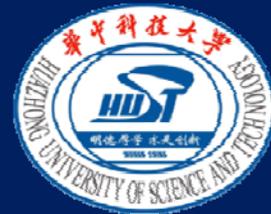




The 14th China Workshop on Machine Learning and Applications
第十四届中国机器学习及其应用研讨会

2016年11月4~6日 南京大学 南京



面向神经计算的忆阻系统 分析与设计

汇报人：曾志刚

工作单位：华中科技大学

2016年11月5日

提纲

01 忆阻研究背景与意义

02 基于忆阻的神经形态计算

03 忆阻系统的渐近行为分析

提纲

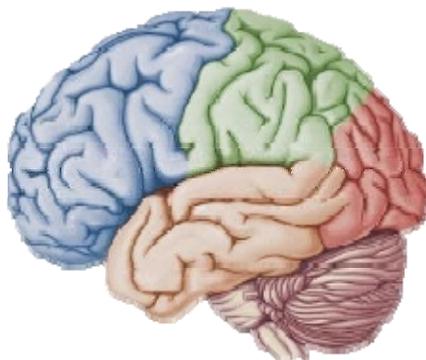
01 忆阻研究背景与意义

02 基于忆阻的神经形态计算

03 忆阻系统的渐近行为分析

一、忆阻研究背景与意义

大脑每个神经元通过突触至少与一万多个其他神经元相连



无法用晶体管电路实现这样复杂的连接

神经网络的发展已有多年历史

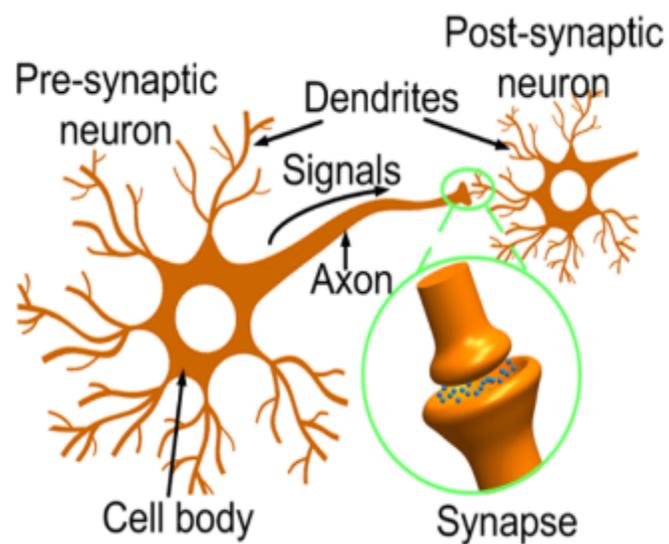
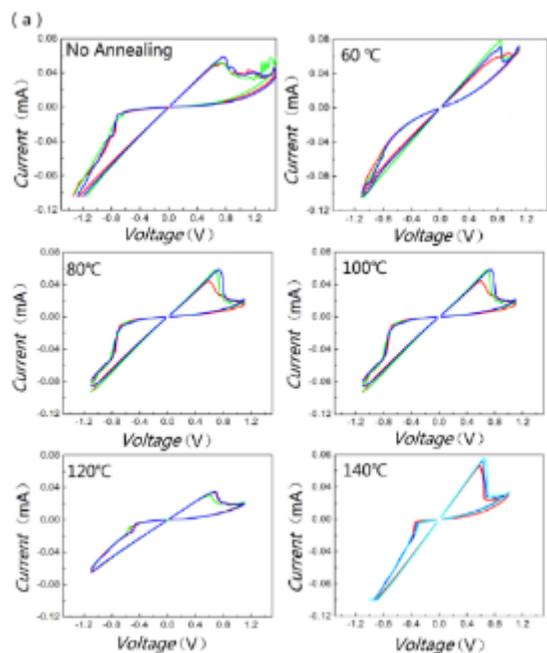


相邻神经元之间的突触难以用电路器件构建

在实现类脑计算过程中，如何采用微纳器件模拟生物神经元，以及神经突触的功能是一个急需突破的技术难题

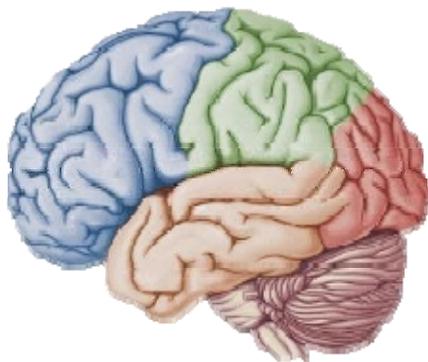
一、忆阻研究背景与意义

忆阻的阻值随其两端电信号变化而改变的性质，
非常类似于大脑中的突触



一、忆阻研究背景与意义

大脑每个神经元通过突触至少与一万多个其他神经元相连



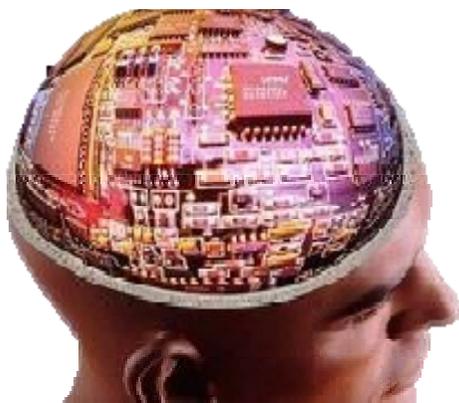
无法用晶体管电路实现这样复杂的连接

神经网络的发展已有多年历史



相邻神经元之间的突触难以用电路器件构建

忆阻可以模仿大脑神经元突触，成为构建模拟大脑电路系统的关键器件

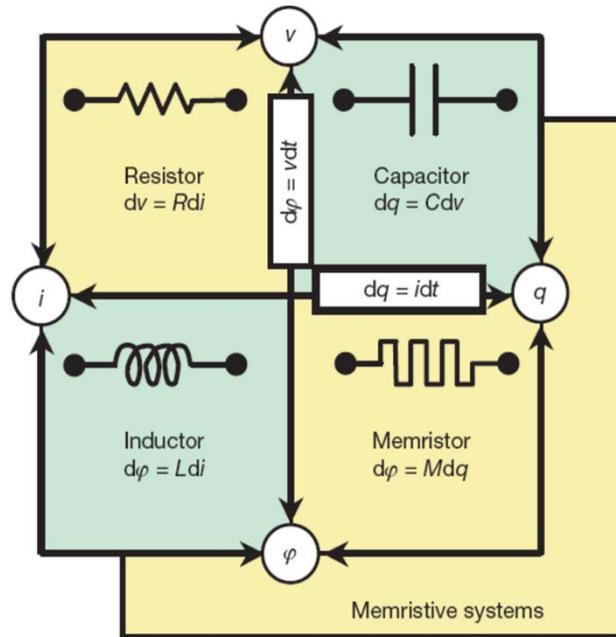


给基于类脑计算的物理实现带来了希望

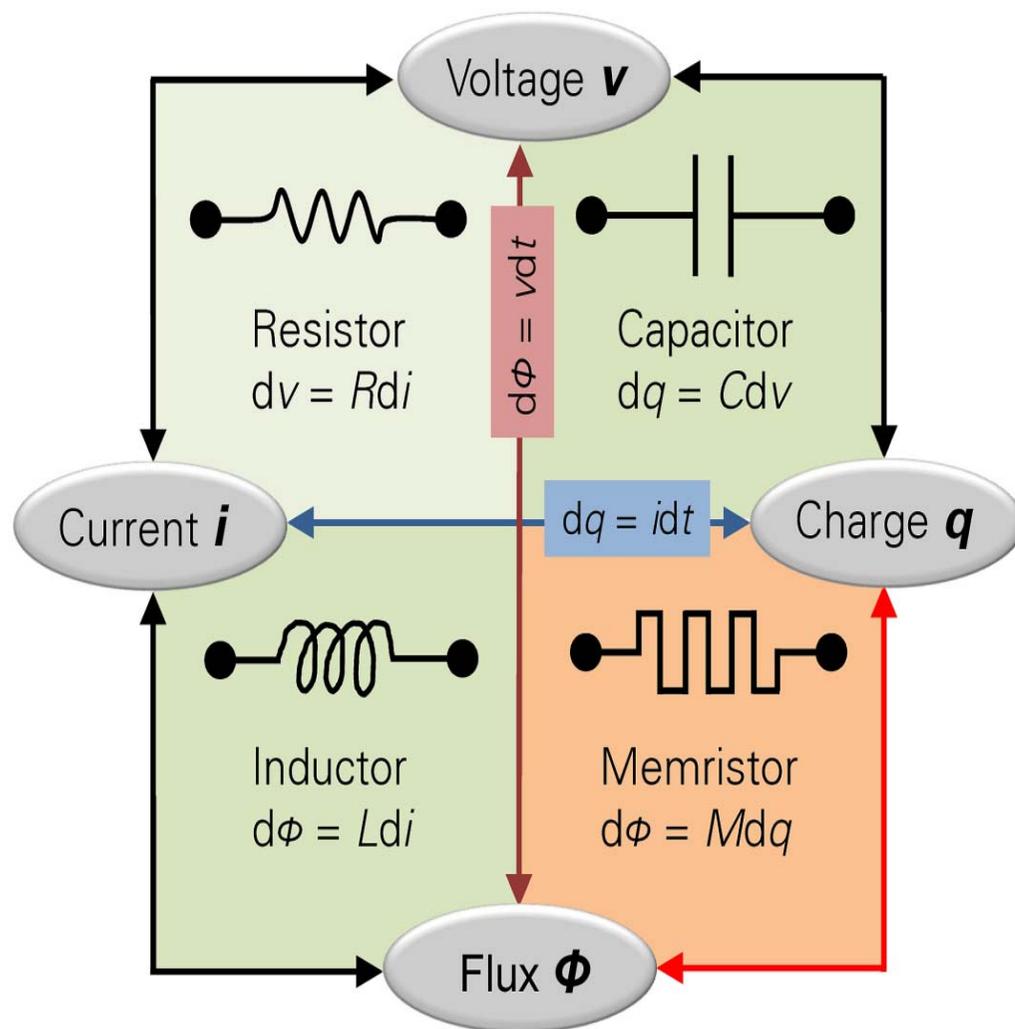
一、忆阻研究背景与意义

1971年，L.O. Chua教授预测了**第四种电路元件忆阻**的存在

L.O. Chua, "Memristor—the missing circuit element,"
IEEE Trans. Circuit Theory, vol. 18, no. 5, pp.507-519, 1971



一、忆阻研究背景与意义

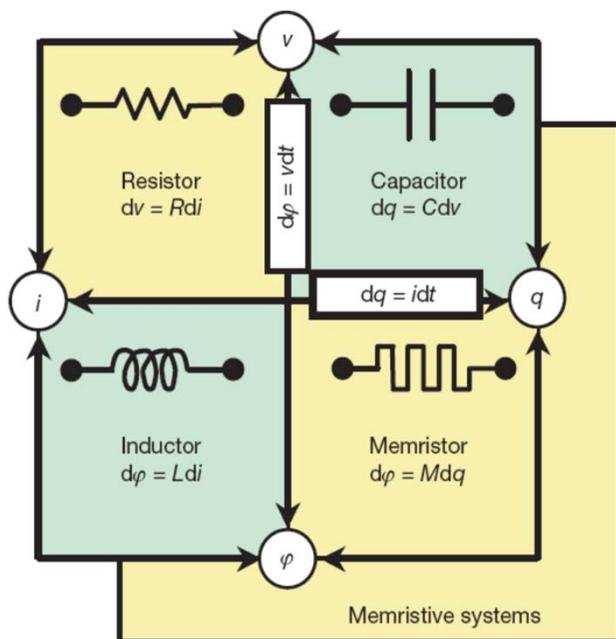


- 根据对称性，提出除电阻、电容和电感三种基本电路元件外，还应该存在一种基本电路元件来表述磁通量和电荷之间的关系
- 忆阻：有记忆功能的非线性电阻(mem-ristor)

一、忆阻研究背景与意义

1971年，L.O. Chua教授预测了**第四种电路元件忆阻**的存在

L.O. Chua, "Memristor—the missing circuit element," IEEE Trans. Circuit Theory, vol. 18, no. 5, pp.507-519, 1971

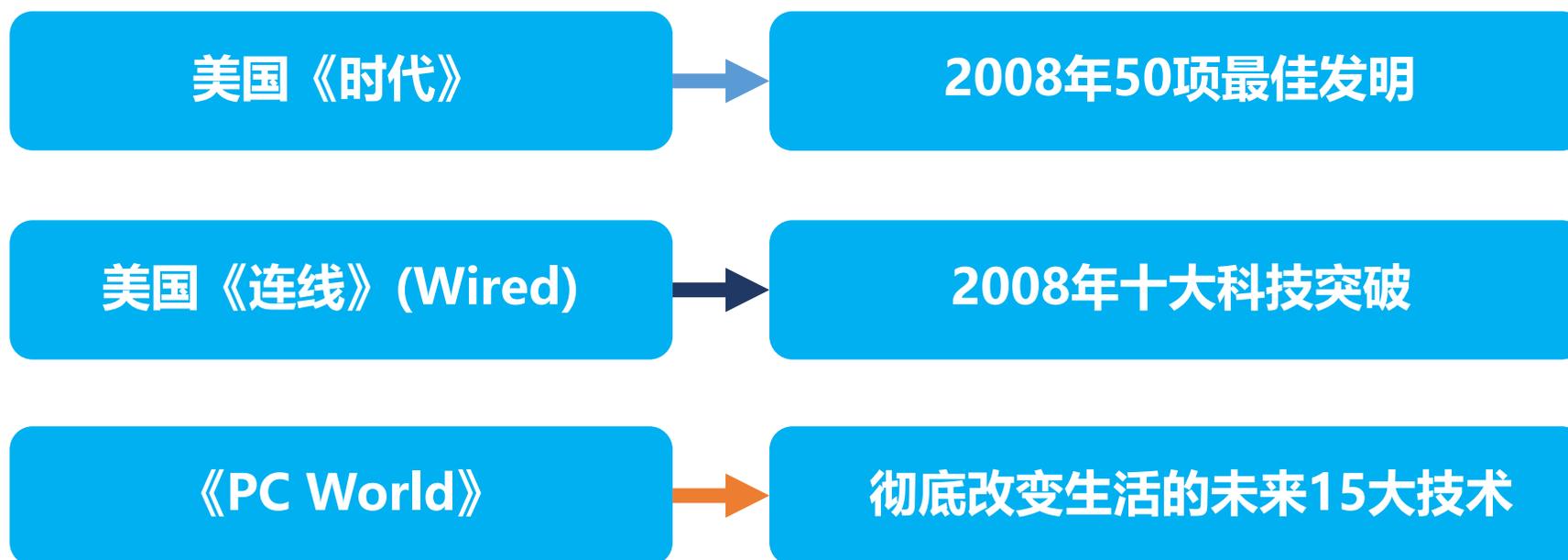


2008年，美国惠普公司宣布制造出**忆阻的物理器件**

D.B. Strukov, G.S. Snider, D.R. Stewart, and R.S. Williams, "The missing memristor found," *Nature*, vol.453, pp. 80-83, 2008.

一、忆阻研究背景与意义

媒体给予忆阻高度评价

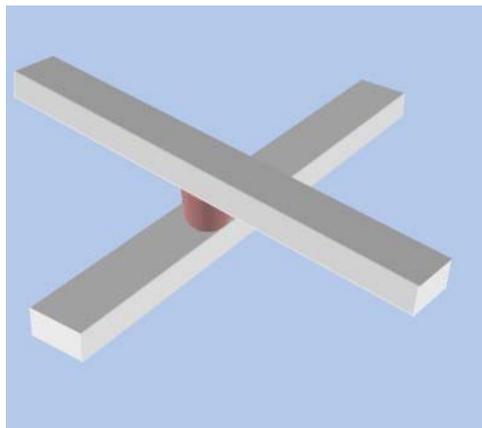


忆阻的发现足以媲美100年前发明的三极管
其任何一项产业化应用都可能带来新一轮的产业革命

一、忆阻研究背景与意义

物理器件实现

如何提高忆阻件的稳定性和重复性

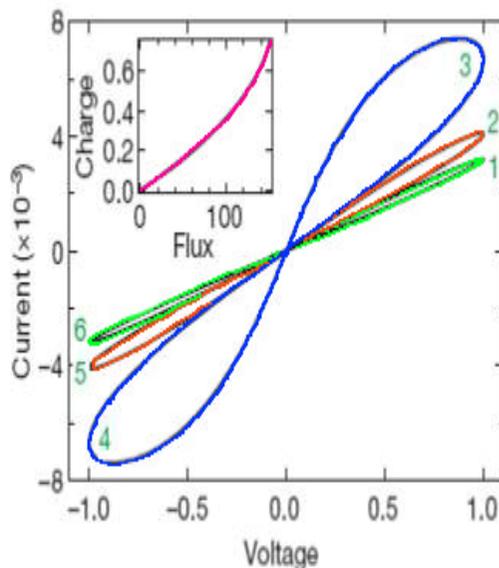


这方面的研究取决于忆阻材料和实验设备

给传统的控制理论提出挑战

忆阻模型及仿真

系统的角度：
用控制理论方法揭示忆阻的特性



忆阻系统：
非线性、切换、多值、
逻辑运算

仿真表明：
简单忆阻系统都有极其复杂的动力学行为特性

一、忆阻研究背景与意义

存储目标信息

二进制编码

A	1	1	1
B	1	1	0
C	1	0	1
D	1	0	0
E	0	1	0
F	0	1	1
G	0	0	0
H	0	0	1

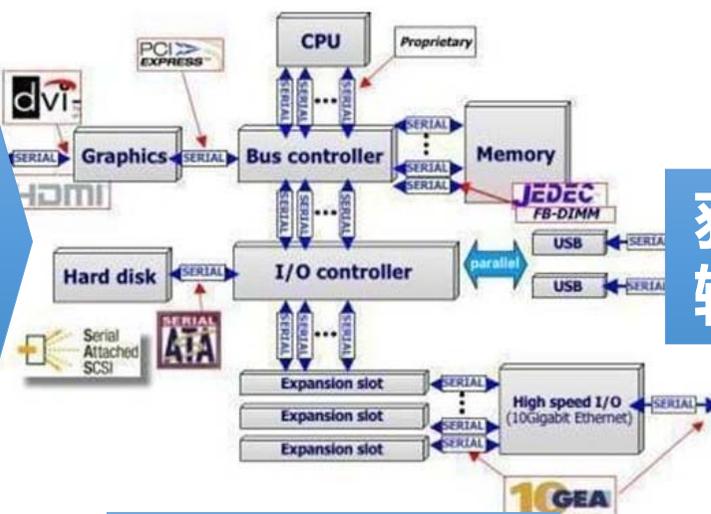
二进制编码
各种静态传输

获取目标信息

二进制编码

寻找需要获取信息的二进制编码，
通过二进制编码的映射关系

存储输入



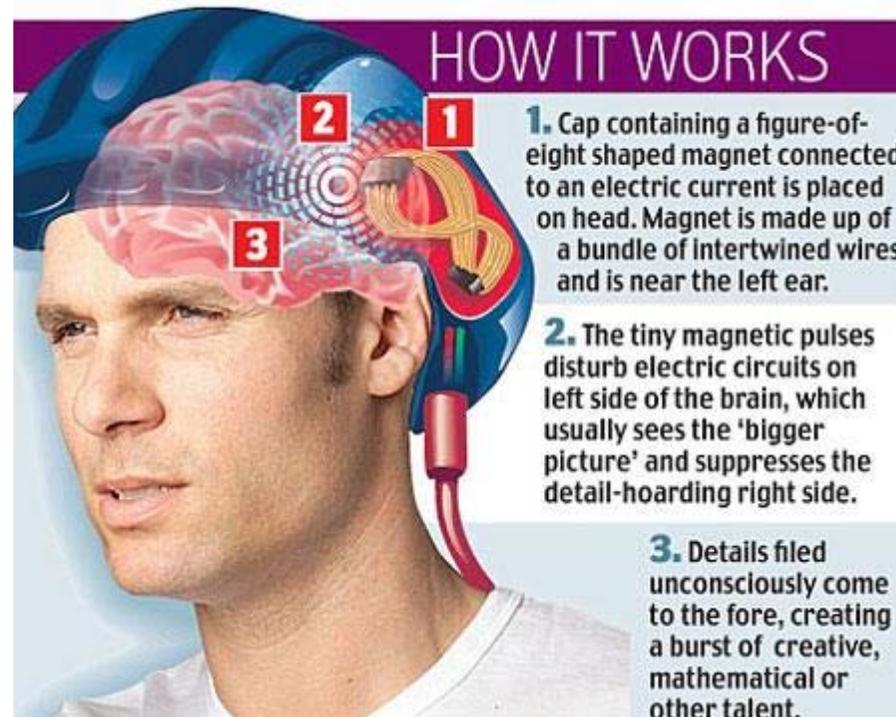
获取输出

A	1	1	1
B	1	1	0
C	1	0	1
D	1	0	0
E	0	1	0
F	0	1	1
G	0	0	0
H	0	0	1

数字存储系统

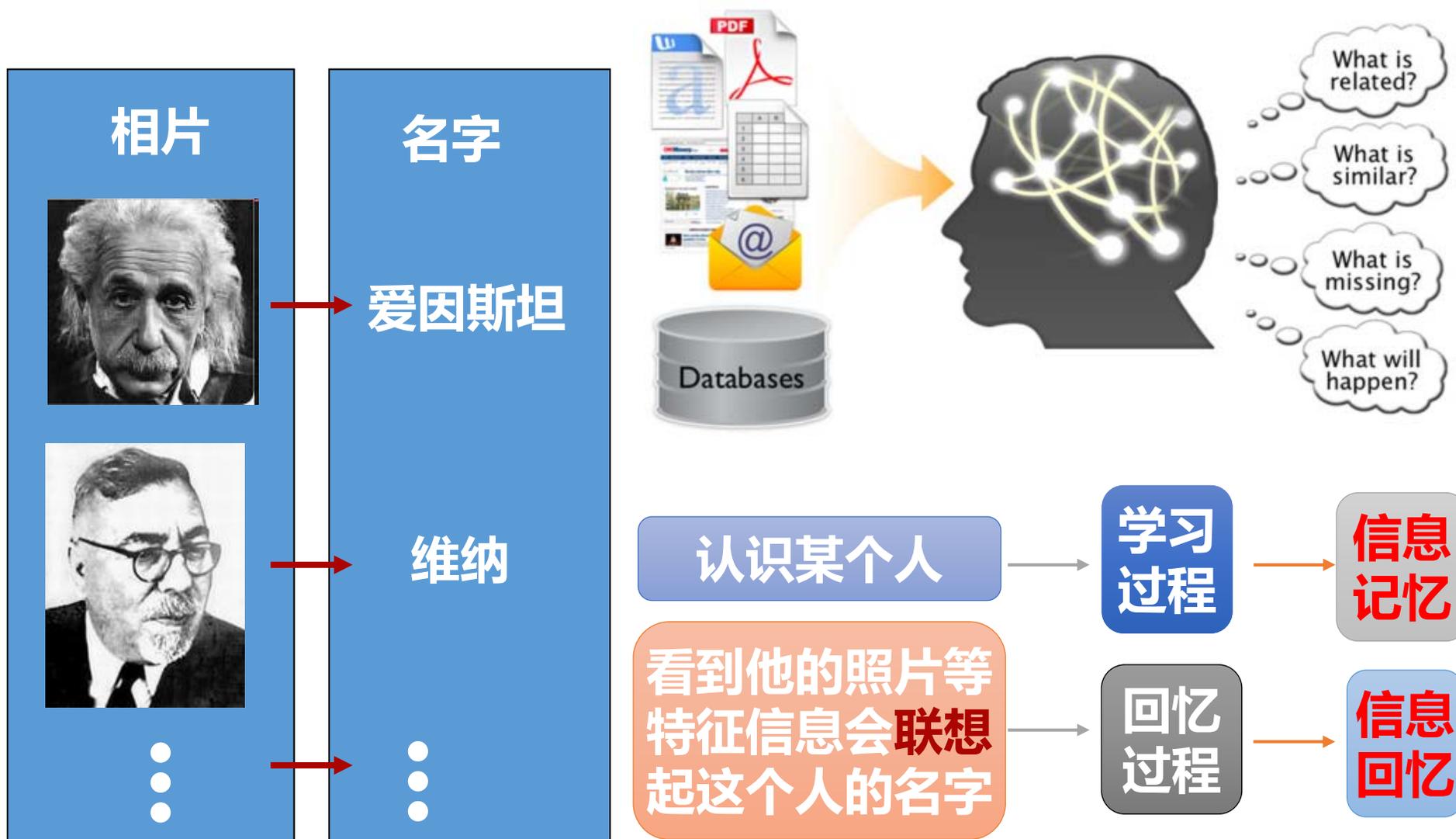
一、忆阻研究背景与意义

科学 researchers 开始
思考大脑是如何处
理和记忆信息的



一、忆阻研究背景与意义

学习和回忆是大脑智能的两个最重要的认知功能



一、忆阻研究背景与意义

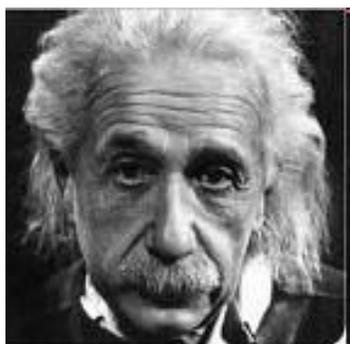
记忆目标信息

回忆目标信息

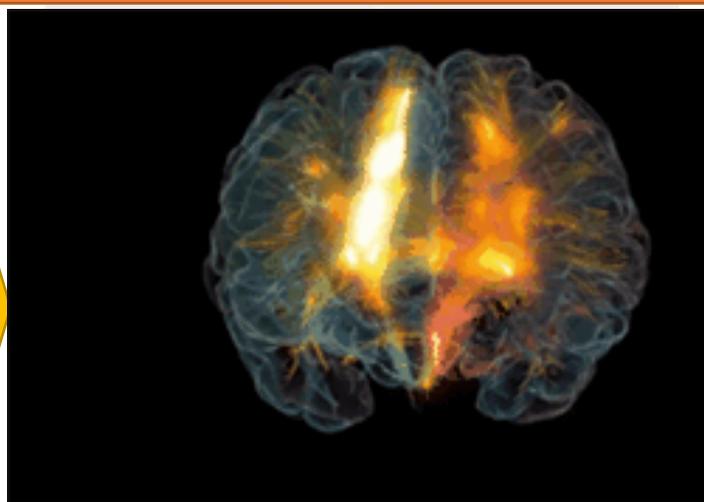
适当
编码

加利福尼亚大学旧金山分校的Neuroscape实验室拍到一段大脑记录的视频
不同颜色表示大脑中不同的电能频率以及能量移动的通路

适当
编码



学习
输入



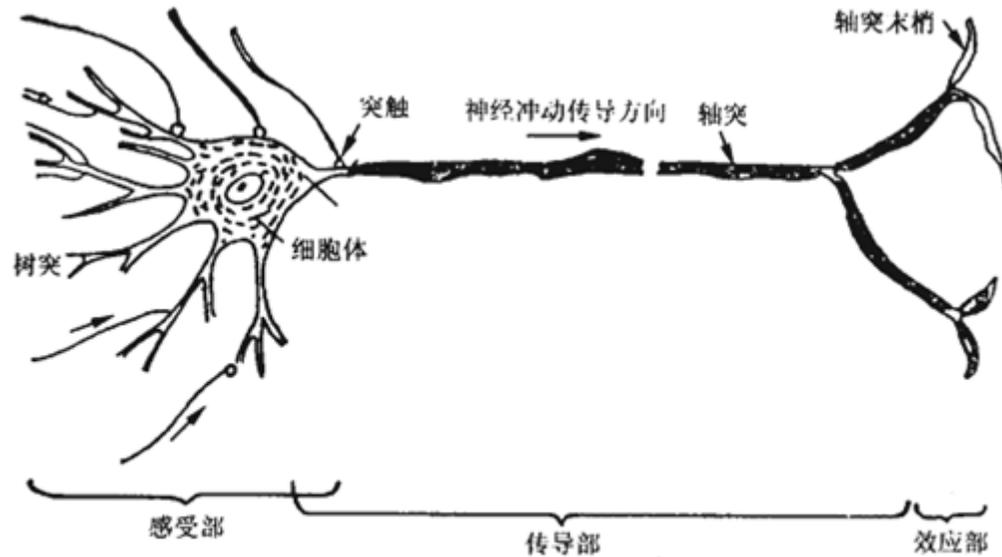
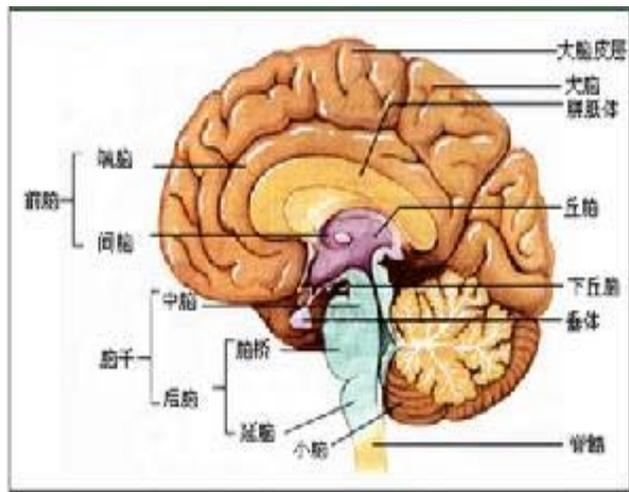
回忆
输出

爱因斯坦

大脑的学习与回忆功能由神经元的各种动力学响应来实现

一、忆阻研究背景与意义

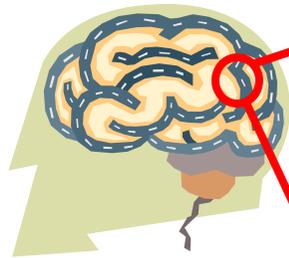
从神经生物解剖学的角度研究



神经元结构示意图

一、忆阻研究背景与意义

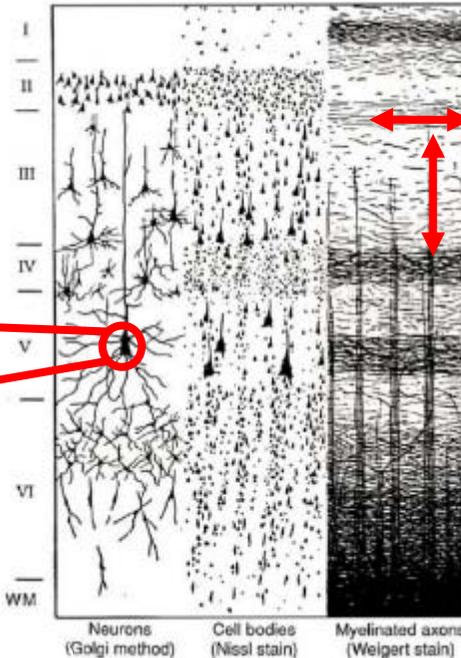
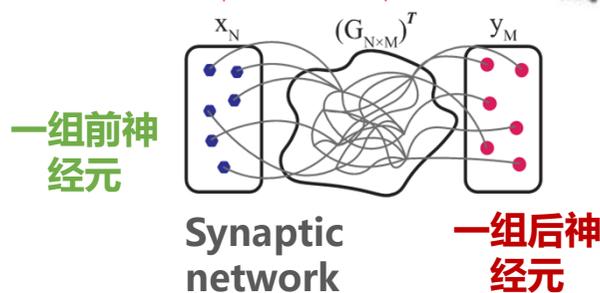
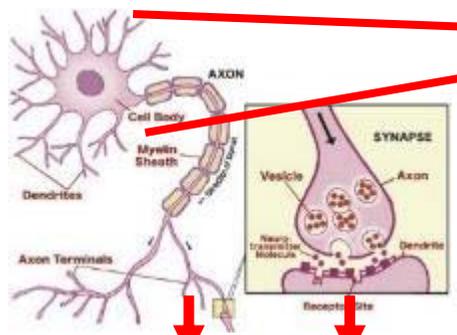
神经形态计算模拟大脑进行信息处理



大脑:
15-30B 神经元
4km/mm³
35w

神经元:
处理其他神经
元发出的信号

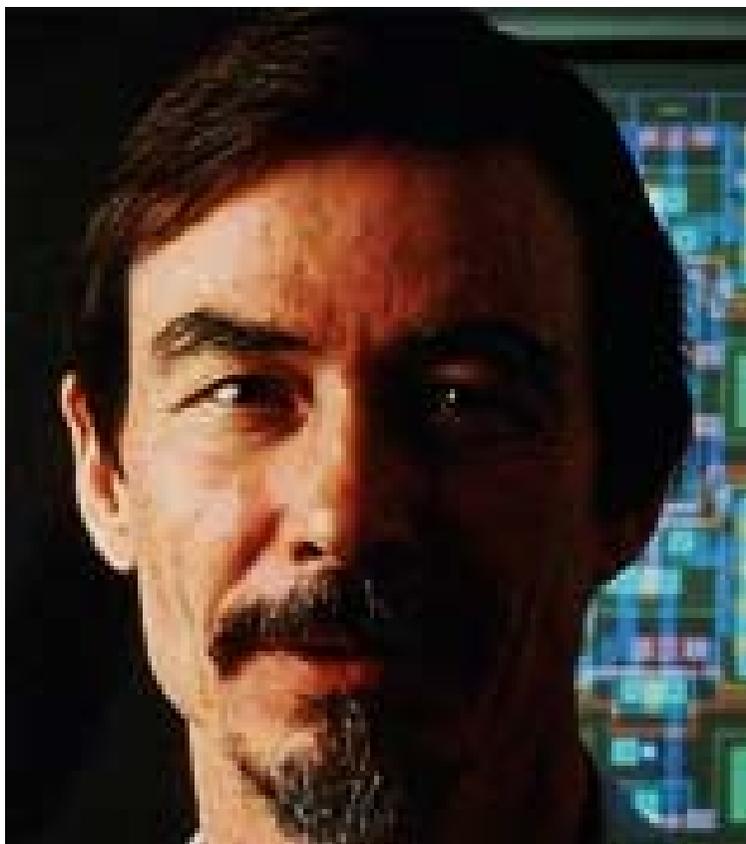
突触:
存储权值信号



大脑皮层:
6 层
信号在皮层内以
及皮层间传输

大脑包含:灰质(用于思考)
和白质(用于信号传输)

一、忆阻研究背景与意义



卡弗·安德烈斯·米德

Carver Andrew Mead

美国国家科学院院士

摩尔定律是他最早提出来的

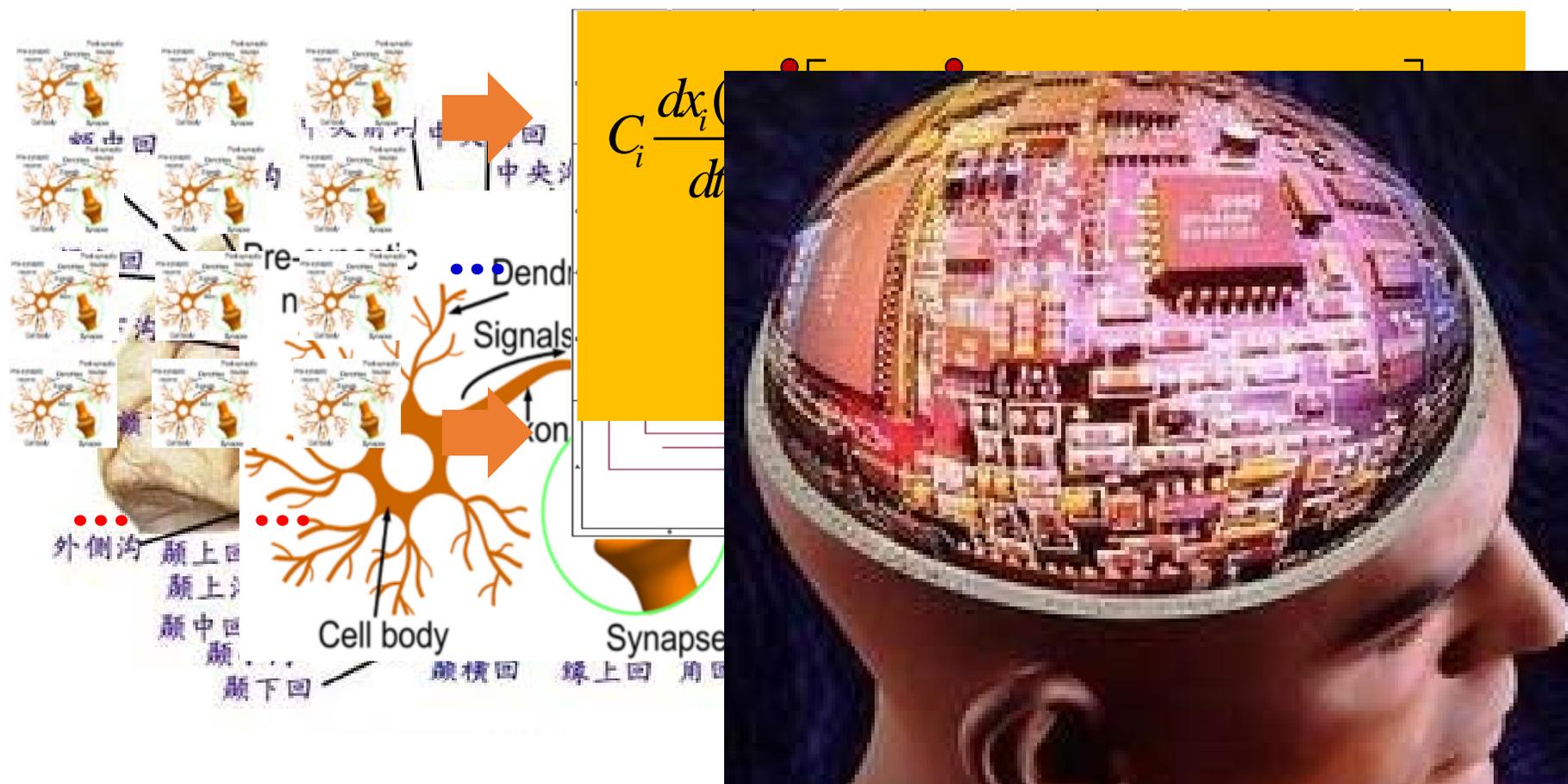
美国国家技术与创新奖

约翰·冯诺依曼奖

神经形态neuromorphic 是1989年 Carve Mead 首先提出来的

一、忆阻研究背景与意义

将忆阻作为神经计算机时代的“晶体管”，引入到人工神经网络电路的设计当中，以模仿生物突触传导神经递质的过程，实现对生物突触的逼真模拟，创造出真正的突触模拟器是值得深入研究的方向之一



提纲

01 忆阻研究背景与意义

02 基于忆阻的神经形态计算

03 忆阻系统的渐近行为分析

二、基于忆阻的神经形态计算

nature
nanotechnology

ARTICLES

PUBLISHED ONLINE: 16 MAY 2016 | DOI: 10.1038/NNANO.2016.70

Stochastic phase-change neurons

Tomas Tuma^{1*}, Angeliki Pantazi¹, Manuel Le Gallo^{1,2}, Abu Sebastian¹ and Evangelos Eleftheriou^{1*}

Artificial neuromorphic systems based on populations of spiking neurons are an indispensable tool in human brain and in constructing neuromimetic computational systems. To reach areal and power efficiency to those seen in biological systems, electroionics-based and phase-change-based memristive devices as nanoscale counterparts of synapses. However, progress on scalable realizations of neurons has been slow. Here, we show that chalcogenide-based phase-change materials can be used to create an artificial neuron where the membrane potential is represented by the phase configuration of the nanoscale phase-change device. Using the physics of reversible amorphous-to-crystal phase transitions, we show that the temporal integration of synaptic potentials can be achieved on a nanosecond timescale. Moreover, we show that this is inherently stochastic due to the melt-quench-induced reconfiguration of the atomic structure occurring when the neuron is reset. We demonstrate the operation of these phase-change neurons, and their populations, in the detection of temporal correlations in input signals and in sub-Nyquist representation of high-bandwidth signals.

2016年5月IBM制成了世界首例纳米随机相变神经元，紧接着



nature
materials

PUBLISHED ONLINE: 26 SEPTEMBER 2016

Memristors with diffusive dynamics as emulators for neuromorphic computing

Zhongrui Wang^{1†}, Saamil Joshi^{1†}, Sergey E. Savel'ev², Hao Jiang¹, Rivu Midya¹, Peng Lin¹, Miao Hu³, Ning Ge³, John Paul Strachan³, Zhiyong Li³, Qing Wu⁴, Mark Barnell⁴, Geng-Lin Li⁵, Huolin L. Xin⁶, R. Stanley Williams³, Qiangfei Xia¹ and J. Joshua Yang^{1*}

强大的人工智能
能优势的学者

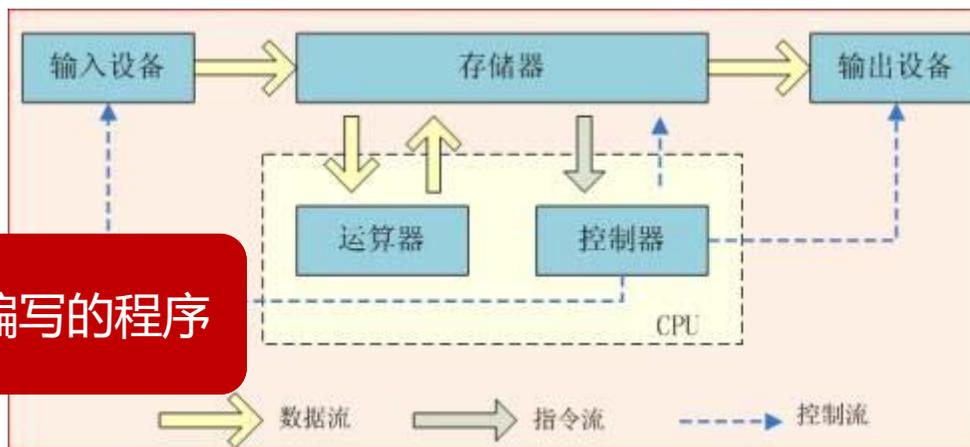
TrueNorth



二、基于忆阻的神经形态计算

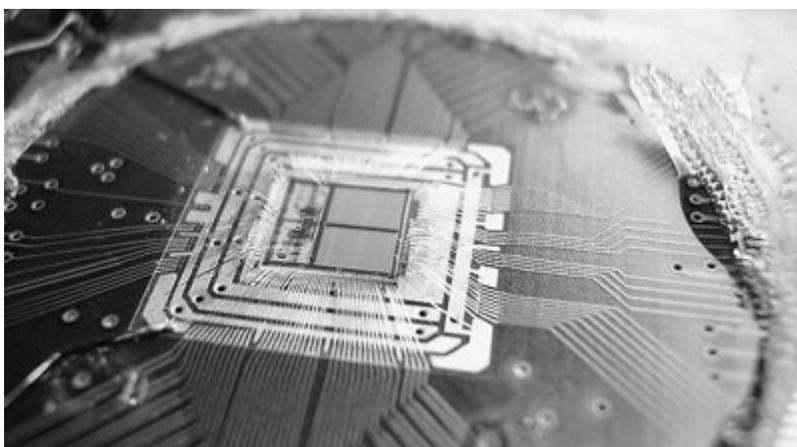
冯·诺依曼计算架构

适合处理数字，执行精确编写的程序



神经形态计算架构

受到人脑工作原理启发而设计的计算架构



- 并行分布式处理结构
- 自适应能力强
- 非线性映射能力
- 容错性和鲁棒性

二、基于忆阻的神经形态计算

忆阻器在神经形态计算系统中的优势

- ◆ 忆阻器是模拟元件，作为突触可以实现突触权值的连续更新
- ◆ 纳米级尺寸的忆阻器作为突触，可以实现超大集成密度的神经网络
- ◆ 忆阻器的阻值随输入磁通或电荷的变化而改变，使忆阻突触具有学习和记忆能力
- ◆ 忆阻器是无源器件且掉电后信息的非易失性使忆阻神经网络能耗更低
- ◆ 用忆阻交叉阵列结构构建的忆阻神经网络，融合了忆阻器与交叉阵列的优势，有更好的信息处理能力和更大的存储容量

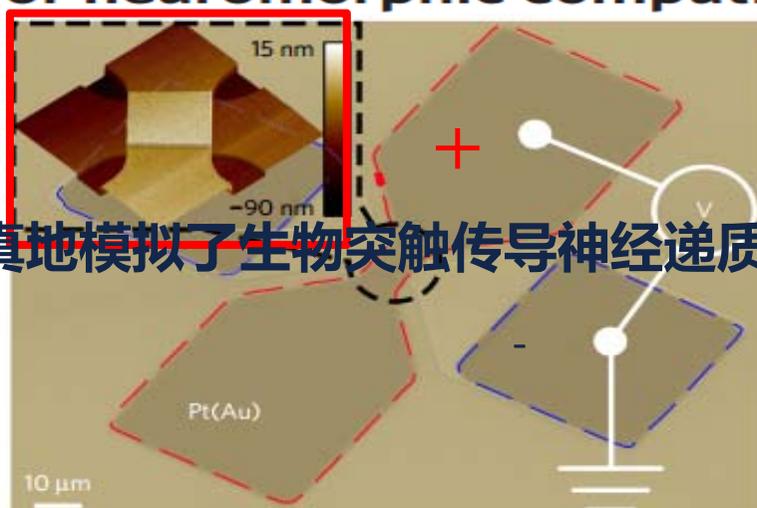
二、基于忆阻的神经形态计算

nature materials

ARTICLES

PUBLISHED ONLINE: 26 SEPTEMBER 2016 | DOI: 10.1038/NMAT4756

Memristors with diffusive dynamics as synaptic emulators for neuromorphic computing

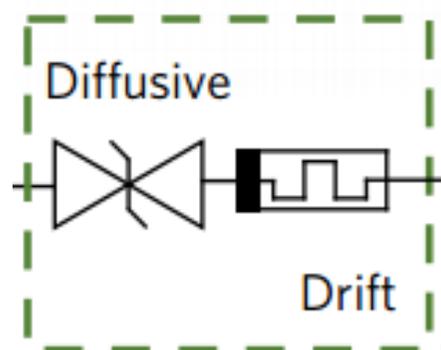


逼真地模拟了生物突触传导神经递质过程

具有

态平衡

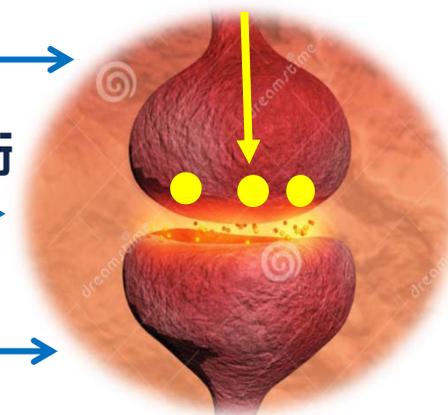
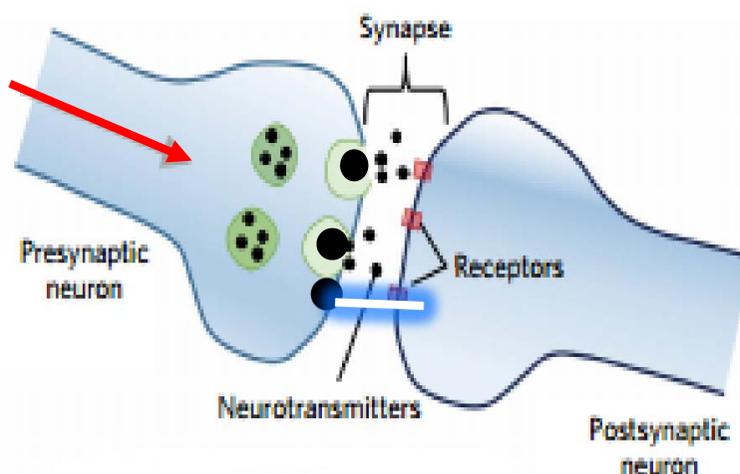
与



人工突触



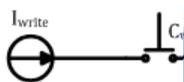
扩散型忆阻



生物突触

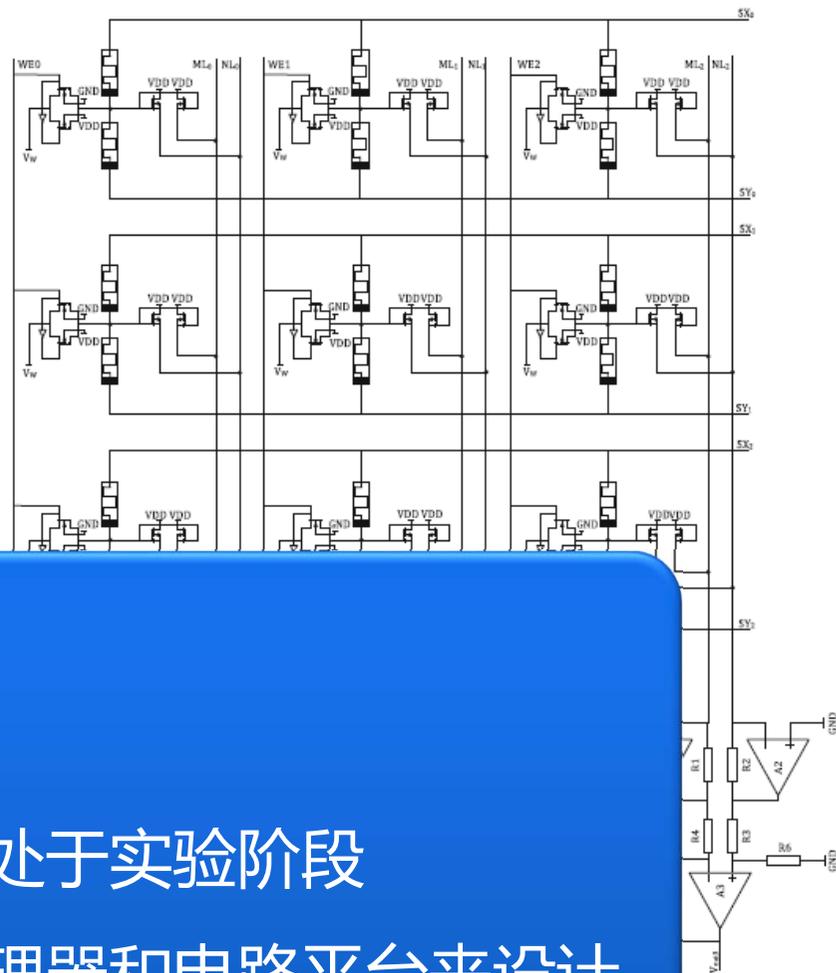
二、基于忆阻的神经形态计算

忆阻器在神经形态系统中主要是通过模拟突触功能使得神经电路具有学习记忆能力，并通过忆阻交叉阵列实现大规模并行处理结构



研究瓶颈

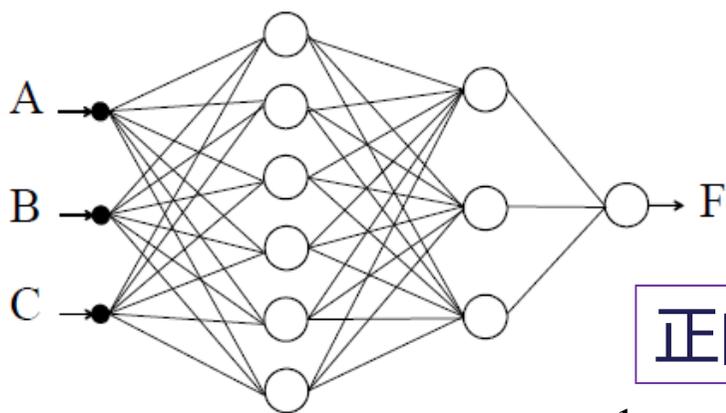
- 忆阻器的材料实现还处于实验阶段
- 需要通过借助外部处理器和电路平台来设计神经网络的算法实现神经网络的权值更新



二、基于忆阻的神经形态计算

忆阻交叉阵列实现反向传播算法

多层神经网络结构



$$\Delta w_{j,i} = \eta \times \delta_j \times \frac{1}{1 + DP_j^2} \times x_{j,i}$$

正向传播

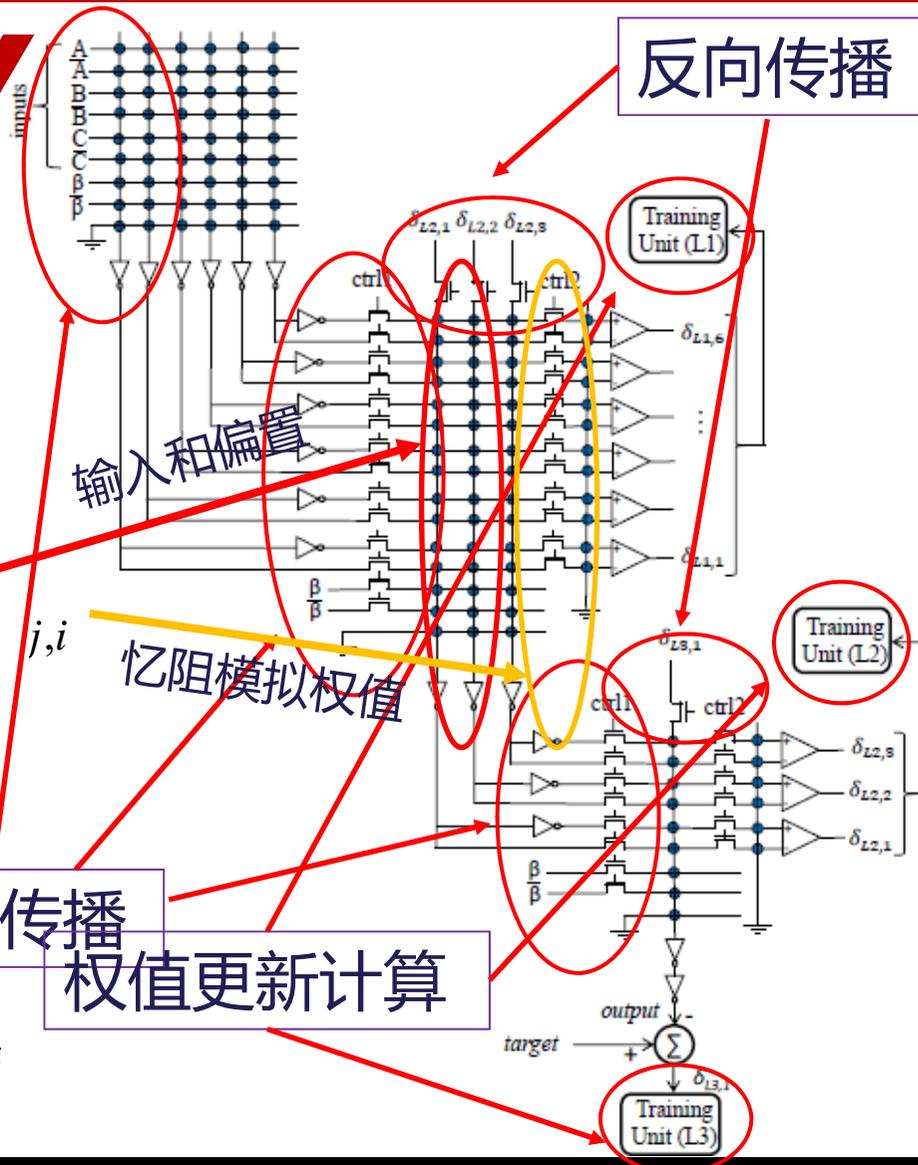
权值更新计算

反向传播

输入和偏置

忆阻模拟权值

j, i

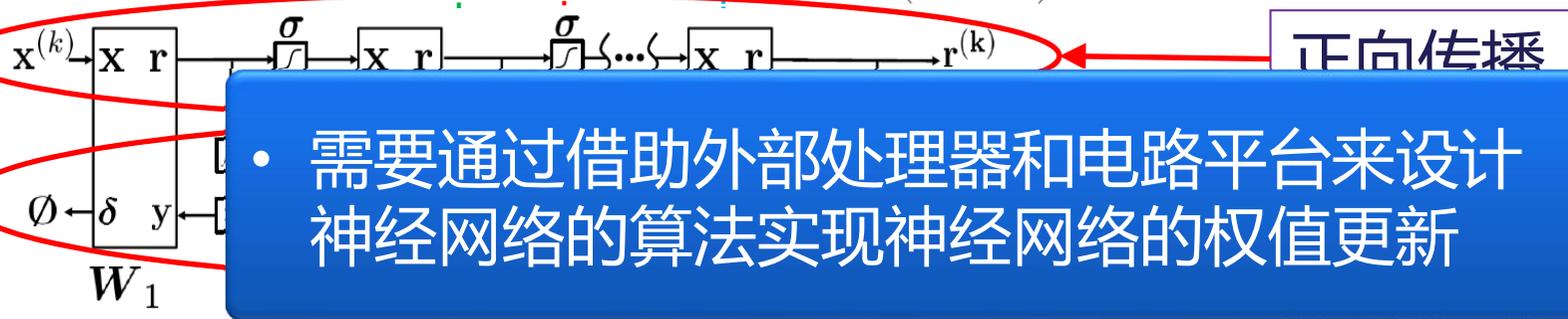
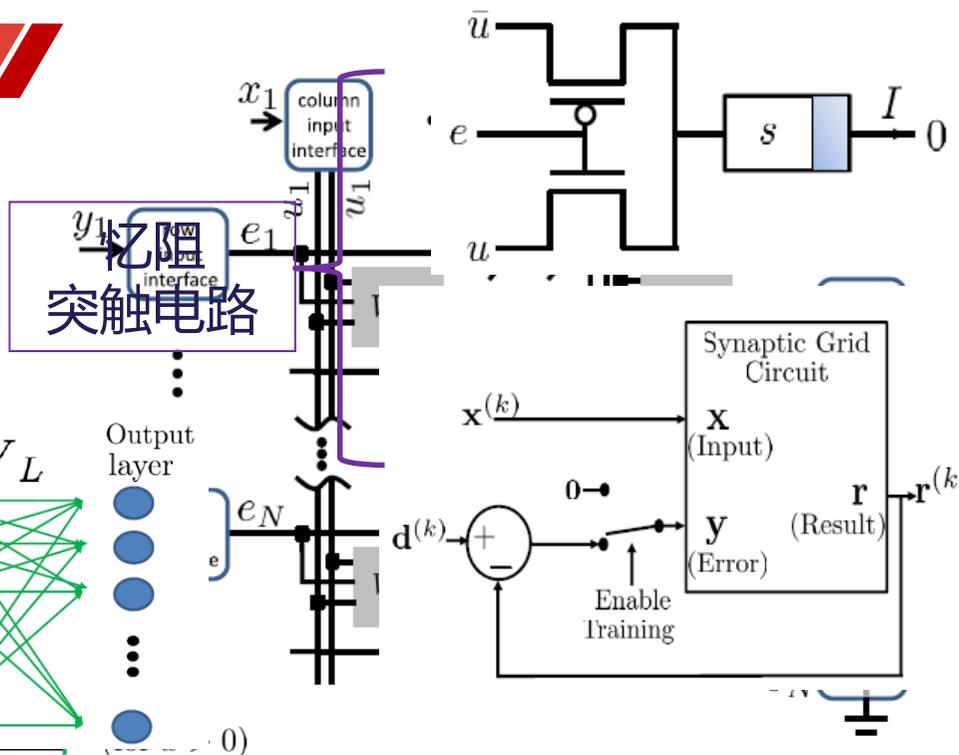
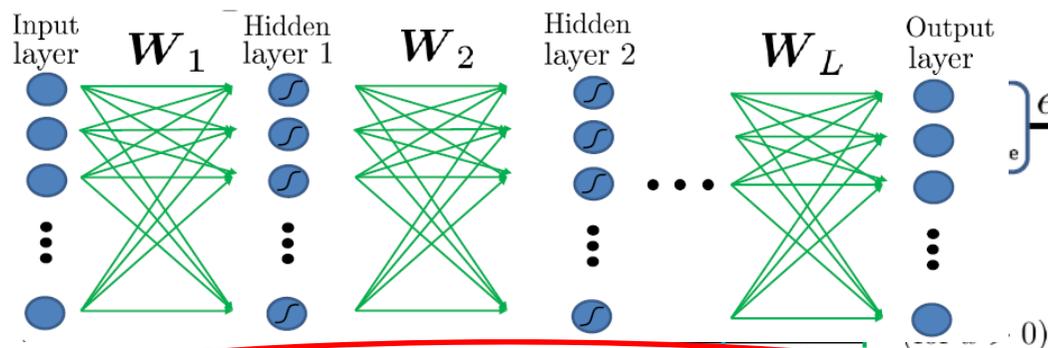


[1] R. Hasan and T. M. Taha, "Enabling Back Propagation Training of Memristor Crossbar Neuromorphic Processors," in IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN), 2014, pp. 21-28.

二、基于忆阻的神经形态计算

忆阻交叉阵列实现反向传播算法

多层神经网络结构



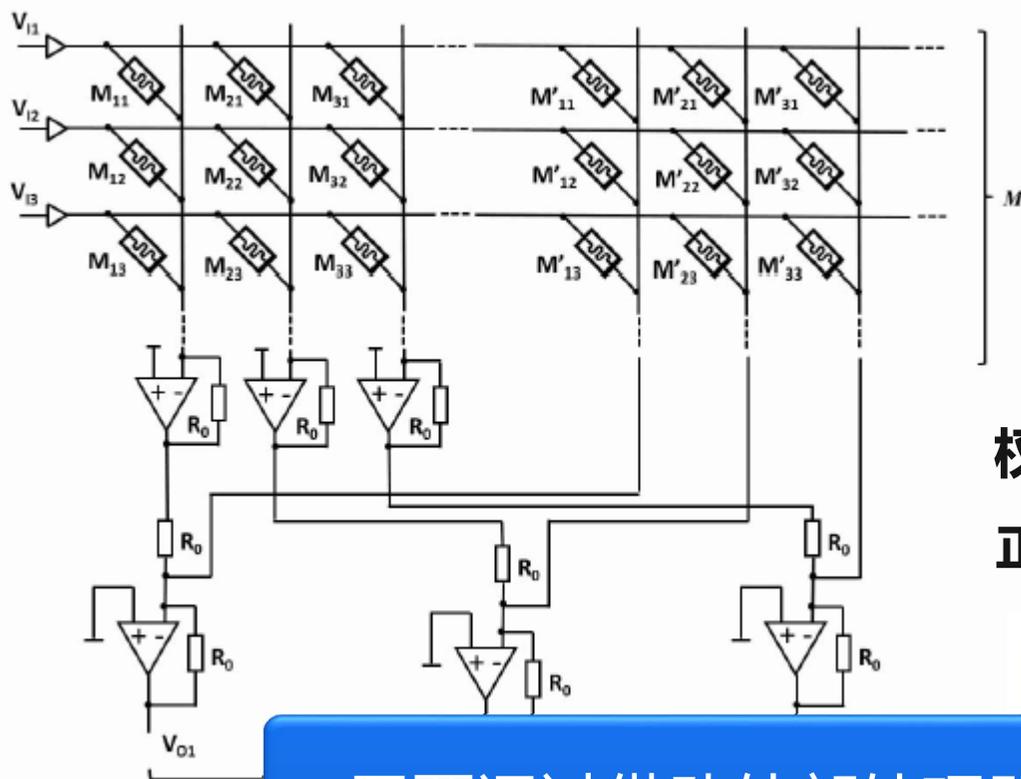
需要通过借助外部处理器和电路平台来设计神经网络的算法实现神经网络的权值更新

[2] D. Soudry, D. Di Castro, A. Gal, A. Kolodny, and S. Kvatinsky, "memristor-based multilayer neural networks with online gradient descent training," IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, vol. 26, pp. 2408-2421, 2015.

二、基于忆阻的神经形态计算

忆阻交叉阵列实现反向传播算法

电路设计正向学习



$$V_{Oj} = - \sum_{i=1}^M \left(-\frac{R_0}{R_{ji}} \times V_{Ii} \times \frac{R_0}{R_0} + \frac{R_0}{R'_{ji}} \times V_{Ii} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^M R_0 \times (G_{ji} - G'_{ji}) \times V_{Ii}. \quad (8)$$

$$W_{ji} = R_0 \times (G_{ji} - G'_{ji}). \quad (9)$$

权值更新约束条件

正权值

负权值

$$\begin{cases} V > V_{pro1} > V_{pro2} \geq 0 \\ V_{pro2} < V_{T+} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V' < V'_{pro1} < V'_{pro2} \leq 0 \\ V'_{pro2} > V_{T-} \end{cases}$$

$$V'_{pro1} < V_{T+}$$

$$V'_{pro1} > V_{T-}$$

- 需要通过借助外部处理器和电路平台来设计神经网络的算法实现神经网络的权值更新

[3] Yang Zhang, Xiaoping Wang, Yi Li, Eby G. Friedman, " Memristive model for synaptic circuits ," IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, 2016. DOI: 10.1109/TCSII.2016.2605069

二、基于忆阻的神经形态计算

基于忆阻交叉阵列的卷积运算

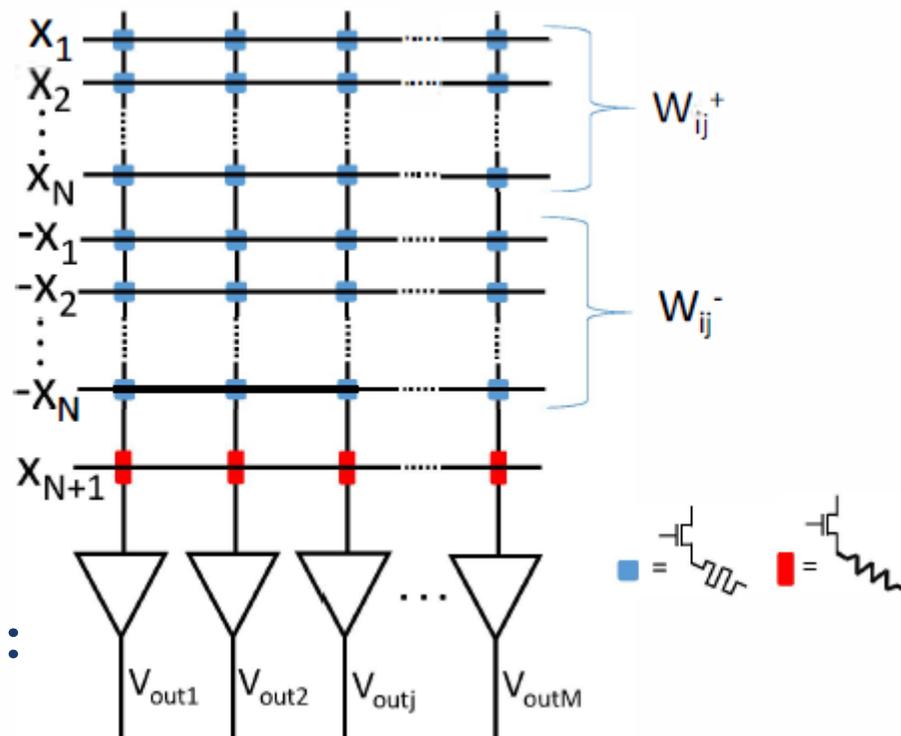
C. Yakopcic等人[4]，把忆阻交叉阵列能够实现的矩阵点积运算应用到卷积运算，虽然构建了一个卷积网络，但是忆阻的阻值都是提前用软件计算好的

$$V_j = \frac{\sum_{i=1}^N x_i W_{ij}}{\sum_{i=1}^N W_{ij}}$$

其中

$$W_{ij} = W_{ij}^+ - W_{ij}^-$$

据此设计的电路：



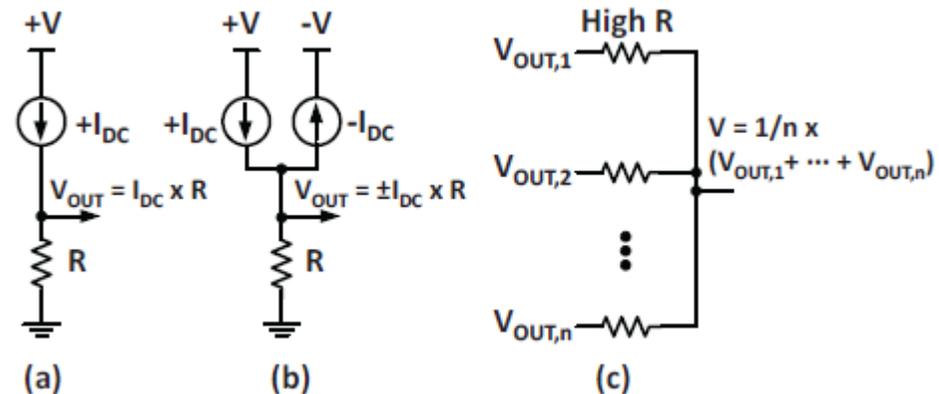
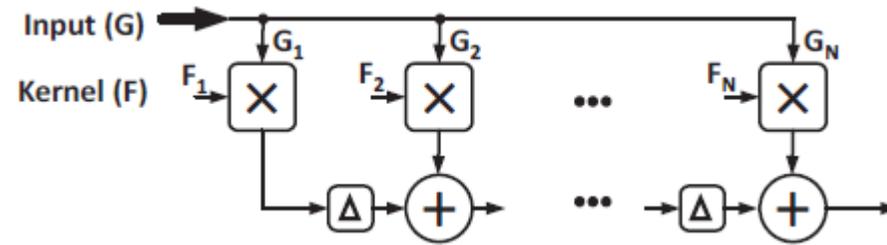
[4] Y. Shim, A. Sengupta, K. Roy, "Low-power approximate convolution computing unit with domain-wall motion based 'spin-memristor' for image processing applications," in Proceeding of Design Automation Conference (ACM), 2016.

二、基于忆阻的神经形态计算

基于忆阻交叉阵列的卷积运算

Y. Shim等人[5]提出了一个低功耗的卷积运算电路。把卷积核作为输入，忆阻阻值则代表图像像素强度

其中乘法和点积等操作是用忆阻电路实现的



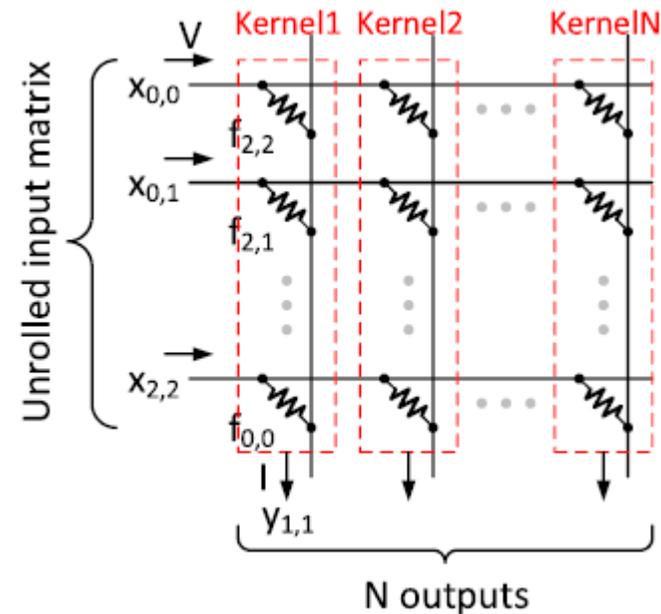
[5] C. Yakopcic, R. Hasan, T. M. Taha, "Memristor based neuromorphic circuit for ex-situ training of multi-layer neural network algorithms," in Proceeding of IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN), pp. 1-7, 2015.

二、基于忆阻的神经形态计算

基于忆阻交叉阵列的卷积运算

现在已有用忆阻做卷积的方法，如L. Gao等人[6]，用实验证明忆阻能够实现卷积运算

把卷积核从二维变换到一维，可以并行进行多个卷积操作，与[5]不同的是，忆阻值代表卷积核的权值，输入则是图像像素



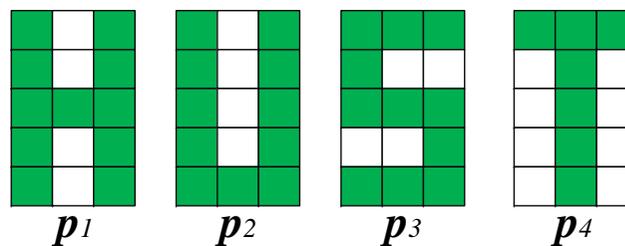
[6] L. Gao, P. Y. Chen, and S. Yu, "Demonstration of convolution kernel operation on resistive cross-point array," IEEE Electron Device Letters, vol. 37, no. 7, pp. 870-873, 2016.

二、基于忆阻的神经形态计算

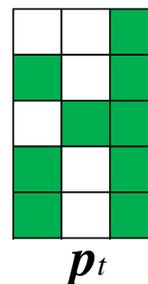
模式识别中的应用

15输入-4神经元结构

存储的四个模式



用于检测模式识别功能的输入向量



输出层节点的电压

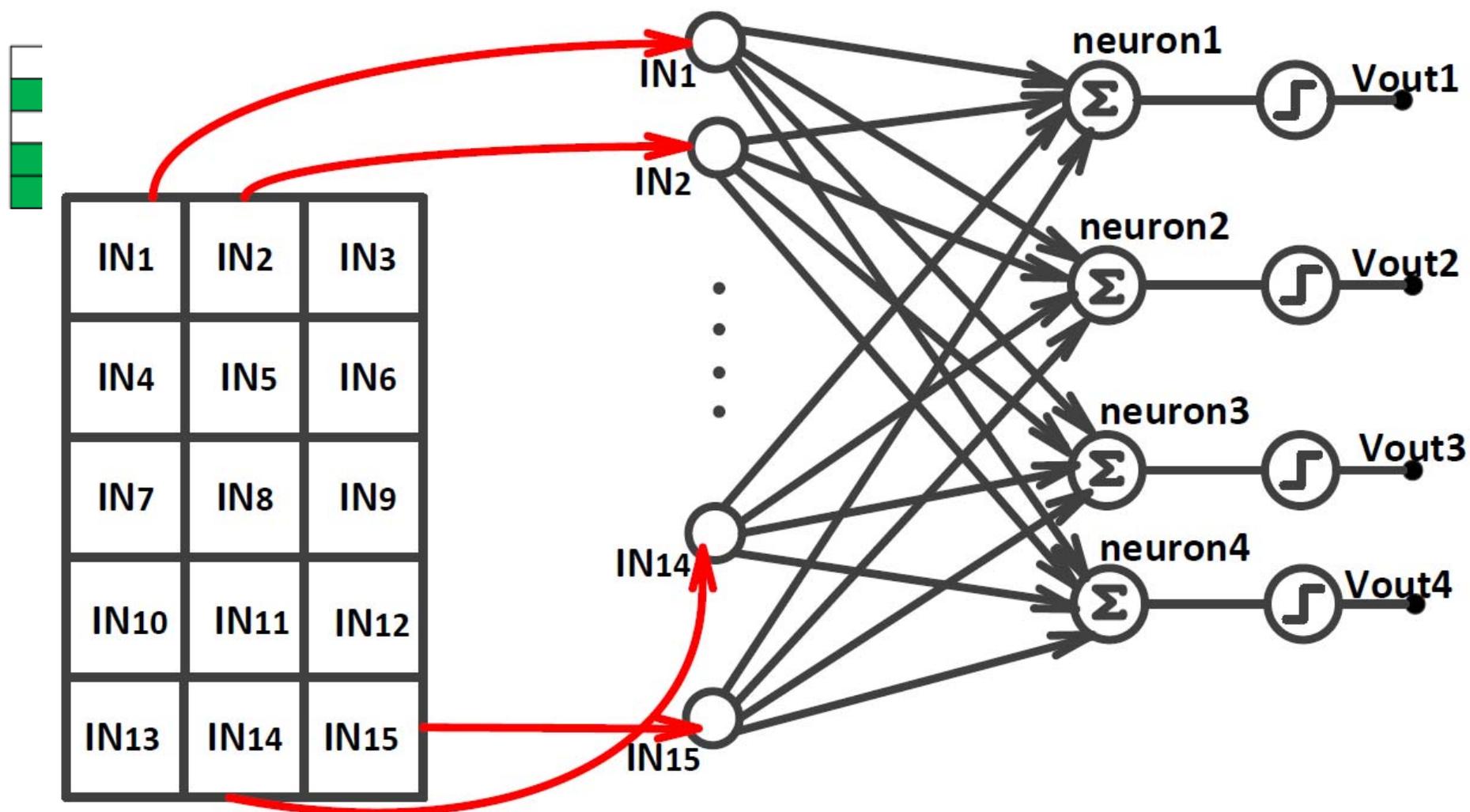
$$a = \begin{pmatrix} v_H \\ v_L \\ v_L \\ v_L \end{pmatrix}$$

模式识别结果：

神经元1竞争取胜
输入向量属于“H”模式

二、基于忆阻的神经形态计算

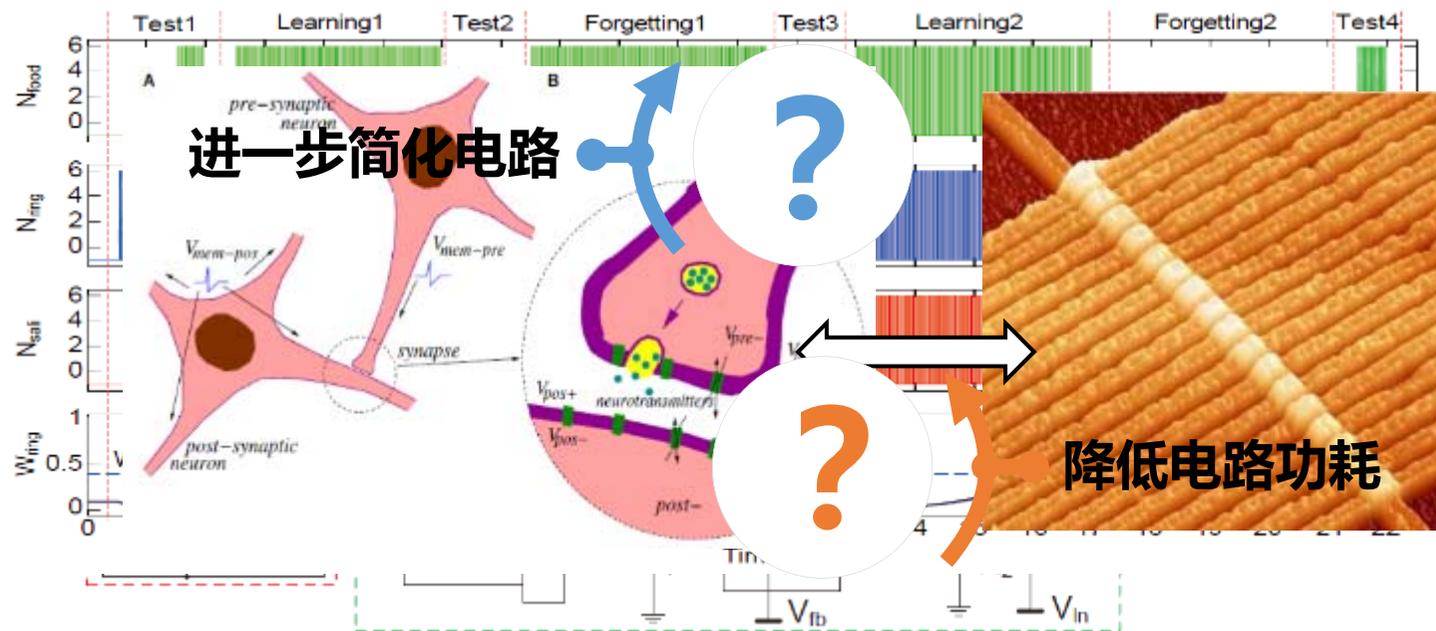
模式识别中的应用



二、基于忆阻的神经形态计算

联想记忆中的应用

构建基于忆阻的神经网络系统，模拟巴甫洛夫条件反射实验
用忆阻电路实现学习遗忘功能



[7] Xiaoyang Liu, Zhigang Zeng, Shiping Wen, "Implementation of memristive neural network with full-function Pavlov associative memory," IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, Vol. 63, No. 9, pp. 1454-1463, 2016.

提纲

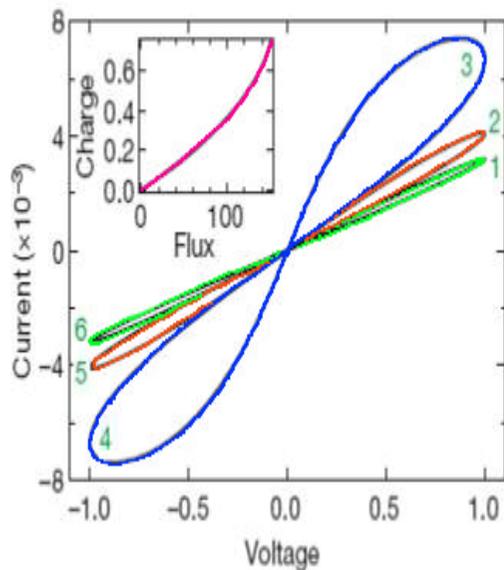
01 忆阻研究背景与意义

02 基于忆阻的神经形态计算

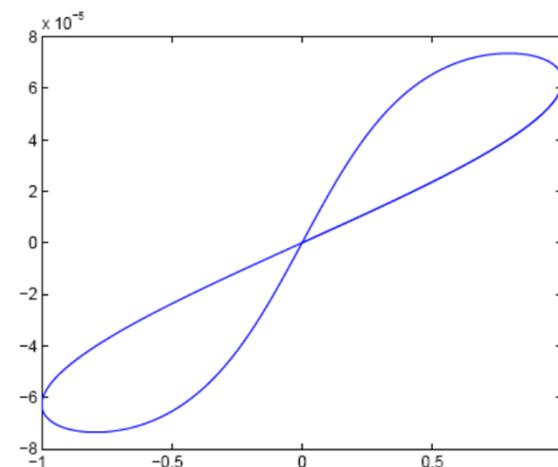
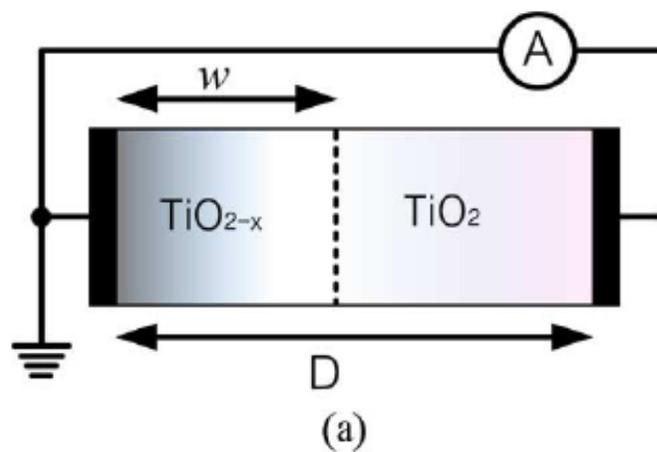
03 忆阻系统的渐近行为分析

三、忆阻系统的渐近行为分析

忆阻特性分析



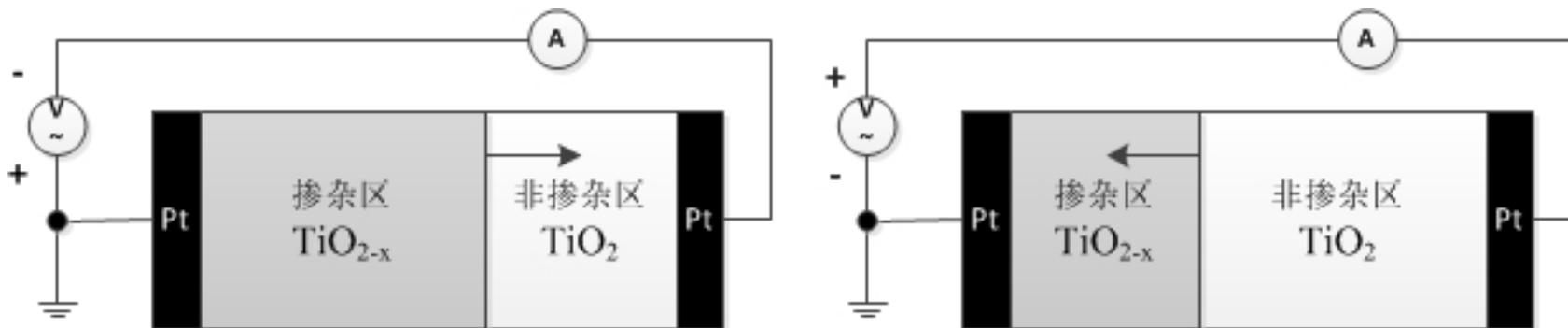
惠普固体忆阻模型



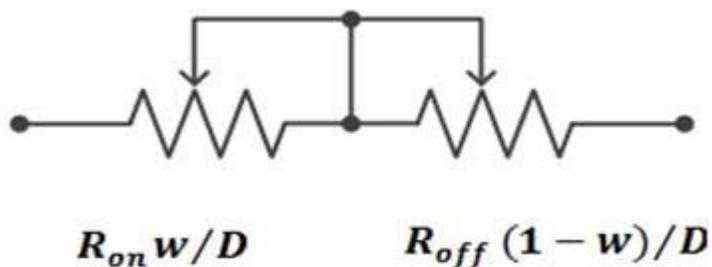
三、忆阻系统的渐近行为分析

忆阻特性分析

HP的TiO₂忆阻是一种薄膜忆阻模型



忆阻外加正反向电压掺杂区边界的移动情况



忆阻等效模型

w 为忆阻掺杂的宽度， D 为忆阻的长度，定义状态变量 $x(t) = \frac{w}{D}$ 。

R_{on} 为忆阻全部掺杂的电阻值；
 R_{off} 为忆阻全部未掺杂的电阻值。

三、忆阻系统的渐近行为分析

忆阻特性分析

$$v(t) = \left(R_{on} x(t) + R_{off} (1 - x(t)) \right) i(t) \quad (1)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu_v \frac{R_{on}}{D^2} i(t) \quad (2)$$

电阻 R , $v = R \times i$

$$\frac{dv}{di} = R, \quad R \text{ 为常数}$$

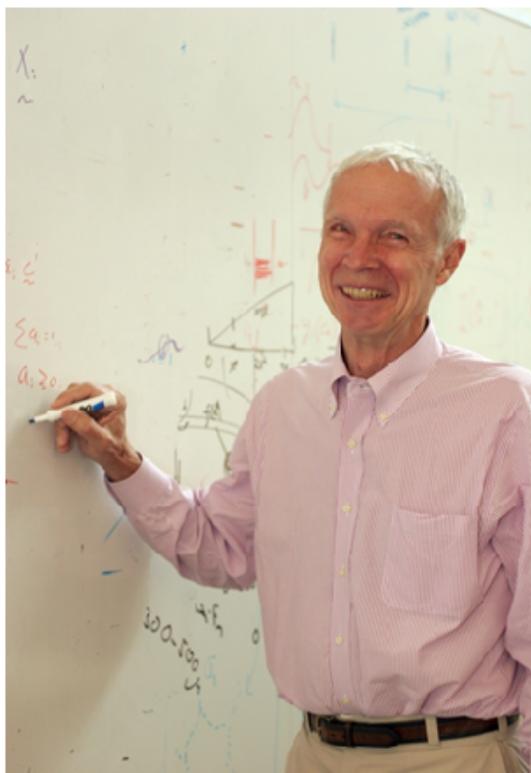
$$M = \left(R_{on} x(t) + R_{off} (1 - x(t)) \right)$$

忆阻 M , $v = M \times i$

$$\frac{dv}{di} \neq M$$

三、忆阻系统的渐近行为分析

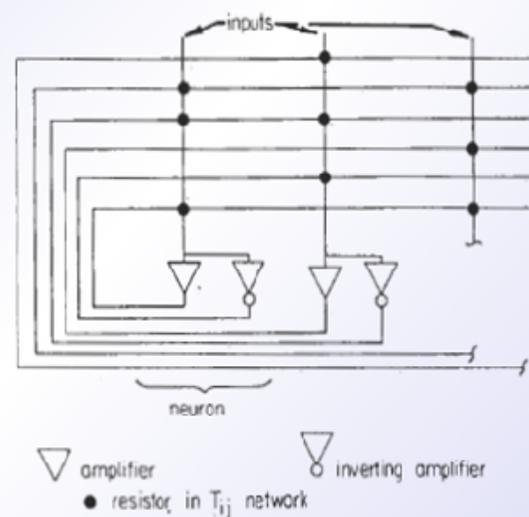
受Hopfield在1982年的开创性工作所激发



1933-

美国科学院院士

$$C_i \frac{du_i}{dt} = -\frac{u_i}{R_i} + \sum_j W_{ij} v_j + I_i$$
$$v_i = g_i(u_i)$$



[8] J.J. Hopfield, "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities," *Proc. of National Academy of Sciences*, vol. 79, pp. 2554-2558, 1982.

三、忆阻系统的渐近行为分析

Hopfield神经网络中与电容并联的电阻换为忆阻时的情形

196

S. Wen et al. / Neural Networks 48 (2013) 195–203

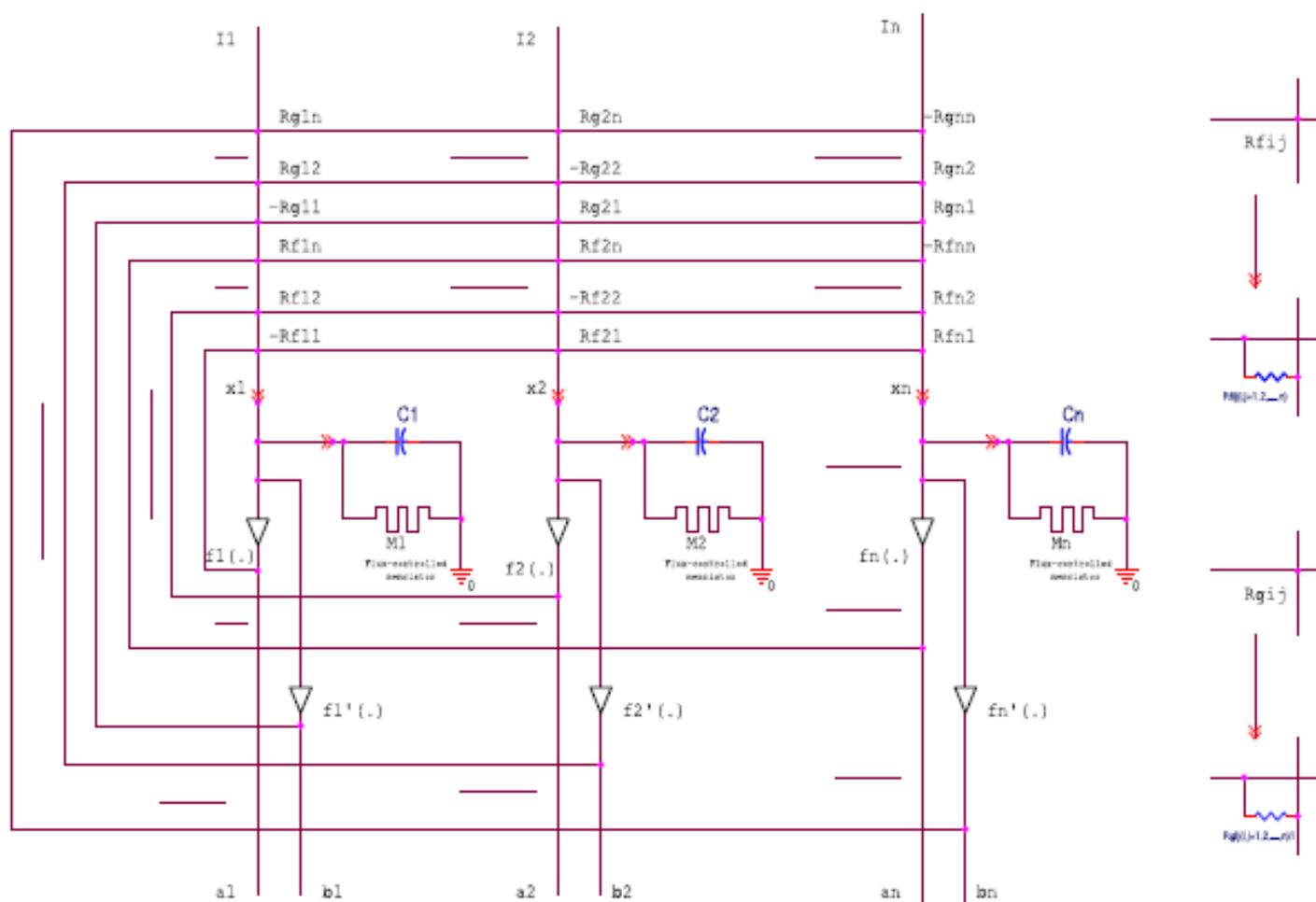


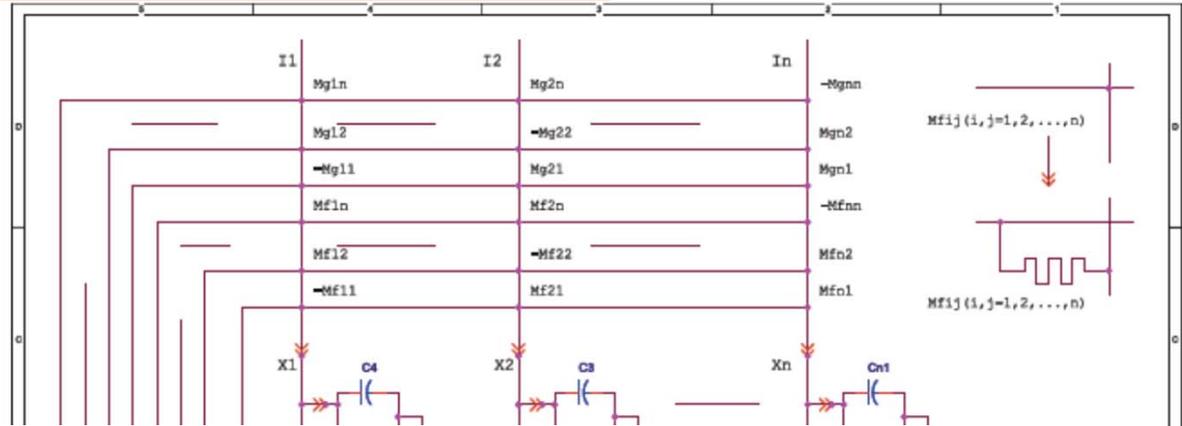
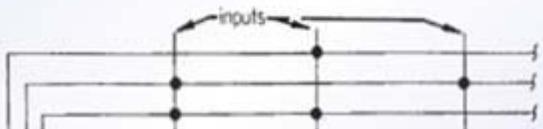
Fig. 1. Circuit of memristor-based recurrent network, where $x_i(\cdot)$ is the state of the i -th subsystem, $f_j(\cdot)$ is the amplifier, R_{ij} is the connection resistor between the amplifier $f_j(\cdot)$ and state $x_i(\cdot)$, M_i and C_i are the memristor and capacitor, I_i is the external input, a_i, b_i are the outputs, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

三、忆阻系统的渐近行为分析

设计了基于忆阻的回归神经网络

$$C_i \frac{du_i}{dt} = -\frac{u_i}{R_i} + \sum_j W_{ij} v_j + I_i$$

$$v_i = g_i(u_i)$$



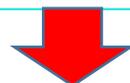
$$\dot{x}_i(t) = -\frac{1}{C_i} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{R_{ij}} + \frac{1}{F_{ij}} \right) \times \text{sgn}_{ij} + \frac{1}{R_i} \right] x_i(t) + \frac{1}{C_i} \sum_{j=1}^n \frac{f_j(x_j(t))}{R_{ij}} \times \text{sgn}_{ij}$$

$$+ \frac{1}{C_i} \sum_{j=1}^n \frac{g_j(x_j(t-\tau(t)))}{F_{ij}} \times \text{sgn}_{ij} + \frac{I_i}{C_i}, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

- [9] Shiping Wen, Zhigang Zeng, Tingwen Huang. Exponential lag adaptive synchronization of memristive neural networks and applications in Pseudo-random generators, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 22, No. 6, pp. 1704-1713, 2014.
- [10] Shiping Wen, Gang Bao, Zhigang Zeng, Yiran Chen, Tingwen Huang. Global exponential synchronization of memristor-based recurrent networks with time-varying delays. Neural Networks, Vol. 48, pp. 195-203, Dec. 2013

三、忆阻系统的渐近行为分析

$$\dot{x}_i(t) = -\frac{1}{C_i} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{R_{ij}} + \frac{1}{F_{ij}} \right) \times \text{sgn}_{ij} + \frac{1}{R_i} \right] x_i(t) + \frac{1}{C_i} \sum_{j=1}^n \frac{f_j(x_j(t))}{R_{ij}} \times \text{sgn}_{ij} + \frac{1}{C_i} \sum_{j=1}^n \frac{g_j(x_j(t-\tau(t)))}{F_{ij}} \times \text{sgn}_{ij} + \frac{I_i}{C_i}, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$



$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t, x(t)) f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t, x(t - \tau_{ij}(t))) g_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) + I_i \quad (4)$$

$$a_{ij}(t, x(t)) = \begin{cases} \hat{a}_{ij}(t) & h_j(x(t)) > T \\ \tilde{a}_{ij}(t) & h_j(x(t)) < T \end{cases}$$

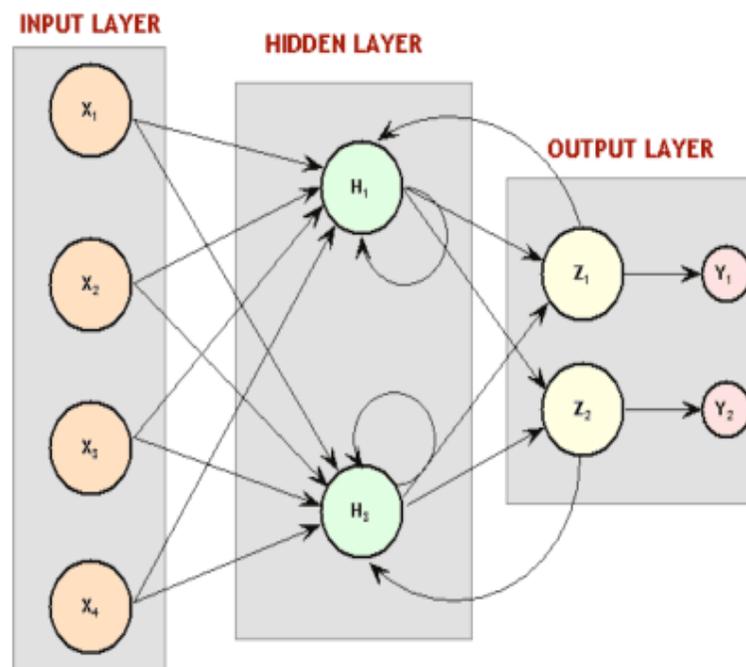
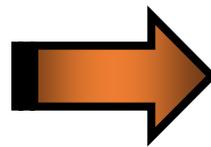
$$b_{ij}(t, x(t)) = \begin{cases} \hat{b}_{ij}(t) & h_j(x(t)) > T \\ \tilde{b}_{ij}(t) & h_j(x(t)) < T \end{cases}$$

$h_j(x(t))$ 是阈值函数

三、忆阻系统的渐近行为分析

实际工程中经常遇到求解非线性方程组的问题

$$f(x) = 0$$



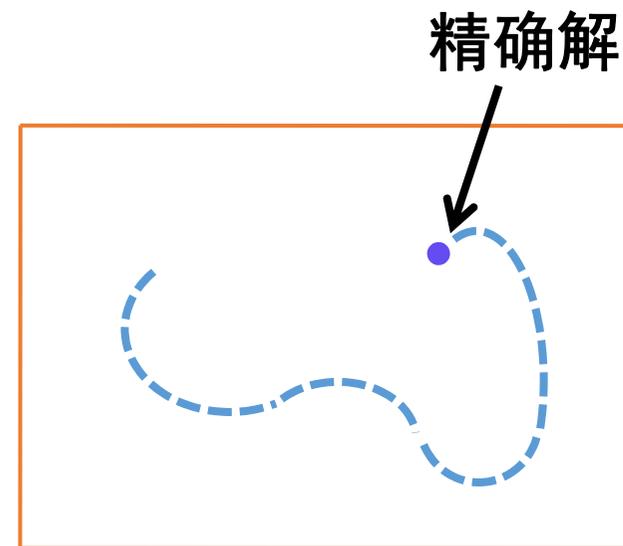
三、忆阻系统的渐近行为分析

实际工程中经常遇到求解非线性方程组的问题

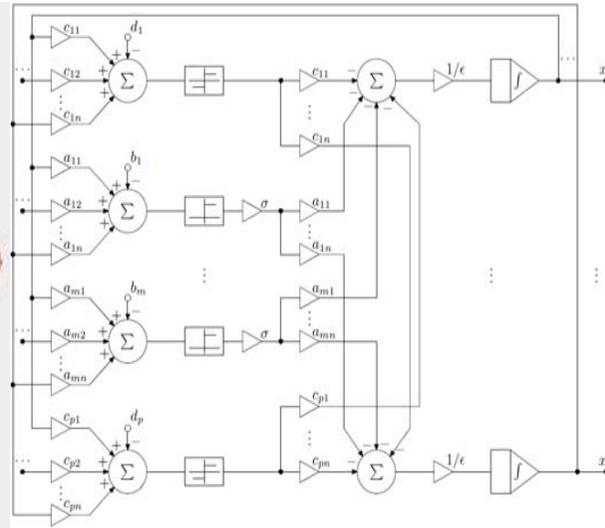
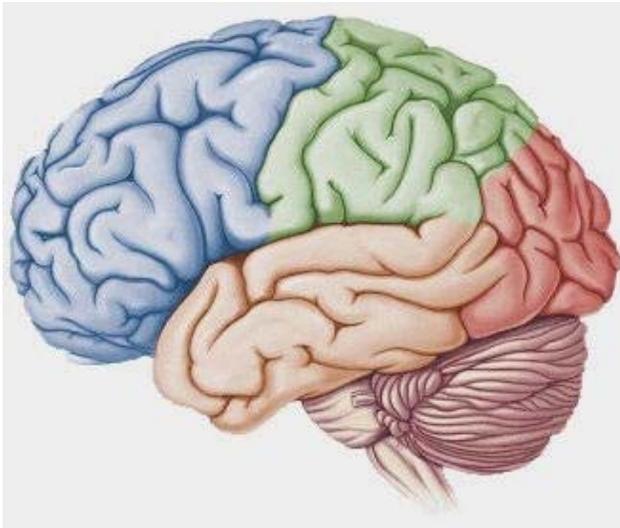
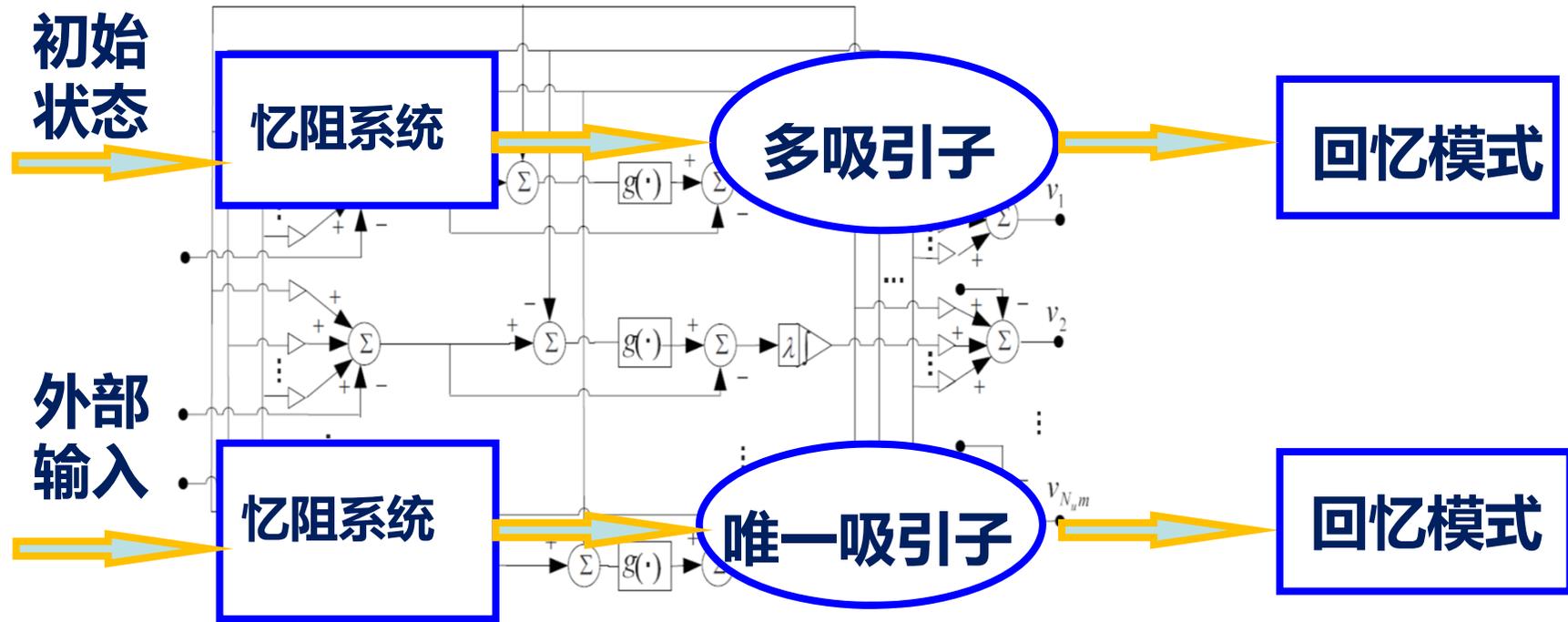
$$f(x) = 0$$

存在函数 $\bar{f}(x)$ 使得, 若 $\bar{f}(x) = 0$ 则 $f(x) = 0$

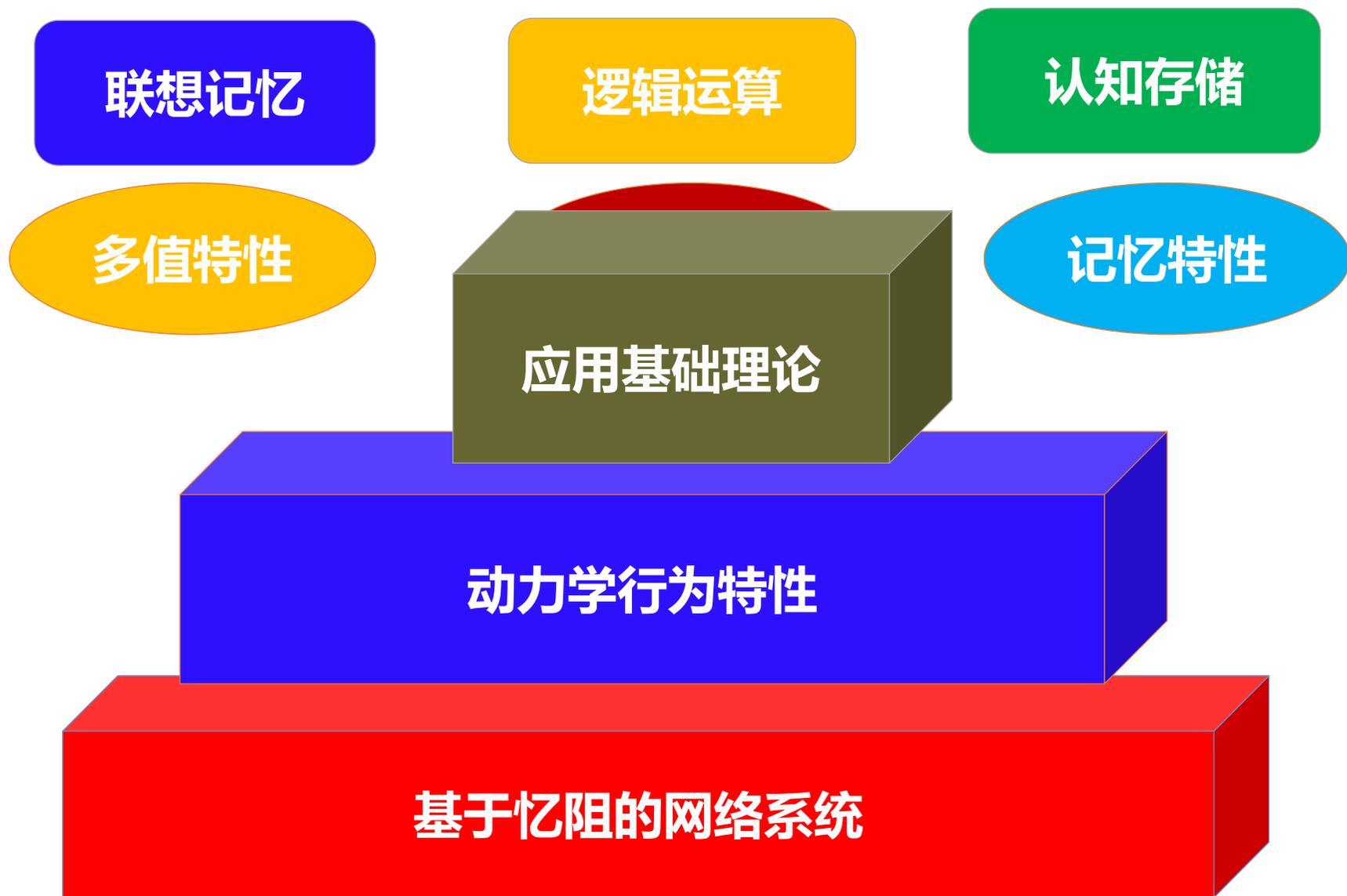
$$\frac{dx(t)}{dt} = \bar{f}(x(t))$$



三、忆阻系统的渐近行为分析



三、忆阻系统的渐近行为分析



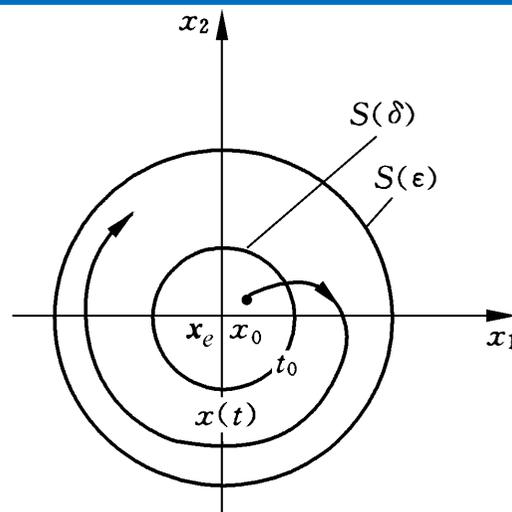
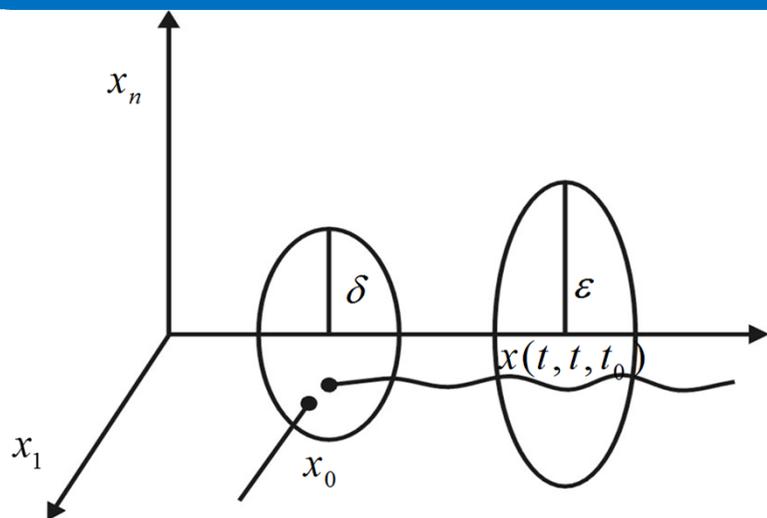
三、忆阻系统的渐近行为分析

因为一般的复杂动力系统

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (5)$$

的解析解较难求得，人们转而分析非线性系统的定性行为，即分析系统在无限时刻的趋向。

定义：称 (5) 的平衡位置 $x = 0$ 是稳定的 (Lyapunov 意义下)，若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$



三、忆阻系统的渐近行为分析

稳定性

吸引性

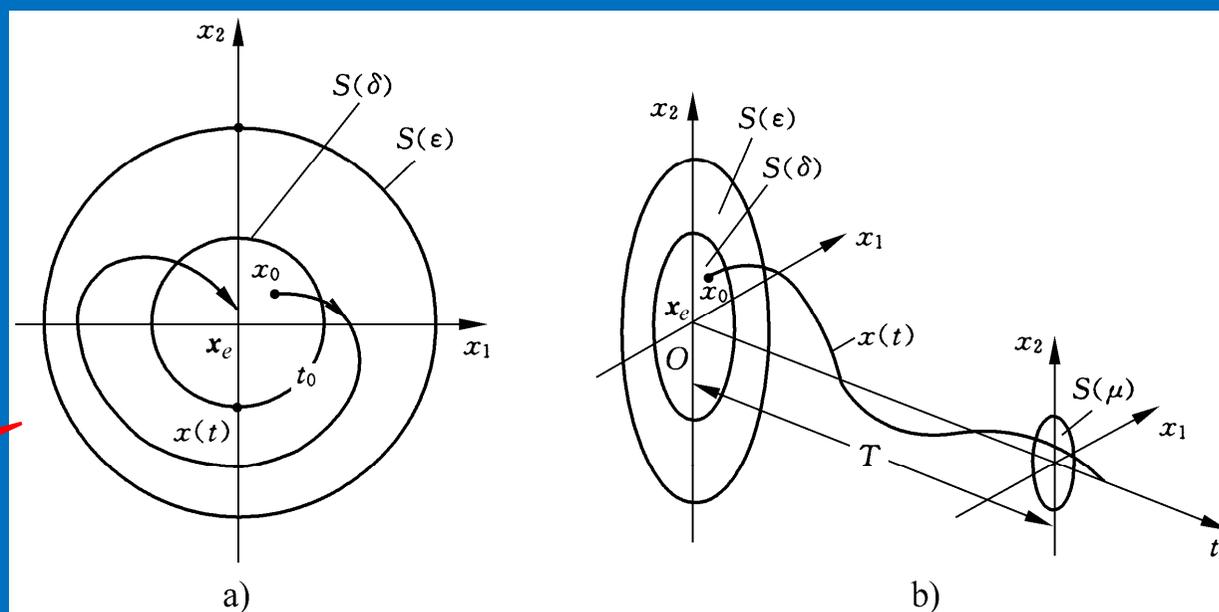
一致稳定性

等度稳定性

渐近稳定性

一致渐近稳定性

指数稳定性



三、忆阻系统的渐近行为分析

■ 解的定义

复杂动力系统

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (6)$$

经典解



Caratheodory解



Filippov解

函数集合

连续可微



李谱希兹连续



绝对连续



连续

三、忆阻系统的渐近行为分析

■ 解的定义

复杂动力系统

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (4)$$

经典解



Caratheodory解

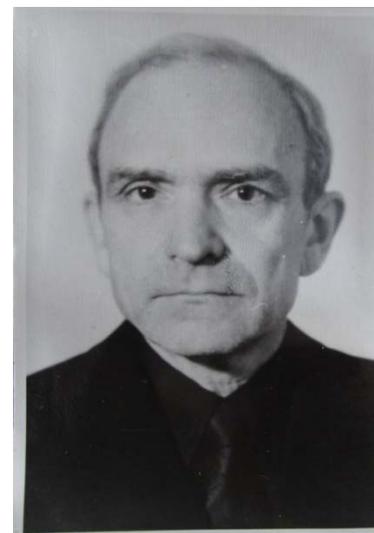


Filippov解



Constantin Carathéodory

1873-1950



Aleksei Fedorovich Filippov

1923-2006

三、忆阻系统的渐近行为分析

切换律

任意切换

稳定系数
矩阵可交换

依时间切换



滞留时间切换



平均滞留时间切换

依状态切换



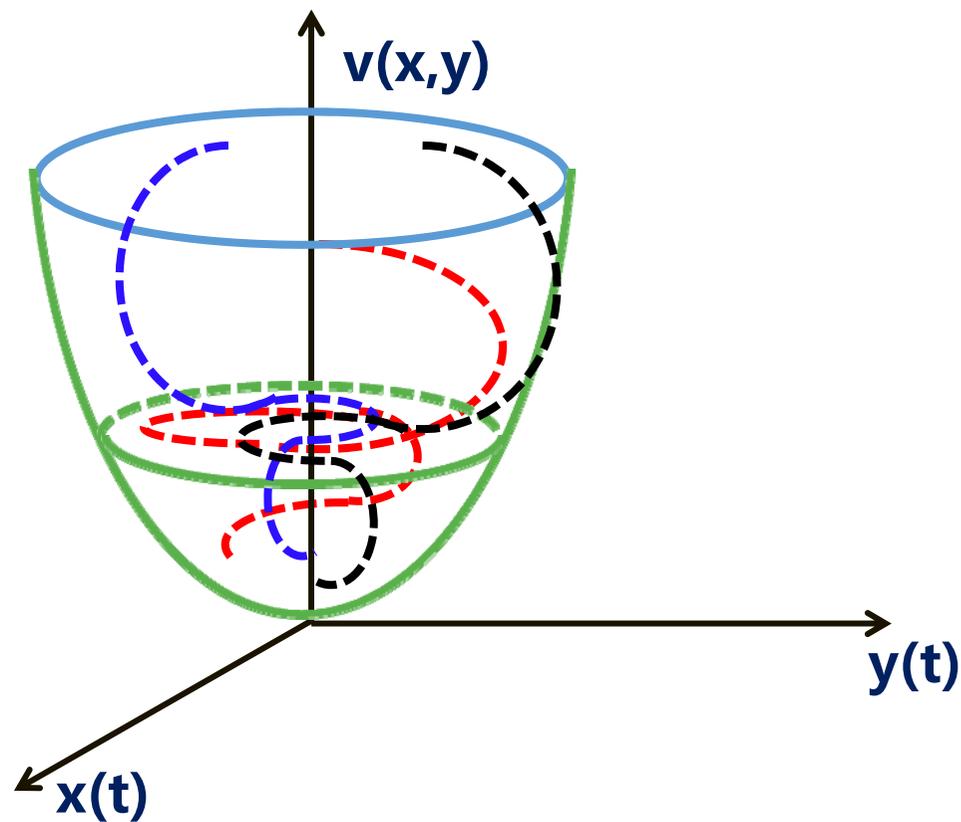
固定曲面切换



动态曲面切换

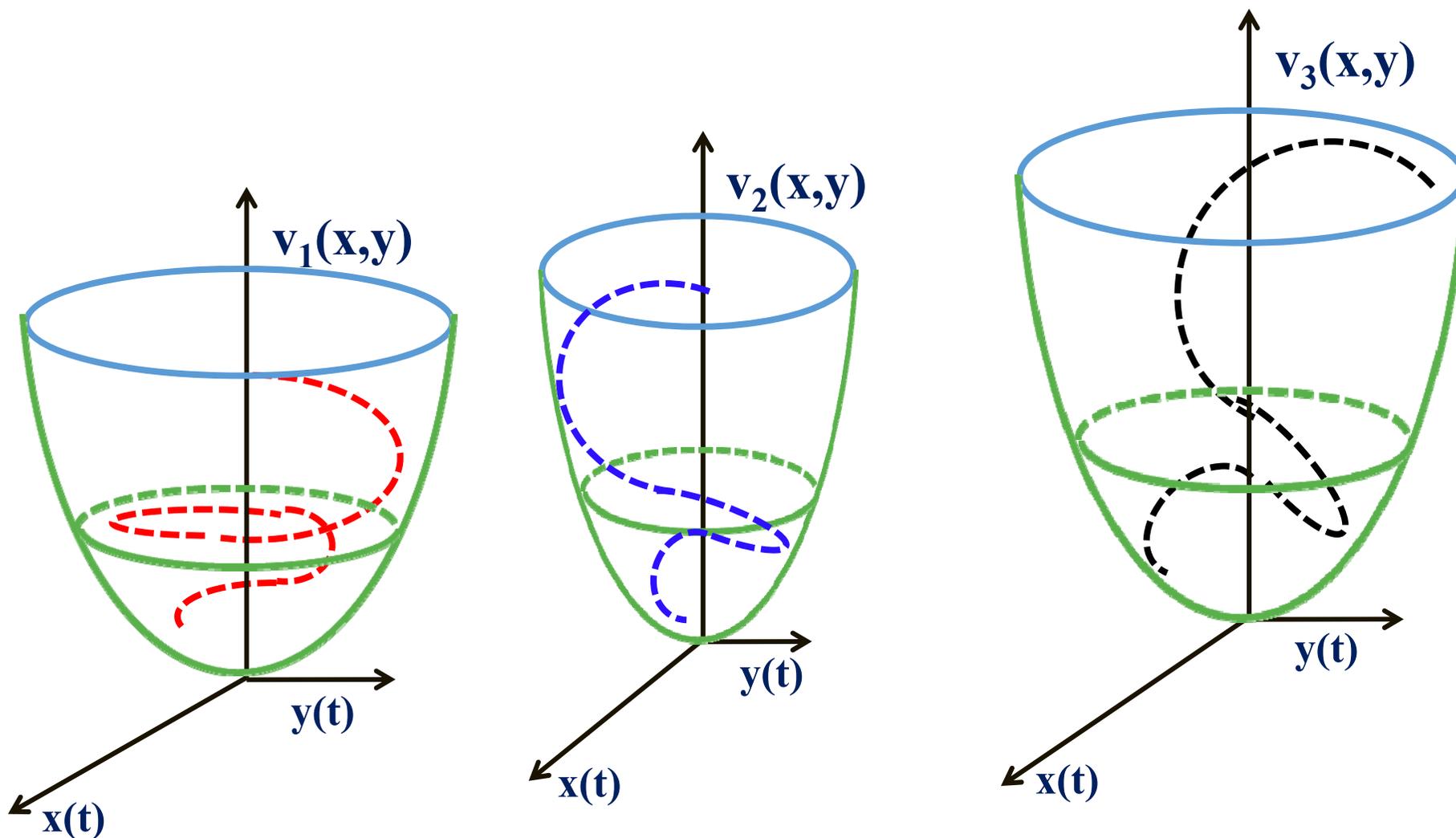
三、忆阻系统的渐近行为分析

■ 切换复杂系统：公共李雅普诺夫方法



三、忆阻系统的渐近行为分析

■ 切换复杂系统：多李雅普诺夫方法



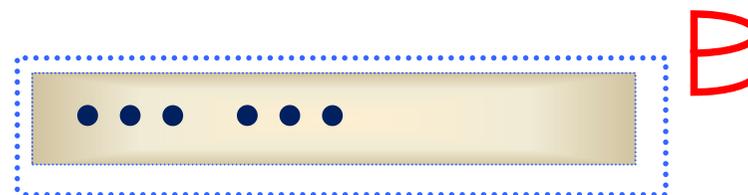
三、忆阻系统的渐近行为分析

【科学问题】

非线性系统单个吸引子



非线性系统多个吸引子



理论瓶颈

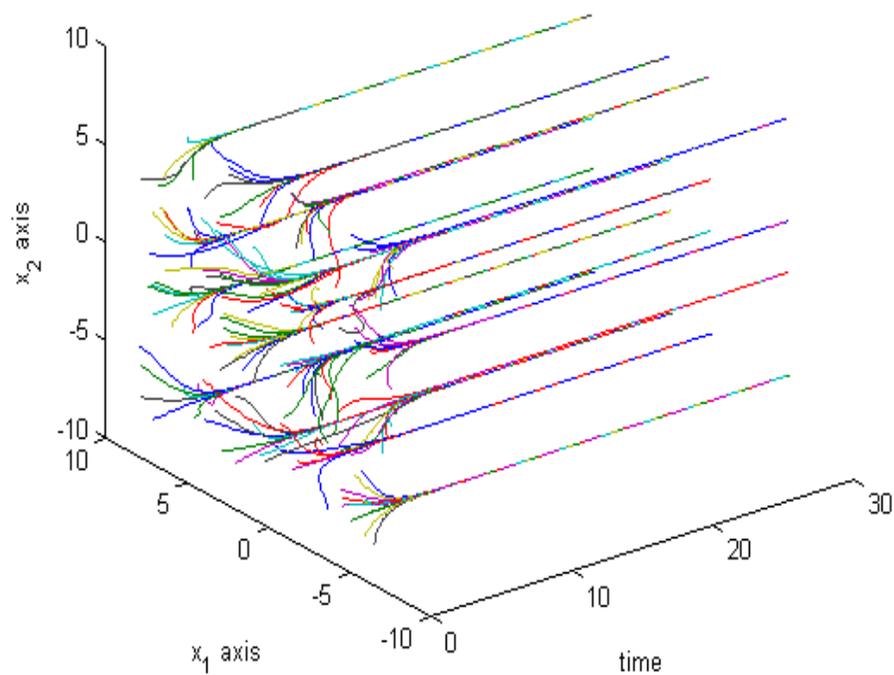
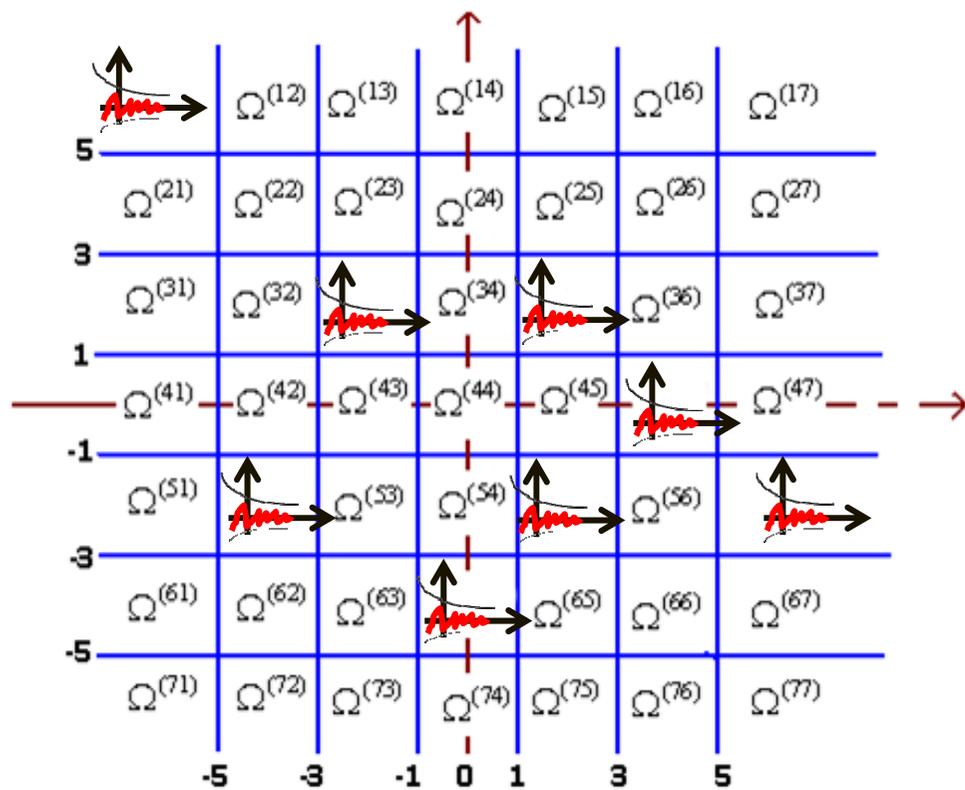
多吸引子间的相容性

各个吸引子与状态变化趋势的协调一致性

对不同的吸引子构造不同的李雅普诺夫泛函过于复杂

三、忆阻系统的渐近行为分析

对多吸引子的吸引区域进行分割



三、忆阻系统的渐近行为分析

合理地划分状态空间. 对

$$(s_1, s_2, \dots, s_n)^T \in \{-1, 1\}^n$$

定义算子:

$$\mathcal{L}(s_i) = \begin{cases} [1, \infty), & s_i = 1, \\ (-\infty, -1], & s_i = -1. \end{cases}$$

则 $(s_1, s_2, \dots, s_n)^T$ 和 $\prod_{i=1}^n \mathcal{L}(s_i) = \mathcal{L}(s_1) \times \mathcal{L}(s_2) \times \dots \times \mathcal{L}(s_n)$ 是一一对应的

全空间可以分成 3^n 部分:

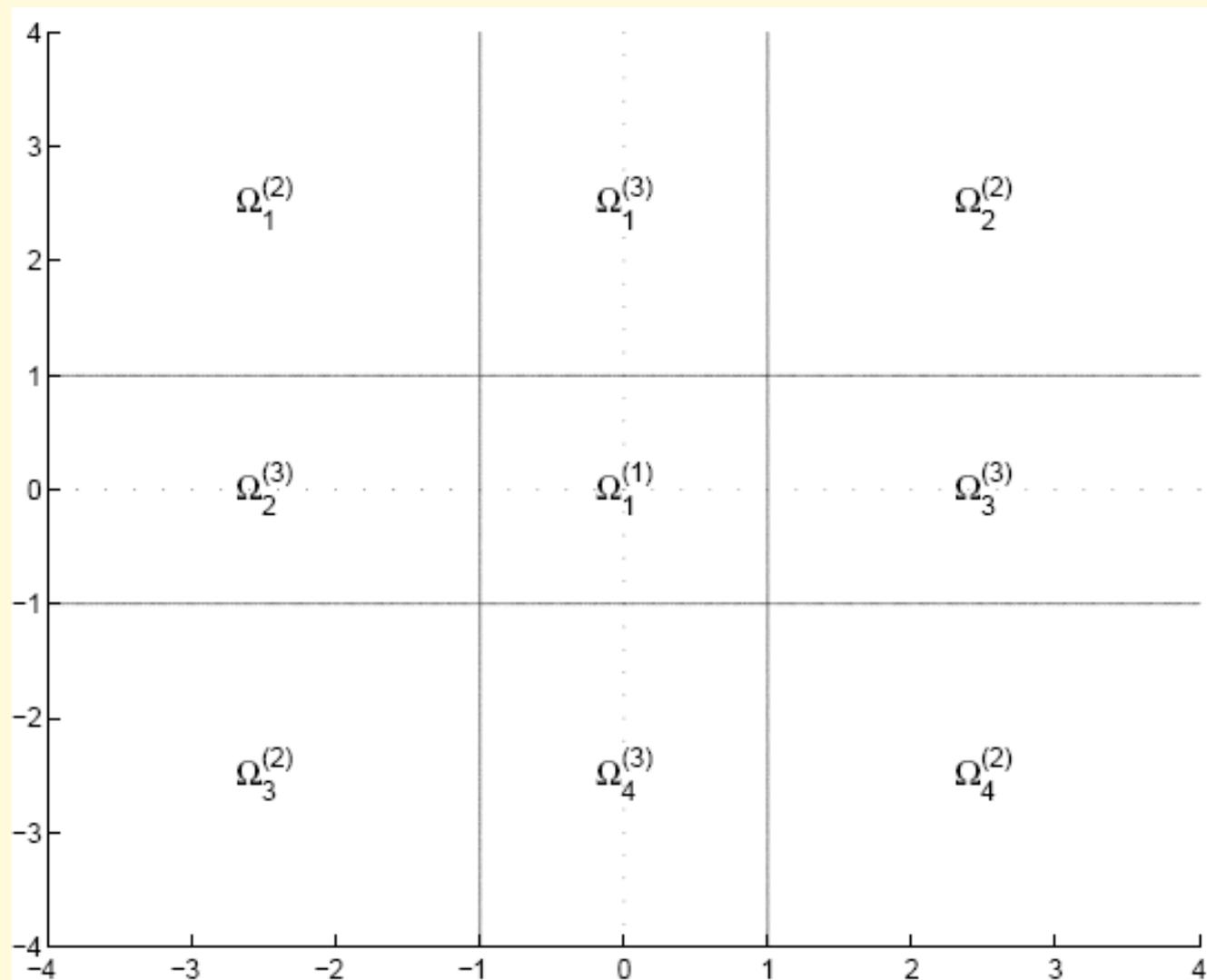
$$\Omega^{(1)} = \{[-1, 1]^n\};$$

$$\Omega^{(2)} = \{\prod_{i=1}^n (-\infty, -1)^{\delta^{(i)}} \times (1, +\infty)^{1-\delta^{(i)}}, \delta^{(j)} = 1 \text{ or } 0, j = 1, 2, \dots, n\};$$

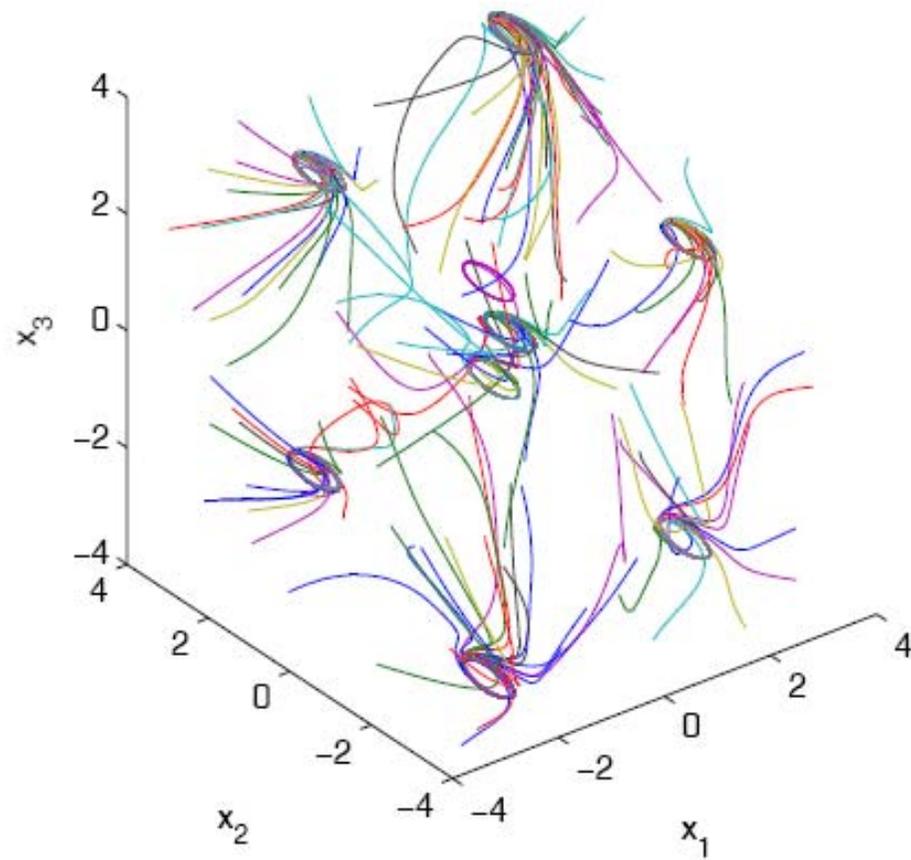
$$\Omega^{(3)} = \Omega - \Omega^{(1)} - \Omega^{(2)}.$$

三、忆阻系统的渐近行为分析

当 $n = 2$ 时， Ω 分成 $3^2 = 9$ 部分，如下图：

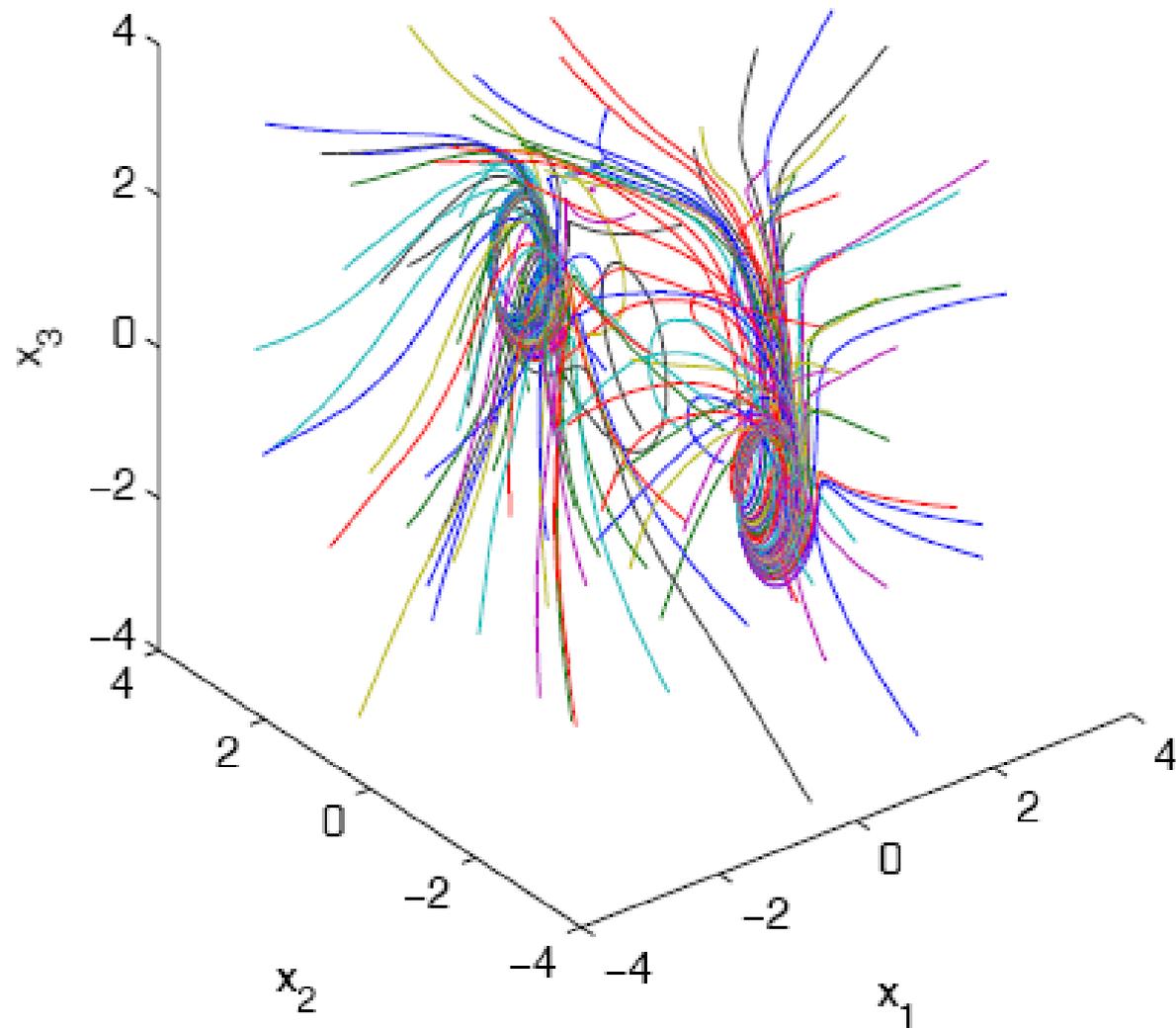


三、忆阻系统的渐近行为分析



(x_1, x_2, x_3) 的运行轨迹.

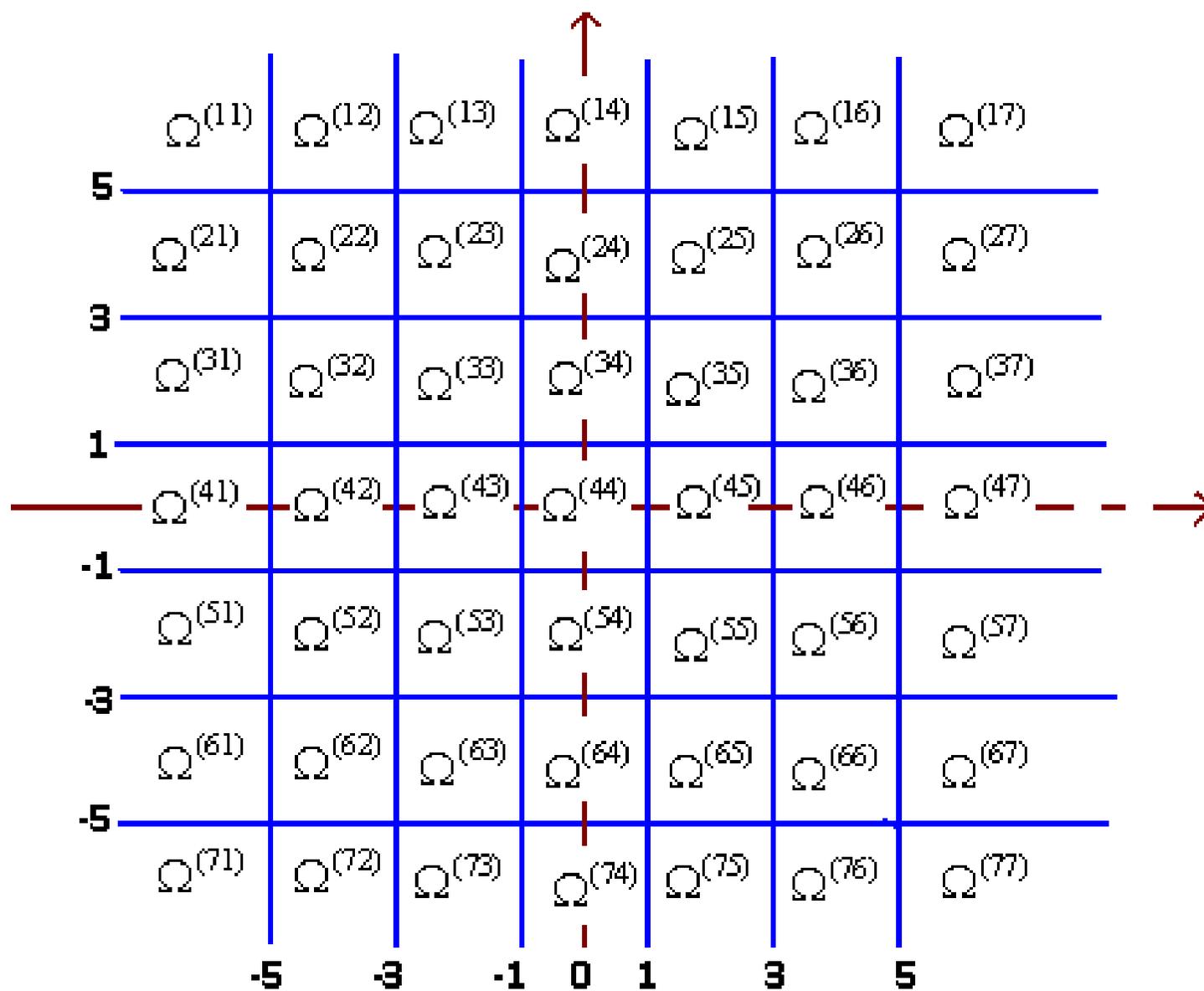
三、忆阻系统的渐近行为分析



三、忆阻系统的渐近行为分析

根据激活函数的不同特性，对状态空间进行合理划分，得到一些空间子区域，然后在每一个子区域内考虑非线性系统的动力学行为特性。得到了判定各种各样非线性系统具有多个平衡点吸引子和具有多个周期解吸引子的一些充分条件。

三、忆阻系统的渐近行为分析



三、忆阻系统的渐近行为分析

根据激活函数的不同特性，对状态空间进行合理划分，得到一些空间子区域，然后在每一个子区域内考虑非线性系统的动力学行为特性。得到了判定各种各样非线性系统具有多个平衡点吸引子和具有多个周期解吸引子的一些充分条件

假设 k , m 和 n 为正整数。

- ✦ 证明了带有 k 级台阶型激活函数的 n 维非线性系统能够有 $(4k - 1)^n$ 个平衡点，其中 $(2k)^n$ 个平衡点是局部指数稳定的。
- ✦ 利用激活函数的凹凸性和不动点定理，证明了具有凹凸特性的激活函数的 n 维非线性系统能够有 $(2k + 2m - 1)^n$ 个平衡点，其中 $(k + m)^n$ 个平衡点是局部指数稳定的。
- ✦ 证明了 n 维细胞非线性系统的推广模型能够有 $(2m + 1)^n$ 个平衡点，其中 $(m + 1)^n$ 个平衡点是局部指数稳定的。

三、忆阻系统的渐近行为分析

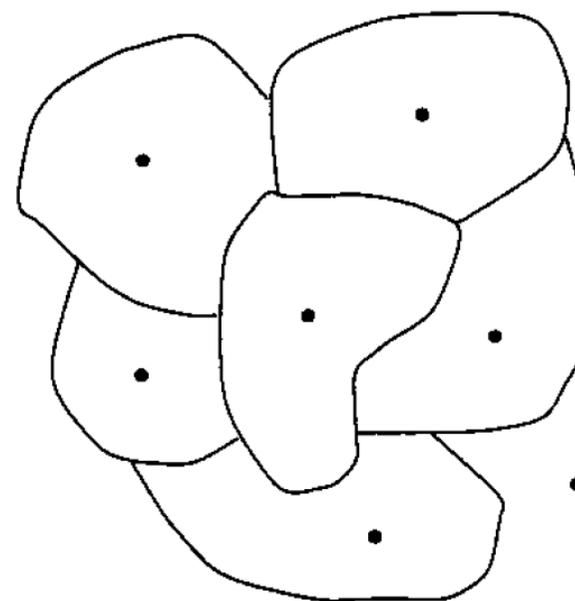
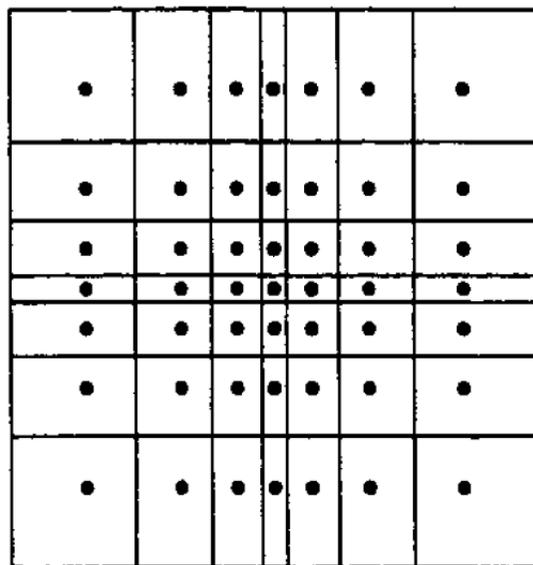
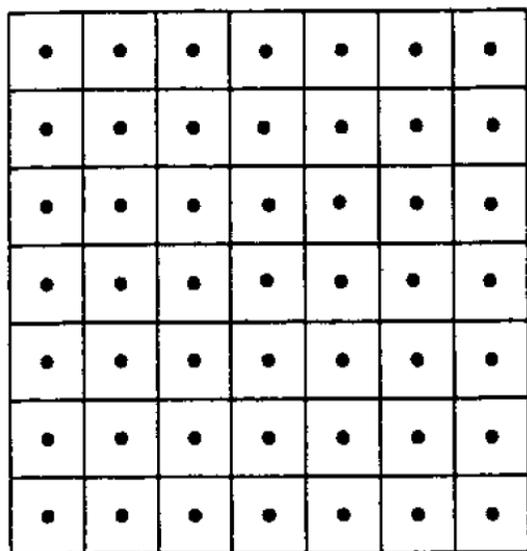
线性等距区域分割



线性非等距区域分割

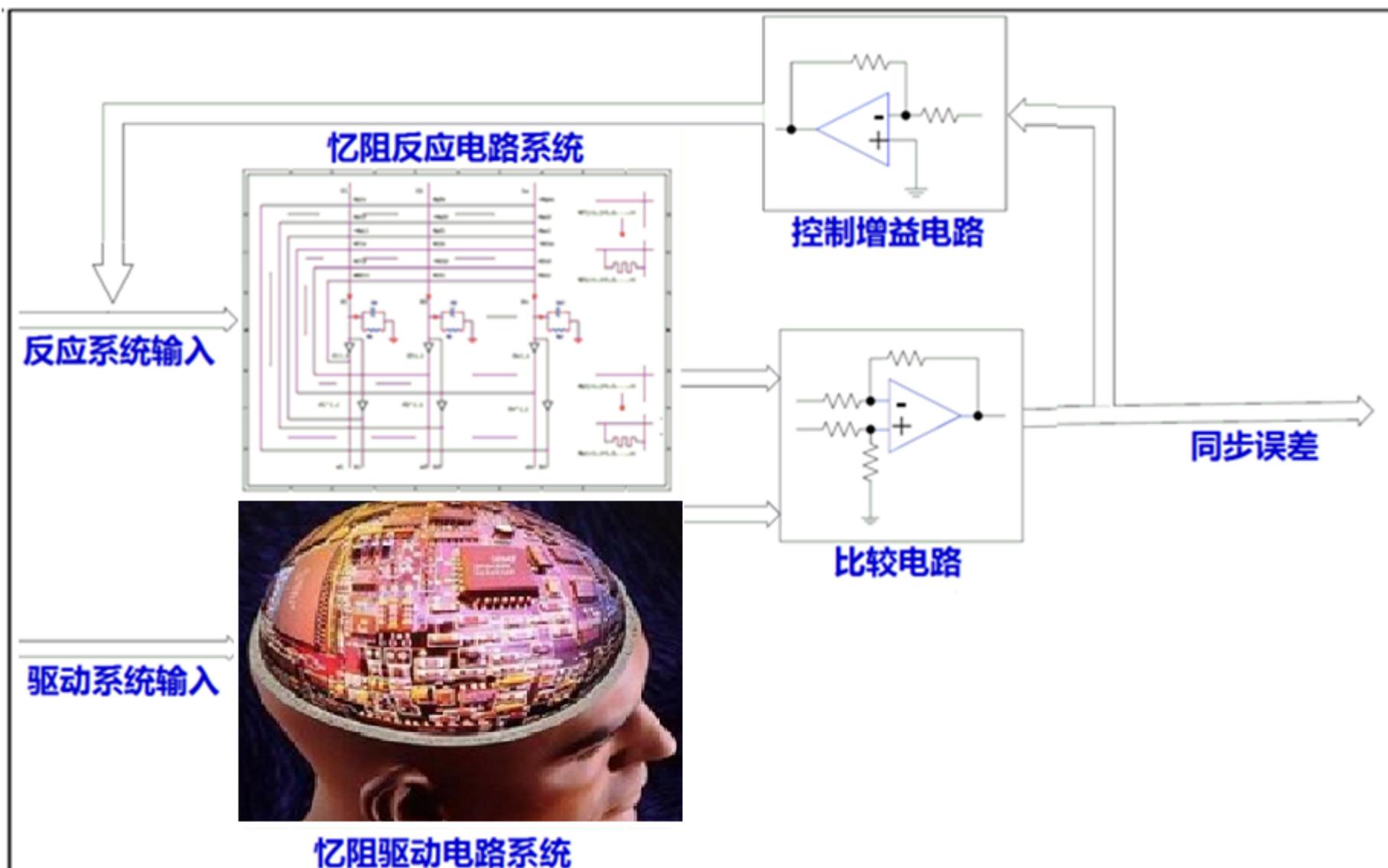
非线性区域分割

动态区域分割



三、忆阻系统的渐近行为分析

忆阻网络系统的同步



三、忆阻系统的渐近行为分析

忆阻网络系统的同步

$$D^\alpha x_i(t) \in -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n K(a_{ij}(x_j(t))) f_j(x_j(t)) + I_i,$$

(H1) The neuron activation functions f_j are Lipschitz-continuous on R with Lipschitz constants $F_j > 0$ respectively, i.e.,

$$|f_j(u) - f_j(v)| \leq F_j |u - v|, \quad u, v \in R.$$

Let the set-valued maps be as follows

$$K(a_{ij}(x_j(t))) = \begin{cases} \hat{a}_{ij}, & |x_j(t)| > T_j, \\ \overline{co}\{\hat{a}_{ij}, \check{a}_{ij}\}, & |x_j(t)| = T_j, \\ \check{a}_{ij}, & |x_j(t)| < T_j, \end{cases}$$

for $i, j = 1, 2, \dots, n$.

三、忆阻系统的渐近行为分析

忆阻网络系统的同步

$$D^\alpha x_i(t) \in -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n K(a_{ij}(x_j(t))) f_j(x_j(t)) + I_i,$$

Lemma Under Assumption (H1), if $f_j(\pm I_j) = 0$ ($j = 1, \dots, n$) then

$$|K(a_{ij}(x_j))f_j(x_j) - K(a_{ij}(y_j))f_j(y_j)| \leq a_{ij}^u F_j |x_j - y_j|,$$

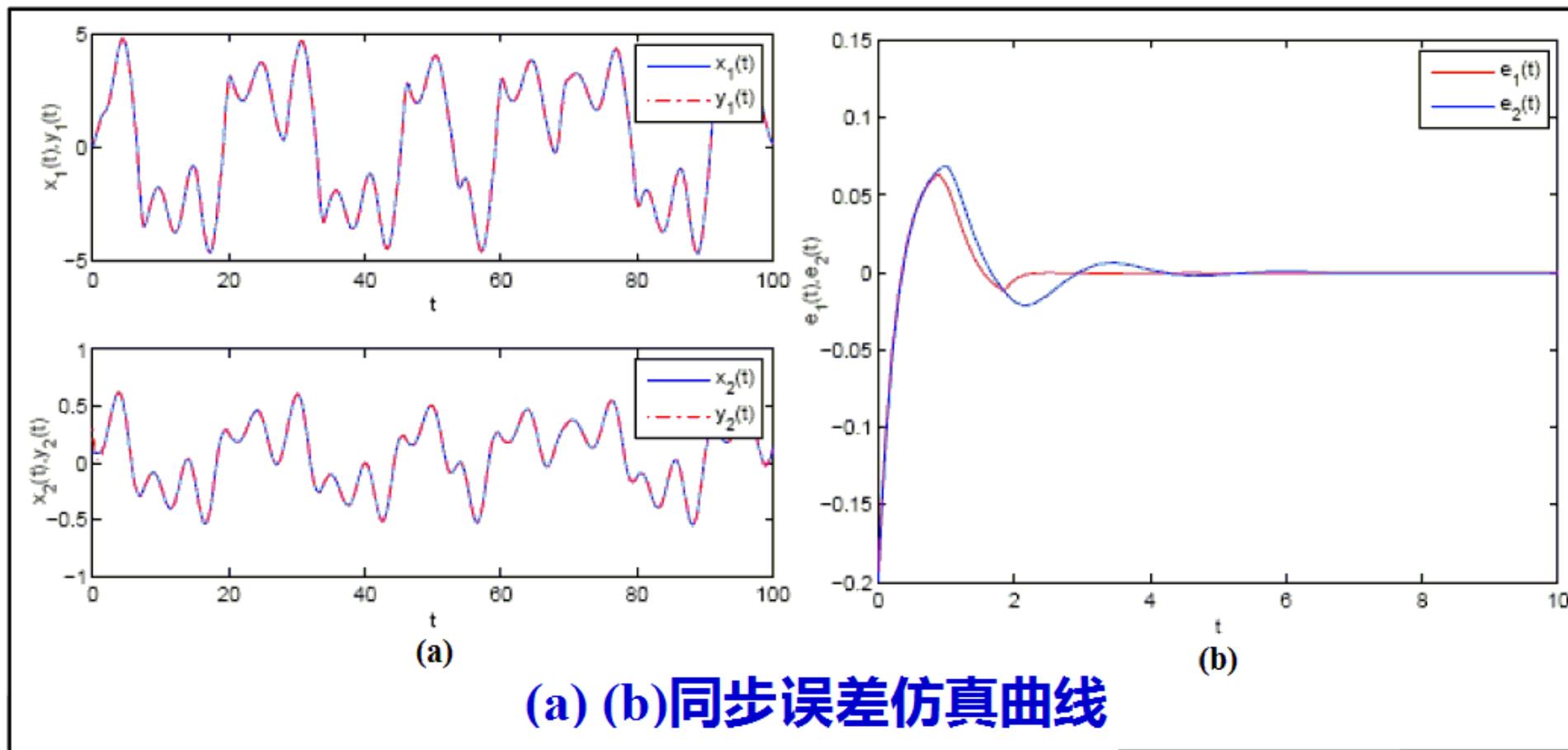
for $i, j = 1, 2, \dots, n$, that is, for any $\eta_{ij}(x_j) \in K(a_{ij}(x_j))$, $\eta_{ij}(y_j) \in K(a_{ij}(y_j))$,

$$|\eta_{ij}(x_j)f_j(x_j) - \eta_{ij}(y_j)f_j(y_j)| \leq a_{ij}^u F_j |x_j - y_j|,$$

for $i, j = 1, 2, \dots, n$.

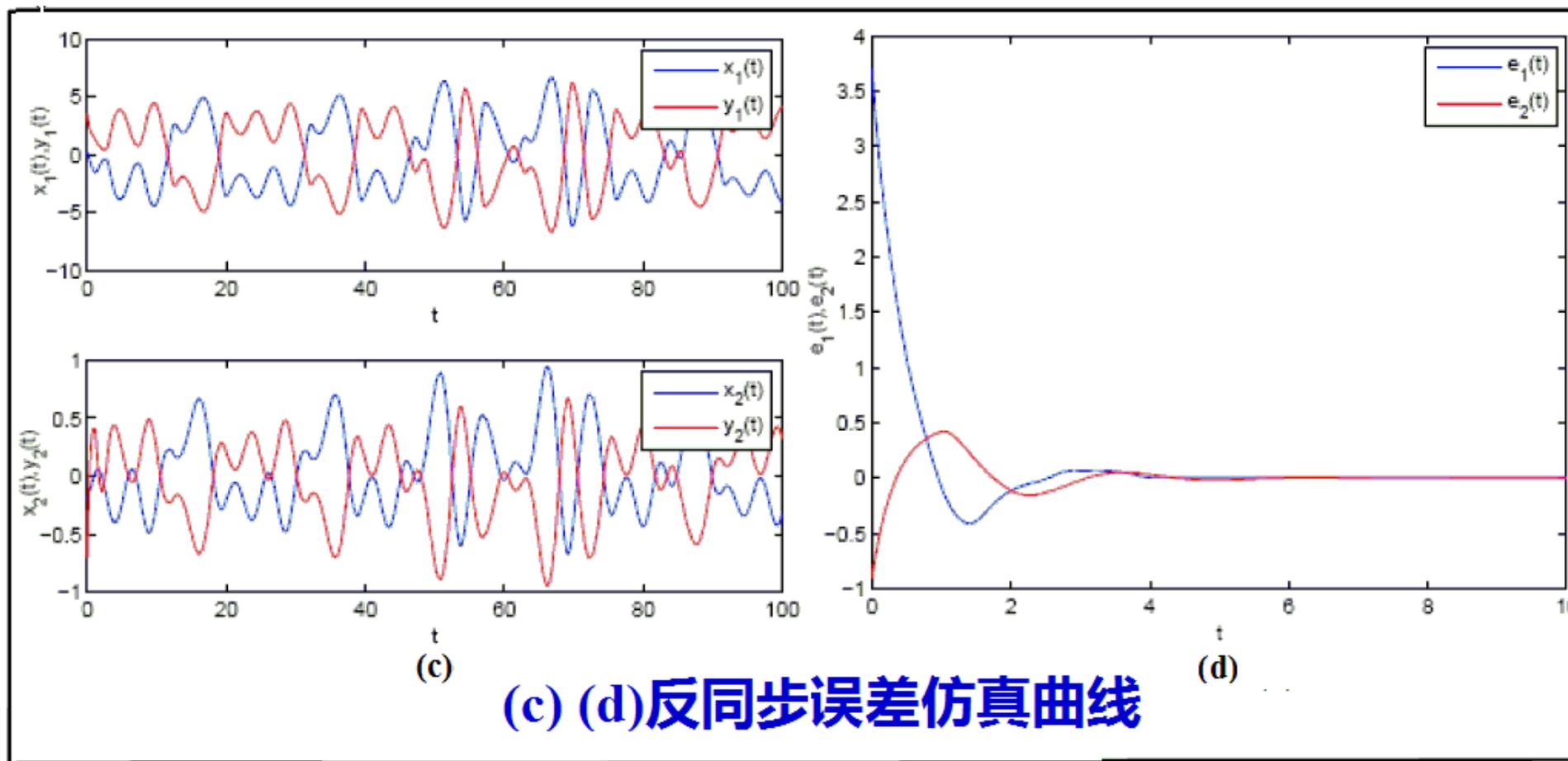
三、忆阻系统的渐近行为分析

忆阻网络系统的同步



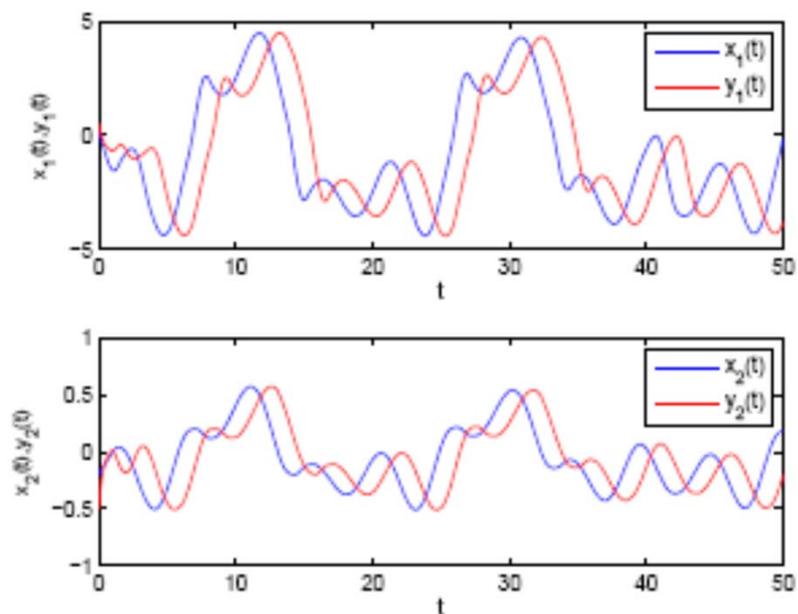
三、忆阻系统的渐近行为分析

忆阻网络系统的反同步

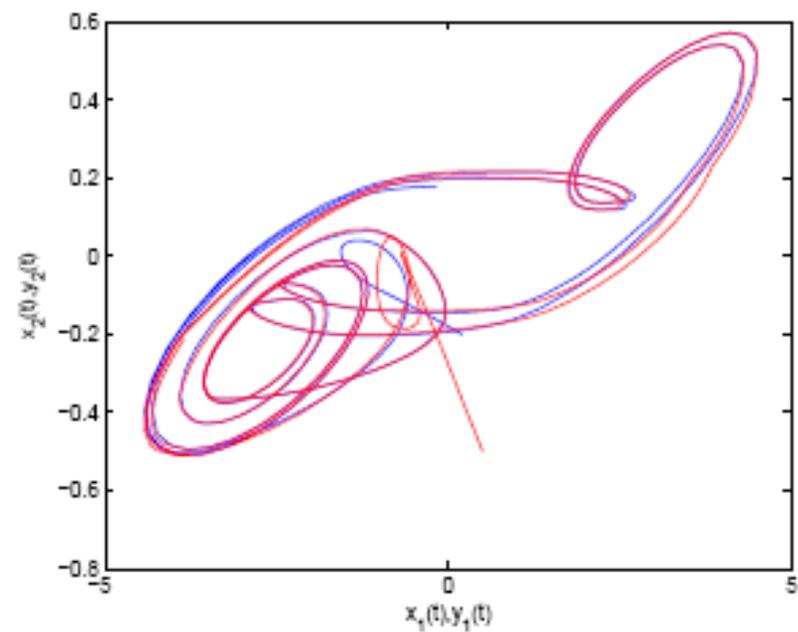


三、忆阻系统的渐近行为分析

忆阻网络系统的迟滞同步



(a)



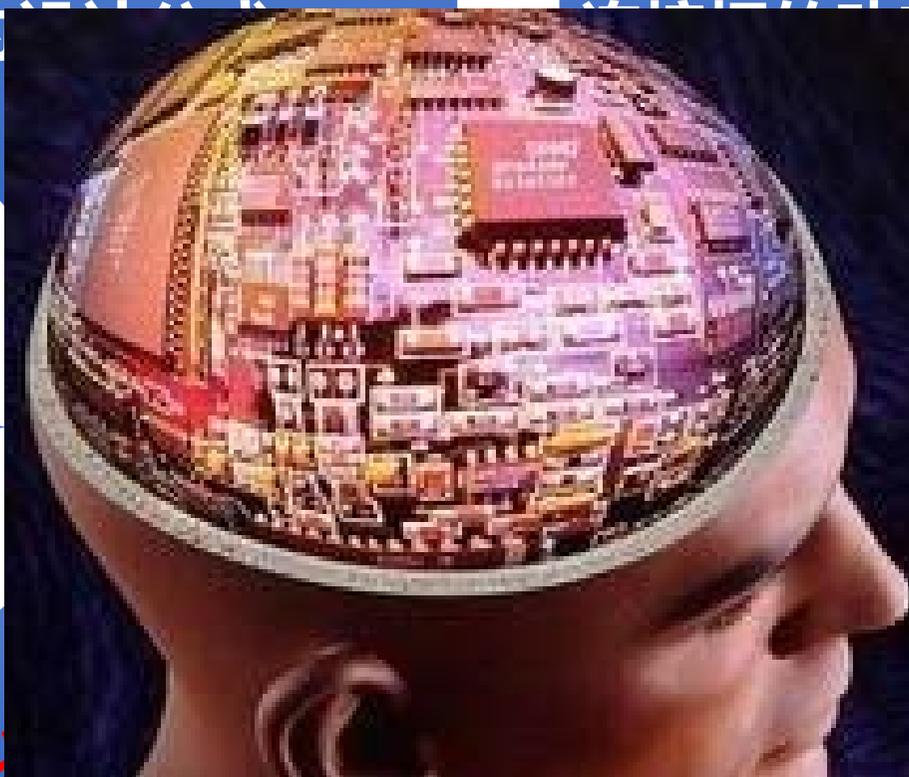
(b)

三、忆阻系统的渐近行为分析

利用**微分几何**、**伪逆矩阵**等来给出电路连接权的渐近行为

利用**拓扑度理论**等来研究多吸引子与忆阻系统渐近行为的动态对应关系

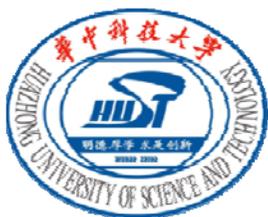
输入信息



获取信息

利用**拓扑度理论**等分析忆阻系统在输入信息作用下的动态响应

利用**拓扑度理论**等方法研究多吸引子流的动力学行为



Thanks!

敬请各位专家批评指正！