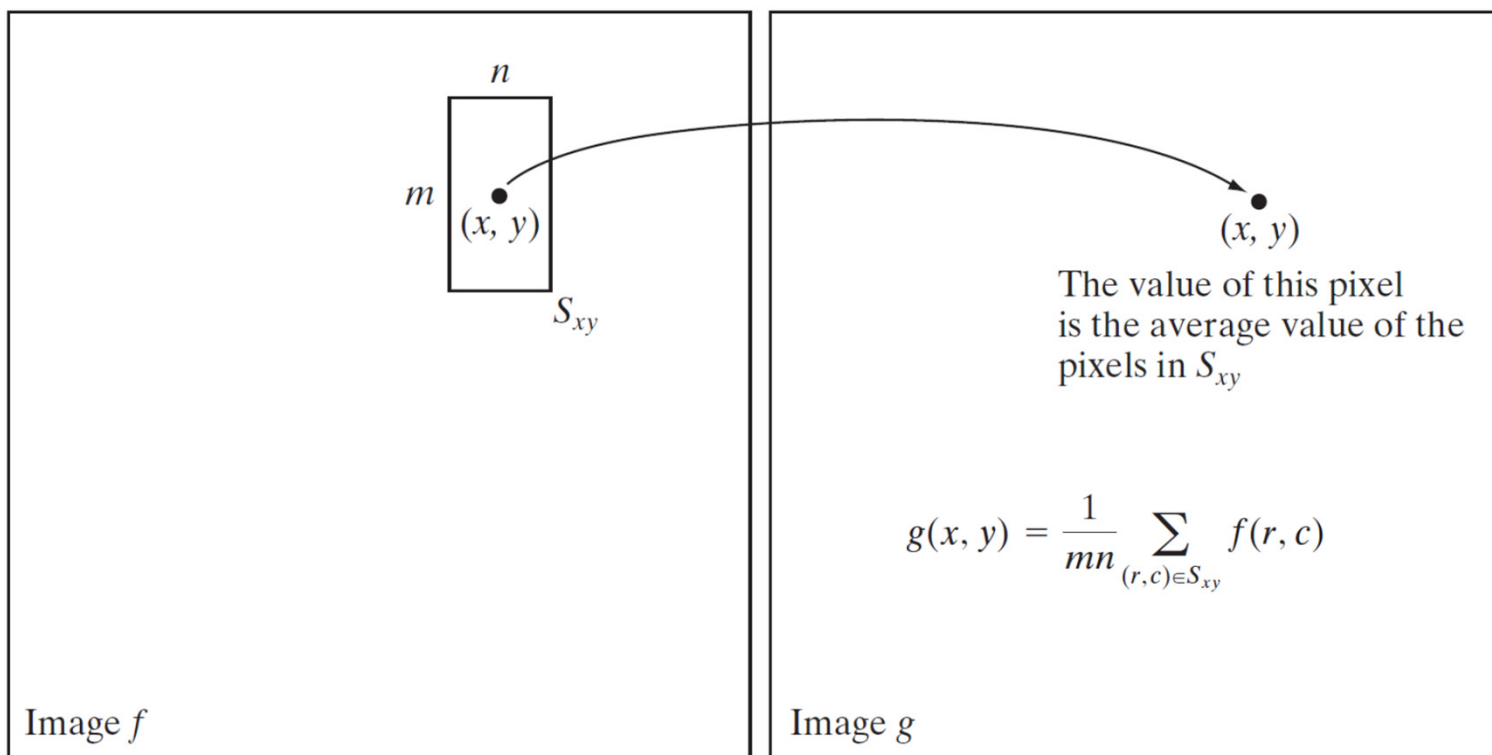


8比特灰度图像的反图像



# 邻域操作

- $S_{xy}$  表示像素  $(x, y)$  邻域像素点的集合
- 使用  $S_{xy}$  中的所有像素计算一个输出



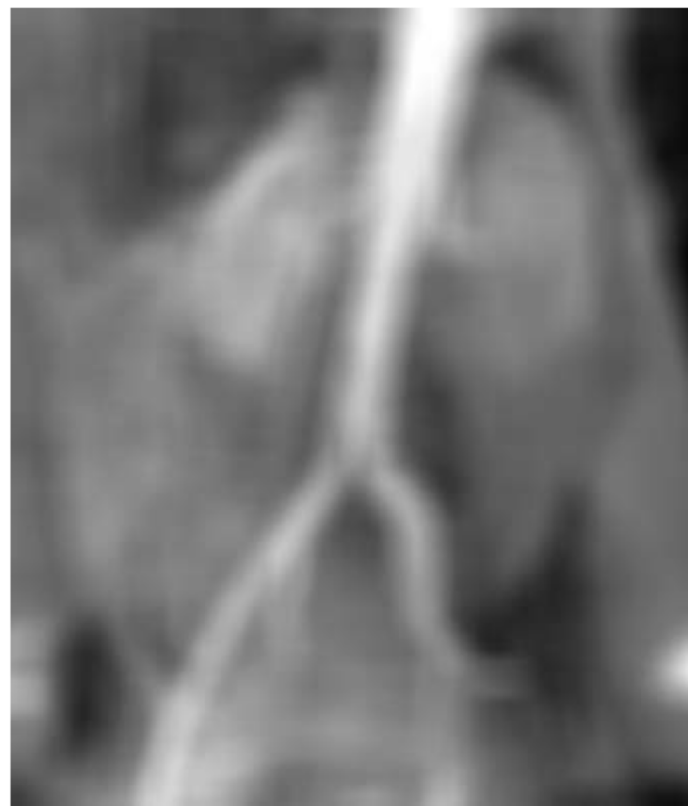
# 举例

- 图像模糊

降低噪声  
祛除细节



主动脉造影图像



局部平均操作

# 几何空间变换



- 改变图像中像素间的空间关系
  - 橡皮膜操作
    - 在橡皮膜上印刷一幅图像
    - 然后按照某规则拉伸橡皮膜
1. 坐标的空间变换
  2. 灰度内插
    - 对变换后的像素赋灰度值

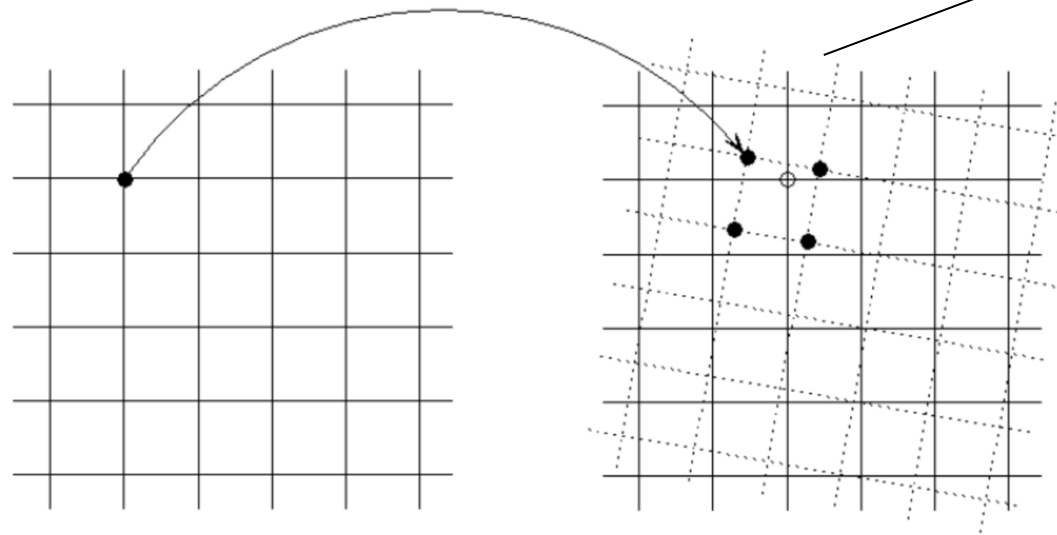
# 几何空间变换



- 坐标的空间变换

$$(x, y) = T\{(v, w)\}$$

- $(v, w)$ 是原坐标,  $(x, y)$ 为新的坐标



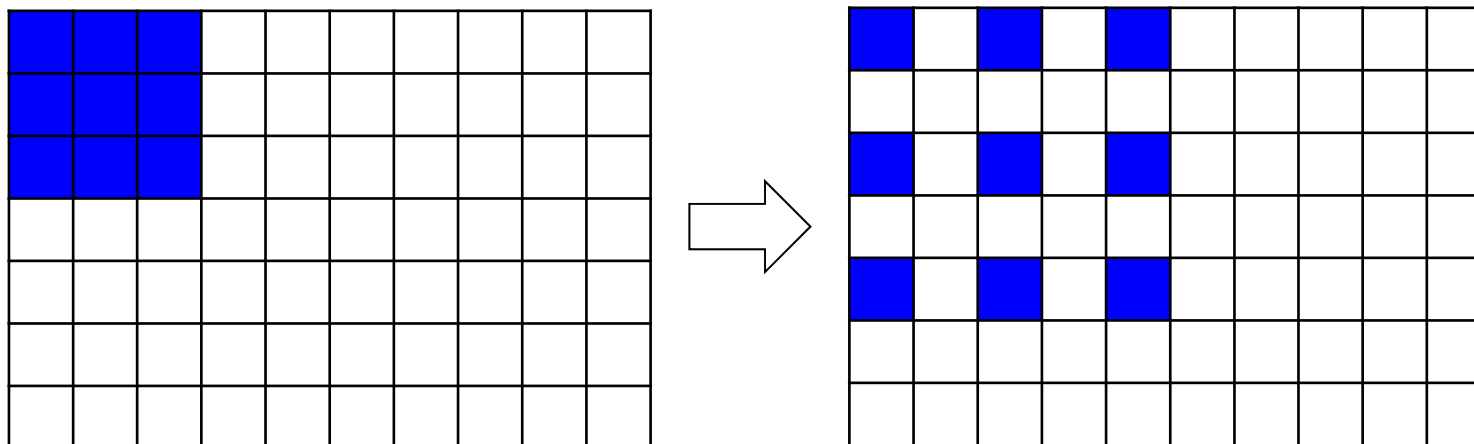
灰度内插  
是必要的

# 举例



- 图像放大

$$(x, y) = (2v, 2w)$$



# 仿射变换



- 包括了旋转、伸缩、平移、倾斜等变换

$$x = t_{11}v + t_{21}w + t_{31}$$

$$y = t_{12}v + t_{22}w + t_{32}$$

- $t_{31}$ 和 $t_{32}$ 刻画了平移量
- $t_{11}$ 和 $t_{22}$ 刻画了伸缩比例
- $t_{12}$ 和 $t_{21}$ 刻画了倾斜程度

# 仿射变换



- 包括了旋转、伸缩、平移、倾斜等变换

$$x = t_{11}v + t_{21}w + t_{31}$$

$$y = t_{12}v + t_{22}w + t_{32}$$

- 保持共线性 (co-linearity)
  - 共线的点变换后依然共线
- 保持距离比例 (ratios of distance)
  - 线的中心变换后依然是线的中心

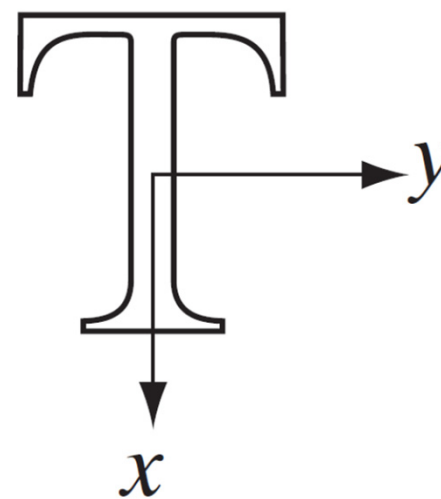
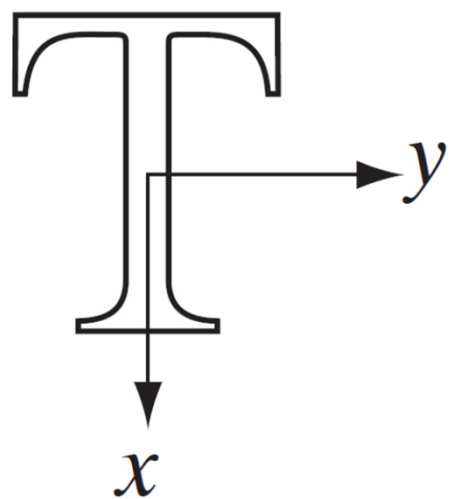


# 恒等变换

- 坐标公式

$$x = v$$

$$y = w$$

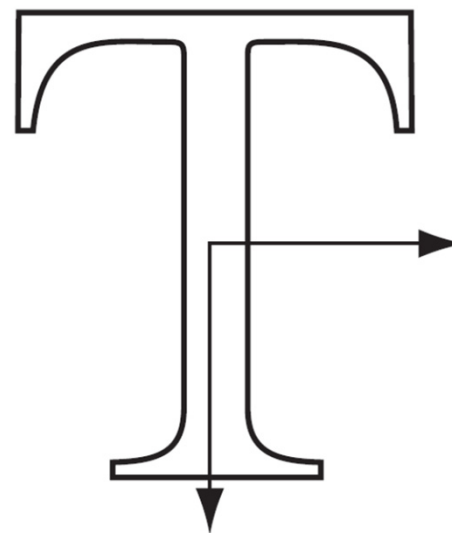
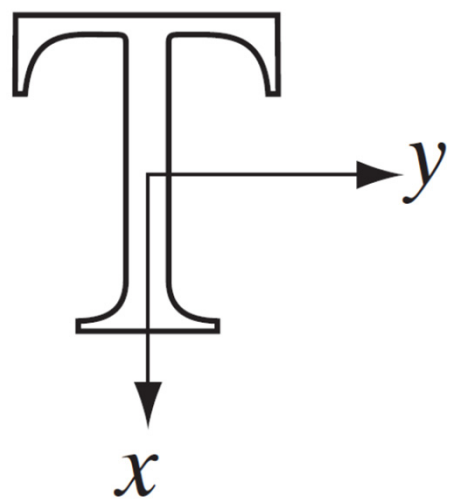


# 伸缩变换

- 坐标公式

$$x = c_x v$$

$$y = c_y w$$



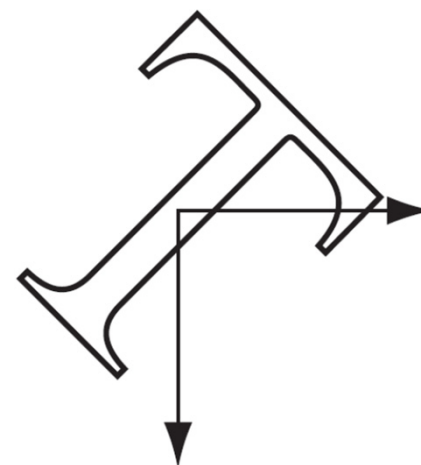
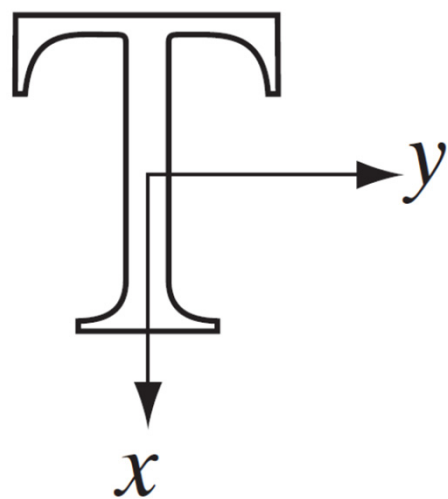
# 旋转变换



- 坐标公式

$$x = v \cos \theta - w \sin \theta$$

$$y = v \sin \theta + w \cos \theta$$

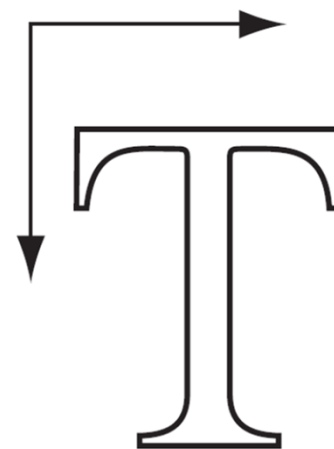
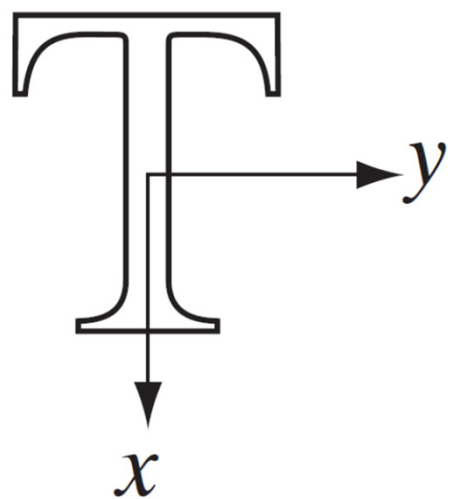


# 平移变换

- 坐标公式

$$x = v + t_x$$

$$y = w + t_y$$



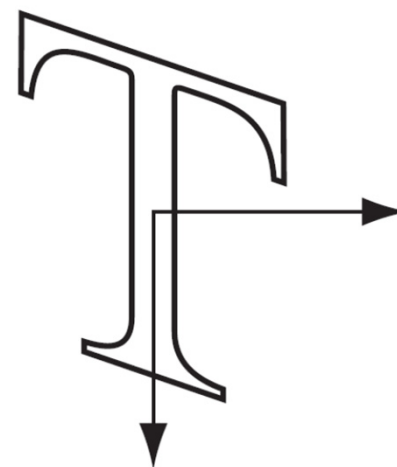
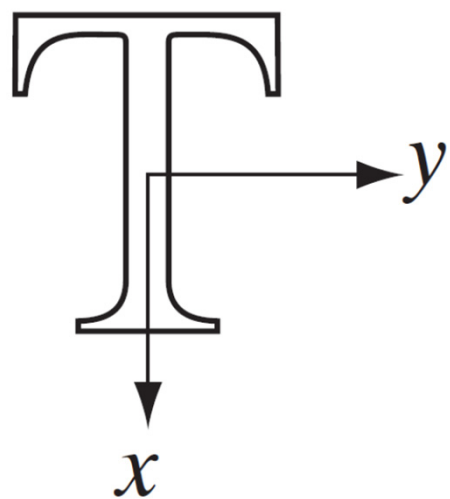
# (垂直) 倾斜变换



- 坐标公式

$$x = v + s_v w$$

$$y = w$$



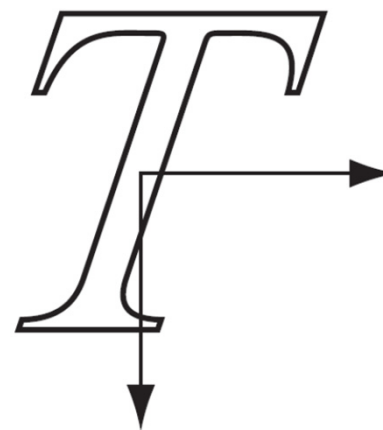
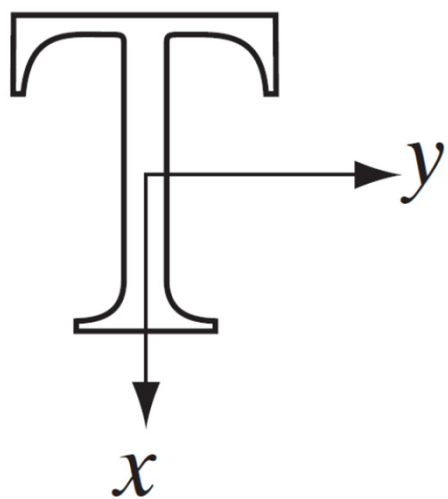
# (水平) 倾斜变换



- 坐标公式

$$x = v$$

$$y = s_h v + w$$



# 仿射变换



- 变换公式

$$x = t_{11}v + t_{21}w + t_{31}$$

$$y = t_{12}v + t_{22}w + t_{32}$$

- 矩阵形式

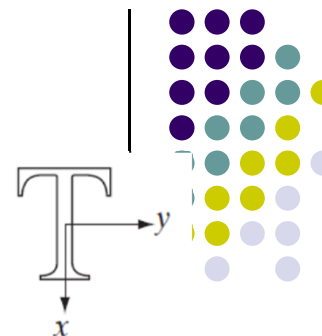
$$[x \ y \ 1] = [v \ w \ 1] \mathbf{T} = [v \ w \ 1] \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

# 仿射变换

恒等变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= v \\ y &= w \end{aligned}$$



伸缩变换

$$\begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

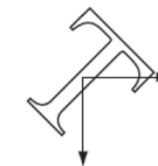
$$\begin{aligned} x &= c_x v \\ y &= c_y w \end{aligned}$$



旋转变换

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

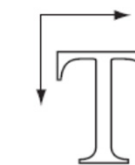
$$\begin{aligned} x &= v \cos \theta - w \sin \theta \\ y &= v \sin \theta + w \cos \theta \end{aligned}$$



平移变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= v + t_x \\ y &= w + t_y \end{aligned}$$



(垂直) 倾斜变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= v + s_v w \\ y &= w \end{aligned}$$



(水平) 倾斜变换

$$\begin{bmatrix} 1 & s_h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= v \\ y &= s_h v + w \end{aligned}$$







# 复杂仿射变换

- 通过一系列仿射变换操作完成
  - 因为仿射变换的组合还是仿射变换

- 矩阵形式

$$[x \ y \ 1] = [v \ w \ 1] \underbrace{T_1 T_2 \cdots}_T$$

- $T_i$ 是基本仿射变换
- 逆仿射变换
  - 假设仿射变换是可逆的 $T = T_1 T_2 T_3$
  - 逆变换矩阵为 $T^{-1} = T_3^{-1} T_2^{-1} T_1^{-1}$
  - 基本变换矩阵都是可逆矩阵

# 仿射变换的实现

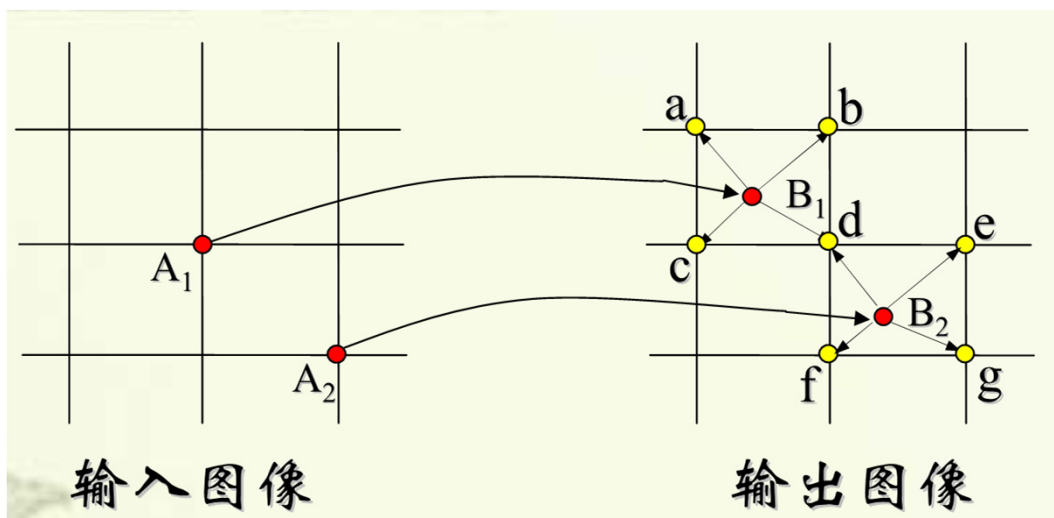


- 前向映射
  - 根据输入 $(v, w)$ , 计算输出 $(x, y) = T\{(v, w)\}$
  - 多个输入对应一个输出、空白输出
- 反向映射
  - 根据输出 $(x, y)$ , 寻找输入 $(v, w) = T^{-1}\{(x, y)\}$
  - 更加有效



# 灰度内插

- 前向映射
  - 根据输入 $(v, w)$ , 计算输出 $(x, y) = T\{(v, w)\}$
  - 利用映射后的像素灰度值, 计算输出图像像素的灰度值

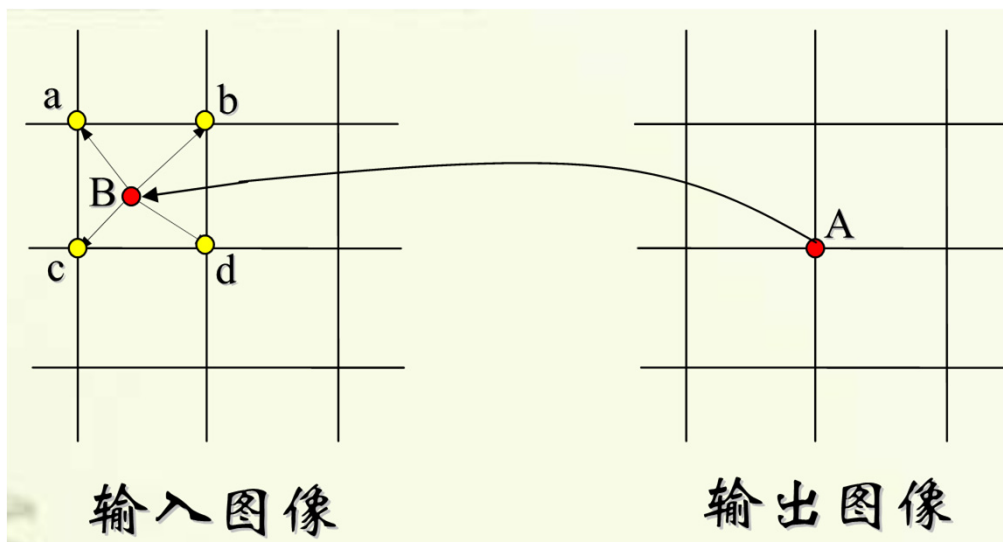




# 灰度内插

- 反向映射

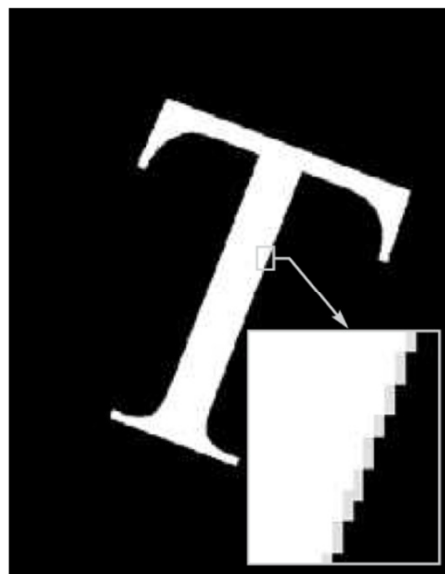
- 根据输出 $(x, y)$ , 寻找输入 $(v, w) = T^{-1}\{(x, y)\}$
- 利用原图像内的像素灰度值, 计算逆映射位置处的灰度值



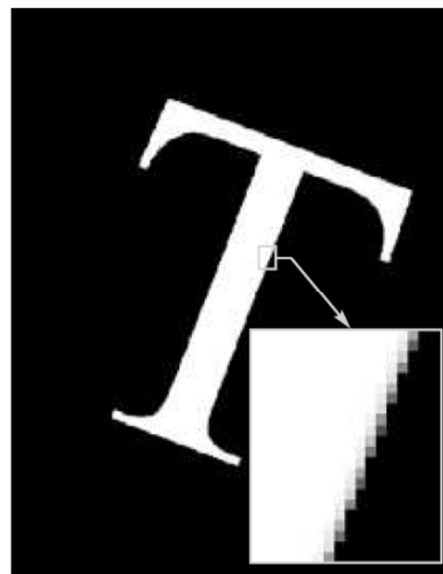
# 示例



- 图像旋转 $21^\circ$ 、反向映射



最近邻内插



双线性内插



双三次内插



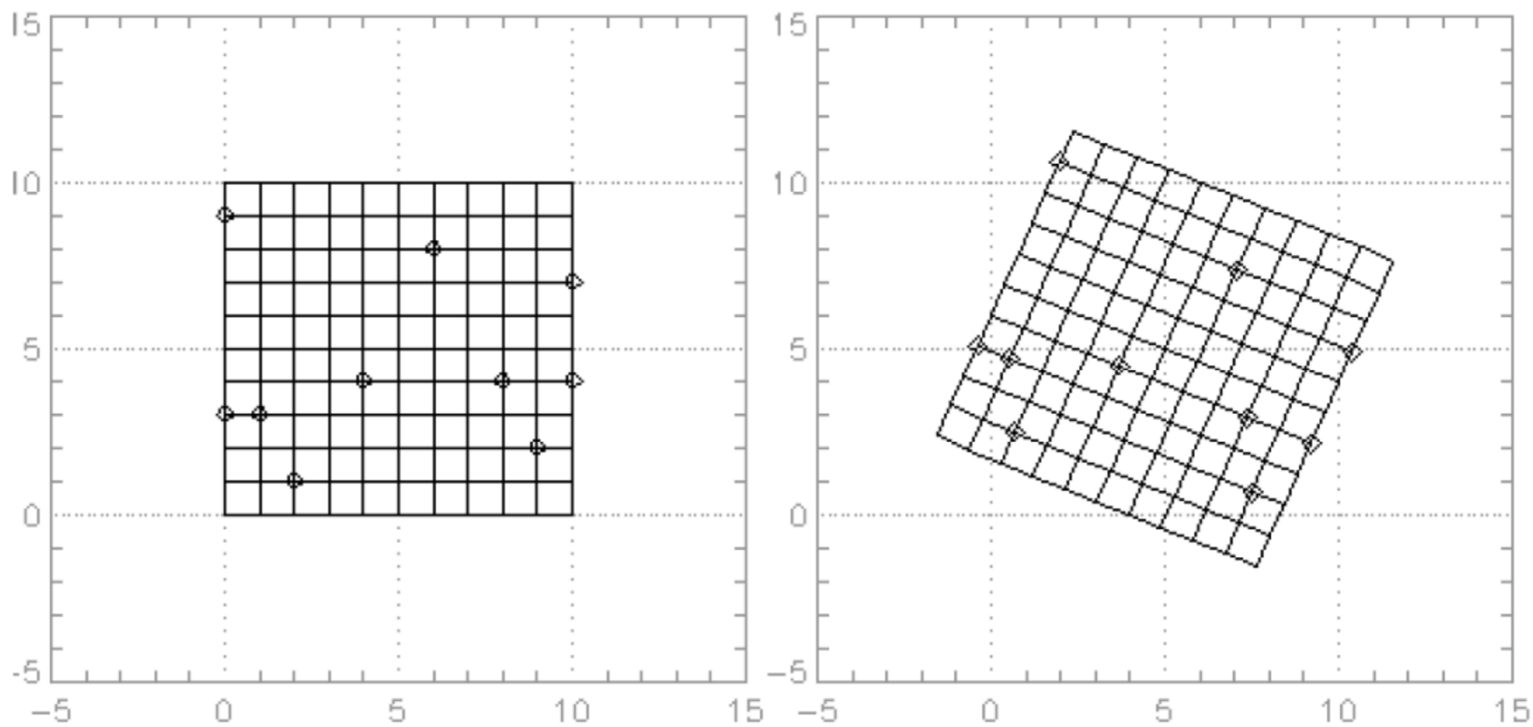
# 图像配准

- 问题定义
  - 输入图像、输出图像（参考图像）
  - 估计变换函数
- 实际应用
  - 相似时间内不同设备的图像
  - 相同设备不同时间拍摄的图像
- 约束点
  - 输入图像和输出图像中位置已知的相应点

# 点匹配法



- 在图像中寻找对应的点



# 具体问题

- 如何将图像A、B对齐？



Image A



Image B



# 具体问题

- 寻找匹配点

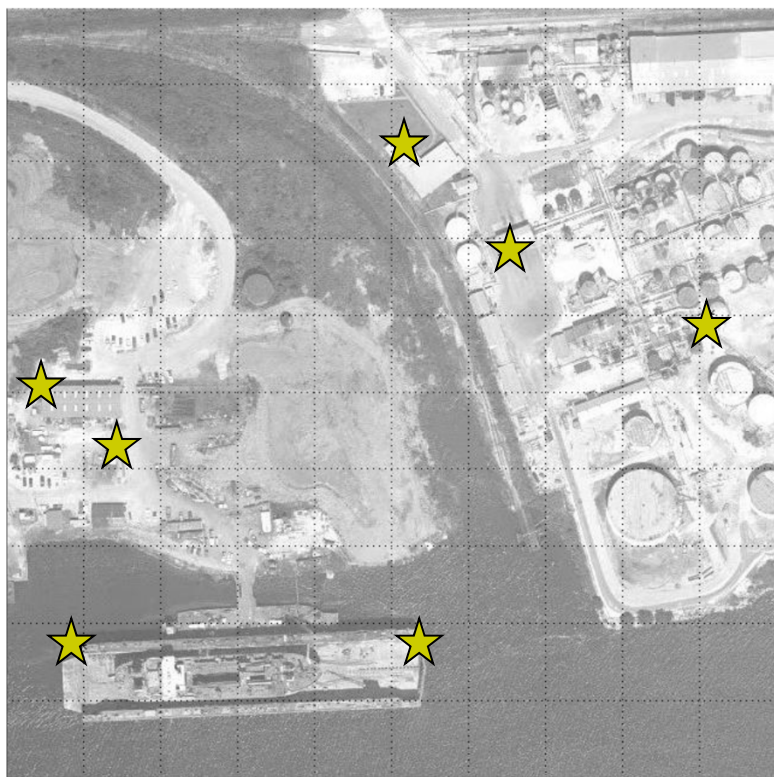


Image *A*

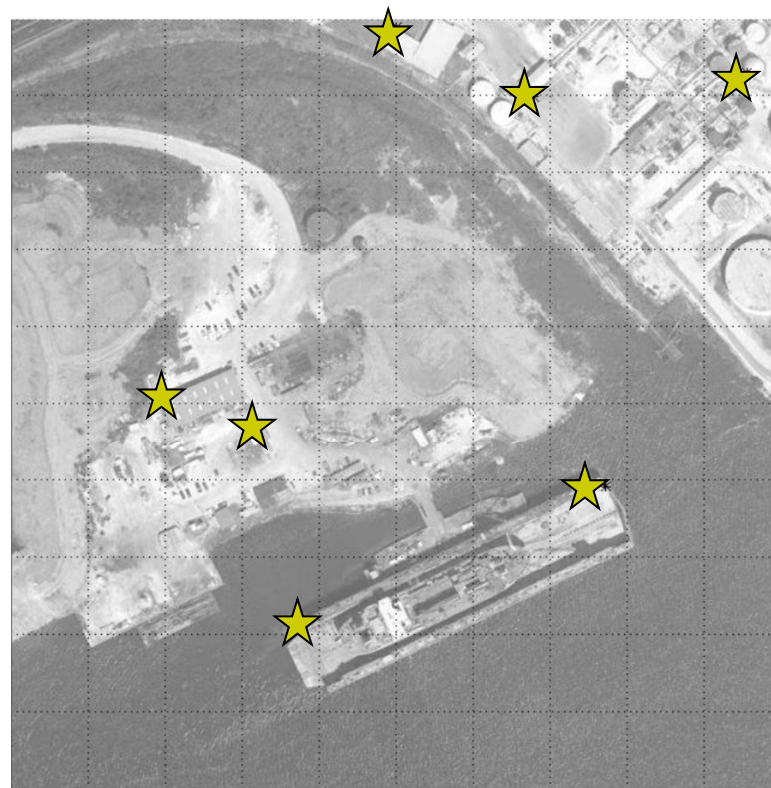
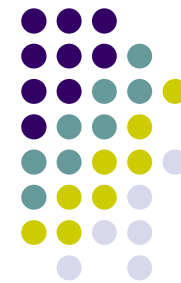


Image *B*

# 具体问题



- 图像A中的 $n$ 个点

$$P = \begin{bmatrix} v_0 & w_0 & 1 \\ v_1 & w_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1} & w_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

- 图像B中的 $n$ 个点

$$Q = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & y_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$



# 具体问题

- 寻找最优仿射变换

$$Q = PT$$

- 求解线性方程
- 求解最小二乘

$$\min_T \|Q - PT\|_F^2$$

- 闭合解

$$T = (P^\top P)^{-1} P^\top Q$$



# 具体问题

- 变换矩阵

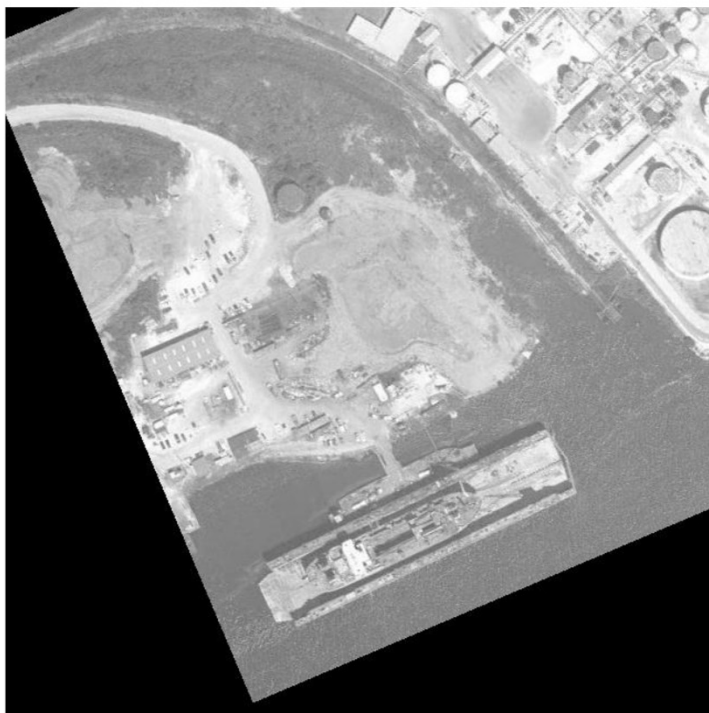
$$T = (P^T P)^{-1} P^T Q = \begin{bmatrix} 0.92 & 0.39 & 0 \\ -0.39 & 0.92 & 0 \\ 224.17 & 10.93 & 1 \end{bmatrix}$$

- 数值结果

$X_a$	$Y_a$	$X_b$	$Y_b$	$X'_a$	$Y'_a$
30.5	325.3	125.8	322.5	126.0	322.8
86.8	271.3	199.3	295.3	198.7	294.9
330.3	534.0	320.0	632.0	320.5	632.2
62.0	110.3	238.0	137.0	238.4	136.8
342.0	115.0	494.0	250.0	493.9	250.4
412.0	437.0	434.3	574.8	433.3	574.7
584.5	384.8	611.8	594.0	612.2	593.8

# 具体问题

- 实际效果



Mapped *A*



Original *B*



# 一般流程

- 建模（双线性近似）

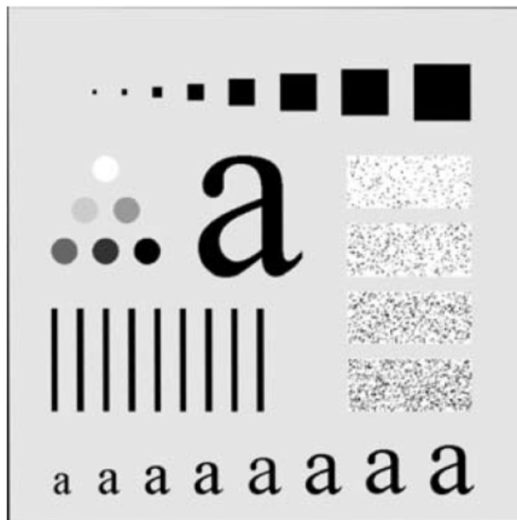
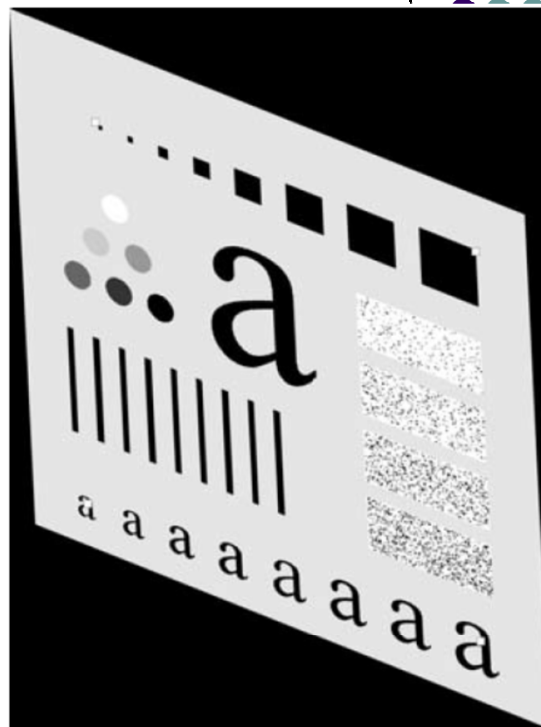
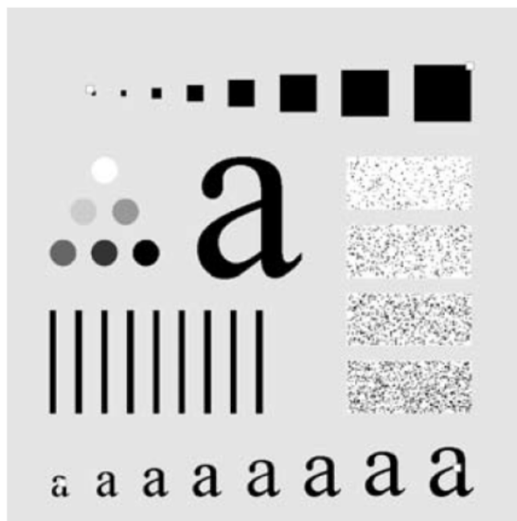
$$x = c_1v + c_2w + c_3vw + c_4$$

$$y = c_5v + c_6w + c_7vw + c_8$$

- 8个参数
- 寻找约束点
  - 4个约束点、8个方程，求解方程组
- 执行映射
  - 灰度内插
- 增加约束点
  - 将原图分成多个4边形，逐个处理

# 示例

- 4个约束点
  - 手动选择



存在黑边



# 效果展示

- 几何校正



变形后的老虎

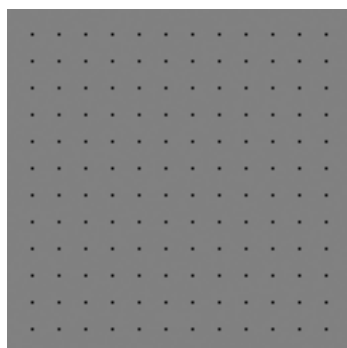


校正后的老虎

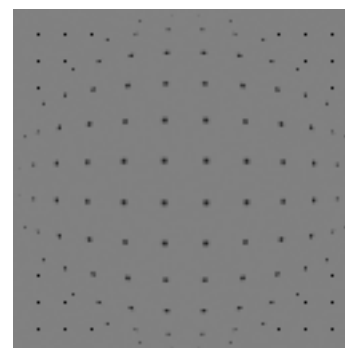


# 效果展示

- 几何校正



测试靶



对应的鱼眼图像

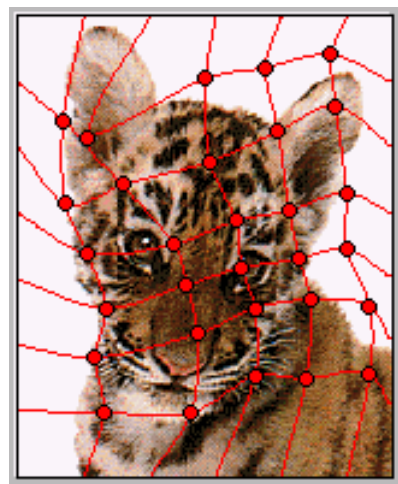
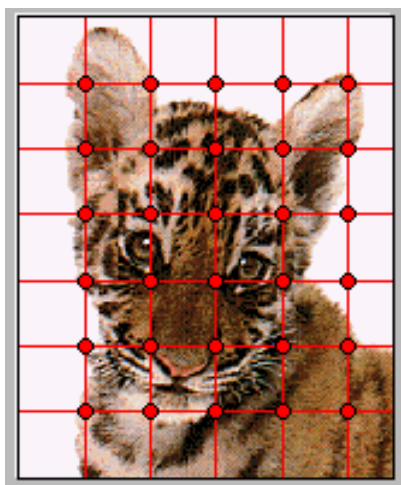
# 效果展示

- 图像卷绕



# 效果展示

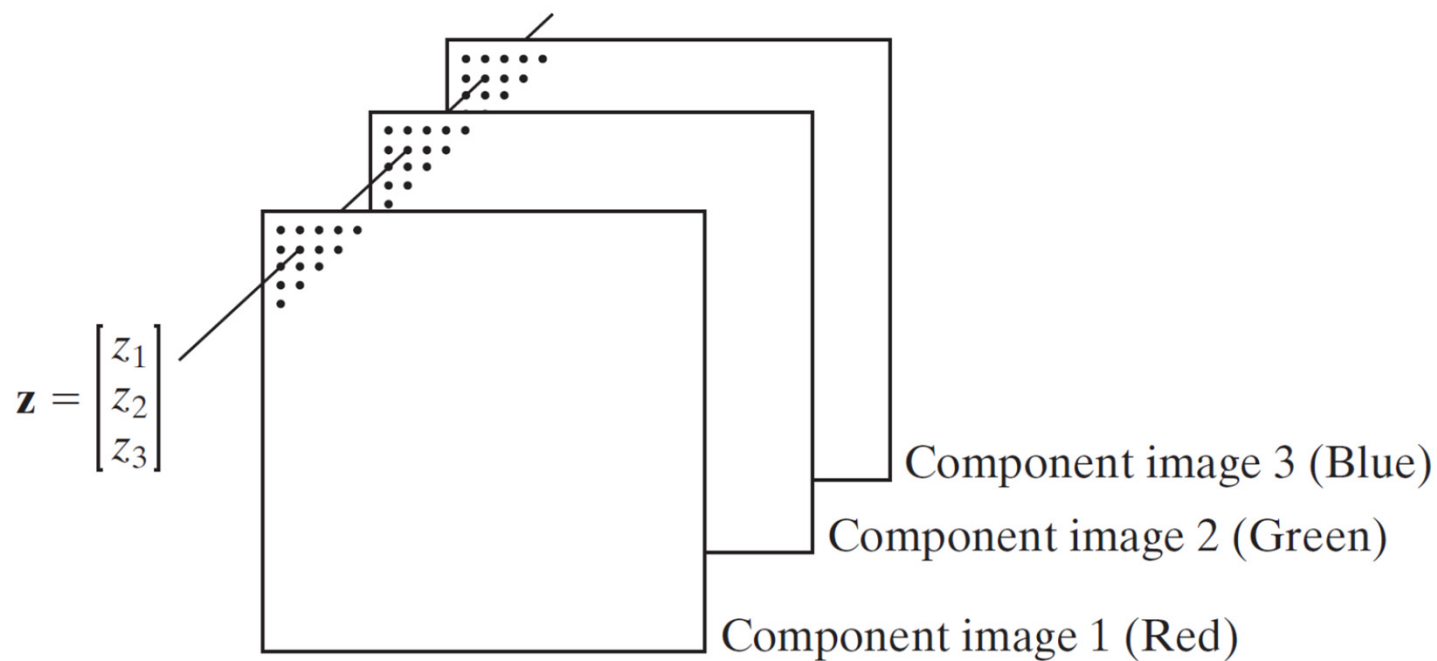
- 图像卷绕



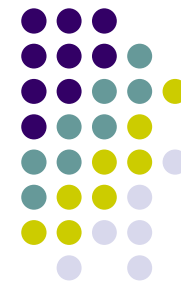
# 向量与矩阵操作



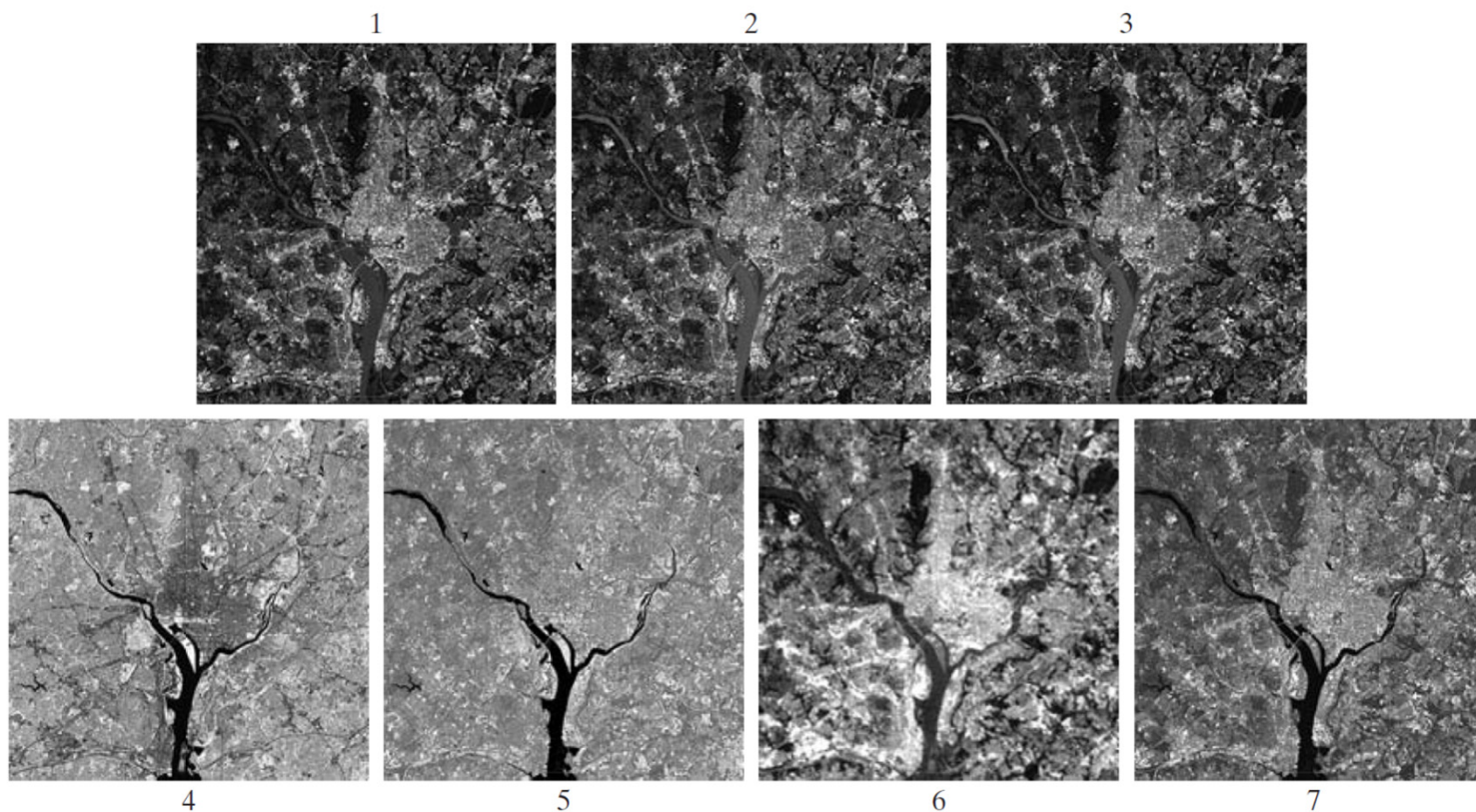
- 多光谱图像处理
  - 彩色图像



# 向量与矩阵操作



- 多光谱图像处理
  - 遥感图像



# 向量与矩阵操作



- 大小为  $M \times N$ ,  $n$  个分量的多光谱图像
  - $MN$  个  $n$  维向量

- 欧氏距离

$$D(\mathbf{z}, \mathbf{a}) = \left[ (\mathbf{z} - \mathbf{a})^T (\mathbf{z} - \mathbf{a}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[ (z_1 - a_1)^2 + (z_2 - a_2)^2 + \cdots + (z_n - a_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

- 线性变换

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{a})$$

整幅图像

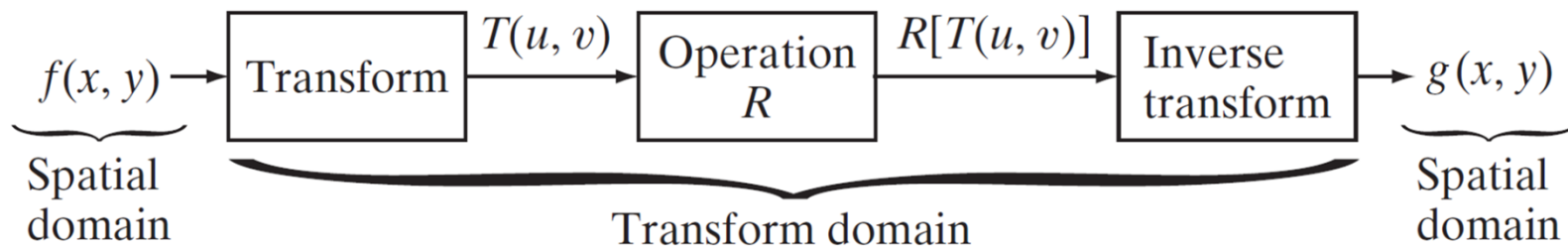
- $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{MN \times MN}$

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{n}$$

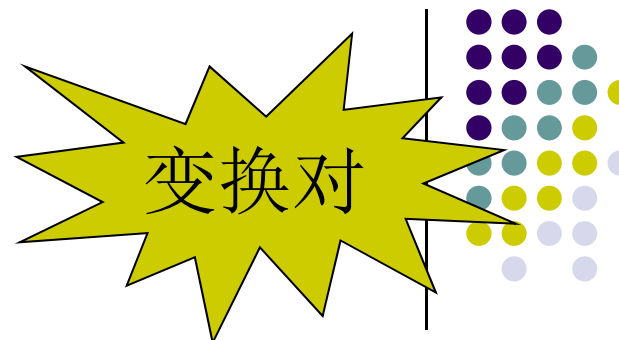


# 图像变换

- 空间域 (spatial domain)
  - 直接对图像的像素进行操作
- 变换域 (transform domain)
  - 将图像从空间域变换到新的域
  - 在变换域对图像进行操作
  - 利用反变换返回空间域



# 图像变换



- 二维线性变换（正变换）

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)r(x, y, u, v)$$

- $f(x, y)$ 是输入图像,  $r(x, y, u, v)$ 是正变换核
- $x, y$ 是空间变量,  $u, v$ 是变换变量
- $u = 0, 1, 2, \dots, M - 1, \quad v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$

- 反变换

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v)s(x, y, u, v)$$

- $s(x, y, u, v)$ 是反变换核



# 图像变换



- 正变换核是**可分**的

$$r(x, y, u, v) = r_1(x, u)r_2(y, v)$$

- 正变换核是**对称**的

$$r(x, y, u, v) = r_1(x, u)r_1(y, v)$$

- 可分对称时，正变换的矩阵形式

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)r(x, y, u, v)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{AFA}$$

- $M = N$

- $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ ,  $f_{xy} = f(x, y)$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ ,  $a_{ij} = r_1(i, j)$



# 图像变换

- 可分对称时, 正变换的矩阵形式

$$\mathbf{T} = \mathbf{AFA}$$

- 可分对称时, 反变换的矩阵形式

$$\mathbf{BTB} = \mathbf{BAFAB}$$

- 当  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{BTB}$$

- 一般情况

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{BAFAB}$$

# 傅里叶变换



- 正变换

- 正变换核  $r(x, y, u, v) = e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$

- $j = \sqrt{-1}$

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- 反变换

- 反变换核  $s(x, y, u, v) = \frac{1}{MN} e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$

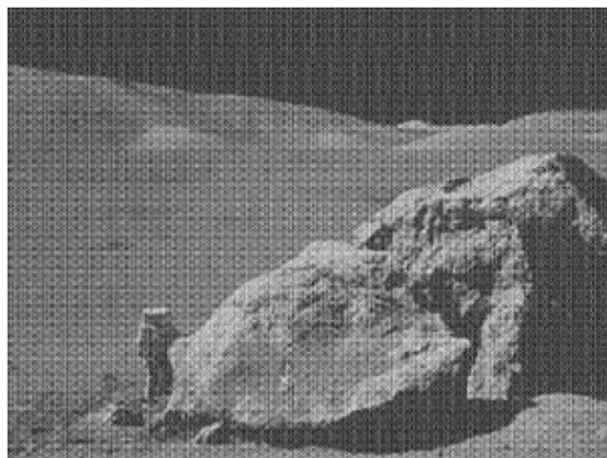
$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

# 举例

- 傅里叶变换去噪



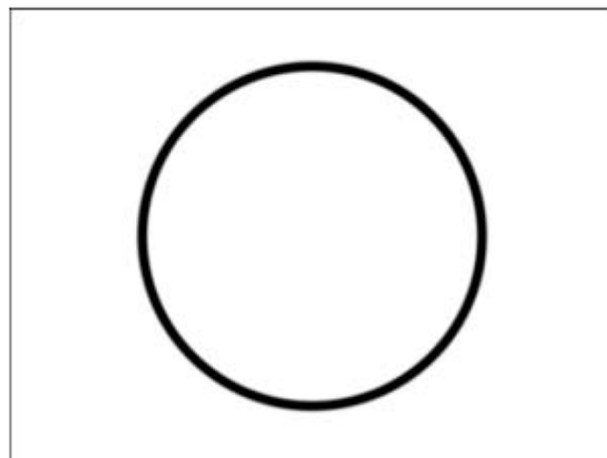
正弦噪声  
污染的图像



频率域  
图像



去噪  
模板



频率域处理后  
反变换的图像





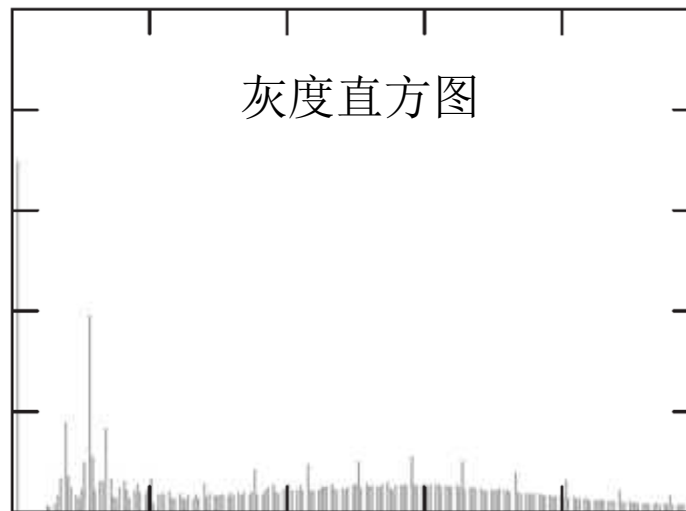
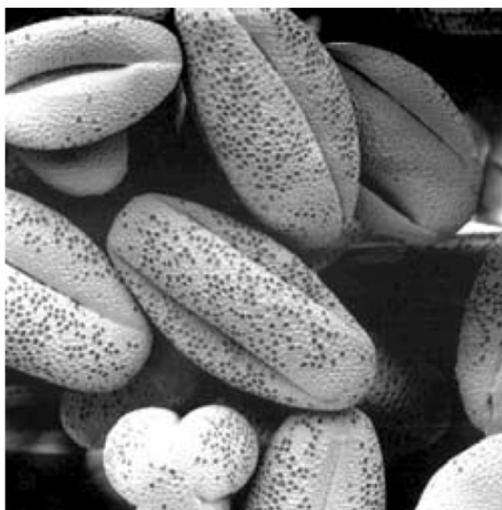
# 概率方法

- 灰度值  $z_k = 0, 1, \dots, L - 1$  出现的概率

$$p(z_k) = \frac{n_k}{MN}$$

- $n_k$  表示  $z_k$  在图像中出现的次数

- 显然 
$$\sum_{k=0}^{L-1} p(z_k) = 1$$





# 概率方法

- 平均灰度

$$m = \sum_{k=0}^{L-1} z_k p(z_k)$$

- 灰度的方差

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{L-1} (z_k - m)^2 p(z_k)$$

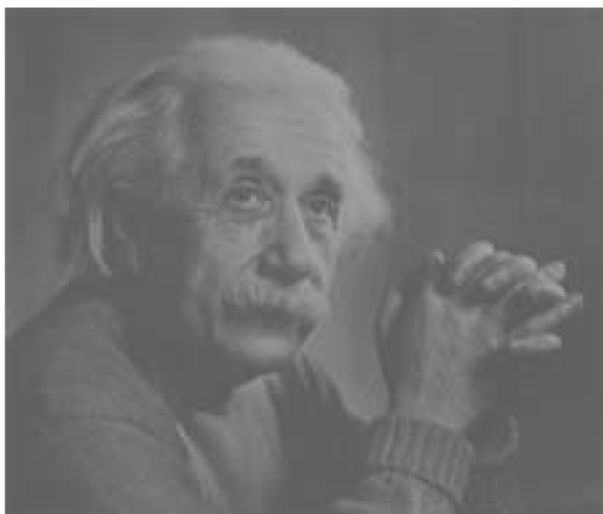
- 随机变量的 $n$ 阶矩

$$\mu_n(z) = \sum_{k=0}^{L-1} (z_k - m)^n p(z_k)$$

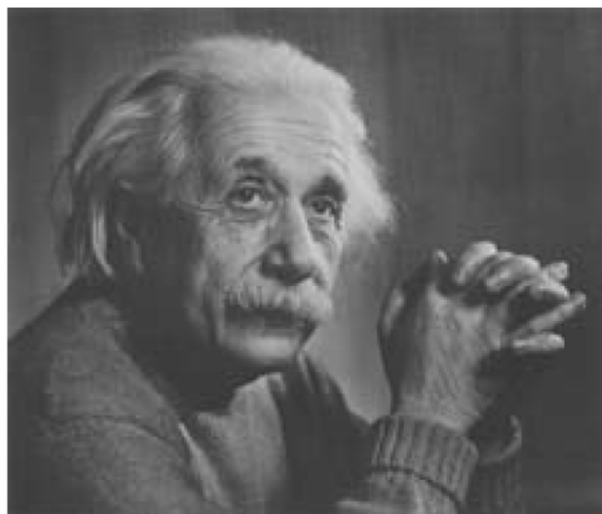
- $\mu_0(z) = 1$ ,  $\mu_1(z) = m$ ,  $\mu_2(z) = \sigma^2 + m^2$

# 举例

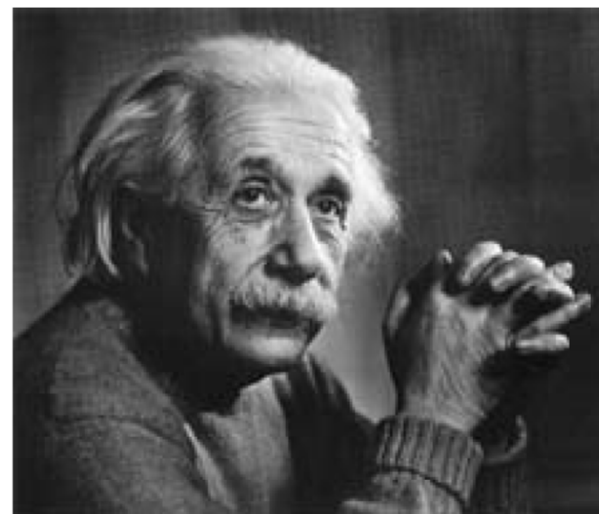
- 不同的对比度



标准差14.3



标准差31.6



标准差49.2