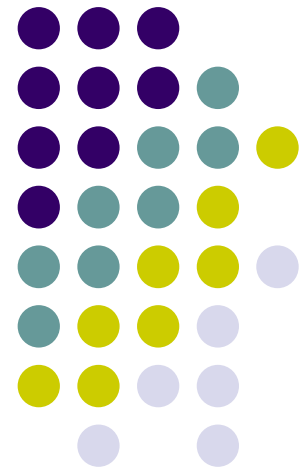


# 数字图像处理

---

## 第三讲 灰度变换与空间滤波



# 提纲



- 背景知识
- 基本灰度变换函数
- 直方图处理
- 空间滤波基础
- 平滑空间滤波器
- 锐化空间滤波器
- 混合空间增强法



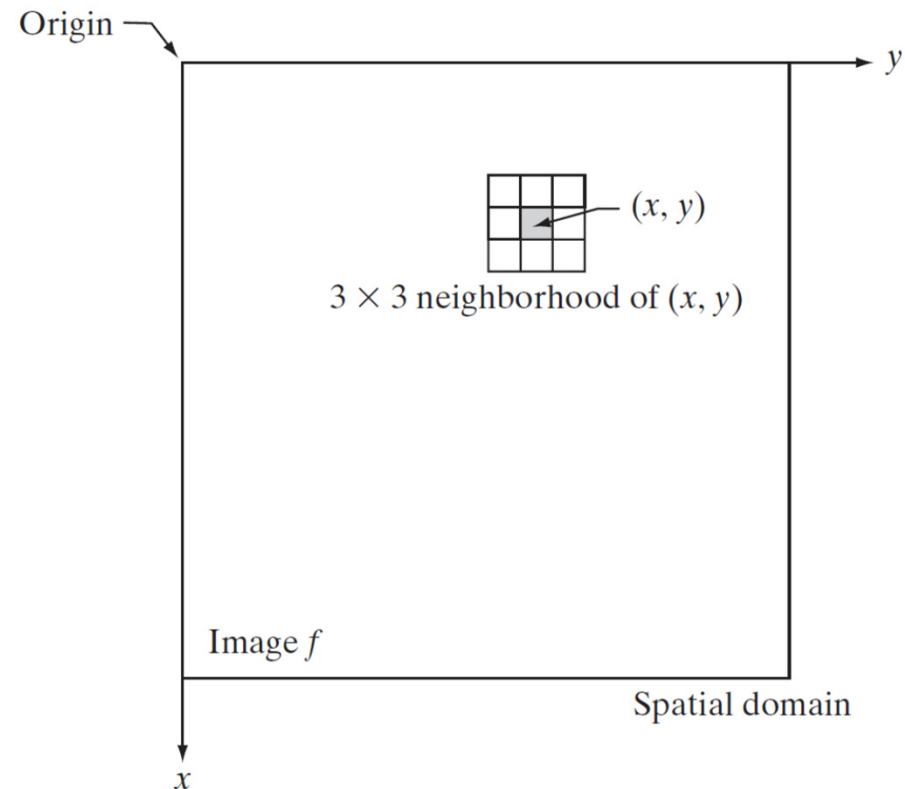
# 背景知识

- 空间域
  - 指图像平面本身
- 空间域处理
  - 直接操作图像内的像素
  - 更加简单、高效
- 1. 灰度变换
  - 单像素操作（对比度操作、阈值处理）
- 2. 空间滤波
  - 邻域操作（图像平滑、锐化）

# 空间域处理



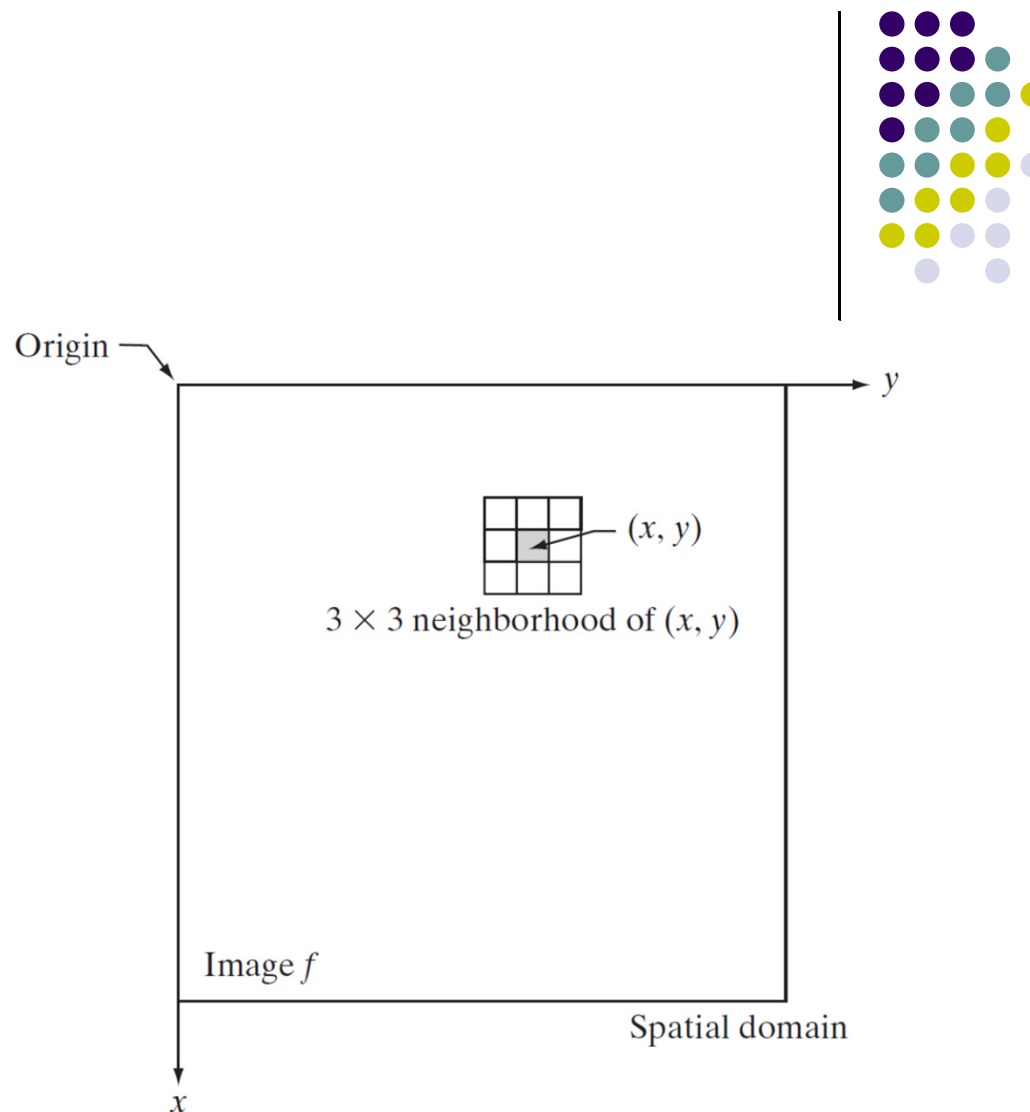
- 一般形式  $g(x, y) = T[f(x, y)]$ 
  - 单图像、多图像





# 空间处理流程

- 邻域原点移动
  - 应用算子 $T$ 
    - 比如计算均值
  - 产生输出
- 
- 边界怎么办?
    - 忽略外部、填充



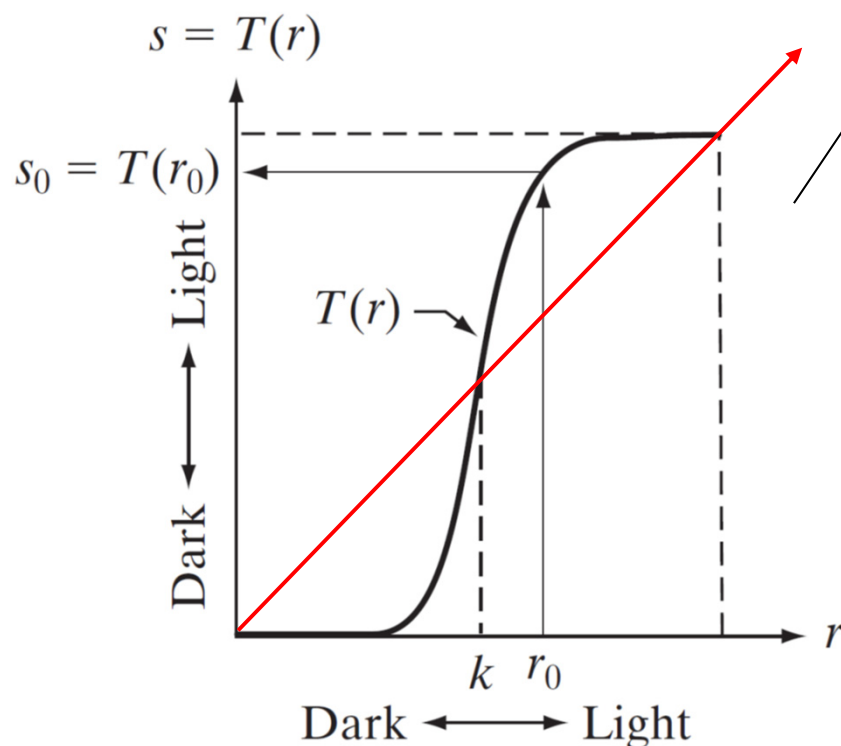
# 灰度变换



- 邻域为  $1 \times 1$  的空间处理

$$g(x, y) = T[f(x, y)] \rightarrow s = T(r)$$

- $r$  是输入灰度,  $s$  是输出灰度



- 灰度大于  $k$  的变得更亮
- 灰度小于  $k$  的变得更暗

对比度拉伸

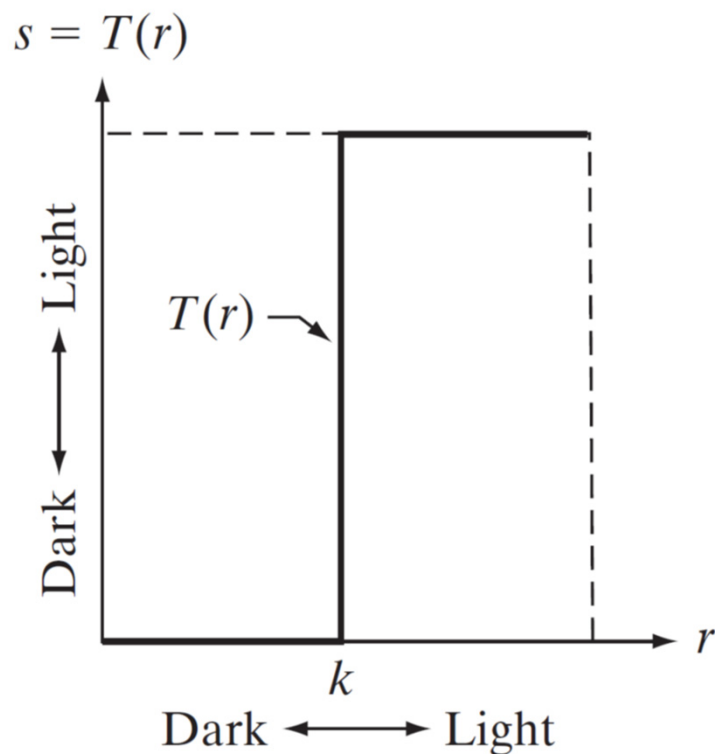


# 灰度变换

- 邻域为  $1 \times 1$  的空间处理

$$s = T(r)$$

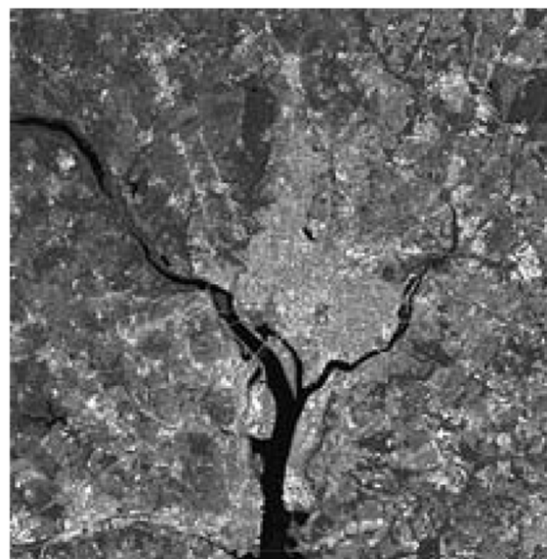
- $r$  是输入灰度,  $s$  是输出灰度



# 图像增强



- 对图像进行处理，使其比原始图像更适合于**特定**应用
  - 图像增强是面向问题的
  - 没有通用的理论和技术



# 提纲



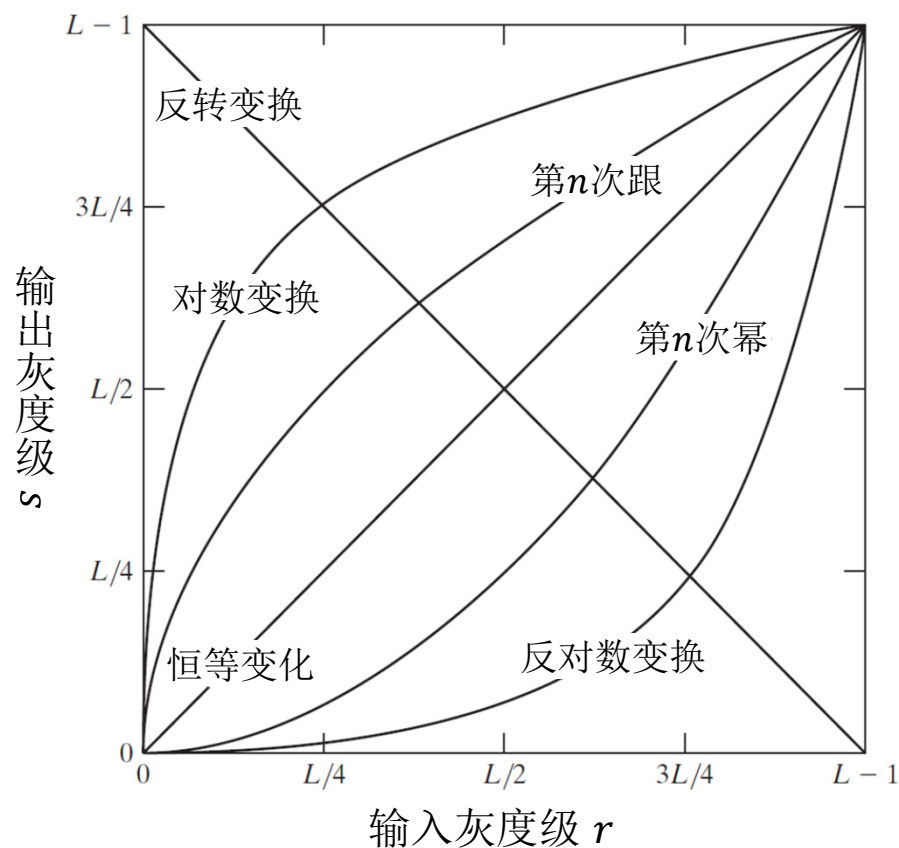
- 背景知识
- 基本灰度变换函数
- 直方图处理
- 空间滤波基础
- 平滑空间滤波器
- 锐化空间滤波器
- 混合空间增强法

# 基本灰度变换函数



- 线性函数、对数函数、幂律函数

$$s = T(r)$$



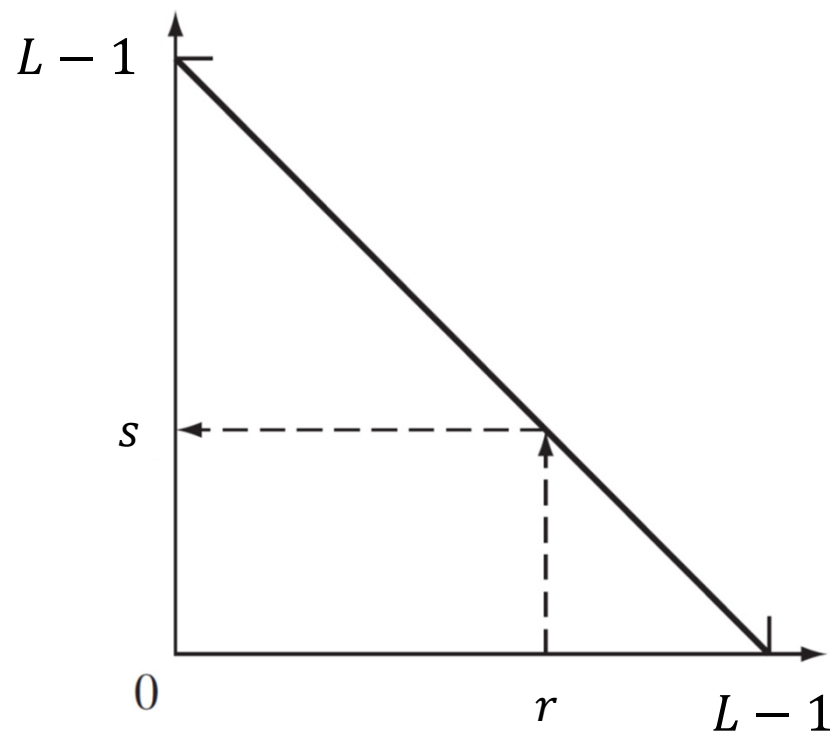
# 图像反转



- 计算公式

$$s = L - 1 - r$$

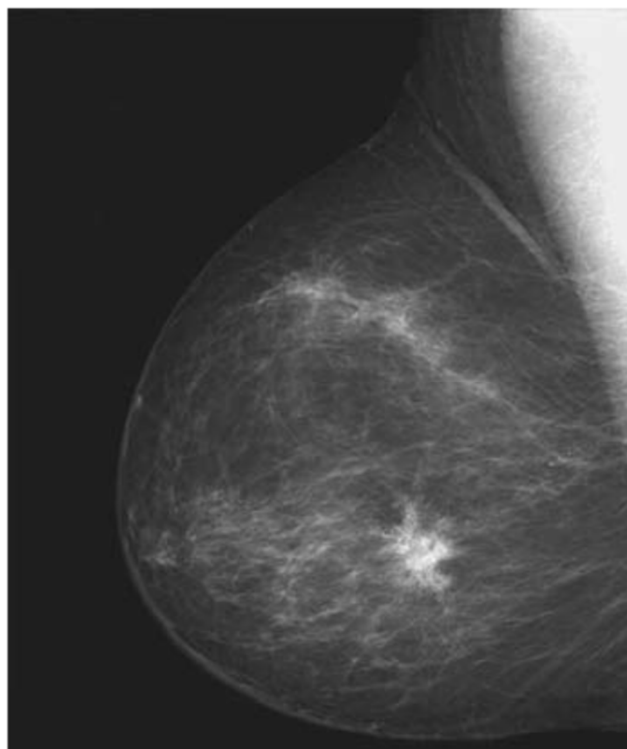
- 增强嵌入在暗区域中的白色或灰色细节



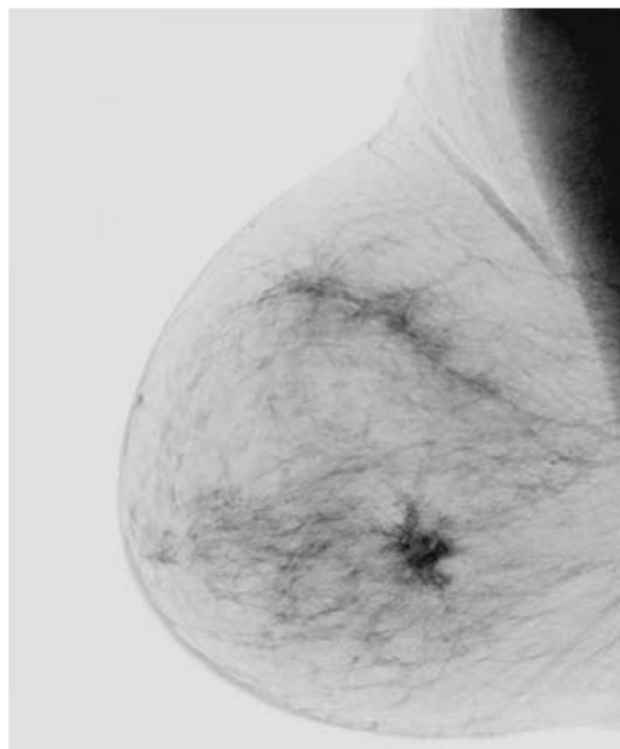
# 图像反转

- 计算公式

$$s = L - 1 - r$$



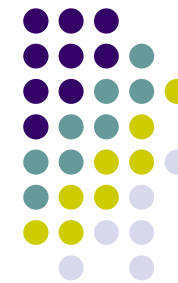
X射线图像



反转图像



# 对数变换



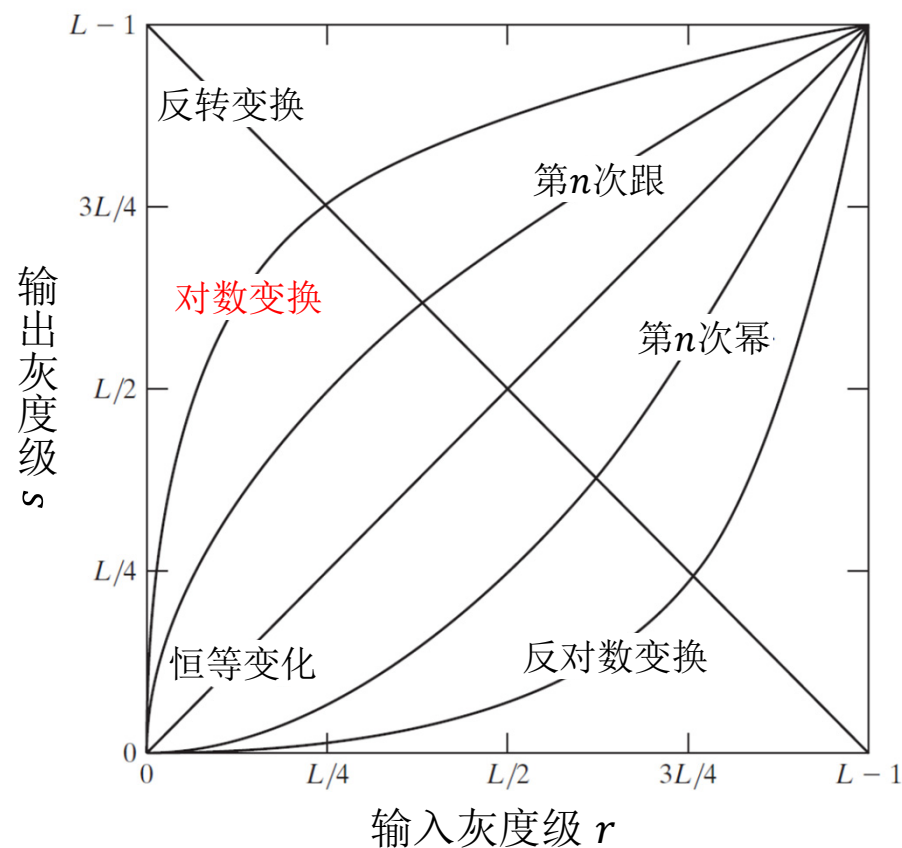
- 计算公式

$$s = c \log(1 + r)$$

- $c$ 是常数

- 低灰度值扩展

- 高灰度值压缩

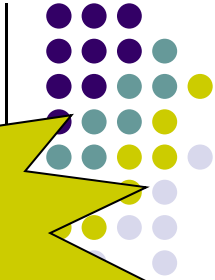


# 对数变换

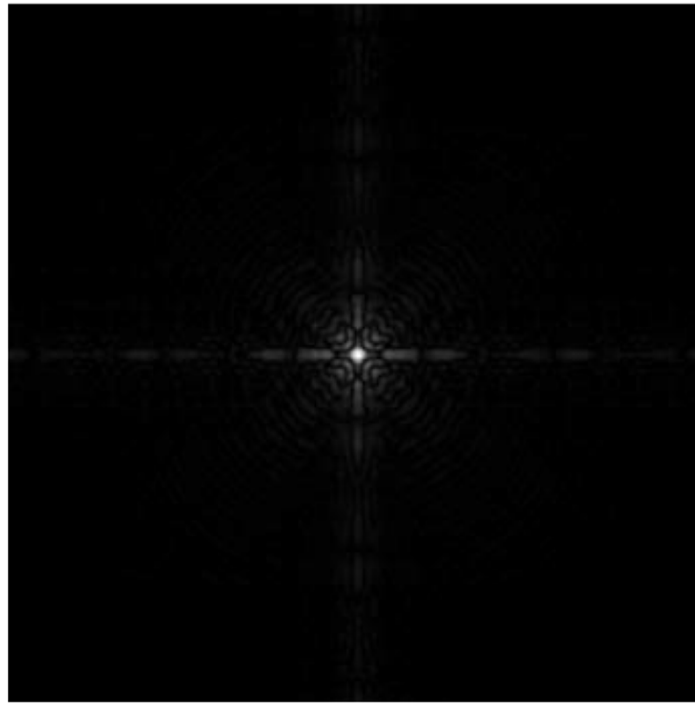
- 计算公式

$$s = c \log(1 + r)$$

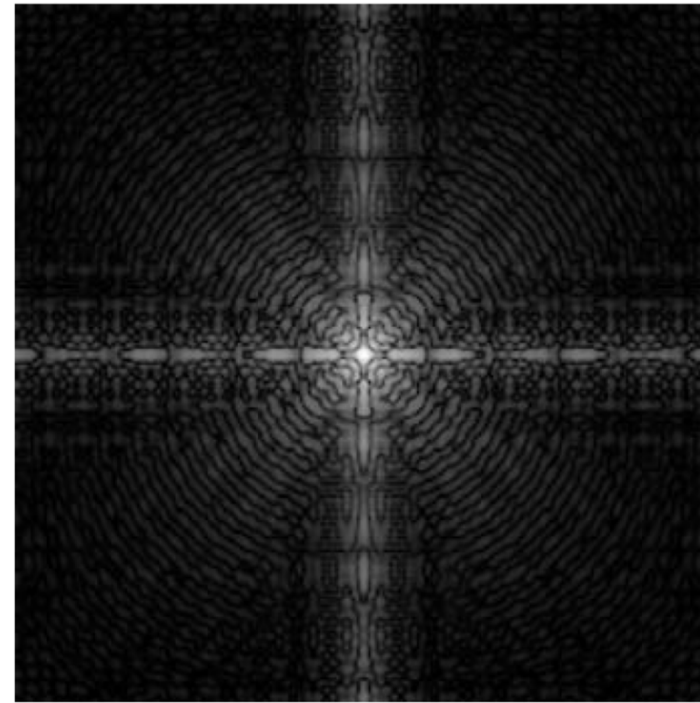
- 压缩灰度范围：  $0 \sim 1.5 \times 10^6 \rightarrow 0 \sim 6.2$



显示了暗色中  
隐藏的  
细节



傅里叶频谱



对数变换后的结果

# 幂律变换（伽马变换）



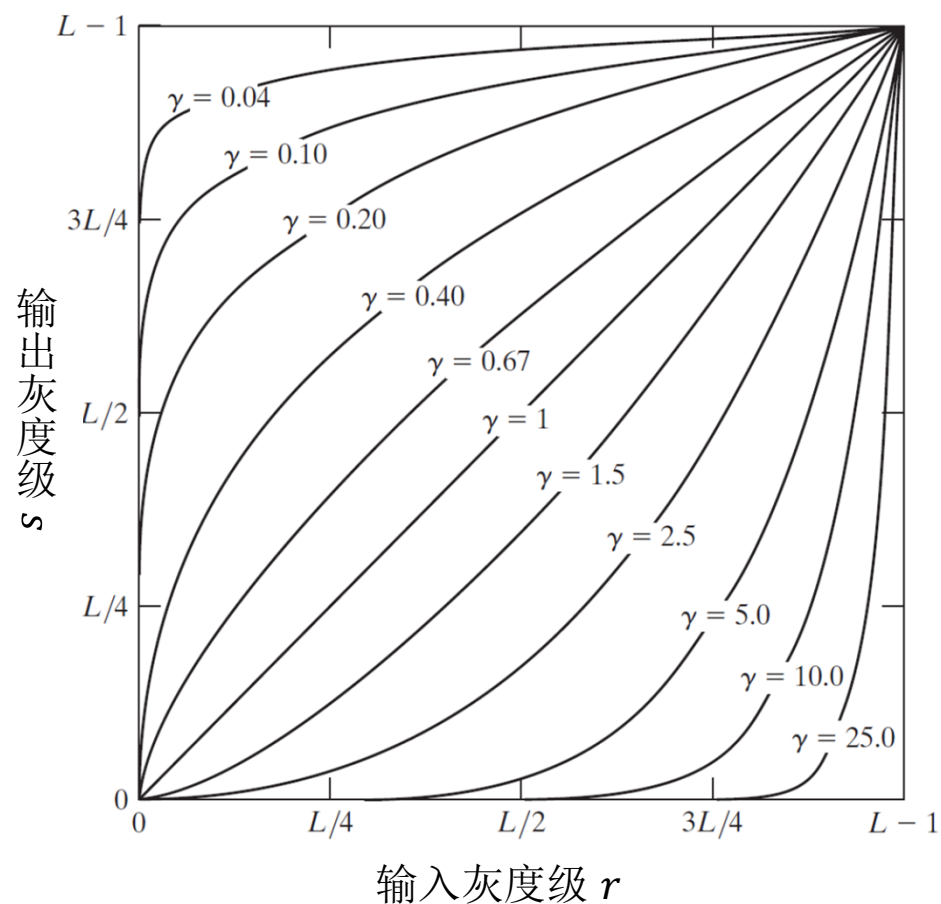
- 计算公式

$$s = cr^\gamma$$

- $c$ 和 $\gamma$ 是正常数

- $\gamma < 1$

- 低灰度值扩展
- 高灰度值压缩



# 幂律变换（伽马变换）



- 计算公式

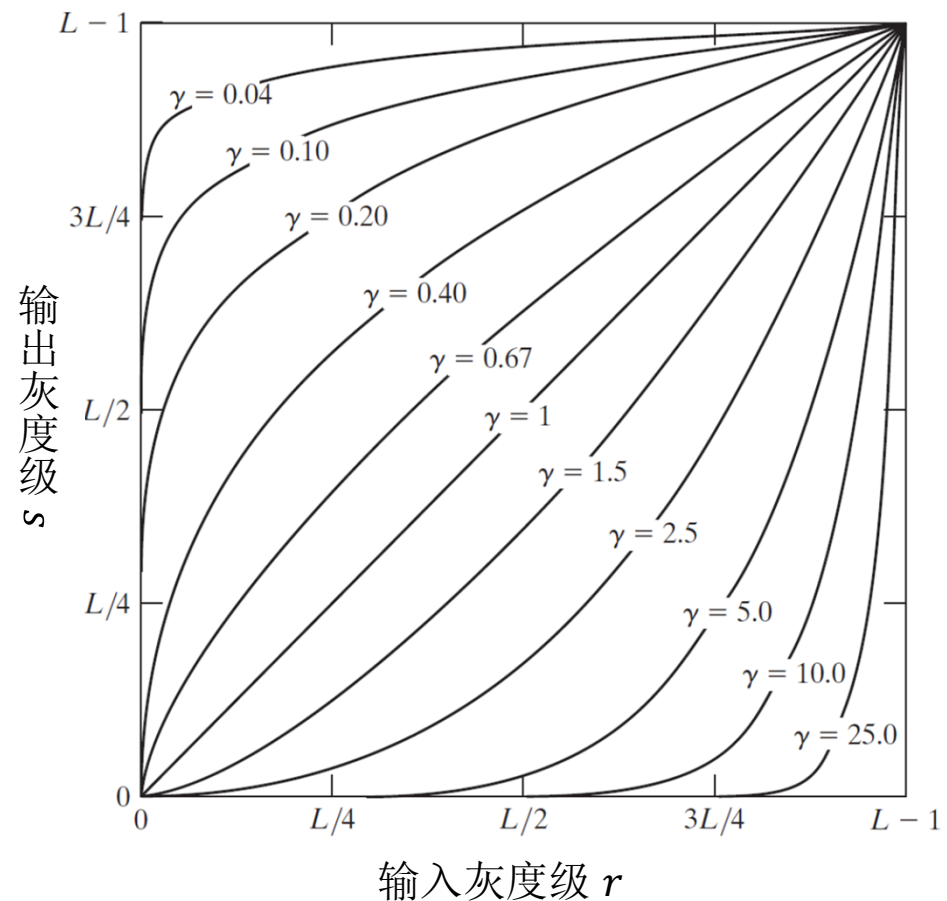
$$s = cr^\gamma$$

- $c$ 和 $\gamma$ 是正常数

- $\gamma > 1$

- 低灰度值压缩

- 高灰度值扩展

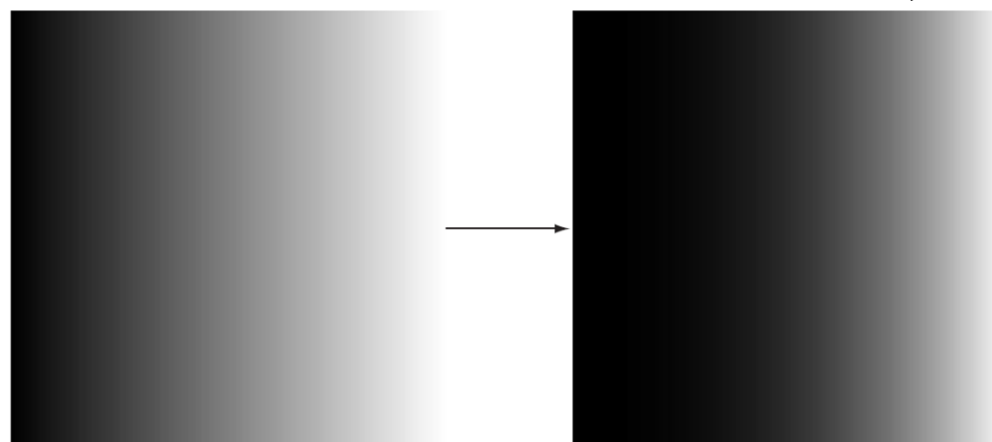


# 幂律变换（伽马变换）



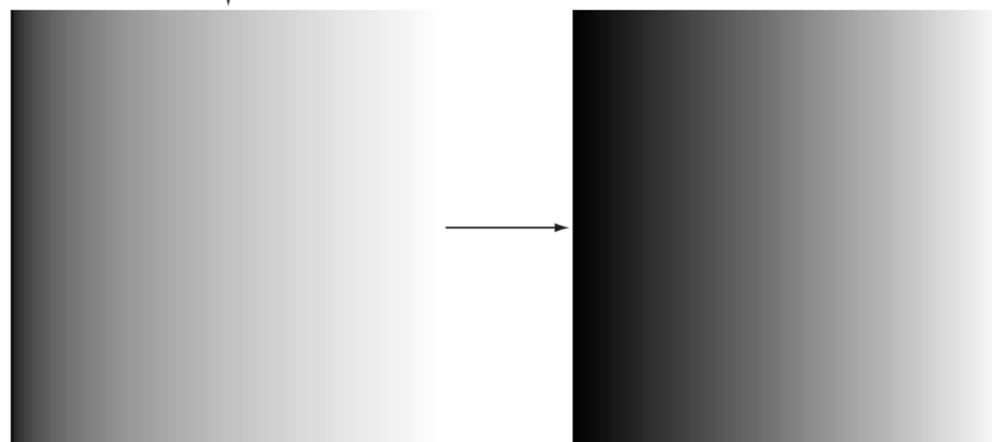
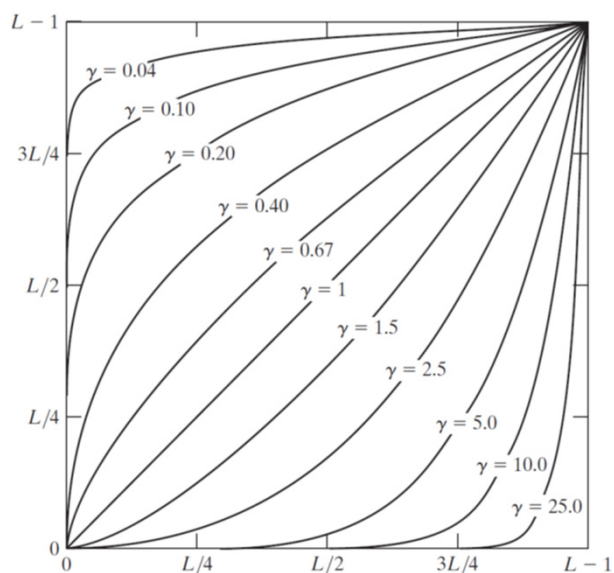
$$\gamma = 2.5$$

- 伽马校正
  - 显示设备依据幂律来响应
  - 处理图像来校正幂律响应



Original image  
 $\gamma = 1/2.5$   
Gamma correction

Original image as viewed on monitor

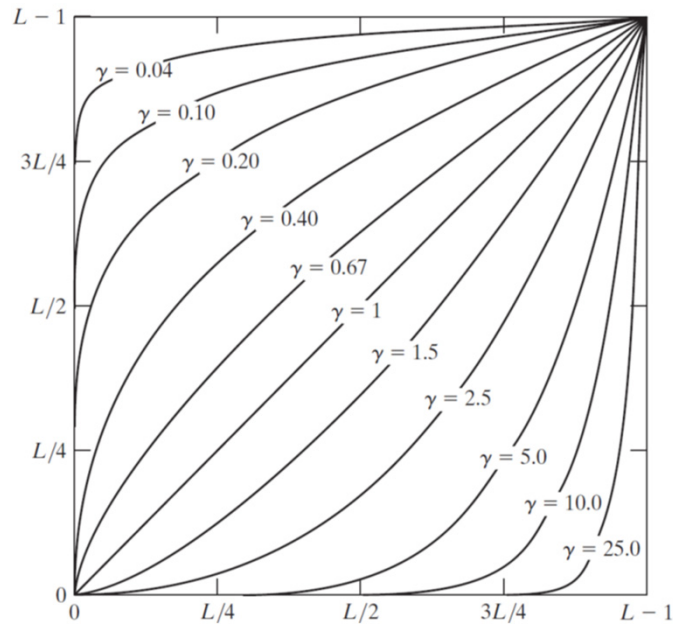


Gamma-corrected image

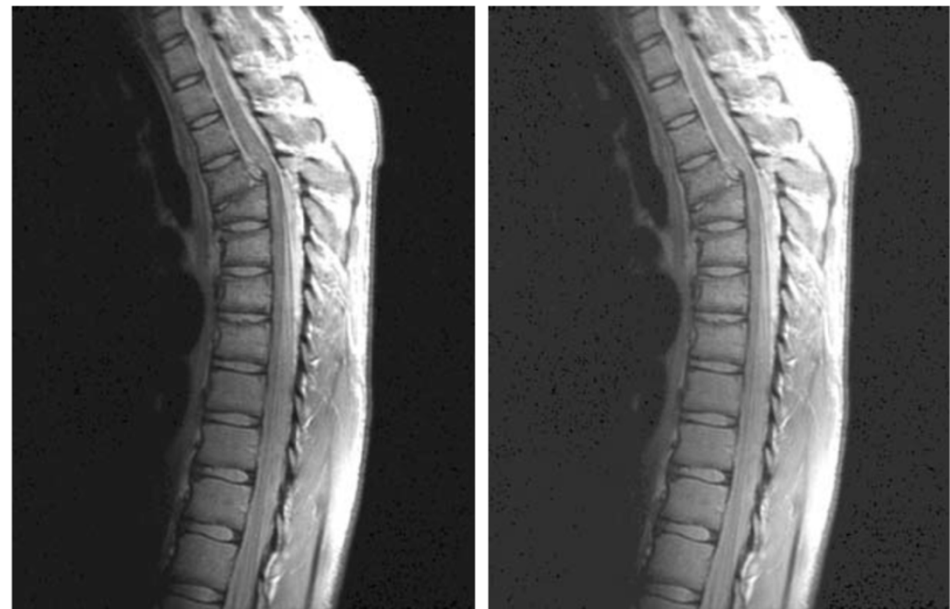
Gamma-corrected image as viewed on the same monitor

# 举例

- $\gamma < 1$ 
  - 低灰度值扩展
  - 高灰度值压缩



- $\gamma$ 太小, 对比度降低



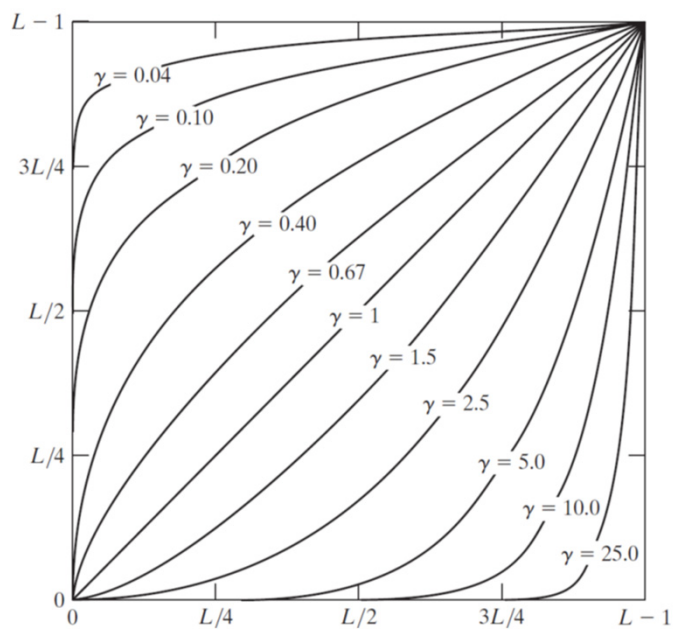
$\gamma = 0.4$

$\gamma = 0.3$



# 举例

- $\gamma > 1$ 
  - 低灰度值压缩
  - 高灰度值扩展



- $\gamma$ 太大, 细节丢失

航拍图像

$\gamma = 3$



$\gamma = 4$

$\gamma = 5$

# 基本变换函数的扩展



- 如果对不同的灰度级别有不同的处理需求，怎么办？
- 分段线性变换函数
  - 形式可以是任意复杂
  - 需要人工设计
- 1. 对比度拉伸
- 2. 灰度级分层
- 3. 比特平面分层





# 对比度拉伸变换



- 一般是单调递增

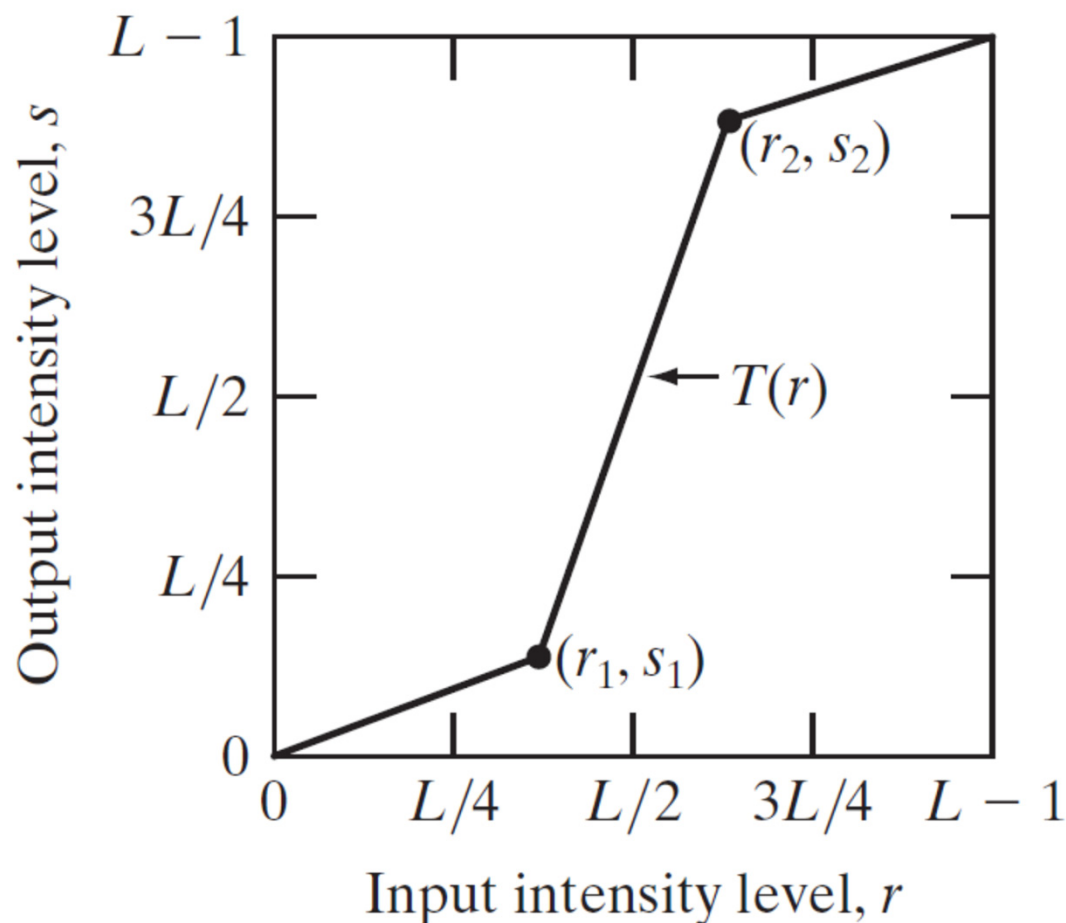
- 线性函数

- $r_1 = s_1, r_2 = s_2$

- 阈值处理函数

- $r_1 = r_2, s_1 = 0$

- $s_2 = L - 1$



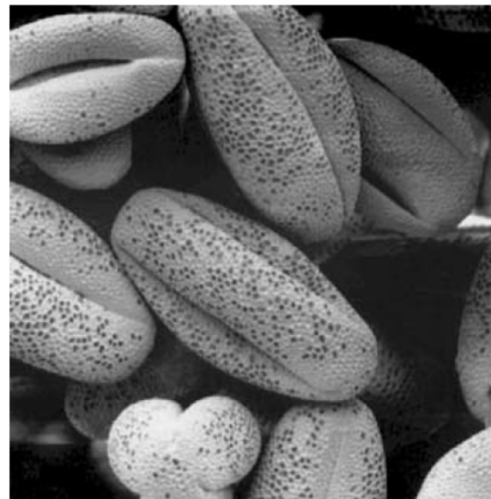
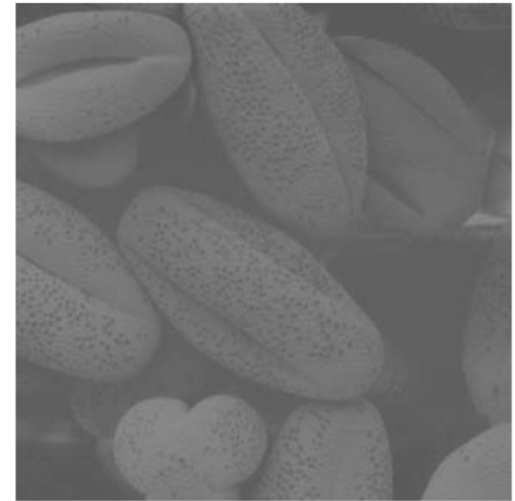
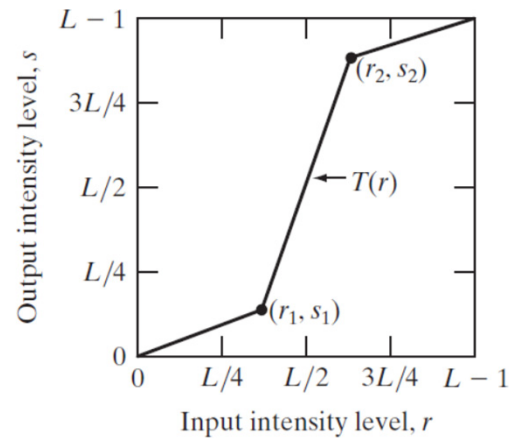
# 举例

- 线性拉伸

- $(r_1, s_1) = (r_{\min}, 0)$
- $(r_2, s_2) = (r_{\max}, L - 1)$

- 阈值处理

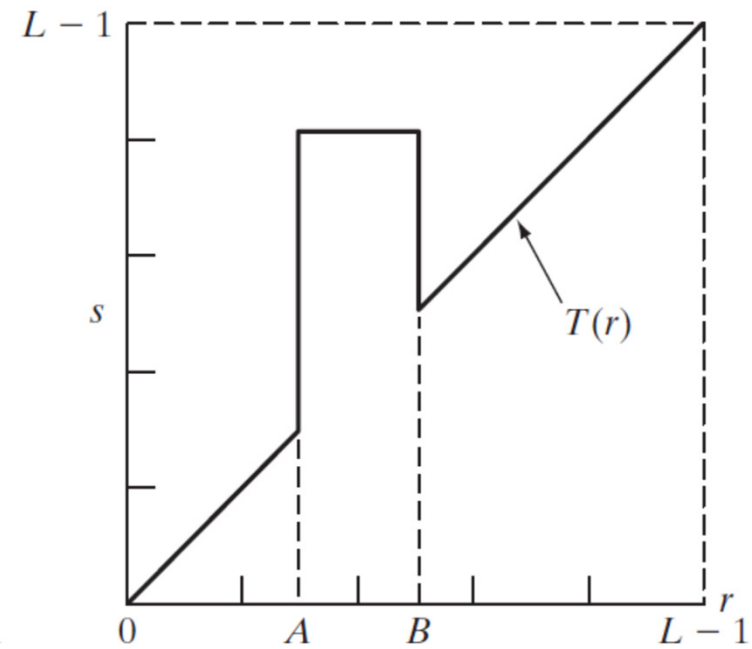
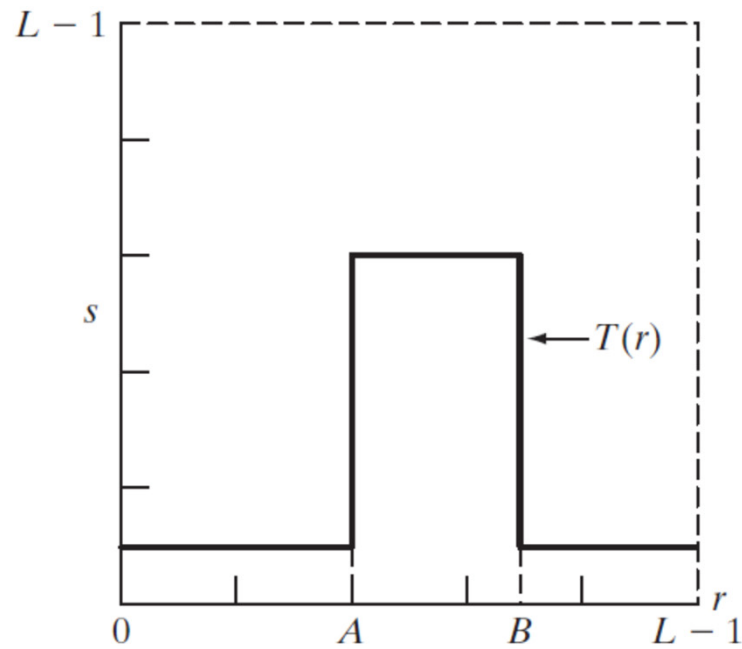
- $(r_1, s_1) = (m, 0)$
- $(r_2, s_2) = (m, L - 1)$



# 灰度级分层

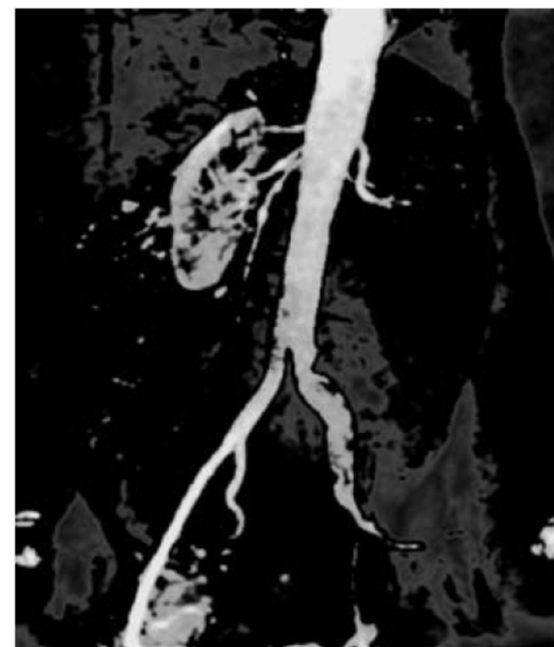
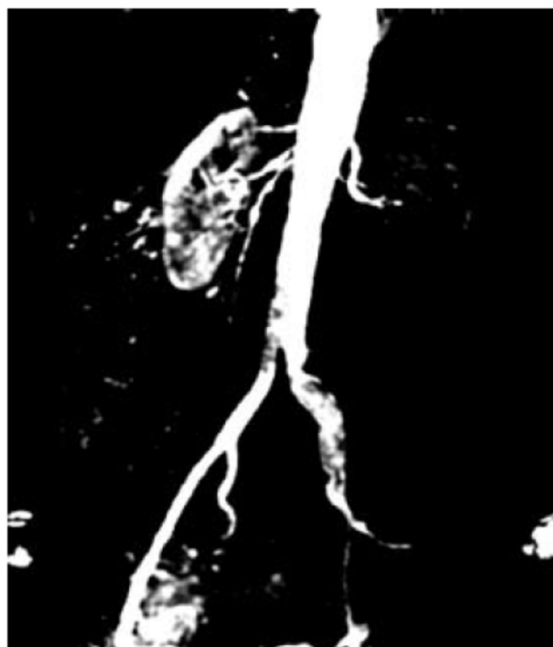
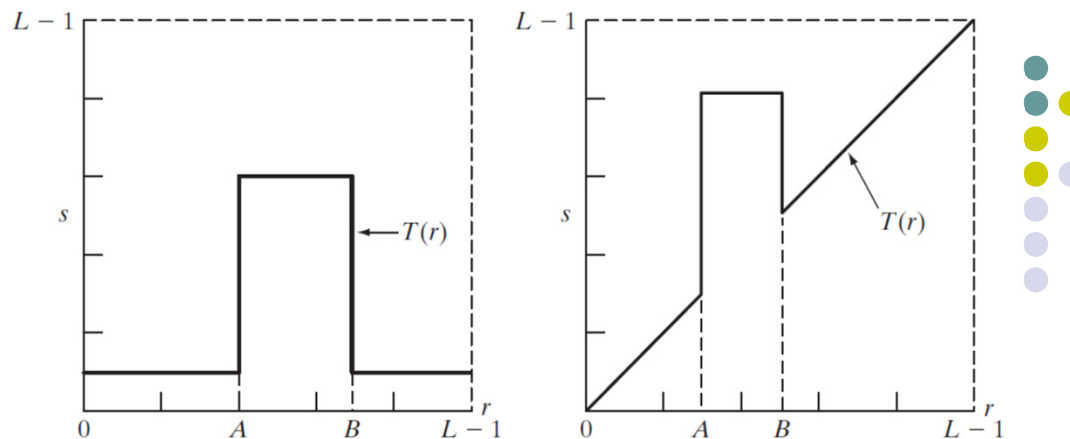


- 突出特定的灰度范围



# 举例

- 医学图像处理



大动脉血管造影

观察造影剂形状

把感兴趣的变成白色  
把不感兴趣的变成黑色

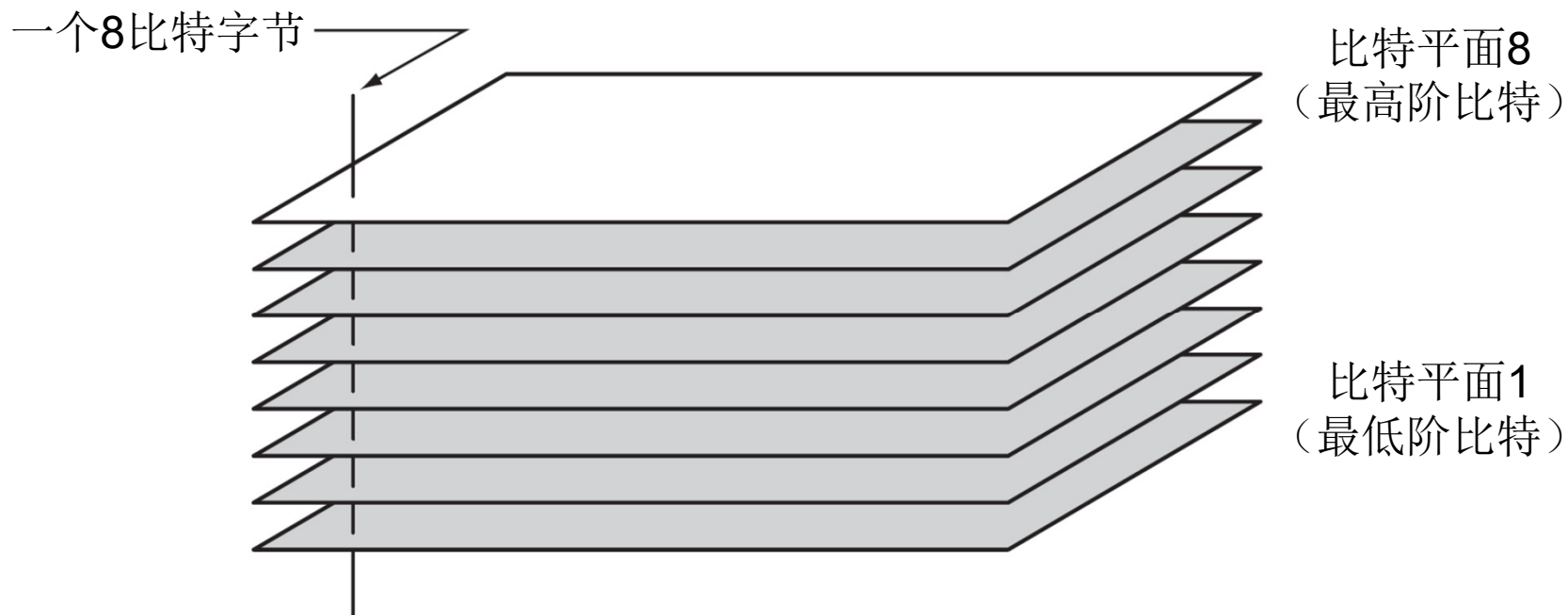
把不感兴趣的变成黑色

观察造影剂随时间流动

# 比特平面分层



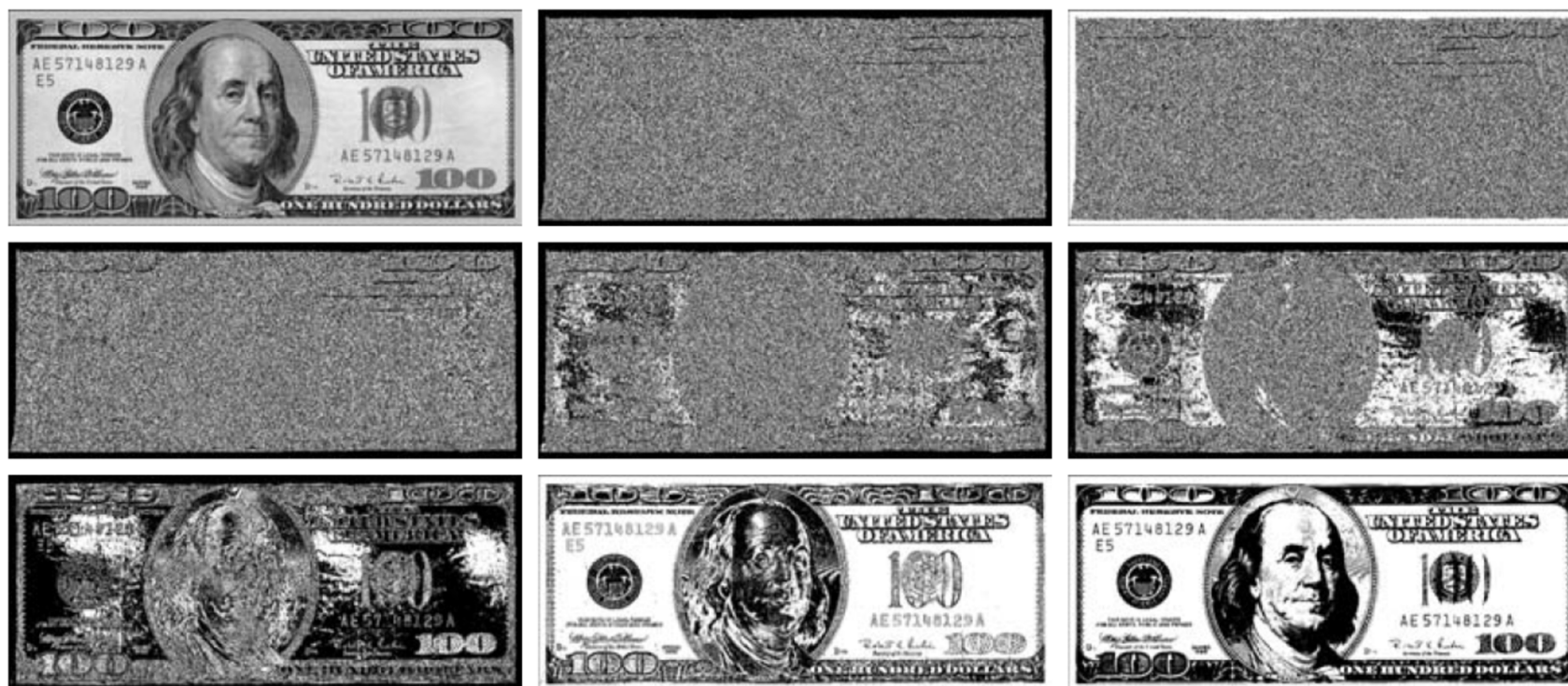
- 突出特定比特的作用
  - 8比特图像可认为由8个1比特平面组成



# 举例



- 高阶比特平面包含视觉上重要的数据
- 低阶比特平面贡献了更精细的灰度细节



边框灰度值194: 11000010

# 函数实现



- 第8个比特
  - $[0,127] \rightarrow 0$ ,  $[128,255] \rightarrow 255$

其他比特位呢？



# 应用



- 确定量化该图像比特数的充分性
- 图像压缩

伪轮廓



8、7



8、7、6



8、7、6、5



# 提纲

- 背景知识
- 基本灰度变换函数
- 直方图处理
- 空间滤波基础
- 平滑空间滤波器
- 锐化空间滤波器
- 混合空间增强法



# 直方图处理（子目录）



- 灰度直方图
- 直方图均衡
- 直方图匹配
- 局部直方图处理
- 在图像增强中使用直方图统计



# 灰度直方图

- 直方图

$$h(r_k) = n_k$$

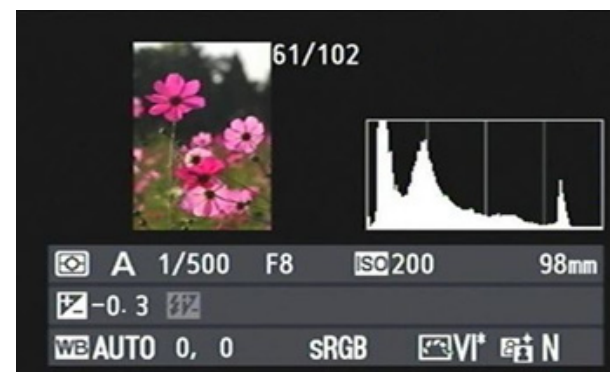
- $r_k \in [0, L - 1]$ 表示图像的第 $k$ 个灰度值
- $n_k$ 表示 $r_k$ 在图像中出现的次数

- 归一化直方图

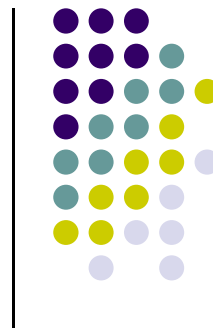
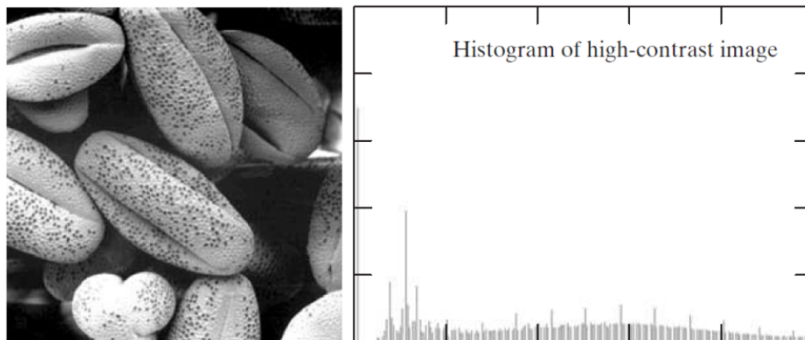
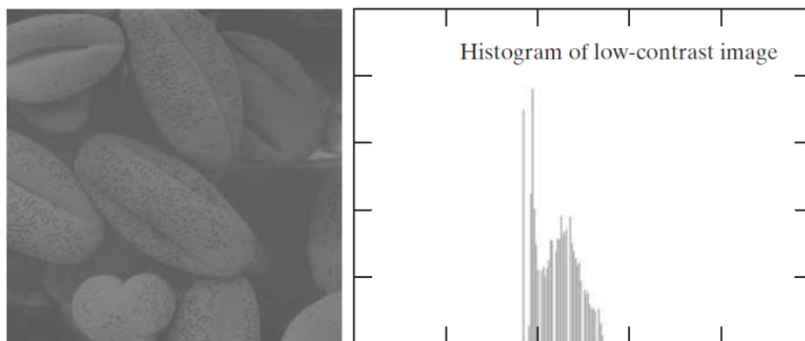
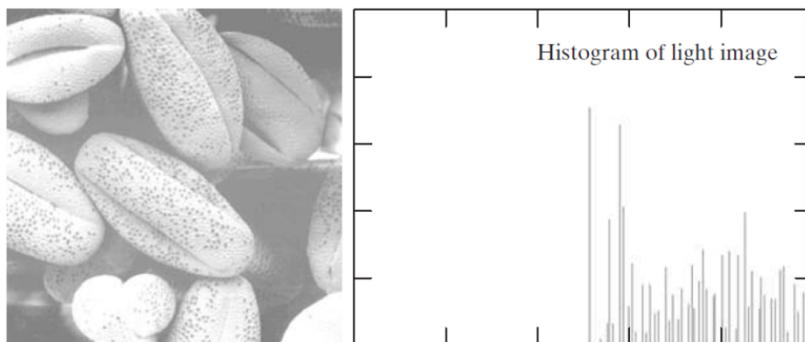
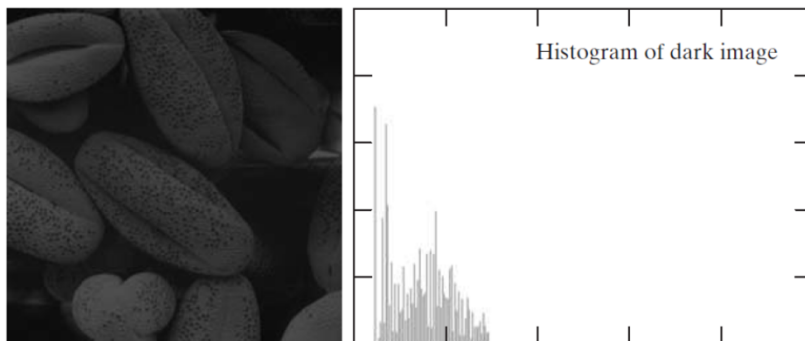
$$p(r_k) = \frac{n_k}{MN}$$

- 表示 $r_k$ 在图像中出现的概率
- 显然

$$\sum_{k=0}^{L-1} p(r_k) = 1$$



# 举例



暗图像

亮图像

低对比度

高对比度

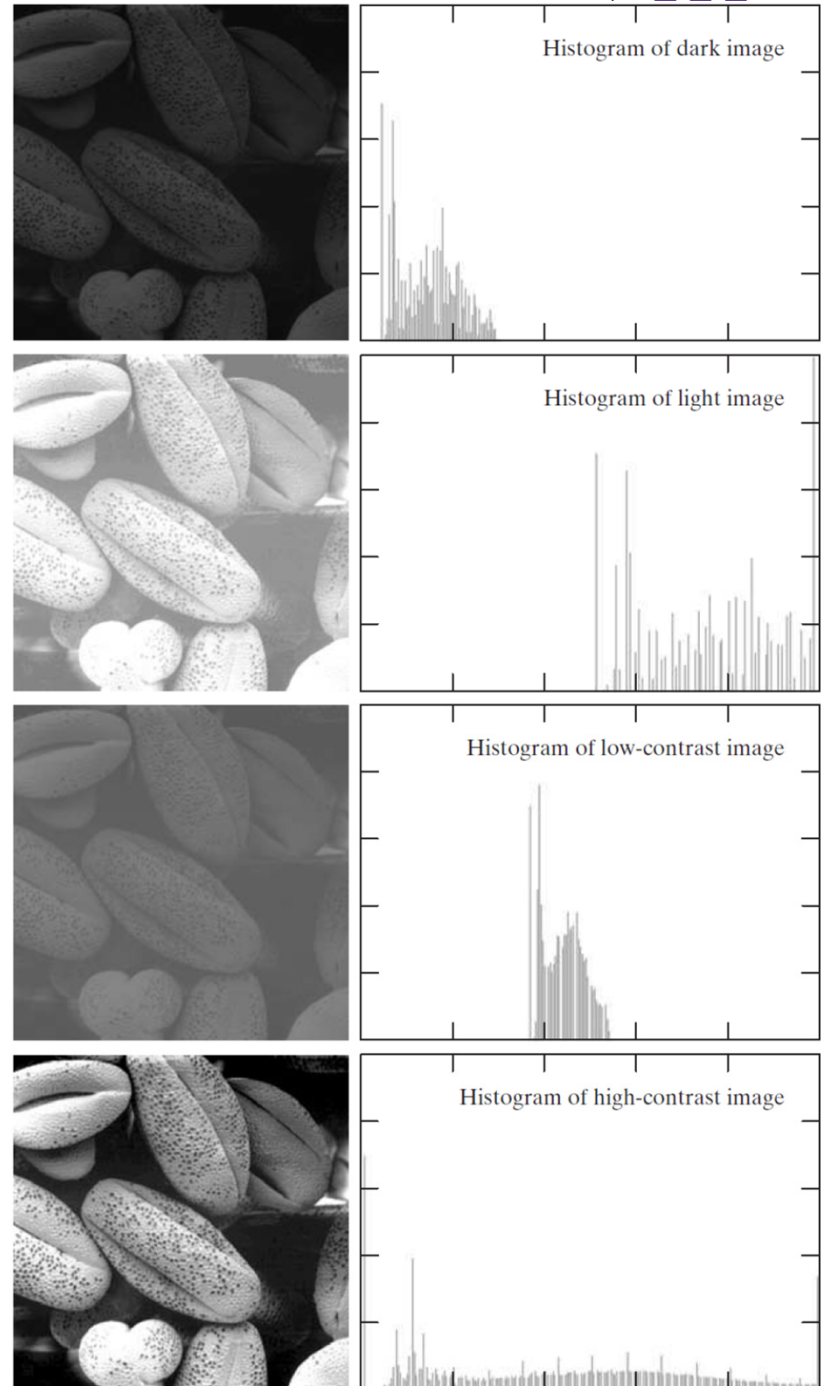


均衡的直方图

A yellow rectangular box containing the text "均衡的直方图" (Balanced histogram).

# 直方图的简单应用

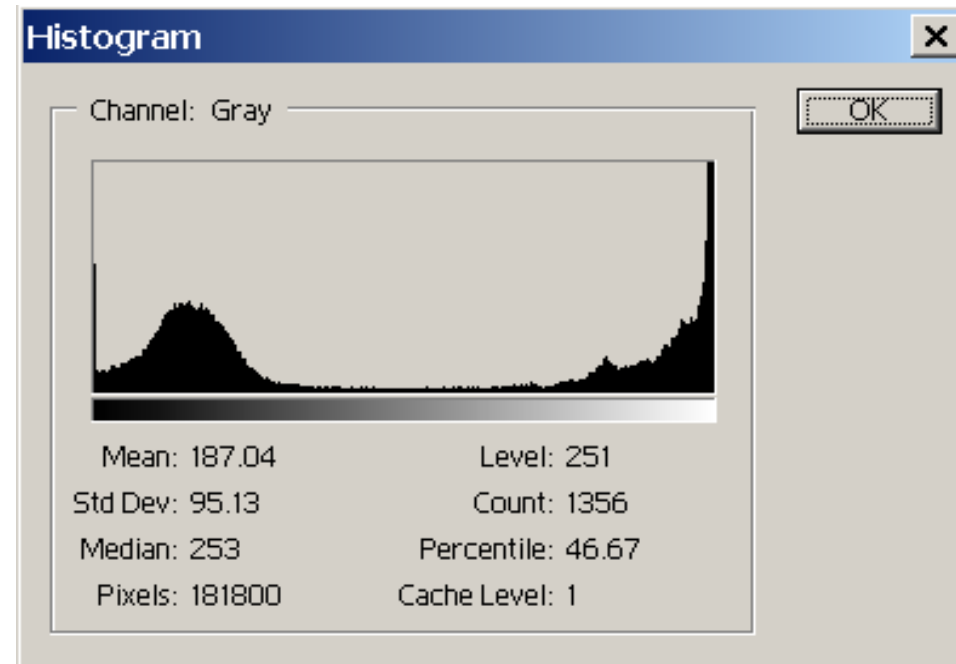
- 检测图像的质量
  - 检查灰度范围
  - 计算方差
  - 计算与均匀分布的距离



# 直方图的简单应用



- 分割图像前景和背景

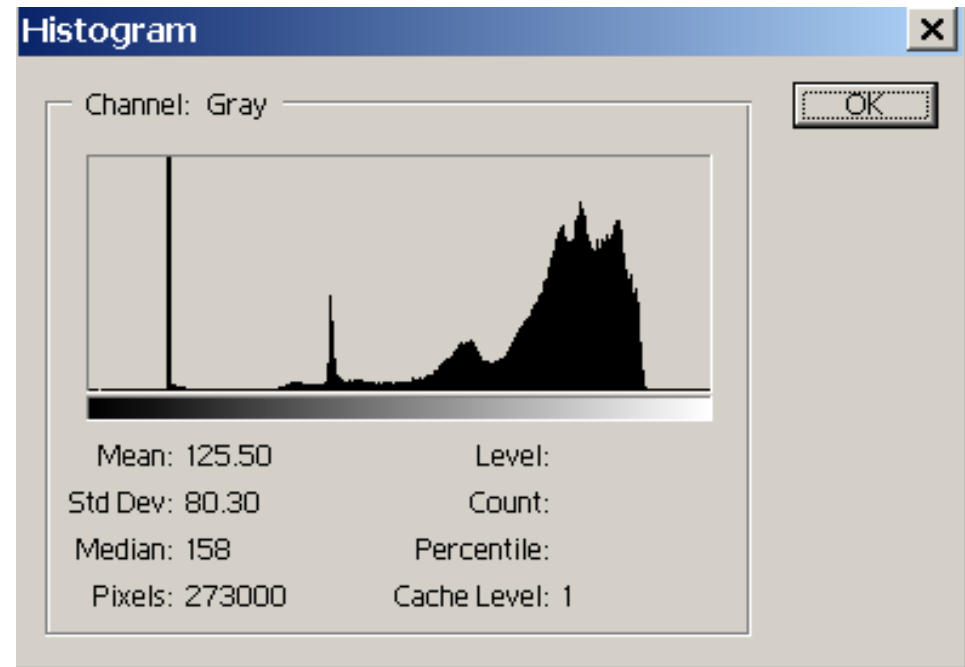


- 从直方图内寻找合适的阈值

# 直方图的简单应用

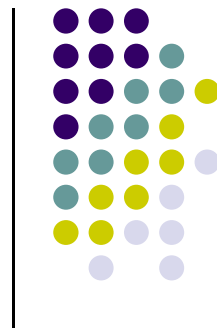


- 计算物体面积



- 对直方图进行积分

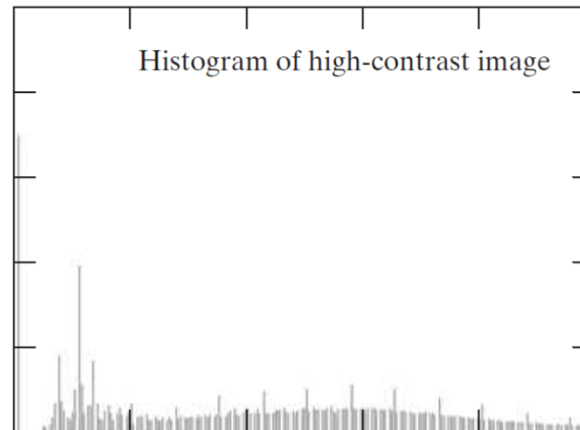
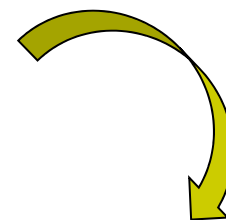
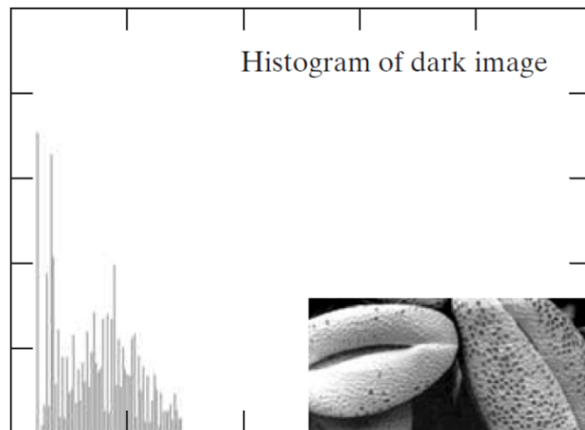
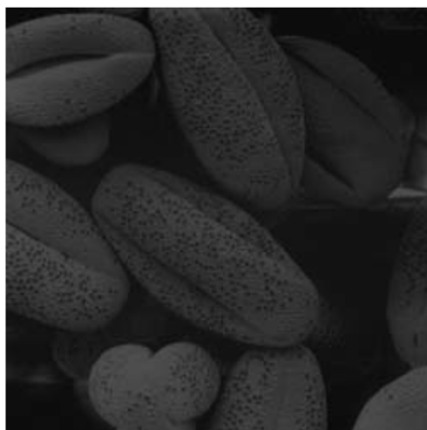
# 直方图均衡



- 通过灰度变换

$$s = T(r)$$

得到均衡的直方图

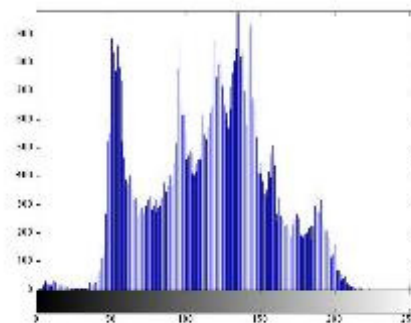
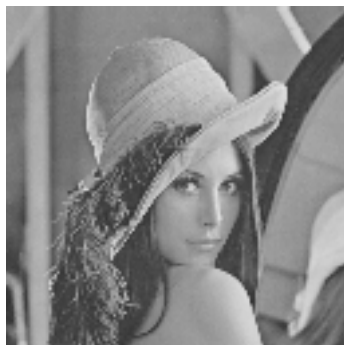




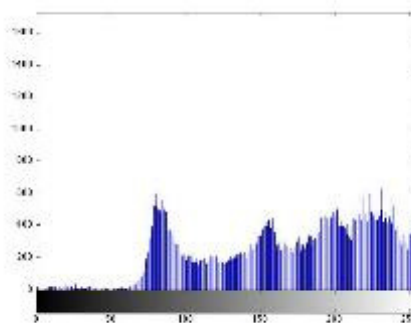
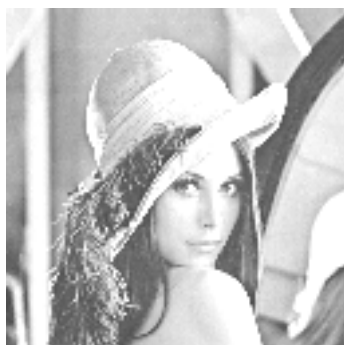
# 线性变换



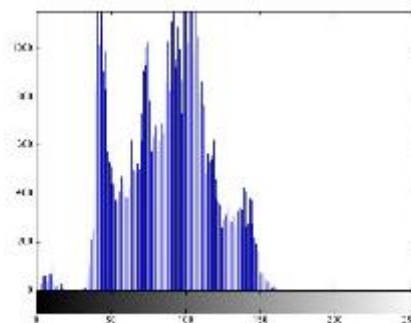
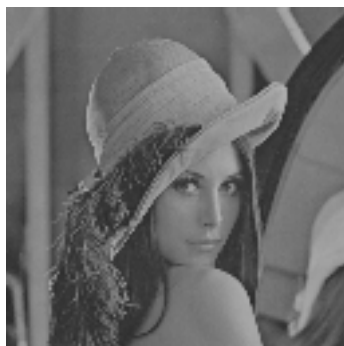
原图



$$s = 1.5 \times r$$



$$s = 0.8 \times r$$



$$s = T(r) \\ = a \times r + b$$

# 核心问题



- 刻画灰度变换函数与直方图的关系
  - 假设有一幅输入图像A, 经过灰度变换函数  $s = T(r)$ , 产生了输出图像B
  - 输入图像的直方图  $p_r(r)$  和灰度变换函数  $T$ , 如何计算输出图像B的直方图  $p_s(s)$
- 单调递增变换函数
  - $r_2 > r_1 \Rightarrow T(r_2) \geq T(r_1)$
- 严格单调递增变换函数
  - $r_2 > r_1 \Rightarrow T(r_2) > T(r_1)$



# 单调连续函数



- $r \in [0, L - 1]$

$$s = T(r)$$

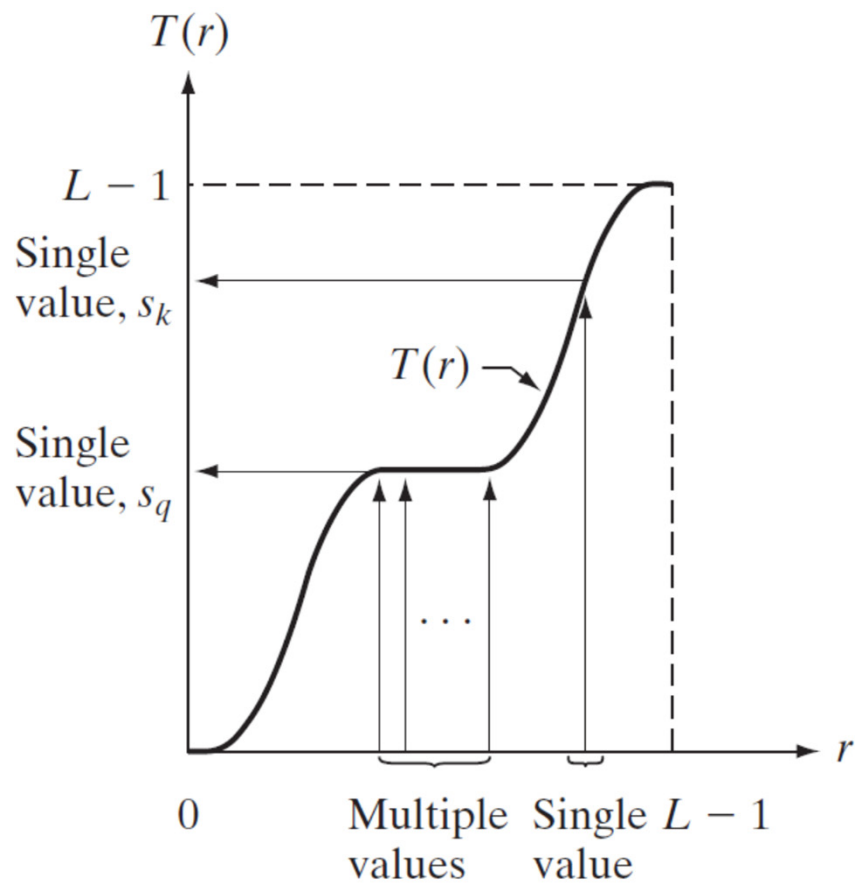
- $T(r)$ 在区间 $[0, L - 1]$ 为单调递增函数
- 当 $0 \leq r \leq L - 1$ 时,  $0 \leq T(r) \leq L - 1$

- 更强的假设

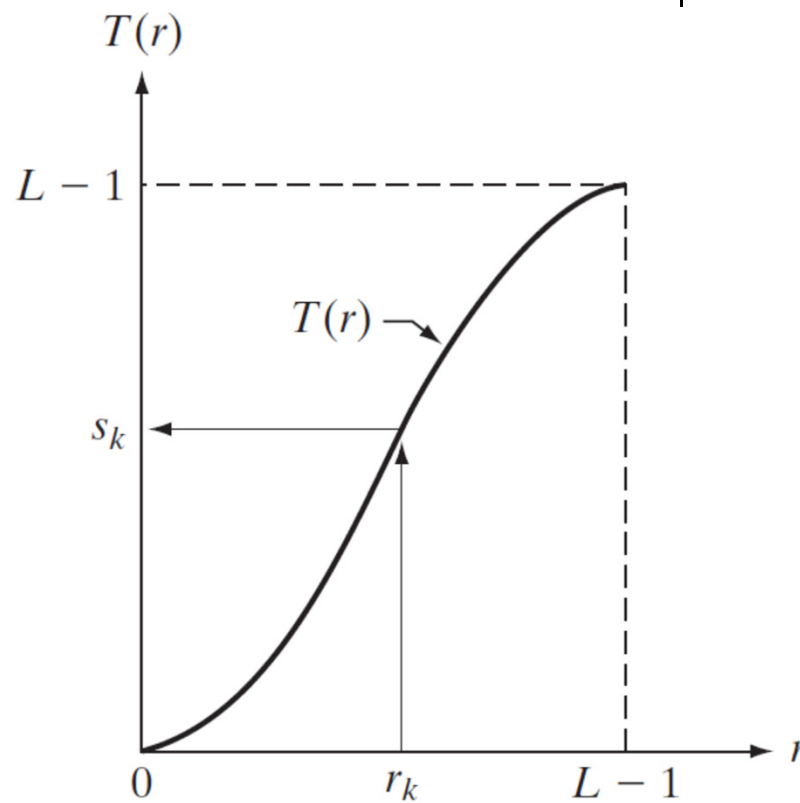
- $T(r)$ 在区间 $[0, L - 1]$ 为**严格单调递增**函数

$$r = T^{-1}(s)$$

# 举例



单调递增



严格单调递增

# 概率密度公式



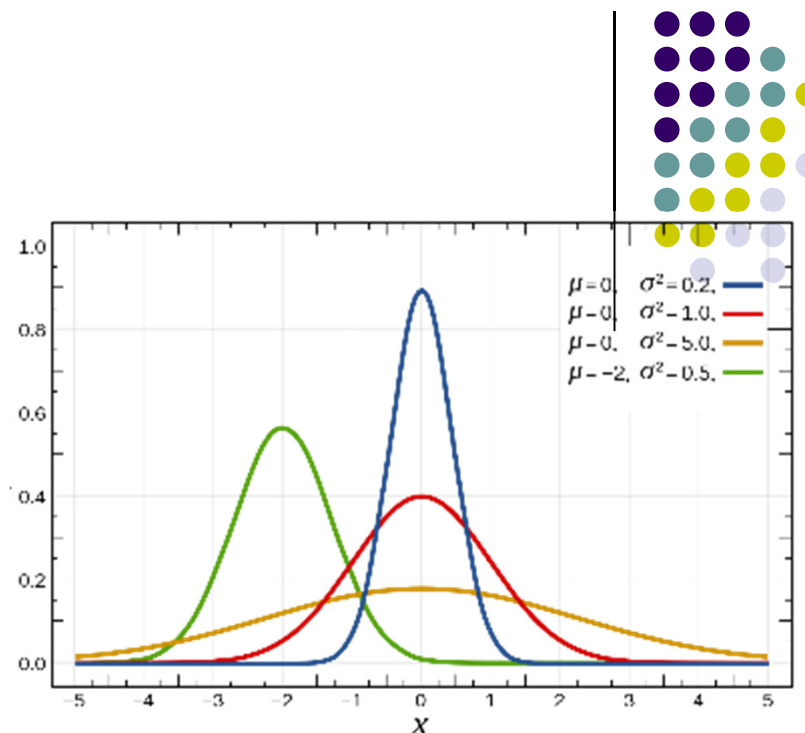
- 输入图像灰度值概率密度  $p_r(r)$
- 变换函数  $s = T(r)$
- 输出图像灰度值概率密度  $p_s(s)$ ?

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| = p_r(r) \left| \left( \frac{ds}{dr} \right)^{-1} \right|$$
$$= p_r(T^{-1}(s)) \frac{1}{|T'(T^{-1}(s))|}$$

# 概率

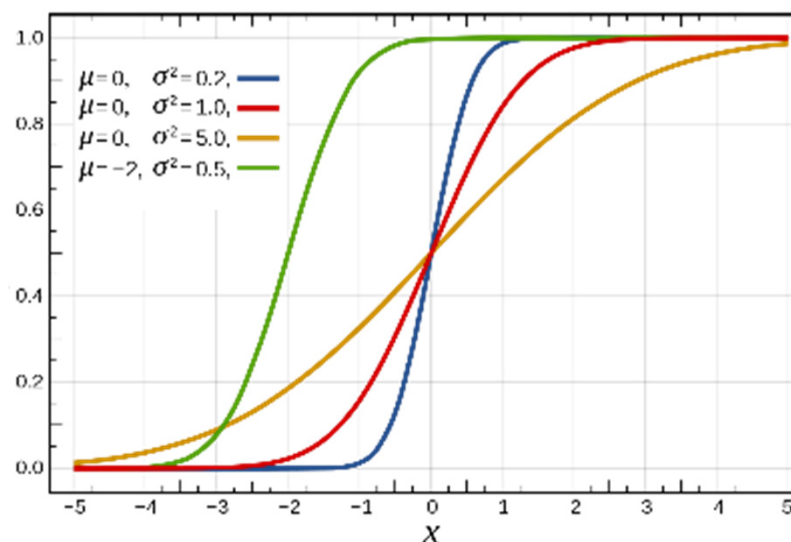
- 概率密度函数 (PDF)

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$



- 累计分布函数 (CDF)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$



# 证明过程 $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$



- [https://en.wikibooks.org/wiki/Probability/Transformation\\_of\\_Probability\\_Densities](https://en.wikibooks.org/wiki/Probability/Transformation_of_Probability_Densities)

- 单调递增

$$\begin{aligned} p_s(s) &= \frac{d}{ds} P[S \leq s] = \frac{d}{ds} P[T(R) \leq s] \\ &= \frac{d}{ds} P[R \leq T^{-1}(s)] = \frac{d}{ds} P[R \leq r] \\ &= \frac{dP[R \leq r]}{dr} \frac{dr}{ds} = p_r(r) \frac{dr}{ds} \end{aligned}$$

- 单调递减

# 小测试

## 线性运算



$$s = T(r) = a \times r + b$$

计算 $p_r(r)$ 经线性运算后的直方图 $p_s(s)$ :

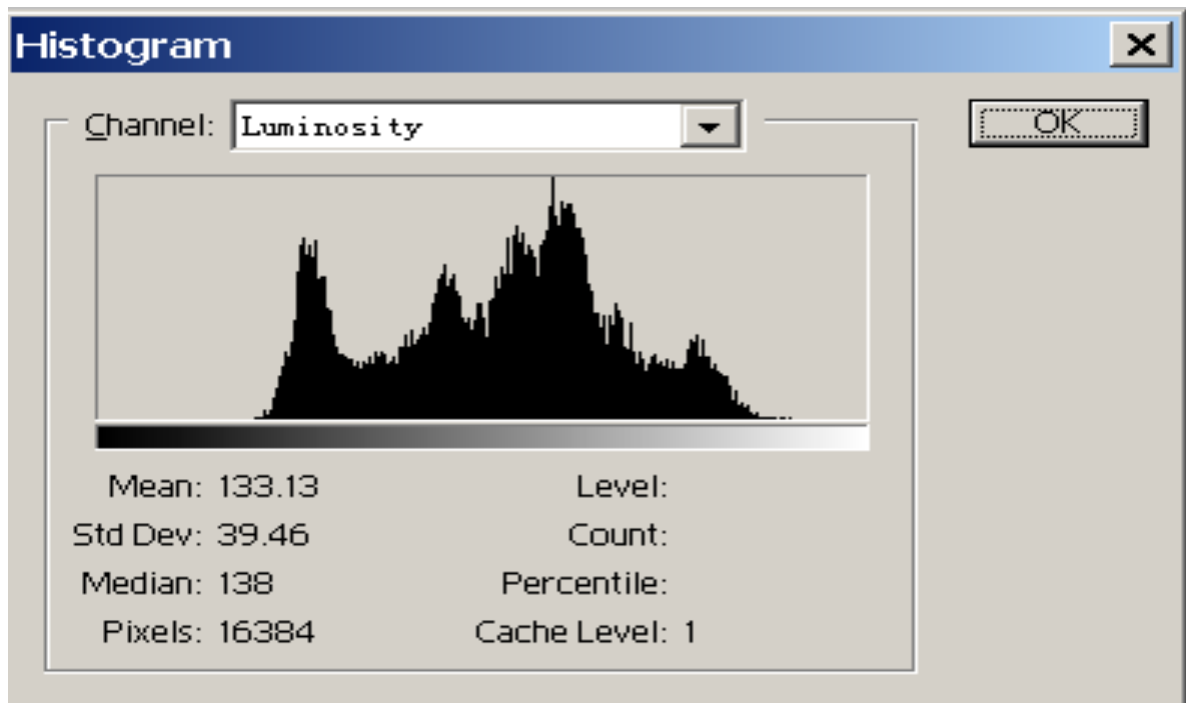
$$p_s(s) = p_r(T^{-1}(s)) \frac{1}{|T'(T^{-1}(s))|} = \frac{1}{a} p_r\left(\frac{s-b}{a}\right)$$



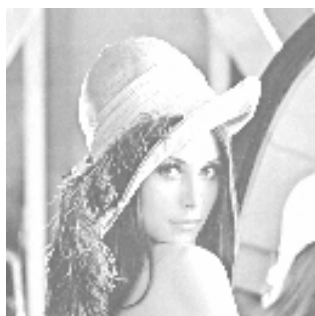
# 举例



$$s = T(r) = 1.2 \times r + 50$$

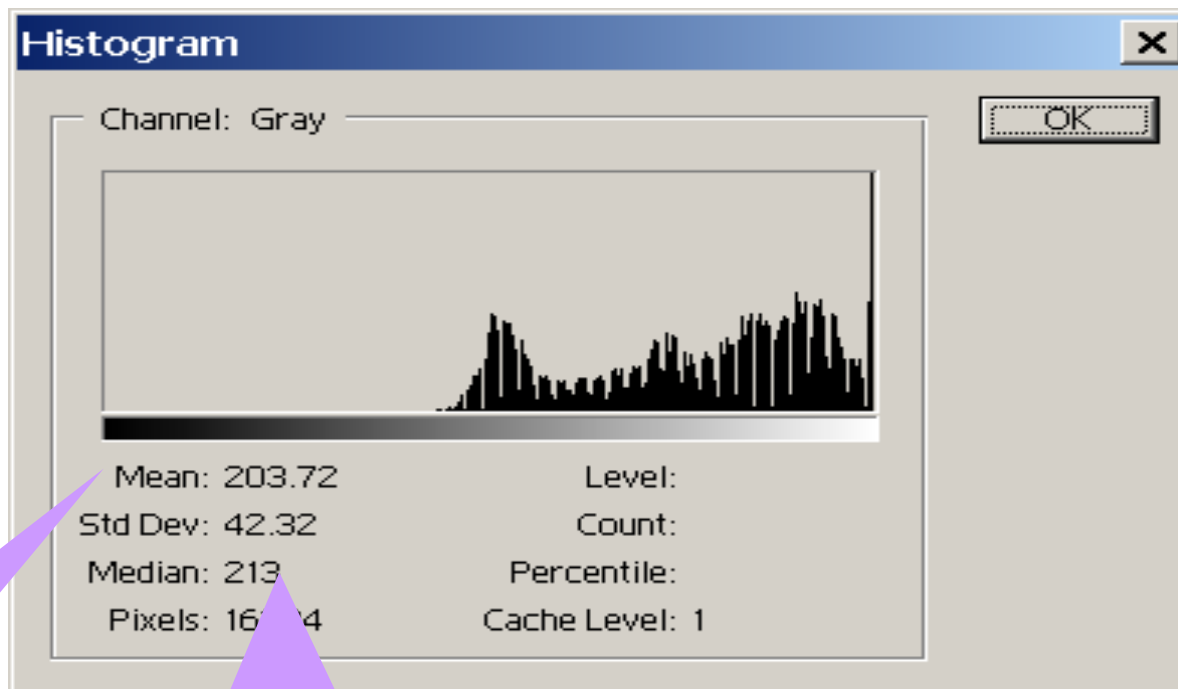


# 举例



$$s = T(r) = 1.2 \times r + 50$$

均值:  $203.72 \approx 1.2 * 133.13 + 50$



中值:  $213 \approx 1.2 * 138 + 50$



# 直方图均衡化

- 输入图像灰度值概率密度 $p_r(r)$
- 变换函数 $s = T(r)$
- 输出图像灰度值概率密度 $p_s(s)$

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| = p_r(r) \left| \left( \frac{ds}{dr} \right)^{-1} \right|$$

- 如何设计 $T(r)$ 使得 $p_s(s)$ 成为均匀分布?

# 直方图均衡化

$$f(x) = \frac{d\hat{F}(x)}{dx}$$

- 变换函数

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw$$

- 单调递增
- 属于区间 $[0, L - 1]$

- 效果

$$\frac{ds}{dr} = \frac{dT(r)}{dr}$$

$$= (L - 1) \frac{d}{dr} \left[ \int_0^r p_r(w) dw \right]$$

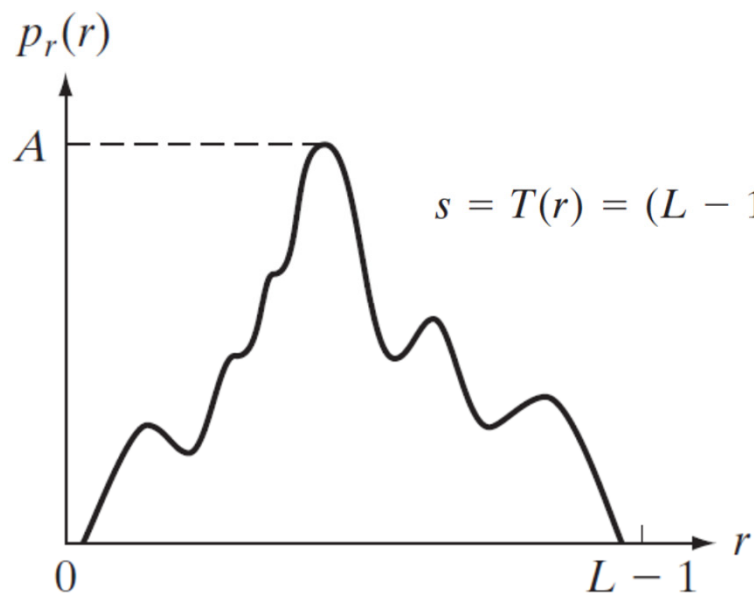
$$= (L - 1) p_r(r)$$

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right|$$

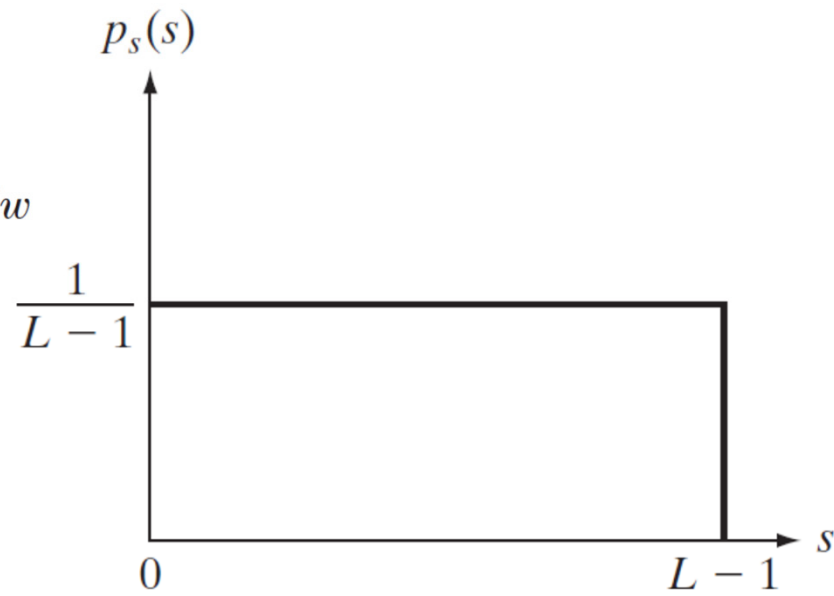
$$= p_r(r) \left| \frac{1}{(L - 1) p_r(r)} \right|$$

$$= \frac{1}{L - 1} \quad 0 \leq s \leq L - 1$$

# 图形示意



$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw$$



# 举例



- 输入图像灰度值的概率密度

$$p_r(r) = \begin{cases} \frac{2r}{(L-1)^2} & \text{for } 0 \leq r \leq L-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 变换函数

$$s = T(r) = (L-1) \int_0^r p_r(w) dw = \frac{2}{L-1} \int_0^r w dw = \frac{r^2}{L-1}$$

- 输出图像灰度值的概率密度

$$\begin{aligned} p_s(s) &= p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| = \frac{2r}{(L-1)^2} \left| \left[ \frac{ds}{dr} \right]^{-1} \right| = \frac{2r}{(L-1)^2} \left| \left[ \frac{d}{dr} \frac{r^2}{L-1} \right]^{-1} \right| \\ &= \frac{2r}{(L-1)^2} \left| \frac{(L-1)}{2r} \right| = \frac{1}{L-1} \end{aligned}$$

# 离散直方图

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw$$



- 输入图像灰度级 $r_k$ 的概率近似为

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{MN} \quad k = 0, 1, 2, \dots, L - 1$$

- 离散变换函数（直方图均衡）

$$\begin{aligned} s_k = T(r_k) &= (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j) \\ &= \frac{(L - 1)}{MN} \sum_{j=0}^k n_j \quad k = 0, 1, 2, \dots, L - 1 \end{aligned}$$

- 反变换

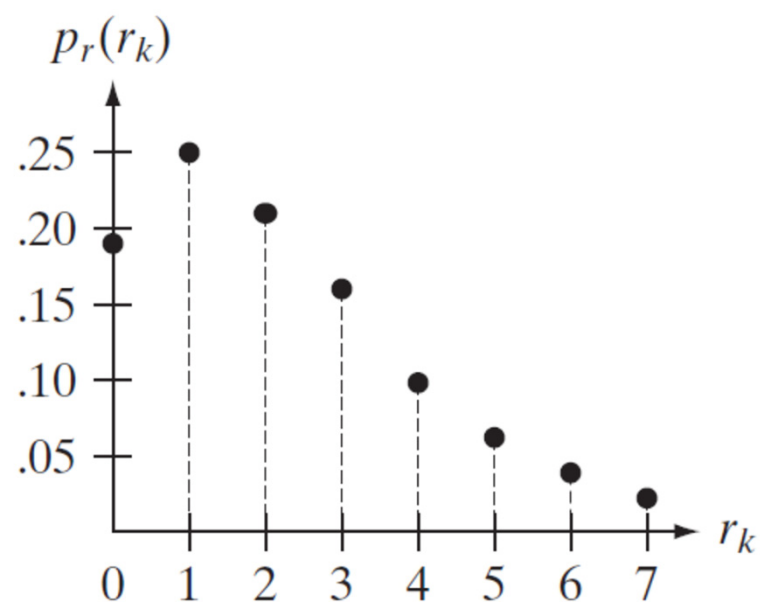
$$r_k = T^{-1}(s_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots, L - 1$$

# 举例



- 3比特数字图像的灰度分布和直方图值

$r_k$	$n_k$	$p_r(r_k) = n_k/MN$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1$	1023	0.25
$r_2 = 2$	850	0.21
$r_3 = 3$	656	0.16
$r_4 = 4$	329	0.08
$r_5 = 5$	245	0.06
$r_6 = 6$	122	0.03
$r_7 = 7$	81	0.02





# 举例

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j)$$



- 变换函数

$$s_0 = T(r_0) = 7 \sum_{j=0}^0 p_r(r_j) = 7p_r(r_0) = 1.33$$

$$s_1 = T(r_1) = 7 \sum_{j=0}^1 p_r(r_j) = 7p_r(r_0) + 7p_r(r_1) = 3.08$$

$$s_2 = 4.55, s_3 = 5.67, s_4 = 6.23$$

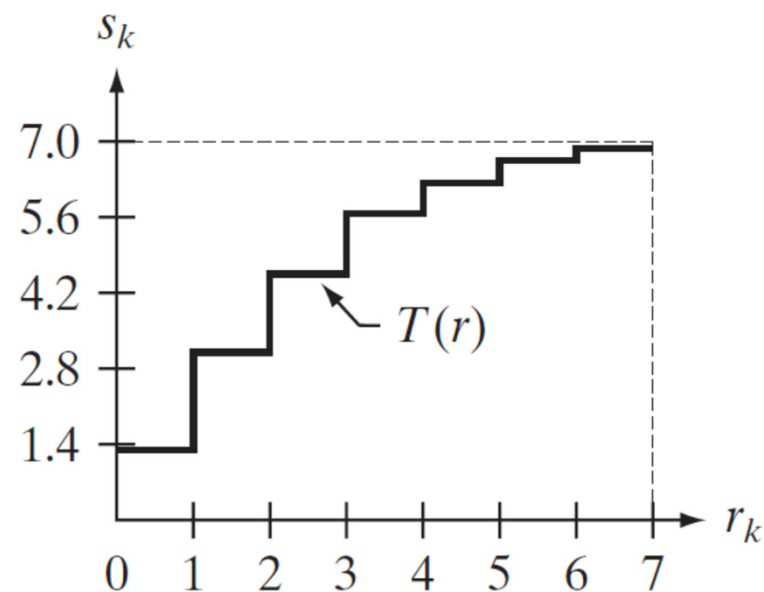
$$s_5 = 6.65, s_6 = 6.86, s_7 = 7.00.$$

# 举例



- 变换函数

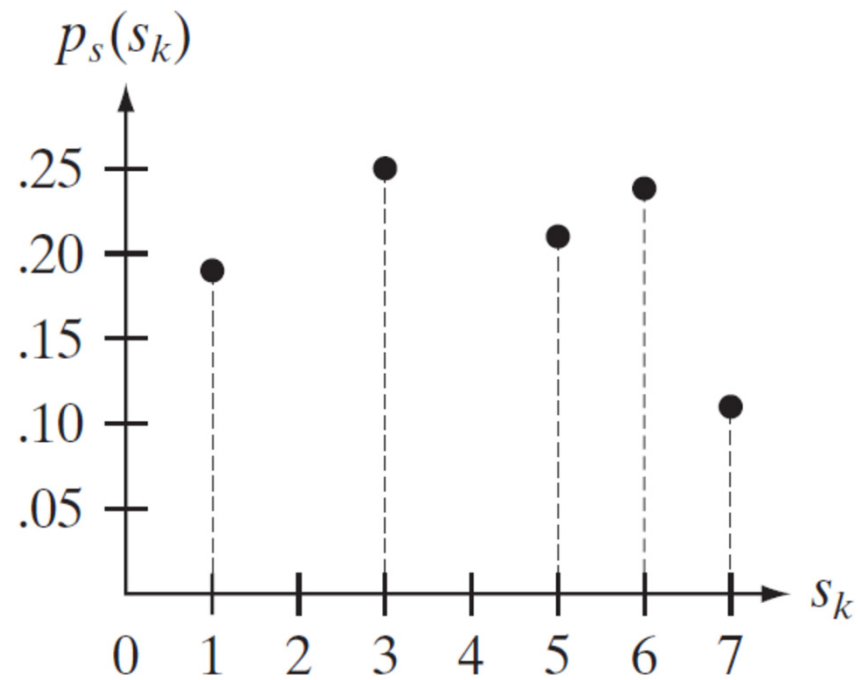
$s_0 = 1.33 \rightarrow 1$	$s_4 = 6.23 \rightarrow 6$
$s_1 = 3.08 \rightarrow 3$	$s_5 = 6.65 \rightarrow 7$
$s_2 = 4.55 \rightarrow 5$	$s_6 = 6.86 \rightarrow 7$
$s_3 = 5.67 \rightarrow 6$	$s_7 = 7.00 \rightarrow 7$



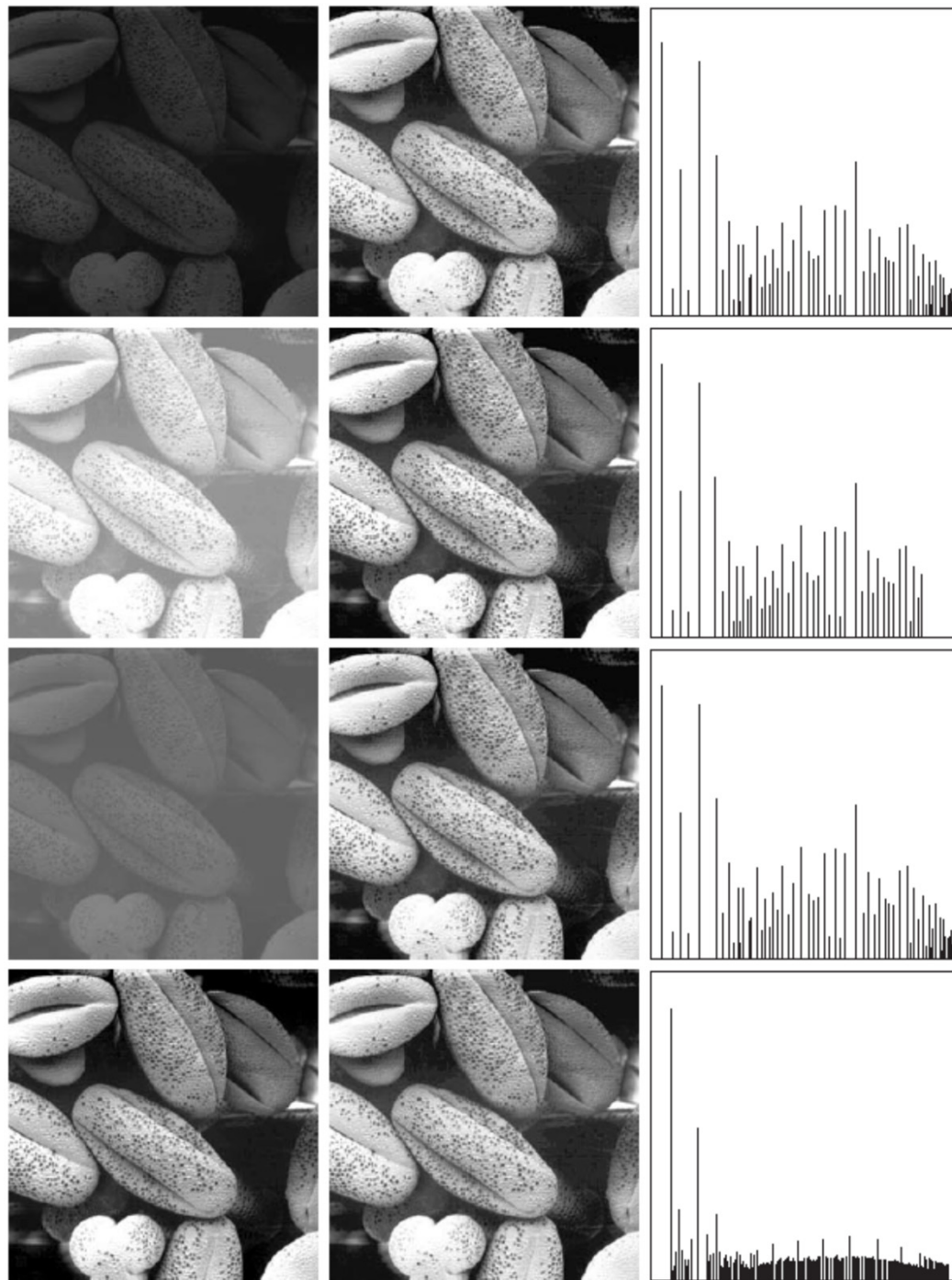
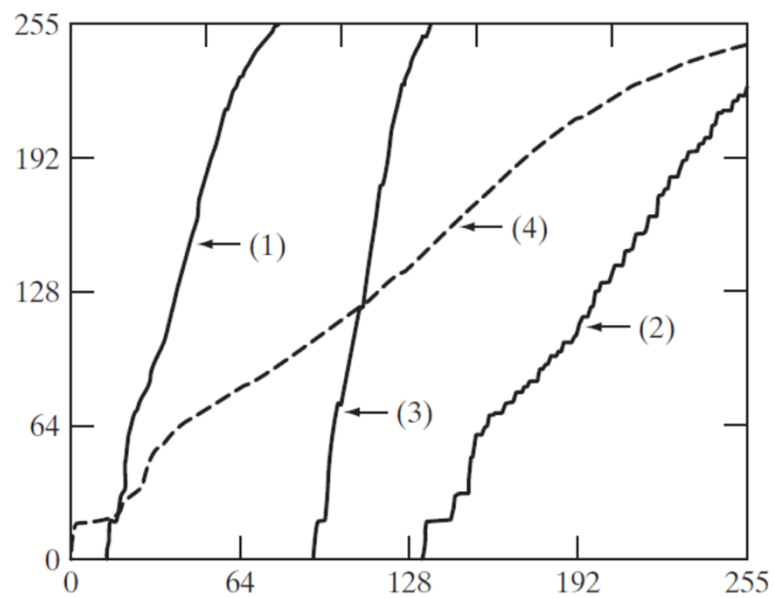
# 举例



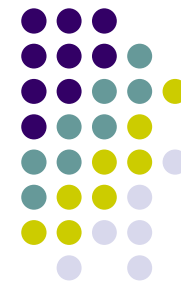
- 均衡后的直方图



# 举例



# 更明显的例子



原图



直方图均衡

# 直方图匹配（规定化）

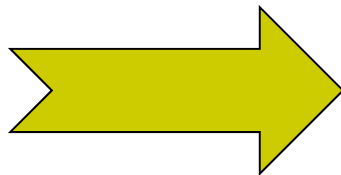


- 对某些应用，均匀直方图不是最好的方法
- 有时候希望输出图像具有指定的直方图

输入



灰度变换  
函数 $T(r)$



输出

输出直方图要求  
为某个特定分布

# 直方图匹配



- 输入图像灰度值概率密度 $p_r(r)$
- 指定灰度值概率密度 $p_z(z)$
- 如何设计变换函数使得输出图像概率密度为 $p_z(z)$ ?



# 核心思想



- 以均衡化直方图图像为桥梁



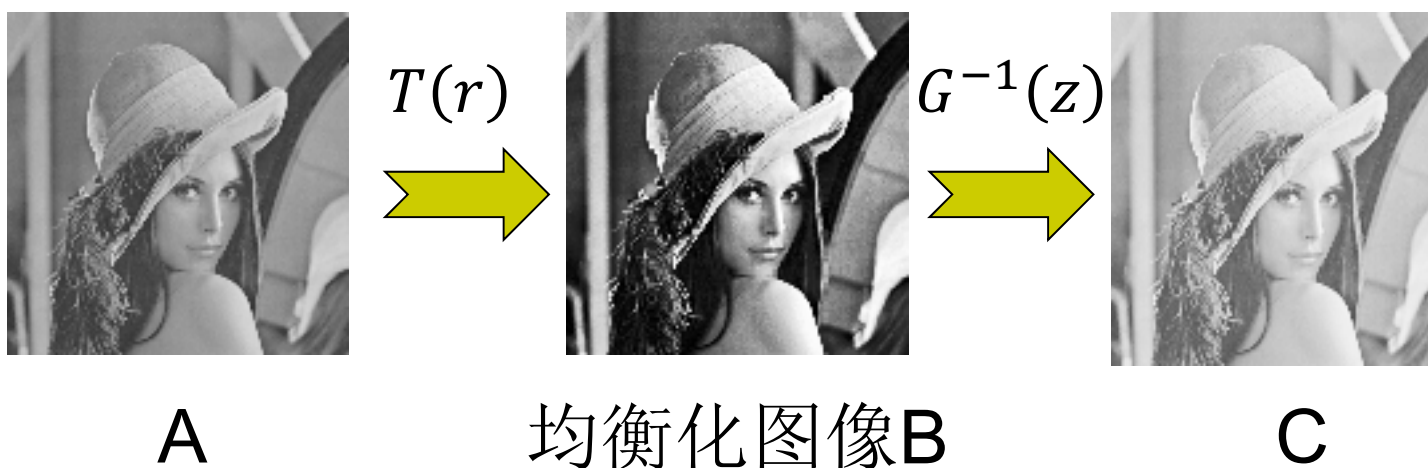
- 直方图均衡：A到B
- 直方图均衡：C到B



# 核心思想



- 以均衡化直方图图像为桥梁



- 直方图均衡：A到B
- 直方图均衡的反函数：B到C



# 实现方式

- 输入图像灰度值概率密度  $p_r(r)$

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw$$

- 指定灰度值概率密度  $p_z(z)$

$$G(z) = (L - 1) \int_0^z p_z(t) dt = s$$

- 反函数唯一

$$z = G^{-1}(s) = G^{-1}(T(r))$$



# 具体步骤

1. 由输入图像计算 $p_r(r)$

2. 根据下面的公式计算 $s$

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw$$

3. 根据 $p_z(z)$ , 计算变换函数 $G(z)$

$$G(z) = (L - 1) \int_0^z p_z(t) dt$$

4. 计算反变换函数 $z = G^{-1}(s)$

5. 将反变换函数作用到所有的 $s$

# 举例



- 输入概率密度  $p_r(r) = 2r / (L - 1)^2$

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw = \frac{2}{(L - 1)} \int_0^r w dw = \frac{r^2}{(L - 1)}$$

- 指定概率密度  $p_z(z) = 3z^2 / (L - 1)^3$

$$G(z) = (L - 1) \int_0^z p_z(w) dw = \frac{3}{(L - 1)^2} \int_0^z w^2 dw = \frac{z^3}{(L - 1)^2}$$

$$z = [(L - 1)^2 s]^{1/3}$$



# 离散直方图

- 离散情况更加简单
- 输入离散直方图  $p_r(r_k)$

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j)$$
$$= \frac{(L - 1)}{MN} \sum_{j=0}^k n_j \quad k = 0, 1, 2, \dots, L - 1$$

- 指定离散直方图  $p_z(z_q)$

$$G(z_q) = (L - 1) \sum_{i=0}^q p_z(z_i) = s_k$$

- 查表实现  $z_q = G^{-1}(s_k)$

# 具体步骤



1. 计算输入图像直方图 $p_r(r)$ , 计算 $s_k$ , 并四舍五入
2. 依据给定直方图 $p_z(z)$ , 计算变化函数 $G$ 的所有值, 并四舍五入, 存储表中
3. 对于每一个 $s_k$ , 通过查表, 找到对应的 $z_q$ 
  - $G(z_q)$ 最接近 $s_k$
  - 结果不唯一时, 选择最小的 $z_q$

# 举例



- 3比特数字图像、指定直方图

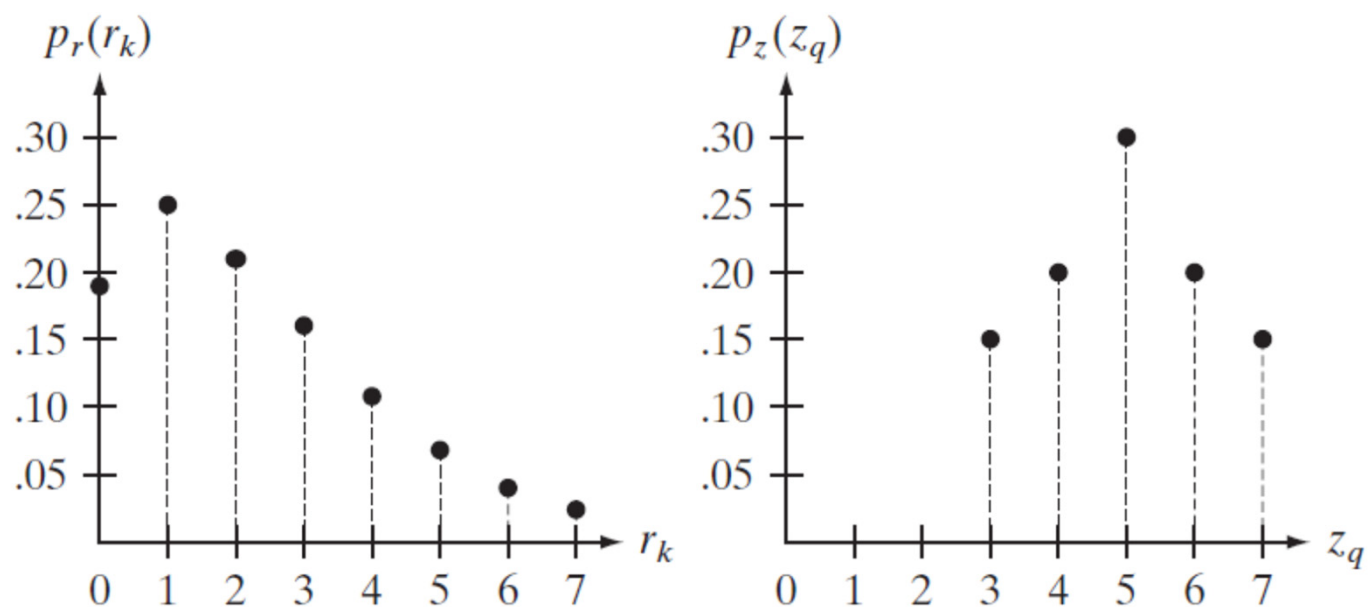
$r_k$	$n_k$	$p_r(r_k) = n_k/MN$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1$	1023	0.25
$r_2 = 2$	850	0.21
$r_3 = 3$	656	0.16
$r_4 = 4$	329	0.08
$r_5 = 5$	245	0.06
$r_6 = 6$	122	0.03
$r_7 = 7$	81	0.02

$z_q$	Specified $p_z(z_q)$
$z_0 = 0$	0.00
$z_1 = 1$	0.00
$z_2 = 2$	0.00
$z_3 = 3$	0.15
$z_4 = 4$	0.20
$z_5 = 5$	0.30
$z_6 = 6$	0.20
$z_7 = 7$	0.15

# 举例



- 3比特数字图像、指定直方图





# 举例



- 对输入图像计算执行直方图均衡

$$s_0 = 1.33 \rightarrow 1 \quad s_4 = 6.23 \rightarrow 6$$

$$s_1 = 3.08 \rightarrow 3 \quad s_5 = 6.65 \rightarrow 7$$

$$s_2 = 4.55 \rightarrow 5 \quad s_6 = 6.86 \rightarrow 7$$

$$s_3 = 5.67 \rightarrow 6 \quad s_7 = 7.00 \rightarrow 7$$

- 对指定直方图执行直方图均衡

$$G(z_0) = 7 \sum_{j=0}^0 p_z(z_j) = 0.00$$

$$G(z_1) = 7 \sum_{j=0}^1 p_z(z_j) = 7[p(z_0) + p(z_1)] = 0.00$$

# 举例



- 对输入图像计算执行直方图均衡

$$s_0 = 1.33 \rightarrow 1 \quad s_4 = 6.23 \rightarrow 6$$

$$s_1 = 3.08 \rightarrow 3 \quad s_5 = 6.65 \rightarrow 7$$

$$s_2 = 4.55 \rightarrow 5 \quad s_6 = 6.86 \rightarrow 7$$

$$s_3 = 5.67 \rightarrow 6 \quad s_7 = 7.00 \rightarrow 7$$

- 对指定直方图执行直方图均衡

$$G(z_0) = 0.00 \rightarrow 0 \quad G(z_4) = 2.45 \rightarrow 2$$

$$G(z_1) = 0.00 \rightarrow 0 \quad G(z_5) = 4.55 \rightarrow 5$$

$$G(z_2) = 0.00 \rightarrow 0 \quad G(z_6) = 5.95 \rightarrow 6$$

$$G(z_3) = 1.05 \rightarrow 1 \quad G(z_7) = 7.00 \rightarrow 7$$

# 举例

- 获得 $G$ 的逆映射

$$s_0 = 1.33 \rightarrow 1$$

$$s_1 = 3.08 \rightarrow 3$$

$$s_2 = 4.55 \rightarrow 5$$

$$s_3 = 5.67 \rightarrow 6$$

$$s_4 = 6.23 \rightarrow 6$$

$$s_5 = 6.65 \rightarrow 7$$

$$s_6 = 6.86 \rightarrow 7$$

$$s_7 = 7.00 \rightarrow 7$$



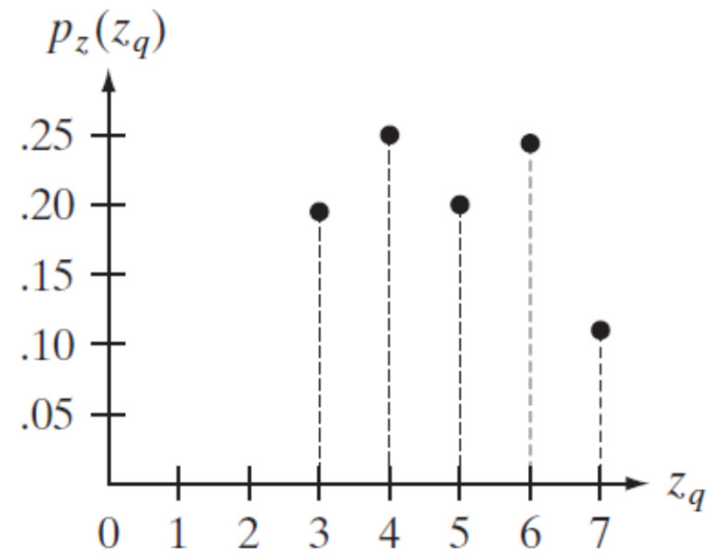
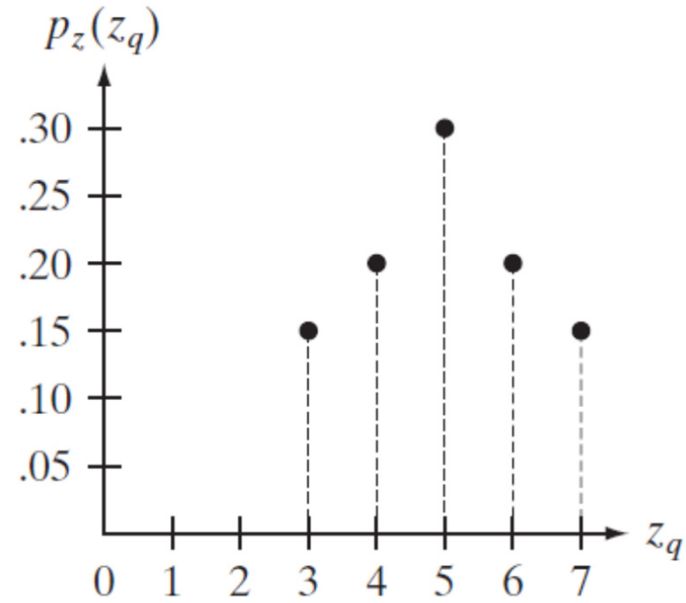
$z_q$	$G(z_q)$
$z_0 = 0$	0
$z_1 = 1$	0
$z_2 = 2$	0
$z_3 = 3$	1
$z_4 = 4$	2
$z_5 = 5$	5
$z_6 = 6$	6
$z_7 = 7$	7

$s_k$	$\rightarrow$	$z_q$
1	$\rightarrow$	3
3	$\rightarrow$	4
5	$\rightarrow$	5
6	$\rightarrow$	6
7	$\rightarrow$	7

# 举例

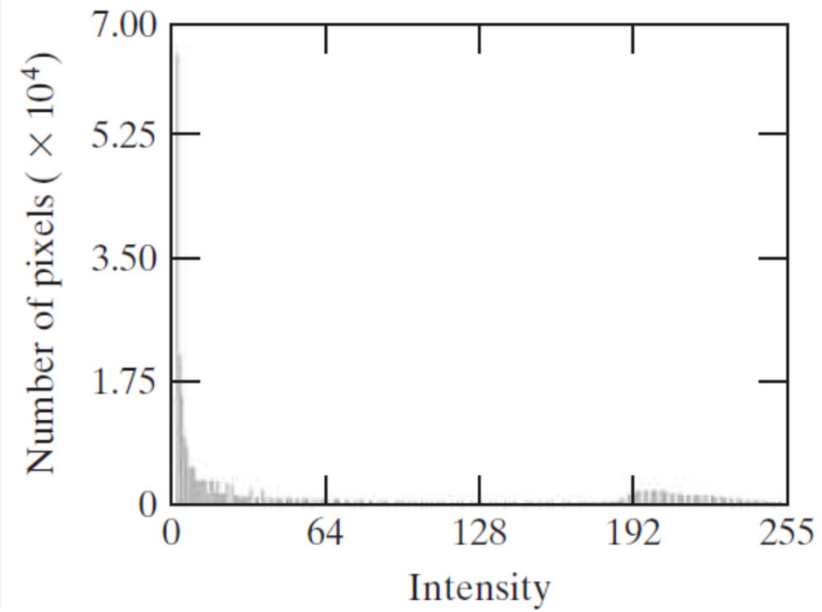
- 最终结果

$z_q$	Specified $p_z(z_q)$	Actual $p_z(z_k)$
$z_0 = 0$	0.00	0.00
$z_1 = 1$	0.00	0.00
$z_2 = 2$	0.00	0.00
$z_3 = 3$	0.15	0.19
$z_4 = 4$	0.20	0.25
$z_5 = 5$	0.30	0.21
$z_6 = 6$	0.20	0.24
$z_7 = 7$	0.15	0.11



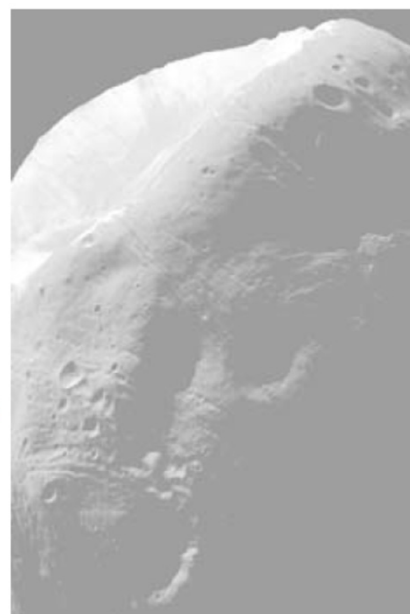
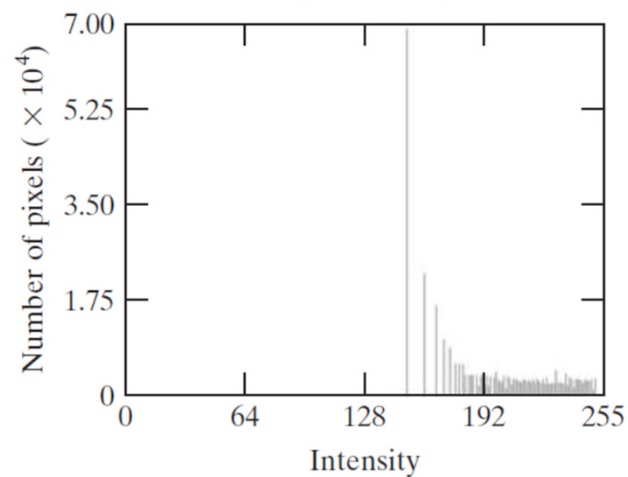
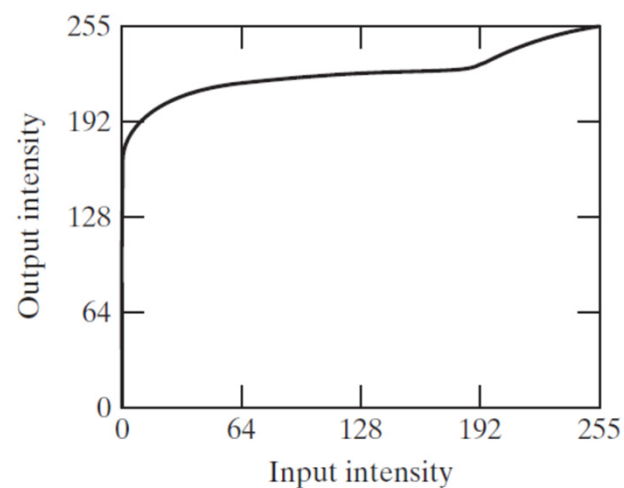
# 举例

- 火星卫星图像



# 举例

- 直方图均衡

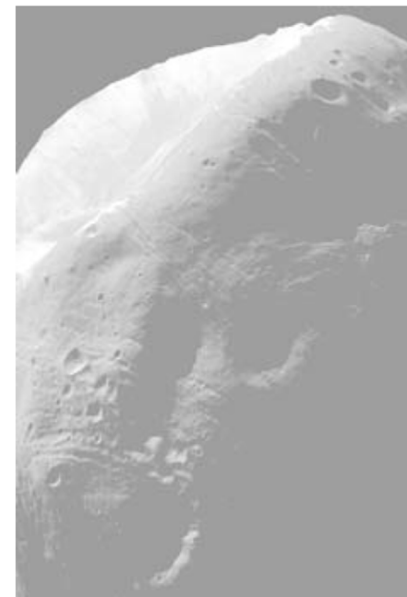
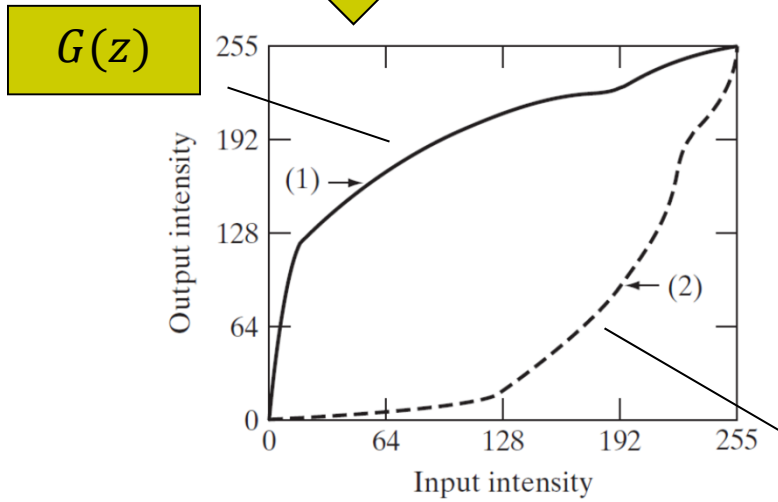
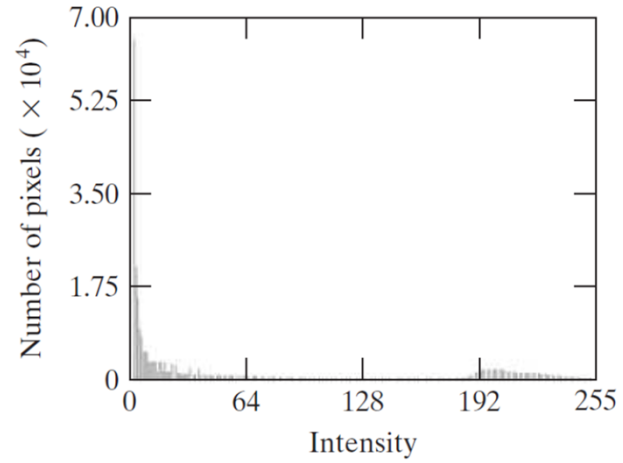
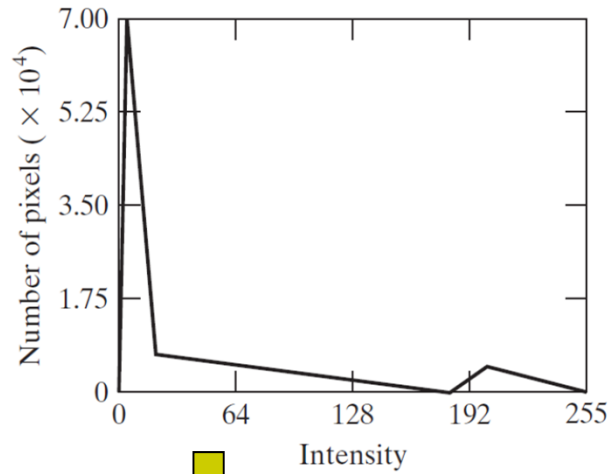


图像变得更亮，  
但是对比度并没有明显改善！

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j)$$

# 举例

- 直方图匹配

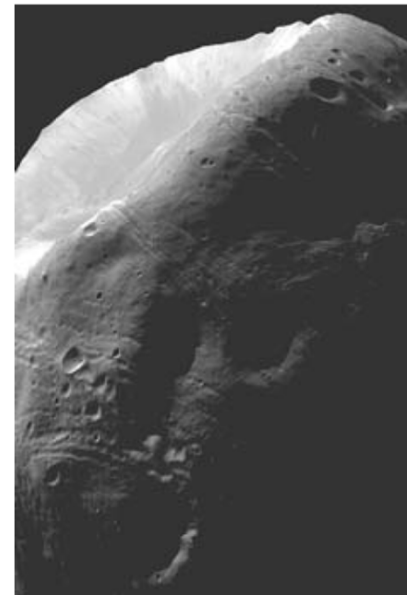
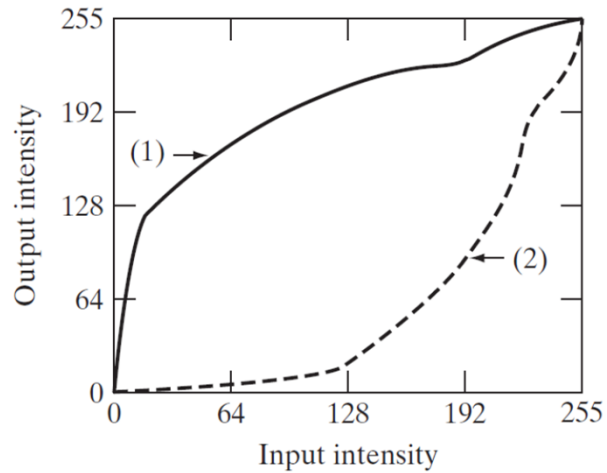
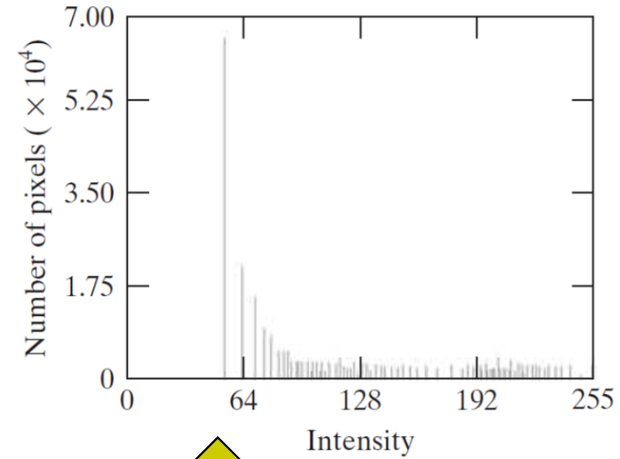
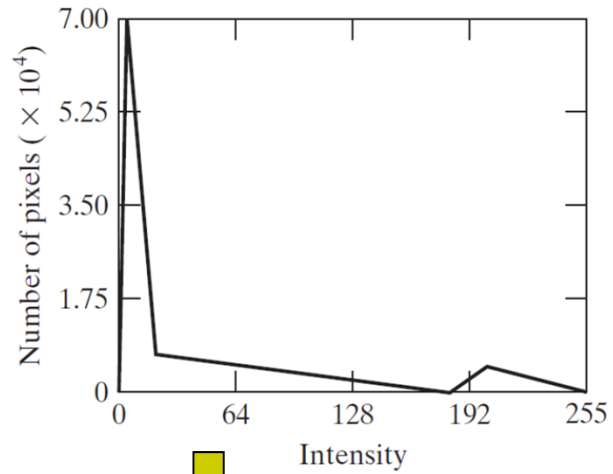


# 举例

指定直方图  
是关键!



## 直方图匹配





# 局部直方图处理



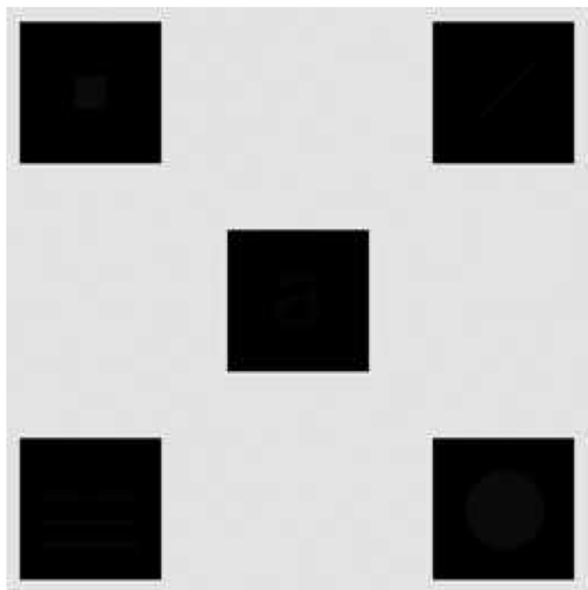
- 直方图均衡/匹配是全局性的
  - 中小区域的细节容易被忽略
- 如果不希望对整体图像增强，想对局部进行增强怎么办？
- 以图像中每个像素的邻域中灰度分布为基础设计变换函数

# 步骤

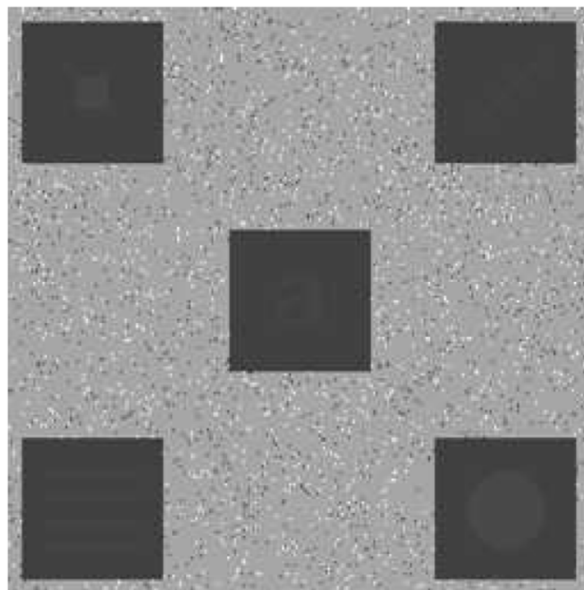


- 定义一个领域，并不断平移中心位置
  1. 在每一个位置，计算该领域中像素的直方图
    - 许多元素为0
  2. 利用直方图均衡或直方图匹配得到变换函数
  3. 将变换函数作用到邻域中心像素
- 移动重复上述过程

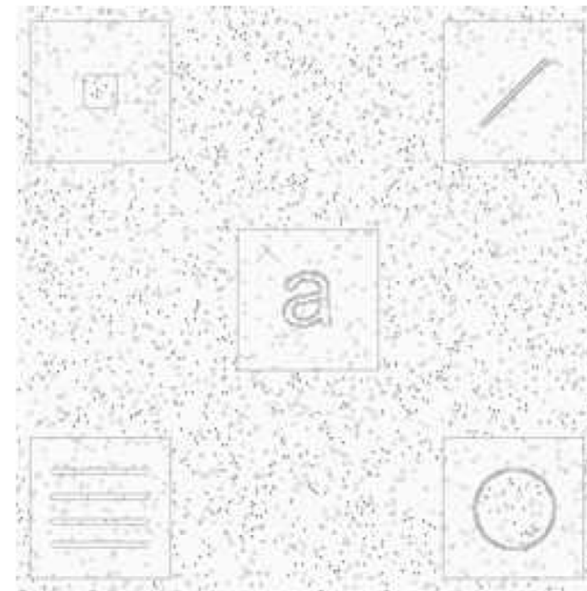
# 举例



原图



全局直方图均衡



$3 \times 3$   
局部直方图均衡

# 在图像增强中使用直方图统计



- 灰度值  $r_i = 0, 1, \dots, L - 1$  出现的概率

$$p(r_i) = \frac{n_i}{MN}$$

- 平均灰度/均值

$$m = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p(r_i)$$

- 灰度的  $n$  阶矩

$$\mu_n(r) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^n p(r_i)$$

- 灰度的2阶矩

$$\mu_2(r) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^2 p(r_i)$$

- 灰度方差

- 反映对比度

# 采样



- 采样均值

$$m = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

- 采样方差

$$\sigma^2 = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) - m]^2$$

0	0	1	1	2
1	2	3	0	1
3	3	2	2	0
2	3	1	0	0
1	1	3	2	2



$$m = \frac{1}{25} \sum_{x=0}^4 \sum_{y=0}^4 f(x, y)$$

$$= 1.44$$

$$\sigma^2 = 1.1264$$

# 在图像增强中使用直方图统计



- 均值和方差常用于局部增强
- 局部均值和局部方差

$$m_{S_{xy}} = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p_{S_{xy}}(r_i)$$

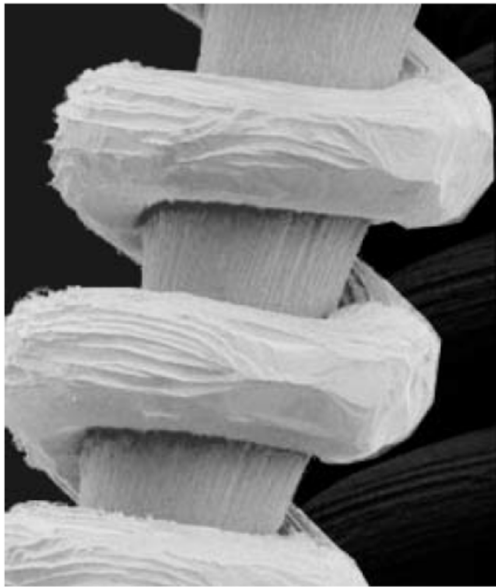
$$\sigma_{S_{xy}}^2 = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m_{S_{xy}})^2 p_{S_{xy}}(r_i)$$

- $S_{xy}$ 表示像素 $(x, y)$ 的近邻集合
- 许多灰度值频率为0

# 在图像增强中使用直方图统计



- 使用局部直方图统计增强
  - 增强黑暗区域，显示其中的细节
  - 尽量保持明亮区域不变



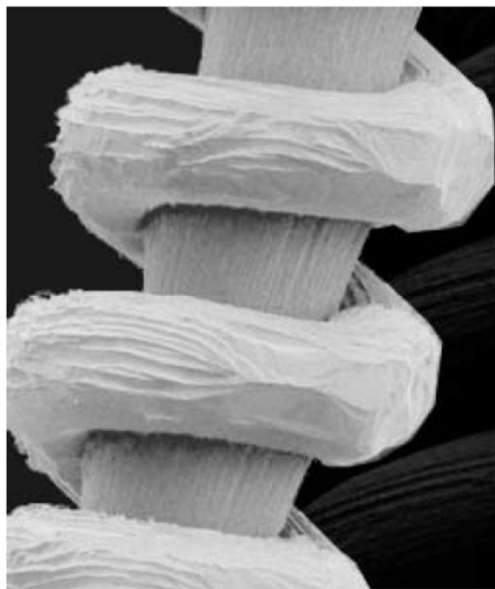
原图

# 在图像增强中使用直方图统计

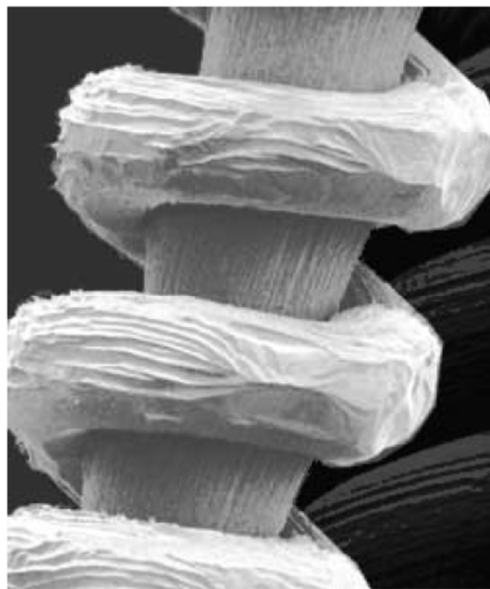


- 使用局部直方图统计增强

$$g(x, y) = \begin{cases} E \cdot f(x, y) & \text{if } m_{S_{xy}} \leq k_0 m_G \text{ AND } k_1 \sigma_G \leq \sigma_{S_{xy}} \leq k_2 \sigma_G \\ f(x, y) & \text{otherwise} \end{cases}$$



原图



全局直方图均衡



局部直方图统计



# 讨论



- 直方图均衡一大好处：不需要更多的参数，完全“自动化” ✓
- 离散形式下，直方图均衡的概率分布是完全均匀的 ✗
- 直方图均衡有时候会失效 ✓

# 提纲

- 背景知识
- 基本灰度变换函数
- 直方图处理
- 空间滤波基础
- 平滑空间滤波器
- 锐化空间滤波器
- 混合空间增强法





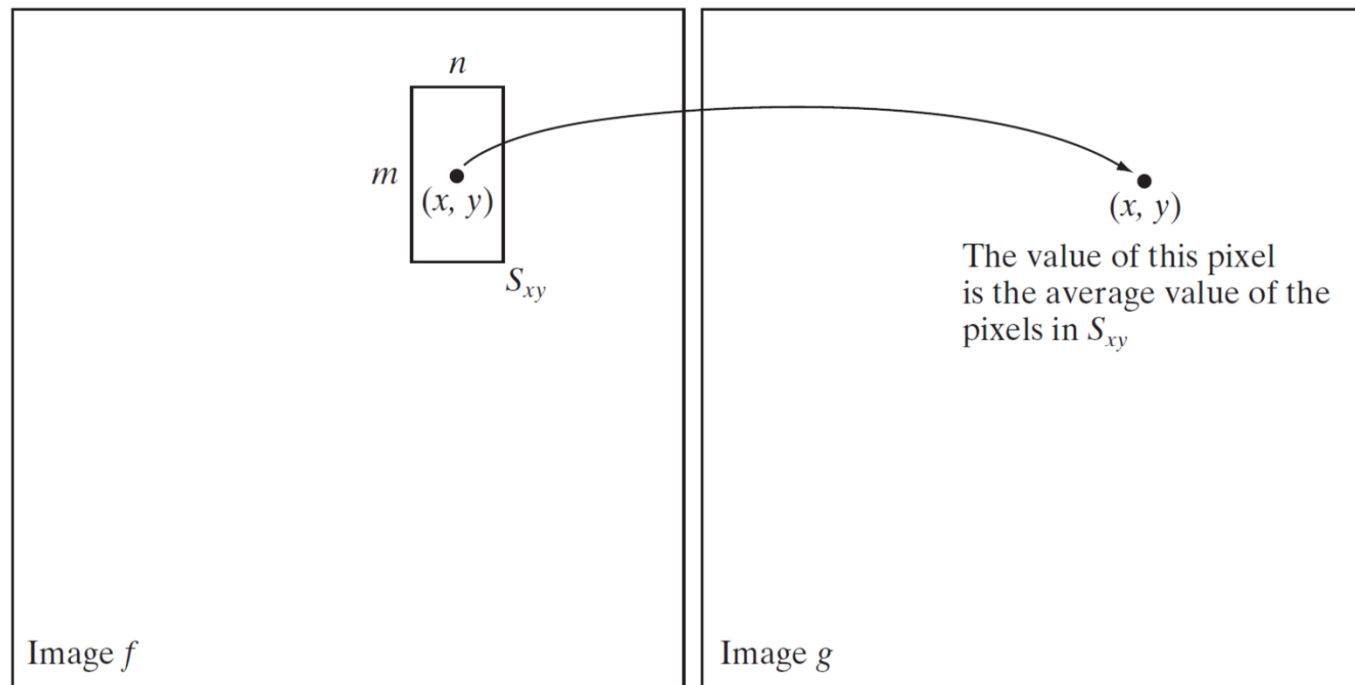
# 空间滤波

- 一种主要的图像处理工具
  - 用于图像增强等应用中
- 滤波 (filter)
  - 频率域中图像处理的概念
  - 通过或拒绝某个频率分量
- 线性空间滤波
  - 与频率域处理一一对应
- 非线性空间滤波



# 空间滤波机理

- 空间滤波器
  - 邻域（矩形）、预定义的操作



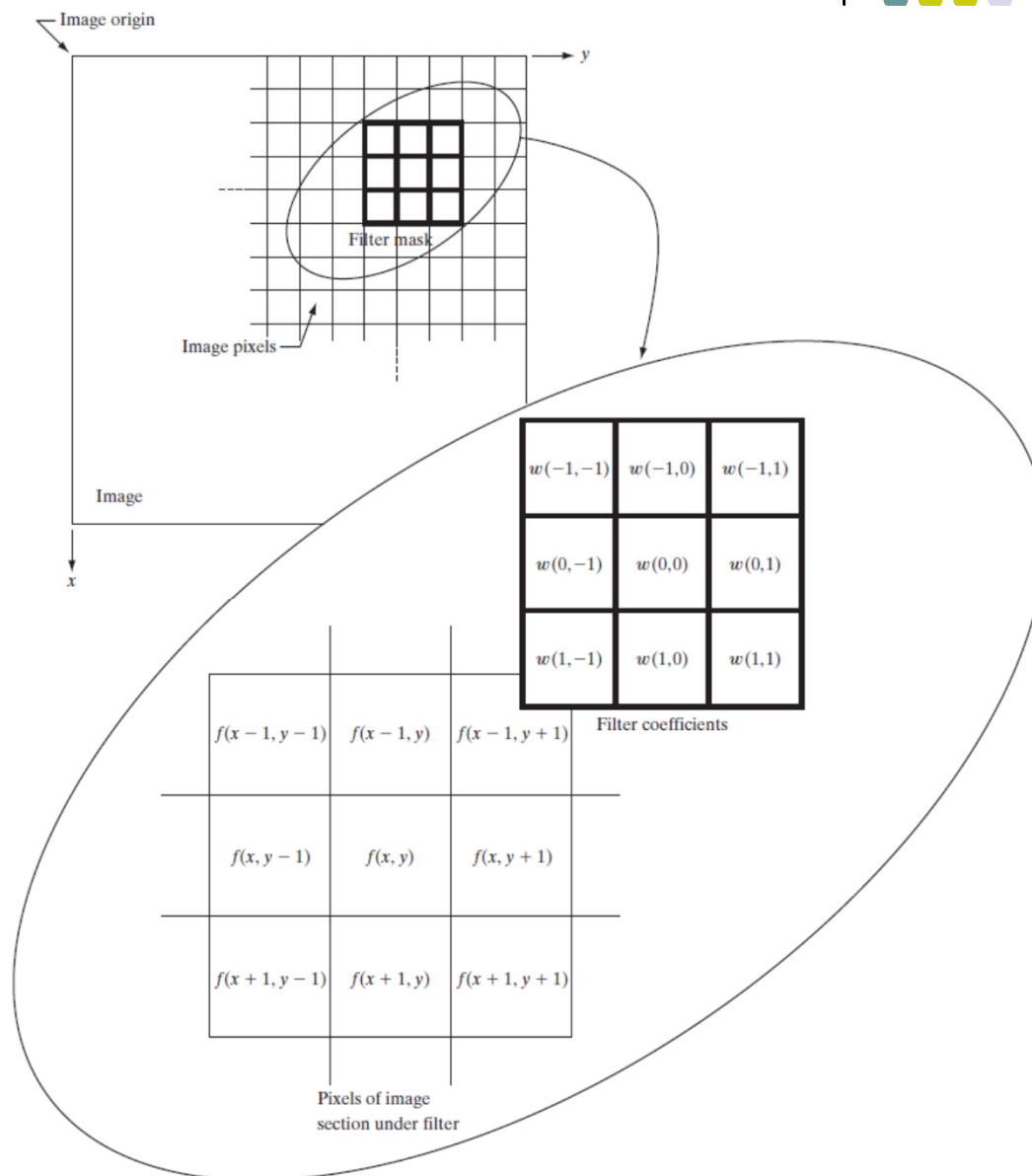
- 线性空间滤波、非线性空间滤波

# 空间滤波机理



- 线性空间滤波
  - 滤波器模板

$$\begin{aligned}g(x, y) = & w(-1, -1)f(x - 1, y - 1) \\ & + w(-1, 0)f(x - 1, y) \\ & + \dots \\ & + w(0, 0)f(x, y) \\ & + \dots \\ & + w(1, 1)f(x + 1, y + 1)\end{aligned}$$



# 空间滤波机理



- $m \times n$ 的模板

- $m = 2a + 1, n = 2b + 1$
- 最小为  $3 \times 3$

- 线性空间滤波

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

- $x$ 和 $y$ 是可变的

# 空间相关与卷积



- 相关 (Correlation)
  - 平移滤波器模板，计算每个位置乘积之和
- 卷积 (Convolution)
  - 与相关相似，但滤波器要旋转180度
- 实际中未必严格区分

# 相关



## ● 补零、计算、滑动、裁剪

(a)  $\swarrow$  Origin  $f$   $w$   
 0 0 0 1 0 0 0 0      1 2 3 2 8

(b)  $\downarrow$   
 0 0 0 1 0 0 0 0  
 1 2 3 2 8  
 $\swarrow$  Starting position alignment

(c)  $\overbrace{\hspace{10em}}^{\text{Zero padding}}$   
 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0  
 1 2 3 2 8

(d) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0  
 1 2 3 2 8  
 $\swarrow$  Position after one shift

(e) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0  
 1 2 3 2 8  
 $\swarrow$  Position after four shifts

(f) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0  
 1 2 3 2 8  
 Final position  $\swarrow$

(g) Full correlation result  
 0 0 0 8 2 3 2 1 0 0 0 0

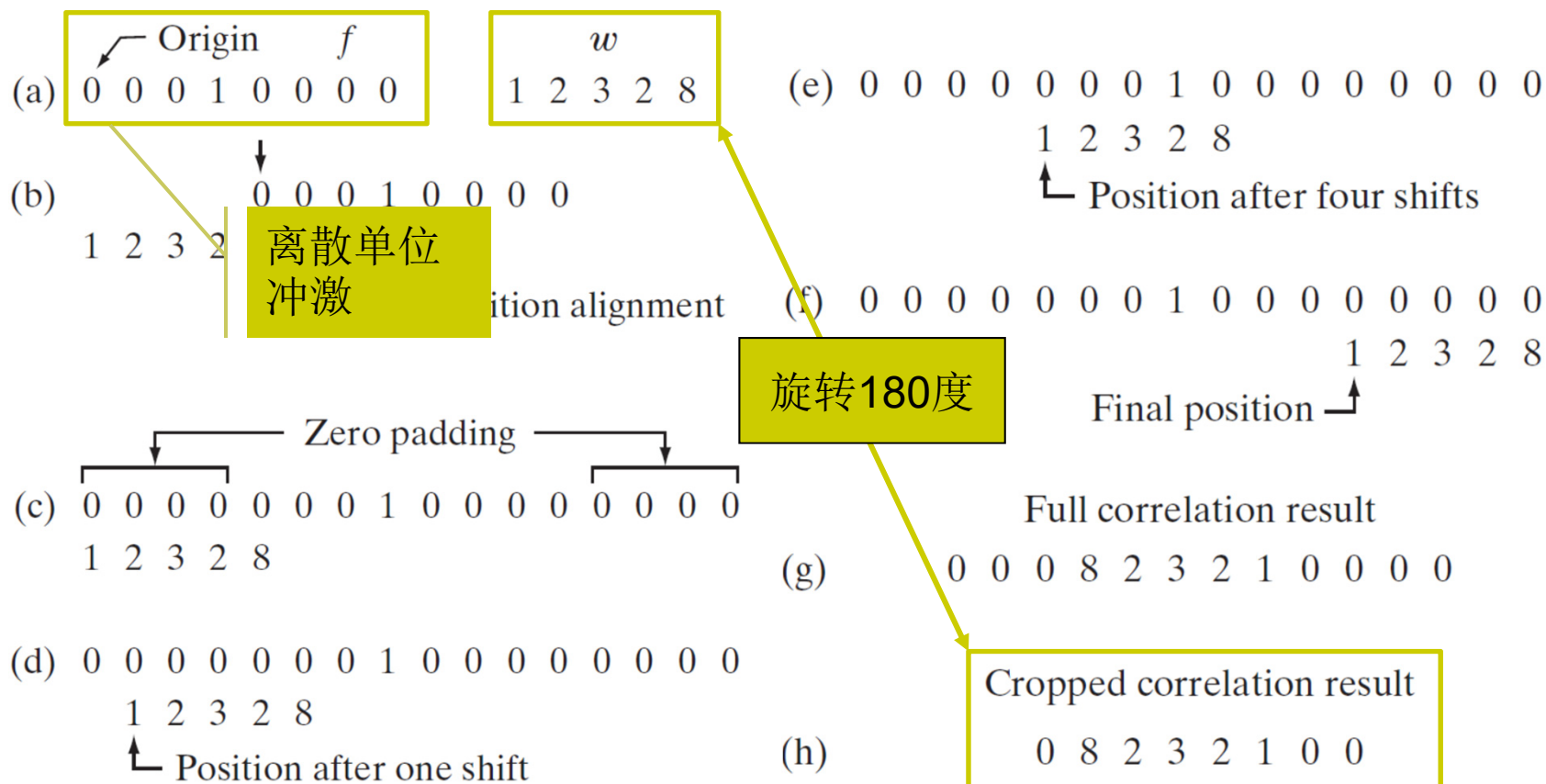
(h) Cropped correlation result  
 0 8 2 3 2 1 0 0



# 相关



## ● 补零、计算、滑动、裁剪



# 卷积



- 旋转、补零、计算、滑动、裁剪

$\swarrow$  Origin     $f$      $w$  rotated 180°  
 0 0 0 1 0 0 0 0    8 2 3 2 1    (i)

                  0 0 0 1 0 0 0 0    (j)  
 8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (k)  
 8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (l)  
 8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (m)  
                   8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (n)  
                                   8 2 3 2 1

Full convolution result  
 0 0 0 1 2 3 2 8 0 0 0 0    (o)

Cropped convolution result  
 0 1 2 3 2 8 0 0    (p)





# 小结

- $m \times n$ 的滤波器与图像做相关操作

$$w(x, y) \star f(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

- 图像 $f$ 已经填充、寻找匹配

- $m \times n$ 的滤波器与图像做卷积操作

$$w(x, y) \star f(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x - s, y - t)$$

- 图像 $f$ 已经填充、-反映旋转

- 傅里叶变换、卷积定理

- 不严格区分相关和卷积



# 线性滤波的向量表示

- 把滤波器和灰度值拉成向量

$$R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_{mn} z_{mn} = \sum_{k=1}^{mn} w_k z_k = \mathbf{w}^T \mathbf{z}$$

- $\mathbf{w}$  是  $m \times n$  的滤波器系数
- $\mathbf{z}$  为相应图像的灰度值

$w_1$	$w_2$	$w_3$
$w_4$	$w_5$	$w_6$
$w_7$	$w_8$	$w_9$



$$\begin{aligned} R &= w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_9 z_9 \\ &= \sum_{k=1}^9 w_k z_k \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{z} \end{aligned}$$

# 空间滤波器模板



- 计算平均灰度

$$R = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 z_i$$

- 两变量的连续函数（高斯）

$$h(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

- $w_1 = h(-1, -1), w_2 = h(-1, 0), \dots, w_9 = h(1, 1)$

- 非线性滤波器

- 邻域大小、操作 (max)
- 更加强大

# 提纲



- 背景知识
- 基本灰度变换函数
- 直方图处理
- 空间滤波基础
- 平滑空间滤波器
- 锐化空间滤波器
- 混合空间增强法



# 平滑线性滤波器

- 均值滤波器/低通滤波器
  - 优点：降低噪声
    - 比如去除伪轮廓
  - 缺点：边缘模糊

$$R = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 z_i$$

$\frac{1}{9} \times$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

- 先求和，再归一化



# 平滑线性滤波器



- 加权线性滤波器
  - 非均匀权重
  - 降低模糊

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)}$$

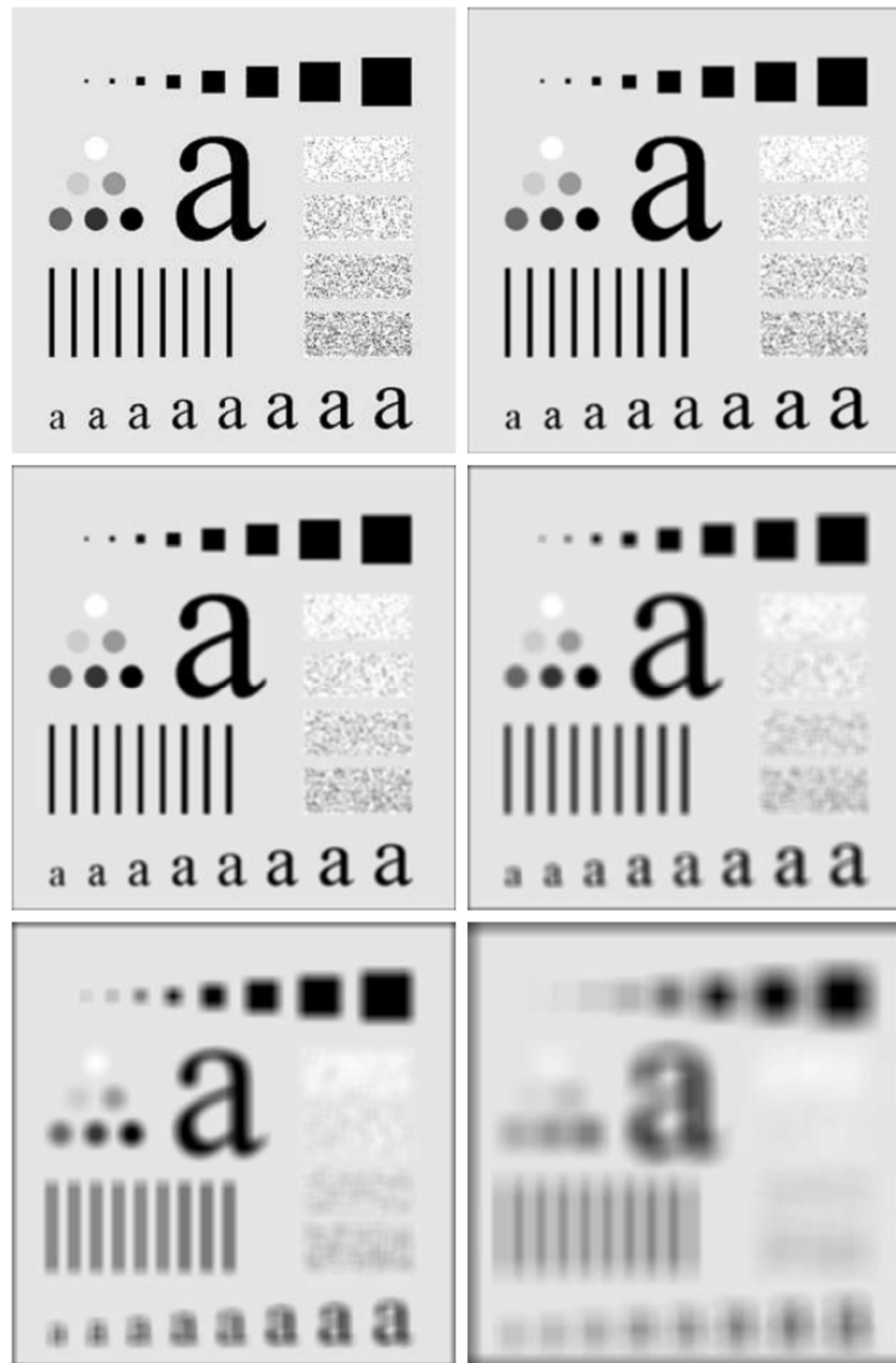
$\frac{1}{16} \times$

1	2	1
2	4	2
1	2	1

# 效果展示

- 3、5、9、15、35 的方形均值滤波

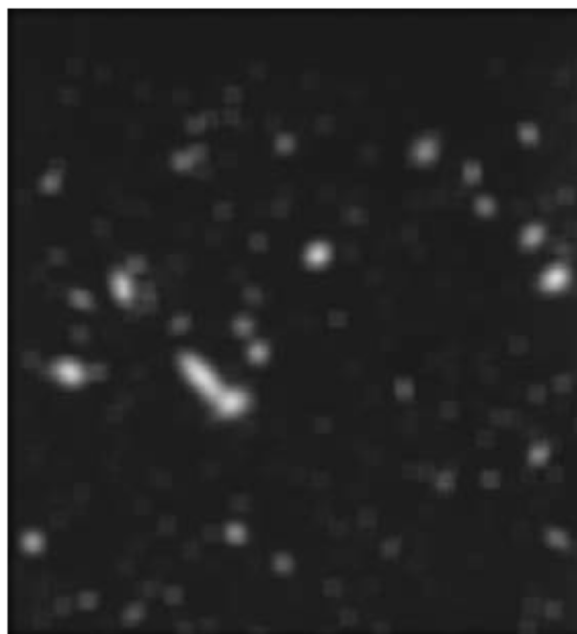
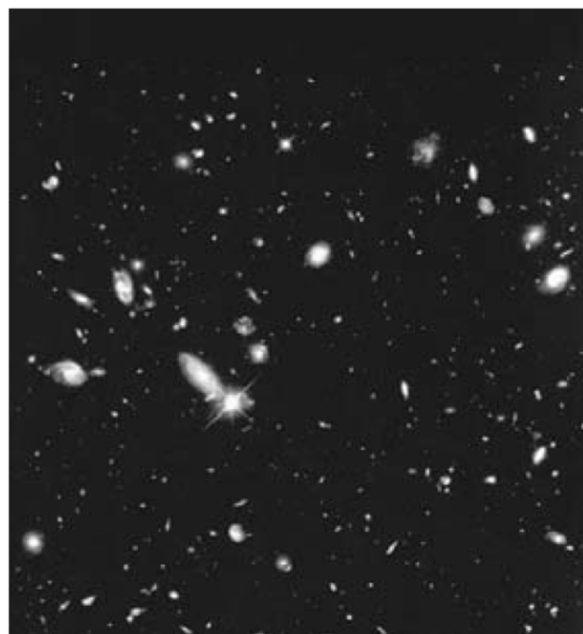
- 小物体
- 噪声
- 边缘
- 边界



# 实际应用



- 哈勃望远镜照片
  - $15 \times 15$ 均值滤波器
  - 阈值处理 (最高亮度25%)



# 统计排序滤波器

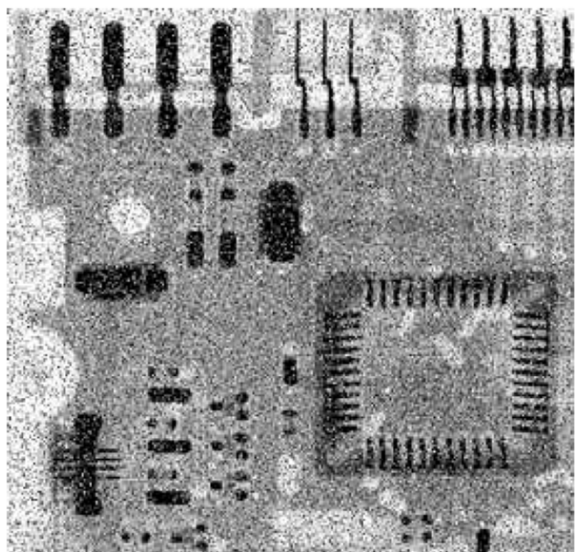


- 非线性滤波器
  - 对滤波器覆盖的像素排序
  - 用排序决定的值替代中心像素
- 中值滤波器
  - 10、15、20、20、20、20、20、25、100
- 最大值滤波器
  - max
- 最小值滤波器
  - min

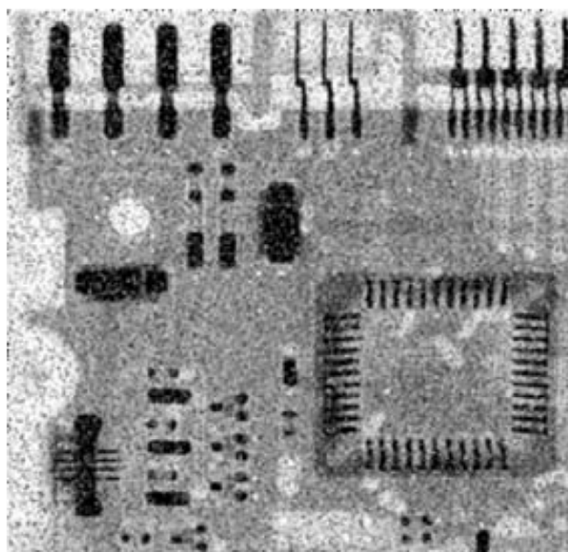
# 效果展示



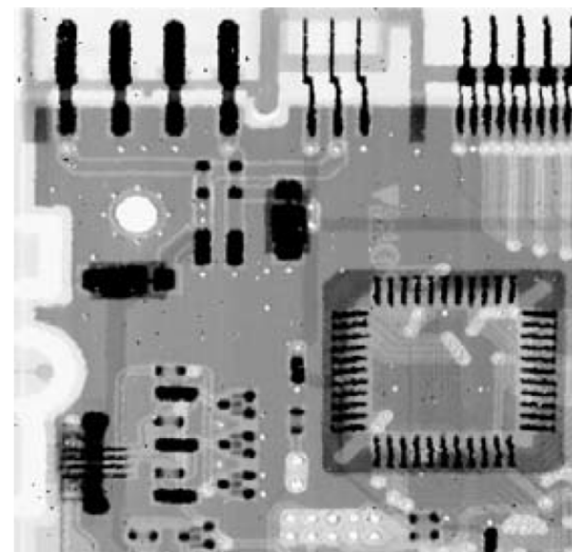
- 电路板的X射线图像



椒盐噪声



$3 \times 3$ 均值滤波



$3 \times 3$ 中值滤波

# 提纲

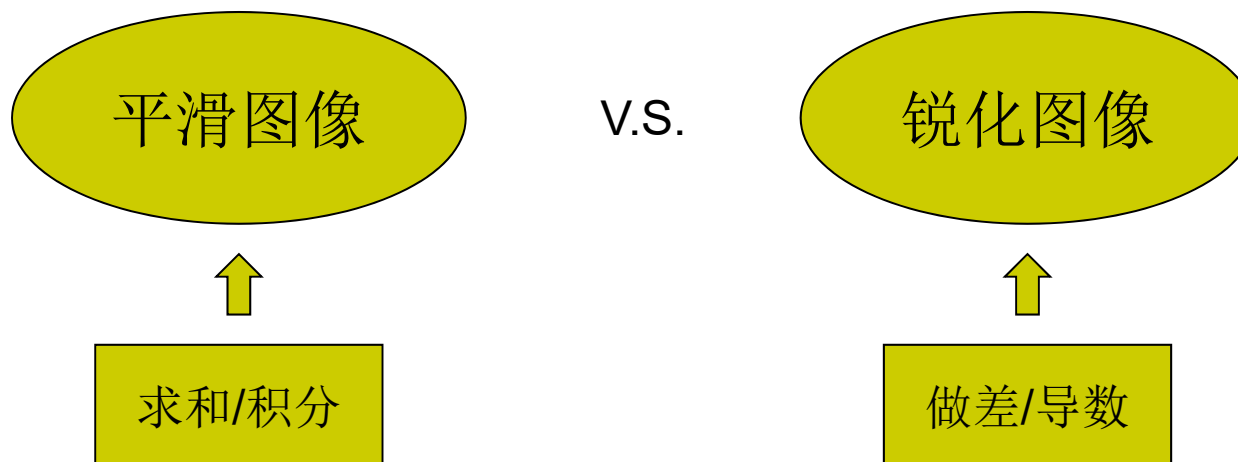


- 背景知识
- 基本灰度变换函数
- 直方图处理
- 空间滤波基础
- 平滑空间滤波器
- 锐化空间滤波器
- 混合空间增强法



# 锐化处理

- 目的
  - 突出灰度的过渡部分
- 应用广泛
  - 电子印刷、医学成像、工业检测、制导



# 数学基础



- 一阶导数的性质
  - 在恒定灰度区域为**零**
  - 在突变（斜坡、台阶）的起点**非零**
  - 沿着斜坡**非零**
- 二阶导数的性质
  - 在恒定灰度区域为**零**
  - 在突变（斜坡、台阶）的起点和终点**非零**
  - 沿着恒定斜率斜坡为**零**



# 数学基础



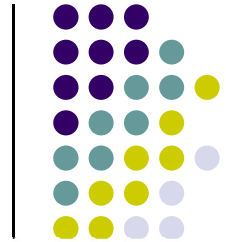
- 一维函数  $f(x)$ 
  - 一阶导数

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x + 1) - f(x)$$

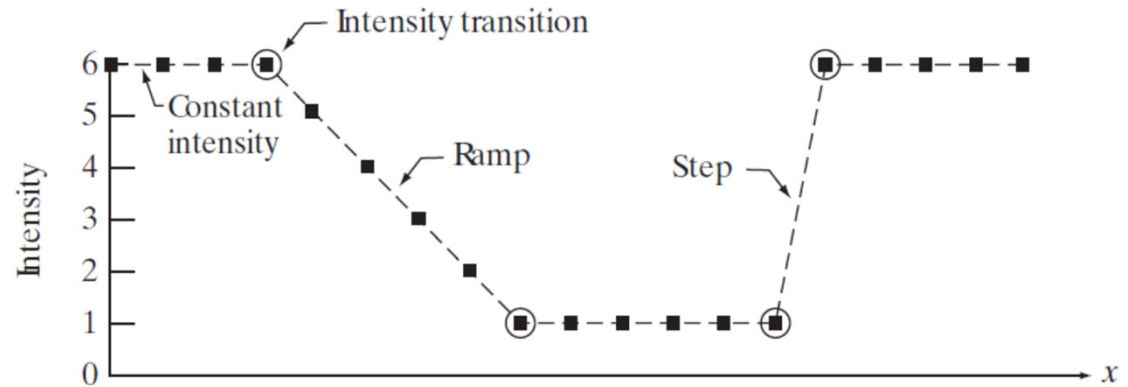
- 二阶导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x + 1) + f(x - 1) - 2f(x)$$

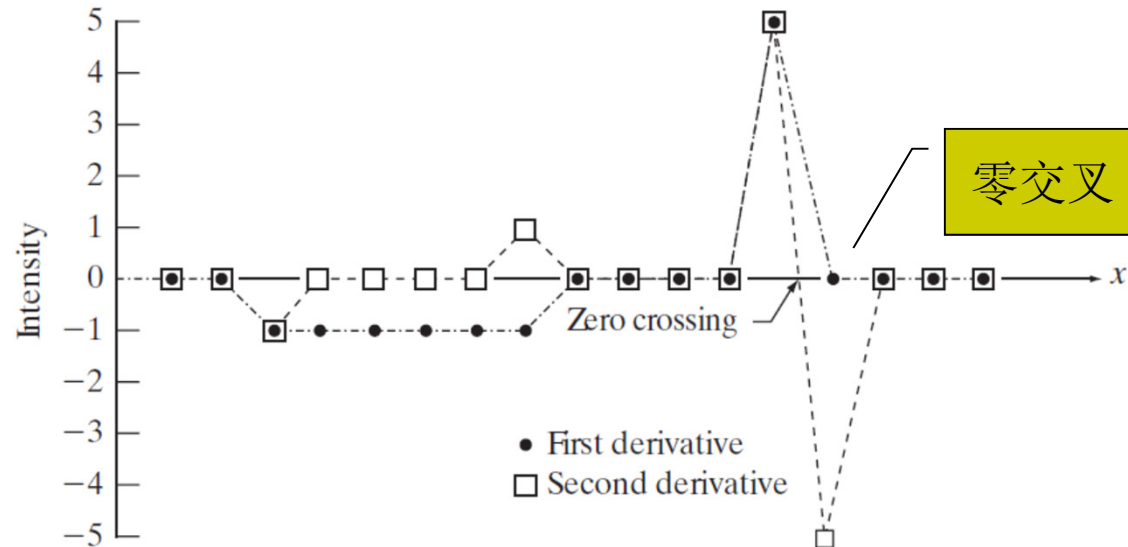
# 一阶和二阶导数的对比



- 恒定区域
- 斜坡
- 恒定区域
- 台阶
- 恒定区域



Scan line	6	6	6	6	5	4	3	2	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6
1st derivative	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0
2nd derivative	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	5	-5	0	0	0	0



# 直观的结论



- 数字图像的边缘类似于斜坡
  - 一阶导数产生较粗的边缘
    - 沿斜坡的导数一直**非零**
  - 二阶导数产生两个有间距的双边缘
    - 由**零**分开、**单像素宽**
- 二阶导数在增强细节方面比一阶导数好!



# 使用二阶导数对图像锐化

- 各向同性滤波器
  - 旋转图像→滤波 = 滤波→旋转结果
- 拉普拉斯算子

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- 线性算子
- 离散拉普拉斯算子

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x + 1, y) + f(x - 1, y) - 2f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y + 1) + f(x, y - 1) - 2f(x, y)$$

# 拉普拉斯算子



- 标准形式

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x, y) &= f(x + 1, y) + f(x - 1, y) \\ &\quad + f(x, y + 1) + f(x, y - 1) \\ &\quad - 4f(x, y)\end{aligned}$$

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

90度增量  
各向同性

- 对角线形式

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

45度增量  
各向同性



# 使用二阶导数对图像锐化

- 拉普拉斯算子结果叠加到图像中

$$g(x, y) = f(x, y) + c [\nabla^2 f(x, y)]$$

- 采用负的中心系数,  $c = -1$
- 采用正的中心系数,  $c = 1$

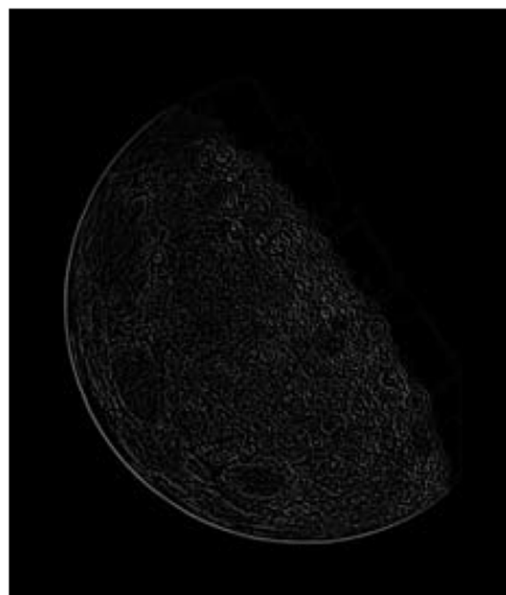
0	-1	0	-1	-1	-1
-1	4	-1	-1	8	-1
0	-1	0	-1	-1	-1

# 举例

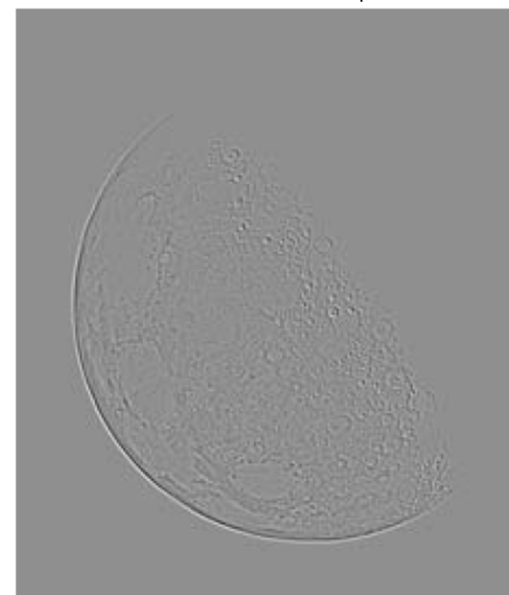
- 月球图像



拉普拉斯滤波



归一化



标准拉普拉斯锐化

对角版本拉普拉斯锐化



# 非锐化掩蔽

- 从原图像减去一幅非锐化版本
  1. 模糊原图像
  2. 从原图像减去模糊图像，得到模板
  3. 将模板加到原图像

- 具体公式

$$g_{\text{mask}}(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y)$$

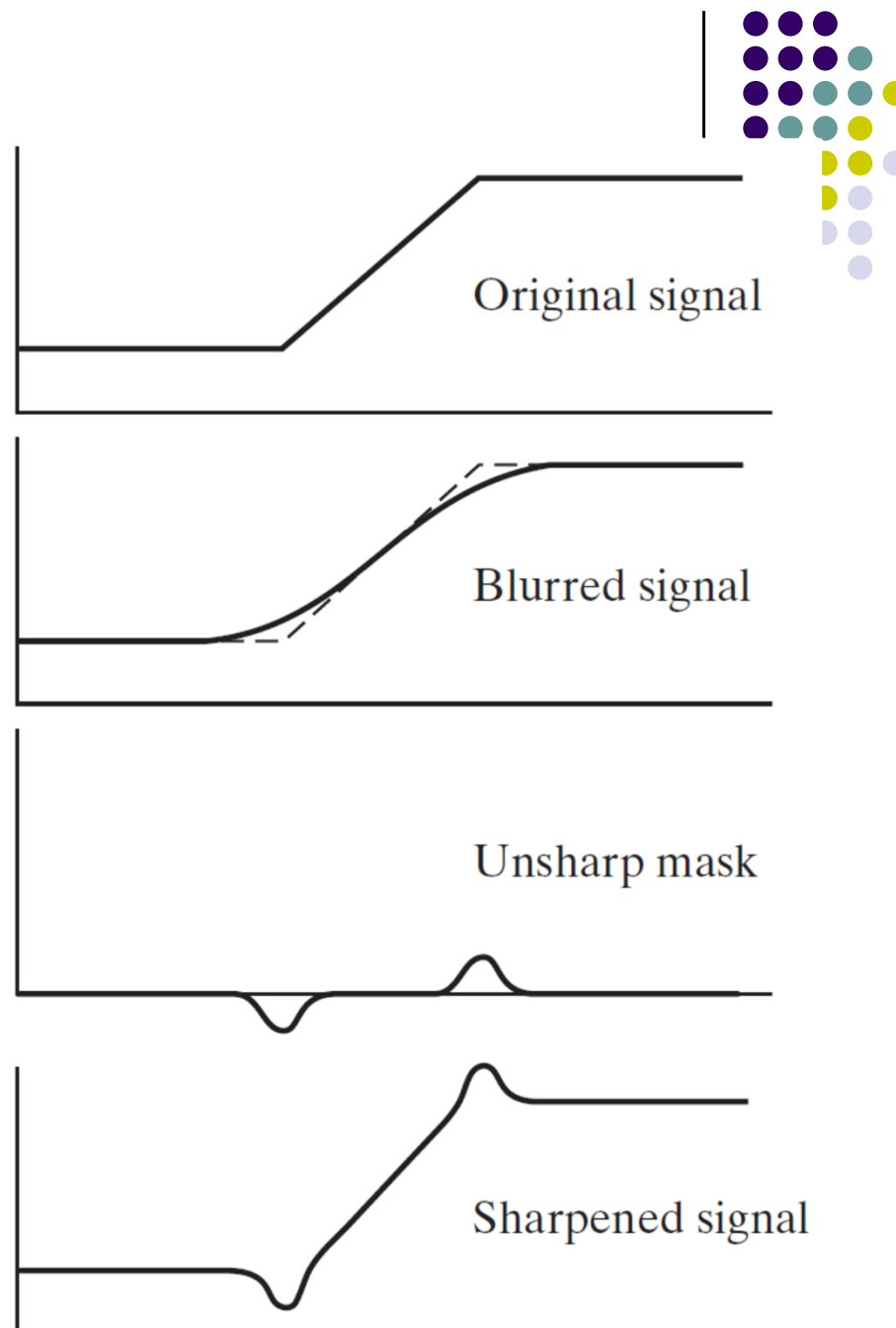
$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{\text{mask}}(x, y)$$

- 模糊图像  $\bar{f}(x, y)$
- 非锐化掩蔽  $k = 1$ ；高提升滤波  $k > 1$



# 举例

- 非锐化模板
- 二阶导数



# 举例

- 文本增强



DIP-XE

高斯滤波

DIP-XE

DIP-XE

非锐化模板

非锐化掩蔽

DIP-XE

DIP-XE

高提升滤波,  $k = 4.5$

# 使用一阶导数对图像锐化



- 利用梯度的大小

- 梯度：最大变化率的方向

- 线性算子

- 非旋转不变

$$\nabla f \equiv \text{grad}(f) \equiv \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- 大小

- 非线性

- 旋转不变

$$M(x, y) = \text{mag}(\nabla f) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$

- 近似计算

- 非旋转不变

$$M(x, y) \approx |g_x| + |g_y|$$

# 梯度的离散近似



- 最简单的近似

$$g_x = z_8 - z_5$$

$$g_y = z_6 - z_5$$

- 交叉差分

$$g_x = z_9 - z_5$$

$$g_y = z_8 - z_6$$

$$M(x, y) = [(z_9 - z_5)^2 + (z_8 - z_6)^2]^{1/2}$$

$$M(x, y) \approx |z_9 - z_5| + |z_8 - z_6|$$

$z_1$	$z_2$	$z_3$
$z_4$	$z_5$	$z_6$
$z_7$	$z_8$	$z_9$

-1	0	0	-1
0	1	1	0

罗伯特交叉梯度算子

# 梯度的离散近似

- 对称模板

$z_1$	$z_2$	$z_3$
$z_4$	$z_5$	$z_6$
$z_7$	$z_8$	$z_9$



$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)$$

$$g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)$$

-1	-2	-1	-1	0	1
0	0	0	-2	0	2
1	2	1	-1	0	1



Soble算子

# 梯度的离散近似



- 对称模板

$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)$$

$$g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)$$

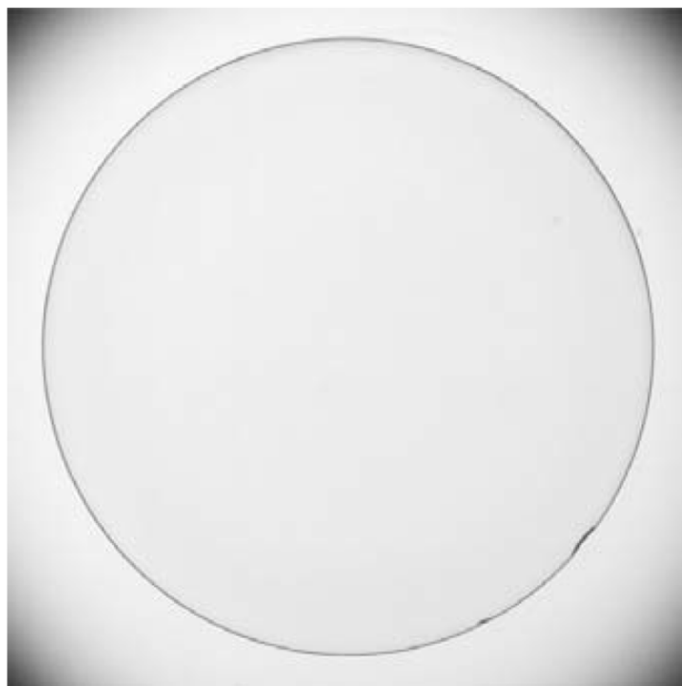
- 计算大小

$$M(x, y) \approx |(z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)| \\ + |(z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)|$$

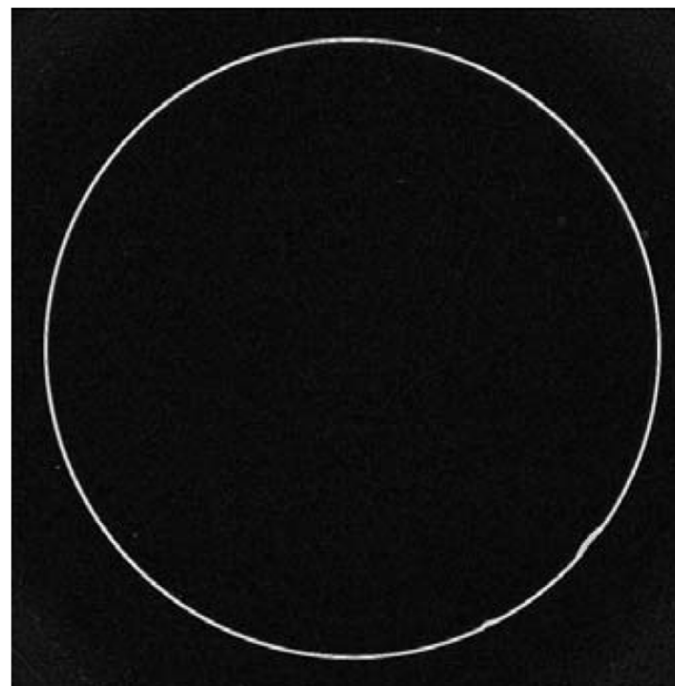
# 举例

- 隐形眼镜光学图像

-1	-2	-1	-1	0	1
0	0	0	-2	0	2
1	2	1	-1	0	1



原图



Sobel梯度图像

增强缺陷  
消除背景

# 提纲



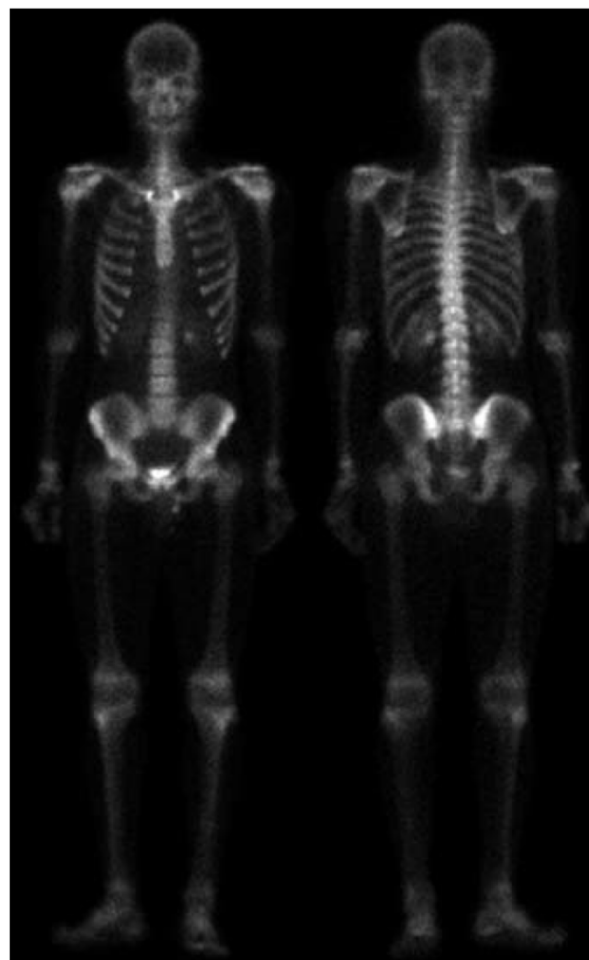
- 背景知识
- 基本灰度变换函数
- 直方图处理
- 空间滤波基础
- 平滑空间滤波器
- 锐化空间滤波器
- 混合空间增强法



# 利用多种图像增强方法

- 人体骨骼扫描图像
  - 拉普拉斯突出细节
  - 梯度突出边缘
  - 灰度变换增强对比度

灰度范围窄  
噪声强

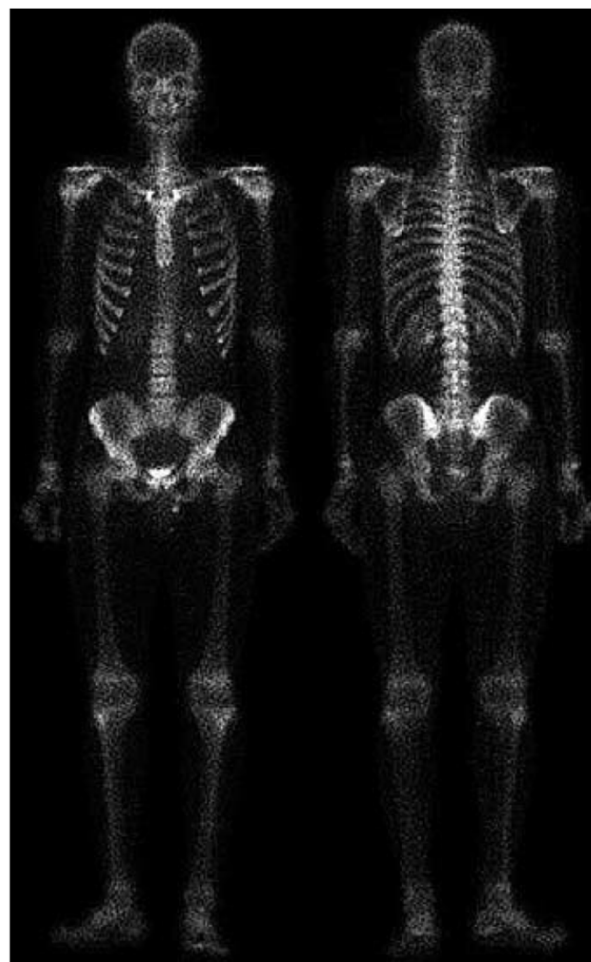
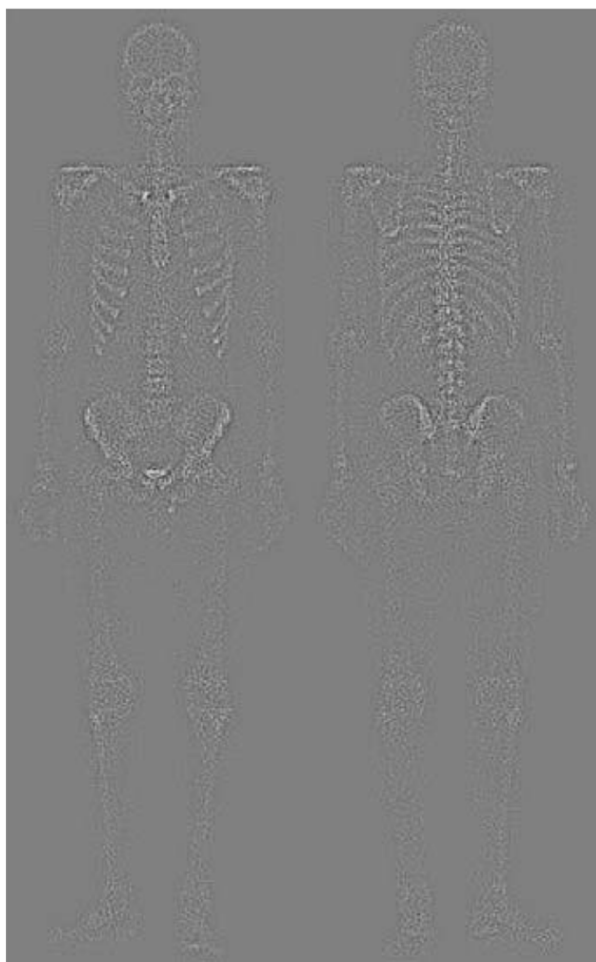


# 利用多种图像增强方法

噪声过多

- 拉普拉斯锐化

拉普拉斯  
滤波

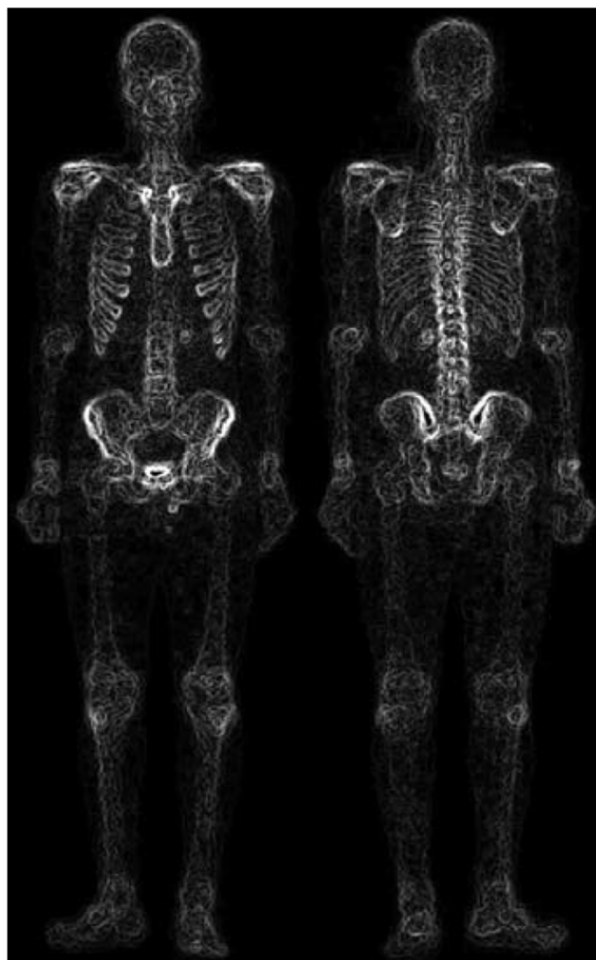


# 利用多种图像增强方法



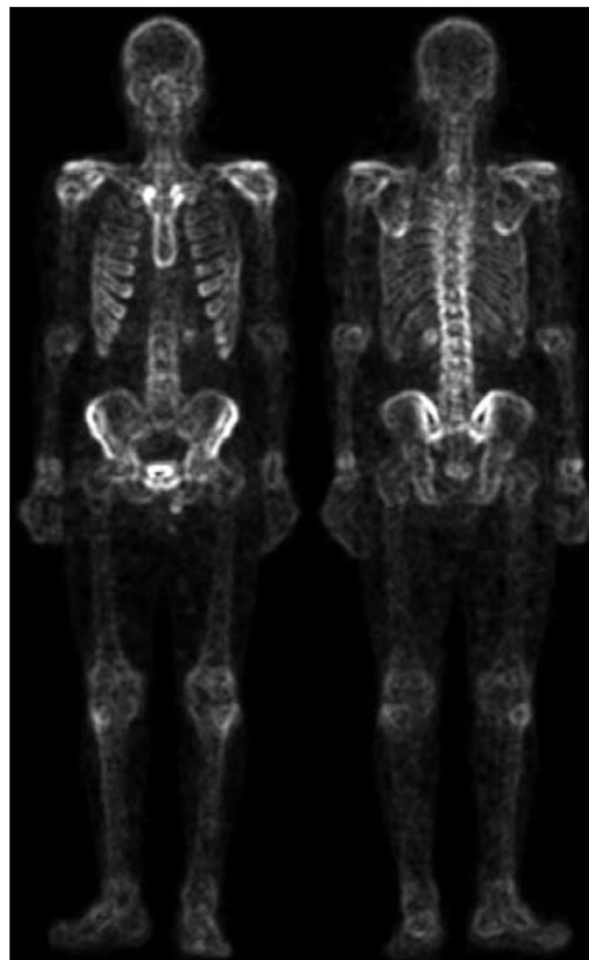
- 梯度锐化（对变化响应强，细节响应弱）

Sobel梯度  
操作

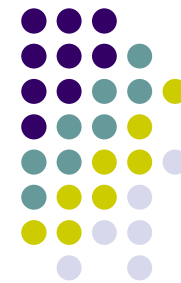


进一步降噪

$5 \times 5$   
均值滤波

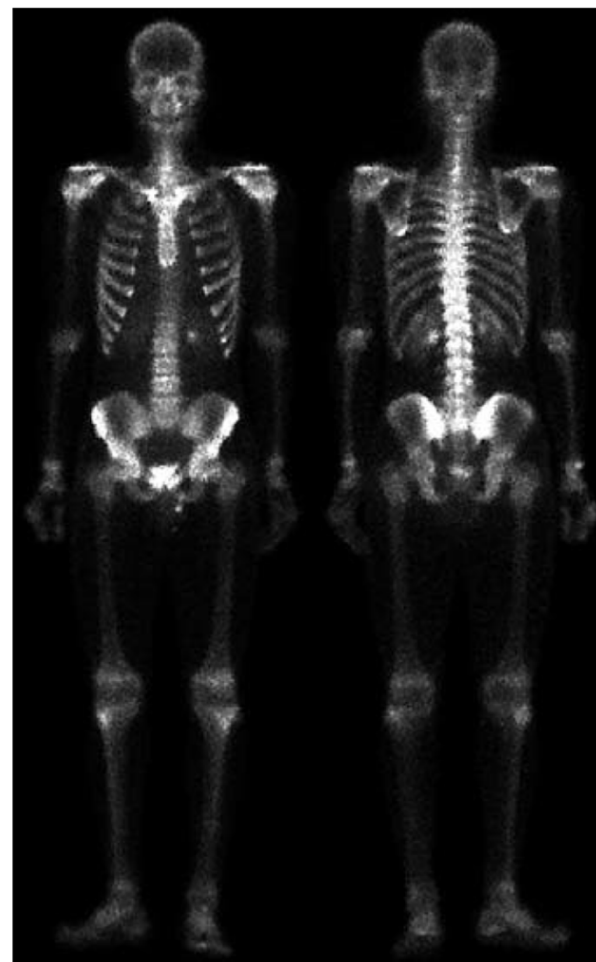
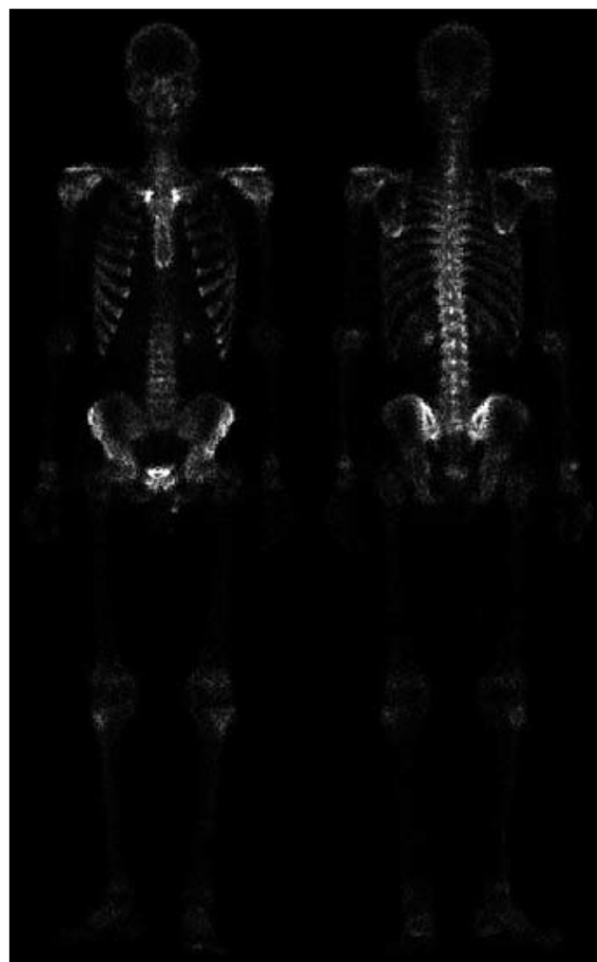


# 利用多种图像增强方法



- 结合拉普拉斯锐化和梯度锐化

拉普拉斯图像  
平滑梯度图像  
的乘积

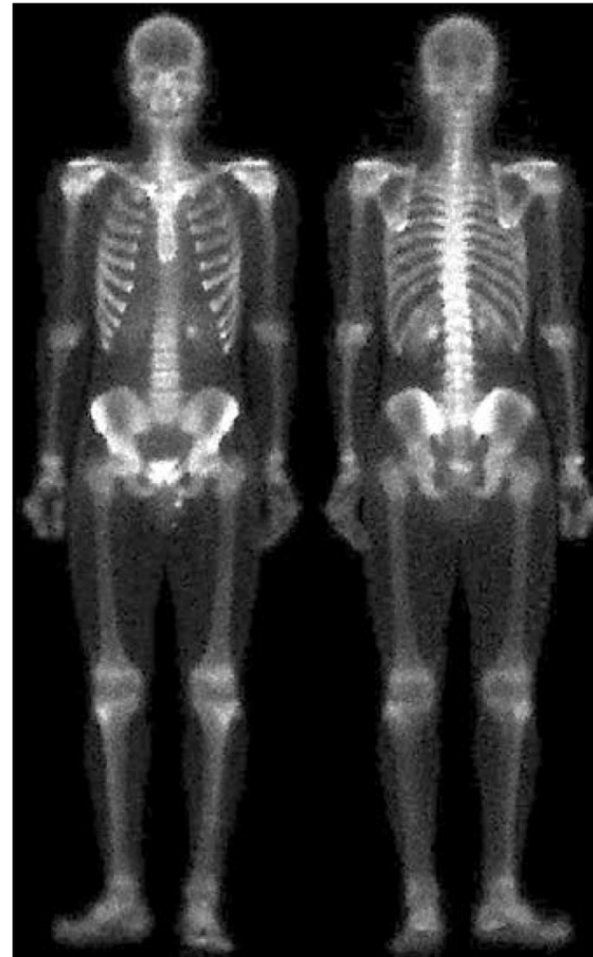
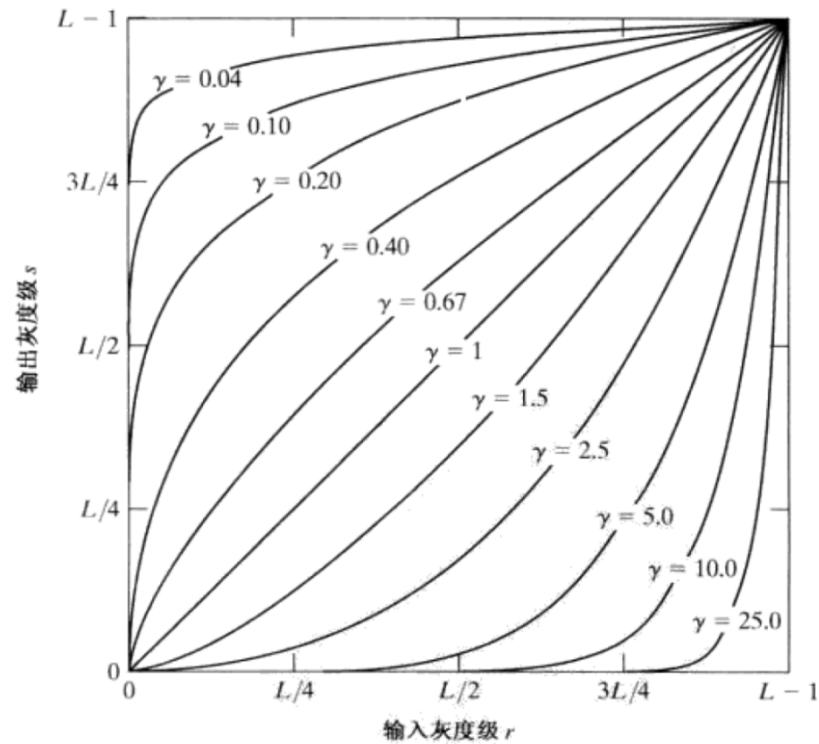


与原图  
叠加

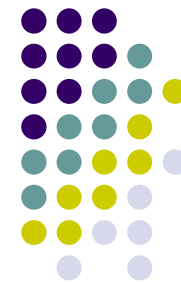
# 利用多种图像增强方法



- 幂律变换 ( $\gamma = 0.5$ )



# 利用多种图像增强方法



- 幂律变换 ( $\gamma = 0.5$ )

