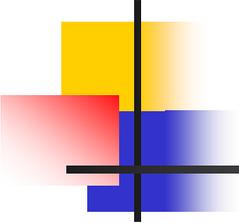


# 子空间距离度量及应用

---

北京大学信息科学技术学院  
视觉与听觉信息处理国家重点实验室

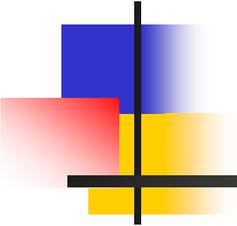
封举富 王立威



# 内容提要

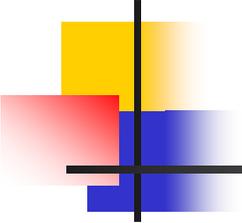
---

- 问题的背景——度量量子空间的“相似性”:
  - 视频识别
  - 人脸识别
- 子空间相似度与距离:
  - Principal Angle 及推广
  - Golub-Werman距离
  - 从几何角度给出的子空间距离及推广
- 进一步的应用:
  - 自适应Bayes人脸识别算法



问题的背景：  
度量量子空间的“相似性”

---

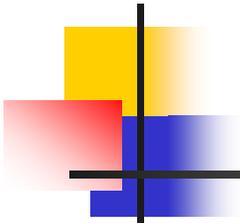


# 问题的背景

---

- 模式识别:

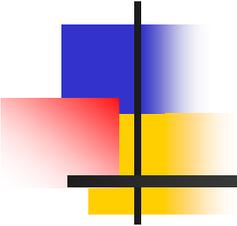
- 一个基本而且关键的问题是定义模式之间距离或者相似度。
- 通常模式由特征，即欧式空间中的向量来表示。
- 具有结构的模式可用图等模型来表示。
- 某些实际问题中，用子空间来表示对象更方便。



## 问题的背景（续）

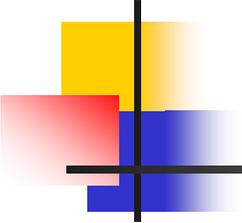
---

- 以子空间作为模式的表示：
  - 基于视频的识别：
    - 图像序列在图像空间中张成一个子空间。
  - 人脸识别：
    - 不同条件下同一人脸图像张成线性子空间。



# 子空间相似度与距离

---



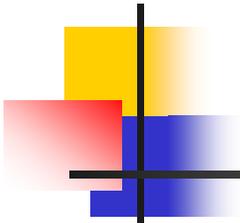
# 子空间相似度与距离

- 子空间相似度的研究工作：
  - Principal angles (Jordan 1875, Hotelling 1936)
    - 两个子空间U, V之间的principal angles

$0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_k \leq (\pi/2)$  (递归) 定义为:

$$\cos(\theta_k) = \max_{u \in U} \max_{v \in V} u^T v.$$

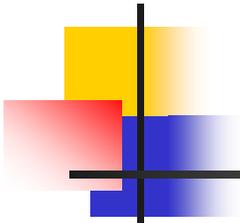
$$\begin{aligned} u^T u = v^T v = 1, \\ u^T u_i = v^T v_i = 0, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$



## 子空间相似度与距离（续）

---

- Yamaguchi 等（1998）首先将最小 principal angle 的余弦作为两个子空间的相似度用于视频识别；
- Wolf & Shashua (2003) 提出用  $\prod_{i=1}^k \cos^2(\theta_i)$  作为子空间相似度：
  - $\prod_{i=1}^k \cos^2(\theta_i)$  是正定核函数！！！！  
可以嵌入到SVM中。



## 子空间相似度与距离 (续)

- 子空间距离的研究工作:
  - Golub 等(1989)从矩阵角度给出的定义:

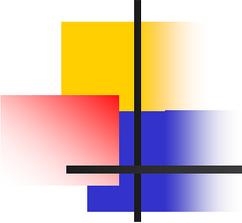
$$d(U, V) = \|P_U - P_V\|_2.$$

子空间  
投影矩阵

$$\longrightarrow P_U = [u_1, u_2, \dots, u_m][u_1, u_2, \dots, u_m]^T.$$

一一对应 ■ Werman (1995)

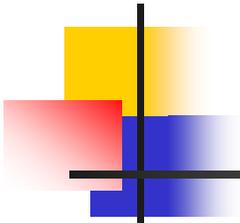
$$d(U, V) = \|P_U - P_V\|_F.$$



## 子空间相似度与距离（续）

---

- 子空间距离、相似度定义的局限性：
  - 只考虑最小 principal angle 丢失大量信息；
  - 定义只适用于两个子空间维数相同的情况，而实际应用中子空间维数经常不相等。



## 子空间相似度与距离 (续)

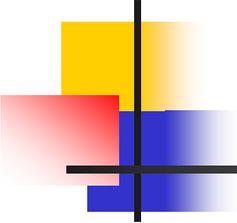
- 从几何角度考虑子空间距离
  - 向量端点到子空间的  $L_2 - Hausdorff$  距离:

$$d(u_i, V) = \min_{v \in V} \|u_i - v\|_2.$$

- 从  $m$  维子空间  $U$  到  $n$  维子空间  $V$  的“有向距离”

$$\vec{d}(U, V) = \sqrt{\sum_{i=1}^m d^2(u_i, V)} = \sqrt{m - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_i^T v_j)^2}.$$

$u_1, u_2, \dots, u_m$   $v_1, v_2, \dots, v_n$  分别为两个子空间的标准正交基。

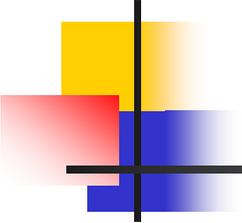


## 子空间相似度与距离（续）

- $m$ 维子空间 $U$ 与  $n$ 维子空间 $V$ 的“对称距离”  
(Wang & Feng, 2006)

$$\begin{aligned} d(U, V) &= \max(\vec{d}(U, V), \vec{d}(V, U)) \\ &= \sqrt{\max(m, n) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_i^T v_j)^2}. \end{aligned}$$

称该距离为  $L_2$ -Hausdorff 子空间距离。

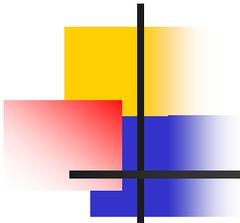


## 子空间相似度与距离（续）

- $L_2$ -Hausdorff 子空间距离的性质：

(Sun, Wang and Feng, 2007)

- 当两个子空间维数相同时，该距离与Golub-Werman 距离等价(F-Norm)；
- 即使两个子空间维数不相等，该距离仍然是“度量”，满足自反,对称,三角不等式等性质；
- 两个子空间的距离为零，当且仅当二者重合；距离取到极大值，当且仅当二者正交。



## 子空间相似度与距离（续）

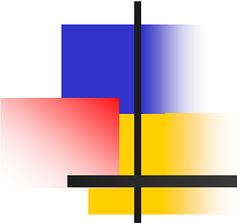
- Kernelization:

- 子空间距离仅依赖于内积。

$$d(U, V) = \sqrt{\max(m, n) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_i^T v_j)^2}.$$

只有内积

- 利用Kernel PCA计算出核子空间的维数与基向量，基向量之间的内积可由核函数的线性组合表示。

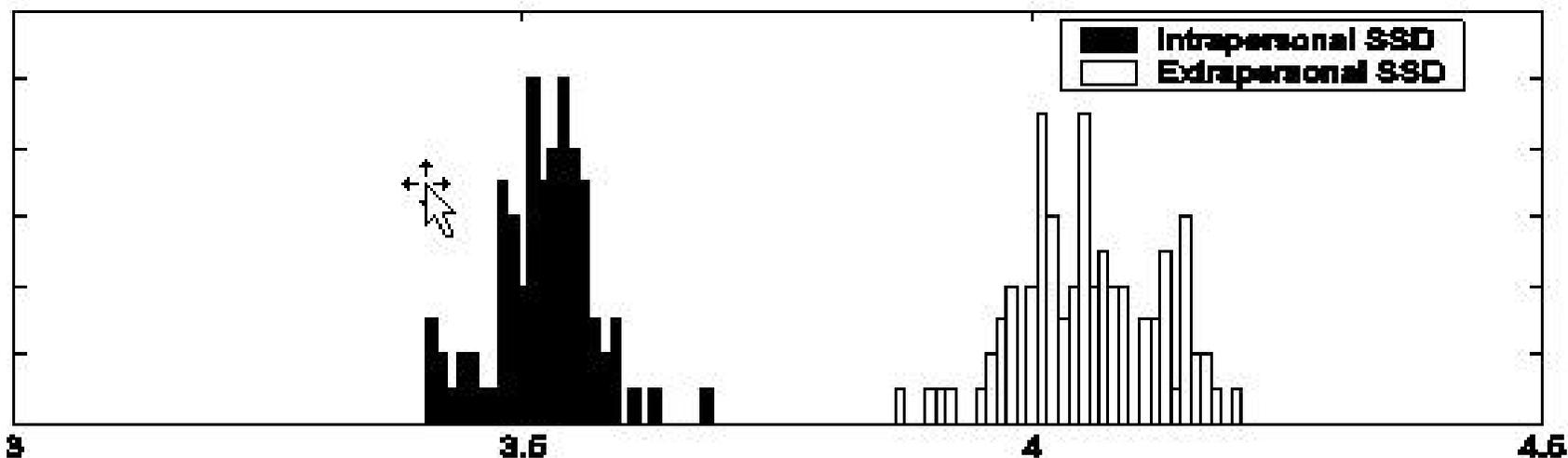


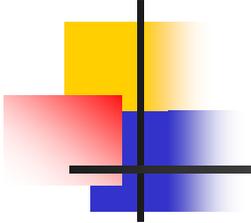
# 子空间距离在人脸识别中的应用

---

# 子空间距离在人脸识别中的应用

- 利用子空间距离研究人脸子空间的相似性：
  - 不同人的脸子空间的距离；
  - 同一个人由不同人脸图像张成的子空间的距离。





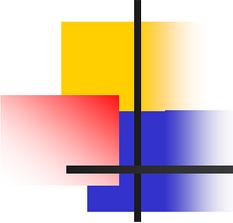
# 子空间距离在人脸识别中的应用

- 子空间的最大后验概率估计:

- 问题的描述:

希望估计由若干观测到的样本点（向量）张成的子空间。观测到的样本数很少，甚至少于子空间维数。但对子空间有一定先验知识。

- 采取最大后验概率估计的策略，关键要定义“子空间”的先验分布，和观测样本的条件概率。



# 子空间距离在人脸识别中的应用

- 利用  $L_2$ -Hausdorff 子空间距离定义子空间先验概率:

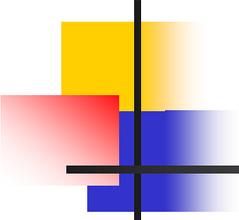
$$p(V) = \frac{1}{Z} \exp\{-d^2(V, V_0)\}.$$

← 先验子空间

- 观测样本的条件概率:

$$p(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k | V) = \frac{1}{Z'} \exp\left\{-\sum_{i=1}^k d^2(\Delta_i, V)\right\}.$$

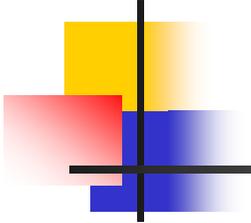
直接用此条件概率做最大似然估计就等价于PCA!



## 子空间距离在人脸识别中的应用

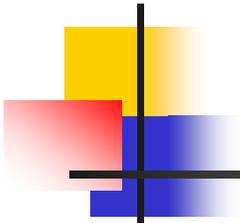
---

- 最大后验概率估计是最优化问题，采用这两个概率分布，子空间的最大后验概率估计是解简单的特征值问题。



# 子空间距离在人脸识别中的应用

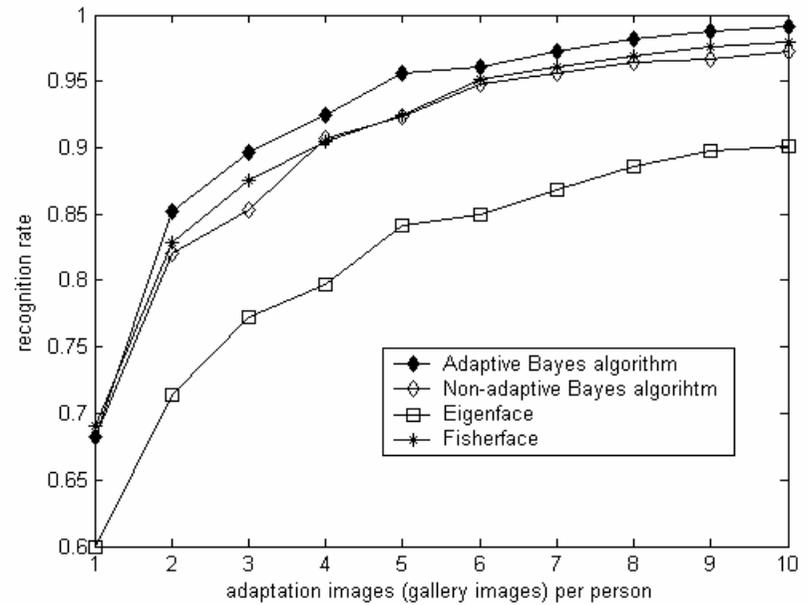
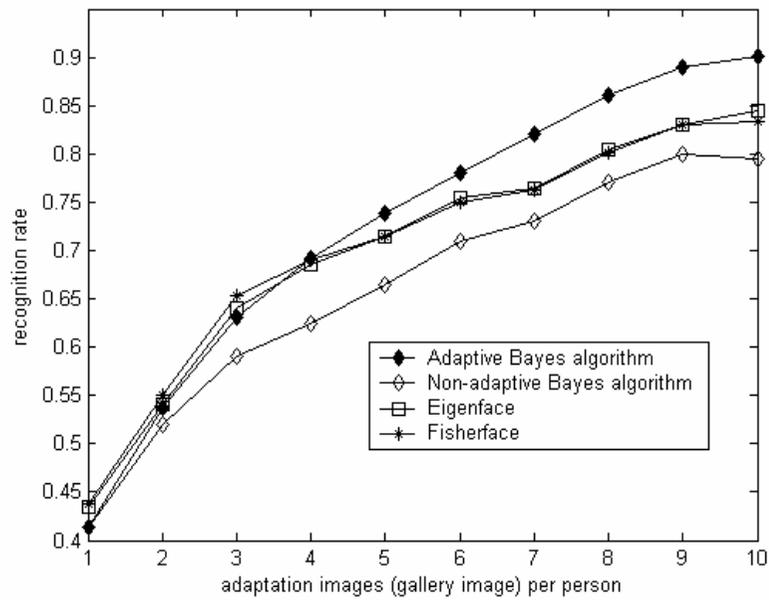
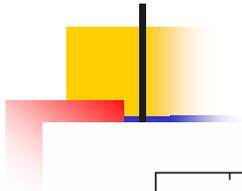
- Bayes → 自适应Bayes人脸识别：
  - 人脸类内子空间(Intrapersonal subspace):
    - 反映同一个人由于不同条件得到的图像的差异变化子空间。
    - 由类内差图像（相同人的不同图像作差）根据PCA得到。
    - 每个人只有很少几幅图像，Bayes人脸识别算法用来自很多人的所有差图像求出一个“平均”类内子空间，称作Average Intrapersonal Subspace (AIS)。
    - 每个人有自己的Specific Intrapersonal Subspace (SIS)

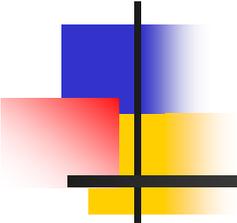


## 子空间距离在人脸识别中的应用

---

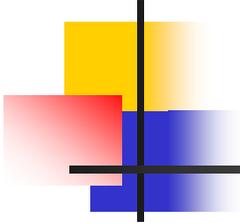
- AIS: 粗糙模型
- SIS: 精确模型, 但数据量太少, 难以直接精确估计。用最大后验概率自适应估计。
- 用SIS代替AIS的自适应Bayes人脸识别实验结果.





# 参考文献

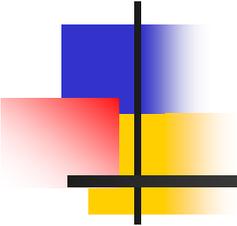
---



# 参考文献

---

- L. Wolf, A. Shashua, Learning over Sets using Kernel Principal Angles, *J. Mach. Learn. Res.* 4 (6) (2004) 913-931.
- O. Yamaguchi, K. Fukui, K. Maeda, Face Recognition using Temporal Image Sequence. In *IEEE International Conference on Automatic Face & Gesture Recognition*, 1998.
- H. Hotelling, Relations between Two Sets of Variates. *Biometrika* 28 (3/4) (1936) 321-377.
- M. Werman and D. Weinshall, "Similarity and Affine Invariant Distances Between 2D Point Sets," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 17, no. 8, pp. 810-814, 1995.
- G.H. Golub, and C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 2nd Ed., 1989.
- Xichen Sun, Liwei Wang, and Jufu Feng, "Further Results on the Subspace Distance," (to appear), *Pattern Recognition*.
- Liwei Wang, Xiao Wang, and Jufu Feng, "Subspace Distance Analysis with Application to Adaptive Bayesian Face Recognition," *Pattern Recognition*, vol. 39, no. 3, pp. 456-464, 2006.



Thanks!

---