

第3章 函数逼近与计算

张利军

zlj@nju.edu.cn

<http://cs.nju.edu.cn/zlj>





目录

- 引言与预备知识
- 最佳一致逼近多项式
- 最佳平方逼近
- 正交多项式
- 函数按正交多项式展开
- 曲线拟合的最小二乘法



问题背景

□ 在数值计算中经常遇到求函数值的问题，我们希望求出便于计算且计算量省的公式来近似已知函数 $f(x)$

■ 例如，Taylor展开式的部分和

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

就是一种近似公式，在 x_0 附近的误差较小

■ 例如， $f(x) = e^x$ 在 $[-1,1]$ 上用

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

来近似



问题背景（续）

■ 误差

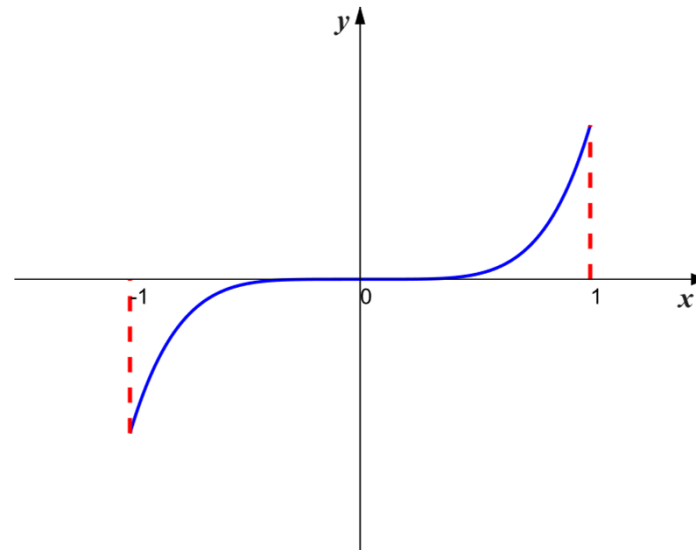
$$R_4(x) = e^x - P_4(x) = \frac{1}{120}x^5 e^\varepsilon, \quad \varepsilon \in (-1, 1)$$

■ 误差限

$$|R_4(x)| \leq \frac{e}{120}|x^5| \quad \max_{-1 \leq x \leq 1} |R_4(x)| \leq \frac{e}{120} \approx 0.0226$$

■ 误差分布如下图所示，它在整个区间上误差较大

如精度要求较高，则需取很多项，这样既费时又多占存储单元





函数逼近与计算

□ 函数逼近与计算要解决的问题

- 求在给定精度下求计算次数最少的近似公式

□ 定义：对于函数类 A 中给定的函数 $f(x)$ ，要求在另一类较简单且便于计算的函数类 B 中，求函数 $P(x) \in B \subseteq A$ ，使 $P(x)$ 与 $f(x)$ 之差在某种度量意义下最小

- 函数类 A 通常是区间 $[a, b]$ 上的连续函数，记作 $C[a, b]$

- 函数类 B 通常为代数多项式、分式有理函数或三角多项式等



度量标准

□ 一致逼近或均匀逼近

$$\|f(x) - P(x)\|_{\infty} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)|$$

■ $\|\cdot\|_{\infty}$ 是范数

□ 均方逼近或平方逼近

$$\|f(x) - P(x)\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx}$$

■ $\|\cdot\|_2$ 是范数

□ 本章主要研究在这两种度量标准下用代数多项式 $P_n(x)$ 逼近 $f(x) \in C[a, b]$

■ 最佳一致逼近多项式、最佳平方逼近多项式



一致逼近的存在性

□ 对于 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ ，是否存在多项式 $P_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$ ？

■ 用插值法或Taylor展开求 $f(x) \in C[a, b]$ 的逼近多项式，在某些点上可能没有误差，但在整个区间 $[a, b]$ 上误差可能很大，例如Runge现象

□ 定理**3.1**(Weierstrass定理) 设 $f(x) \in C[a, b]$ ，则对于任何 $\varepsilon > 0$ ，总存在一个代数多项式 $P(x)$ ，使

$$\|f(x) - P(x)\|_{\infty} < \varepsilon$$

在 $[a, b]$ 上一致成立



定理3.1

□ Bernstein给出一种构造性证明，他根据函数整体逼近的特性造出Bernstein多项式

$$\begin{cases} B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P_k(x) \\ P_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{cases} \quad (3.1.4)$$

- 证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f, x) = f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致成立
- 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 m 阶导数连续，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{(m)}(f, x) = f^{(m)}(x)$$



定理3.1（续）

- 对于 $B_n(f, x)$ ，可以证明

$$\sum_{k=0}^n P_k(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

这只要从恒等式

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

中令 $y = 1 - x$ 就可得到

- 当 $x \in [0, 1]$ 时还有 $P_k(x) \geq 0$ ，于是

$$\sum_{k=0}^n |P_k(x)| = \sum_{k=0}^n P_k(x) = 1$$

是有界的



定理3.1（续）

- 因而只要 $|f(x)| \leq \delta$ 对于任意 $x \in [0,1]$ 成立，则

$$|B_n(f, x)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \sum_{k=0}^n |P_k(x)| \leq \delta$$

有界，故 $B_n(f, x)$ 是稳定的，有良好的逼近性质

- 但是， $B_n(f, x)$ 收敛太慢，比三次样条逼近效果差得多，实际中很少使用

□ Lagrange插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x), \quad \sum_{k=0}^n l_k(x) = 1$$

- $\sum_{k=0}^n |l_k(x)|$ 无界，不能保证高阶插值的稳定与收敛



连续函数空间 $C[a, b]$

□ 区间 $[a, b]$ 上的所有实连续函数组成一个空间，记作 $C[a, b]$

□ $f \in C[a, b]$ 的范数定义为

$$\|f\|_{\infty} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

■ $\|\cdot\|_{\infty}$ 称为 ∞ -范数

□ 范数 $\|\cdot\|$ 要满足三个性质：

1. $\|f\| \geq 0$ ，当且仅当 $f \equiv 0$ 时才有 $\|f\| = 0$ ；
2. 对于任意 $f \in C[a, b]$ 和 $a \in \mathbb{R}$ ， $\|af\| = |a|\|f\|$ ；
3. 三角不等式：对于任意 $f, g \in C[a, b]$ ，有

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (3.1.7)$$

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (3.1.7)$$



连续函数空间 $C[a, b]$ (续)

- 空间 $C[a, b]$ 可与向量空间类比，函数 $f \in C[a, b]$ 可看成向量
- 当 $f, g \in C[a, b]$ 时，定义 f 与 g 的距离为

$$D(f, g) = \|f - g\|_{\infty} \quad (3.1.8)$$

- 同时，由式(3.1.7)可得

$$D(f, g) \leq D(f, h) + D(h, g) \quad (3.1.9)$$

$$|\|f\|_{\infty} - \|g\|_{\infty}| \leq \|f - g\|_{\infty} \quad (3.1.10)$$



目录

- 引言与预备知识
- 最佳一致逼近多项式
- 最佳平方逼近
- 正交多项式
- 函数按正交多项式展开
- 曲线拟合的最小二乘法



研究动机

□ 定理3.1中的存在性并没有约束 n 的值

■ n 太大的话，函数复杂，难以计算

□ 新的视角：固定 n ，寻求最优的逼近

□ 符号

■ 记次数不大于 n 的多项式集合为 H_n ， $H_n \subseteq C[a, b]$

■ 记 $H_n = \text{span}\{1, x, \dots, x^n\}$ ，其中 $1, x, \dots, x^n$ 是 $[a, b]$ 上一组线性无关的函数组，是 H_n 中的一组基

■ H_n 中的元素 $P_n(x)$ 可表示为

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

其中 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 为任意实数



最佳逼近多项式

□ 最佳一致逼近或Chebyshev逼近问题

■ 在 H_n 中求 $P_n^*(x)$ 逼近 $f(x) \in C[a, b]$, 使其误差为

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n^*(x)| = \min_{P_n \in H_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)|$$

□ 定义**3.1** $P_n(x) \in H_n$, $f(x) \in C[a, b]$, 称

$$\Delta(f, P_n) = \|f - P_n\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| \quad (3.2.1)$$

为 $f(x)$ 与 $P_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上的偏差

■ $\Delta(f, P_n) \geq 0$, $\Delta(f, P_n)$ 的全体组成一个集合, 记作 $\{\Delta(f, P_n)\}$, 它有下列下界0



最佳逼近多项式（续）

□ 定义 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小偏差

■ 集合 $\{\Delta(f, P_n)\}$ 的下确界

$$E_n = \inf_{P_n \in H_n} \{\Delta(f, P_n)\} = \inf_{P_n \in H_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| \quad (3.2.2)$$

□ 定义 3.2 假定 $f(x) \in C[a, b]$, 若存在

$$P_n^*(x) \in H_n, \quad \Delta(f, P_n^*) = E_n \quad (3.2.3)$$

则称 $P_n^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最佳一致逼近多项式、最小偏差逼近多项式、最佳逼近多项式

□ 定理 3.2 若 $f(x) \in C[a, b]$, 则总存在 $P_n^*(x) \in H_n$, 使 $\|f(x) - P_n^*(x)\|_\infty = E_n$



偏差点

□ 定义**3.3** 设 $f(x) \in C[a, b]$, $P(x) \in H_n$, 若在 $x = x_0$ 上有

$$|P(x_0) - f(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |P(x) - f(x)| = \mu$$

则称 x_0 是 $P(x)$ 的偏差点

- 若 $P(x_0) - f(x_0) = \mu$, 则称 x_0 为“正”偏差点
- 若 $P(x_0) - f(x_0) = -\mu$, 则称 x_0 为“负”偏差点

□ 函数 $P(x) - f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 因此, 至少存在一个点 $x_0 \in [a, b]$, 使得

$$|P(x_0) - f(x_0)| = \mu$$



最佳逼近多项式的偏差点性质

□ **定理3.3** 若 $P(x) \in H_n$ 是 $f(x) \in C[a, b]$ 的最佳逼近多项式，则 $P(x)$ 同时存在正、负偏差点

- 因 $P(x)$ 是 $f(x)$ 的最佳逼近多项式，故 $\mu = E_n$
- 由于 $P(x)$ 在 $[a, b]$ 上总有偏差点存在，故可用反证法来证明
- 假定只有正偏差点，没有负偏差点，于是，对于所有 $x \in [a, b]$ 都有

$$P(x) - f(x) > -E_n$$

- 由于 $P(x) - f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，故有最小值大于 $-E_n$ ，用 $-E_n + 2h$ 表示，其中 $h > 0$



定理3.3证明

- 因此，对于所有 $x \in [a, b]$ 都有

$$-E_n + 2h \leq P(x) - f(x) \leq E_n$$

$$-E_n + h \leq [P(x) - h] - f(x) \leq E_n - h$$

- 即

$$|[P(x) - h] - f(x)| \leq E_n - h$$

它表示多项式 $P(x) - h$ 与 $f(x)$ 的偏差小于 E_n ，与 E_n 是最小偏差的假定矛盾

- 同样，可证明只有负偏差点没有正偏差点也是不成立

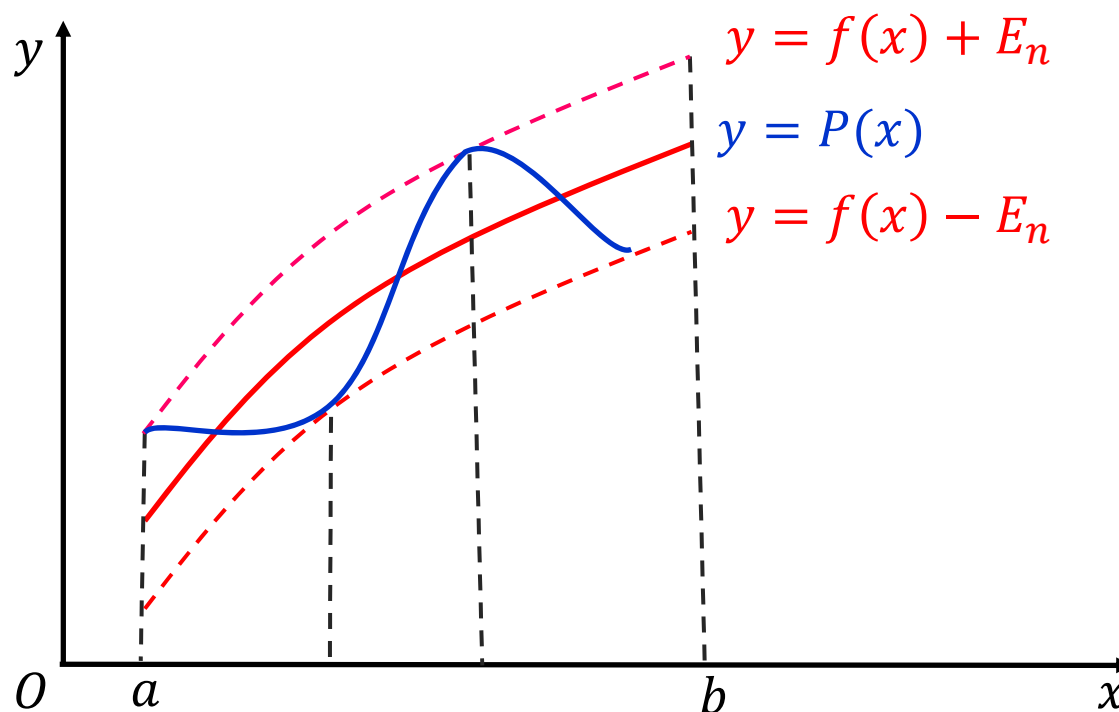


几何意义

□ 曲线 $y = P(x)$ 位于下面两条曲线间的带状区域

$$y = f(x) + E_n, \quad y = f(x) - E_n$$

- $P(x)$ 的图形应当与这两条曲线至少各接触一次
- 否则，可把曲线 $y = P(x)$ 稍微移动，得到更好的近似





Chebyshev定理

- 定理**3.4** $P(x) \in H_n$ 是 $f(x) \in C[a, b]$ 的最佳逼近多项式的**充要条件**是 $P(x)$ 在 $[a, b]$ 上至少有 $n + 2$ 个轮流为“正”、“负”的偏差点, 即有 $n + 2$ 个点 $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2} \leq b$, 使

$$P(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \|P(x) - f(x)\|_\infty \quad (3.2.4)$$
$$\sigma = \pm 1, \quad k = 1, 2, \dots, n + 2$$

这样的点组称为**Chebyshev交错点组**

- 只证充分性. 假定在 $[a, b]$ 上有 $n + 2$ 个点使式(3.2.4)成立, 要证明 $P(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最佳逼近多项式, 用**反证法**求证



定理3.4证明

- 若存在 $Q(x) \in H_n$, $Q(x) \not\equiv P(x)$ 使

$$\|f(x) - Q(x)\|_\infty \leq \|f(x) - P(x)\|_\infty$$

- 注意到

$$P(x) - Q(x) = [P(x) - f(x)] - [Q(x) - f(x)]$$

在点 $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ 上的符号与 $P(x_k) - f(x_k)$ ($k = 1, \dots, n+2$) 一致

✓ 因为 $Q(x) - f(x)$ 的值小, 不足以影响符号

- 因此, 故 $P(x) - Q(x)$ 也在 $n+2$ 个点上轮流取符号 “+”、“-”



定理3.4证明（续）

- 由连续函数性质， $P(x) - Q(x)$ 在 (a, b) 内有 $n + 1$ 个零点
- 但 $P(x) - Q(x) \not\equiv 0$ 是不超过 n 次的多项式，它的零点不超过 n ，这个矛盾说明假设不对，故 $P(x)$ 就是所求最佳逼近多项式，充分性得证
- 必要性证明较繁，但证明思想类似定理3.3，此处从略



Chebyshev定理的推论

□ 推论1 若 $f(x) \in C[a, b]$, 则在 H_n 中存在唯一的最佳逼近多项式

■ 若 H_n 中有两个最佳逼近多项式 $P(x)$ 与 $Q(x)$, 则对于所有 $x \in [a, b]$, 都有

$$-E_n \leq P(x) - f(x) \leq E_n \quad -E_n \leq Q(x) - f(x) \leq E_n$$

■ 于是

$$-E_n \leq \frac{P(x) + Q(x)}{2} - f(x) \leq E_n$$

表明 $R(x) = \frac{P(x) + Q(x)}{2}$ 也是 H_n 中的最佳逼近多项式

■ 因此, $R(x) - f(x)$ 的 $n + 2$ 个交错点组 $\{x_k\}$ 满足

$$R(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma E_n (k = 1, \dots, n + 2)$$



推论1证明

■ 同时

$$E_n = |R(x_k) - f(x_k)| = \left| \frac{P(x_k) - f(x_k)}{2} + \frac{Q(x_k) - f(x_k)}{2} \right| \quad (3.2.5)$$

■ 由于 $|P(x_k) - f(x_k)| \leq E_n$, $|Q(x_k) - f(x_k)| \leq E_n$, 故当且仅当

$$\frac{P(x_k) - f(x_k)}{2} = \frac{Q(x_k) - f(x_k)}{2} = \pm \frac{E_n}{2}$$

时, 式(3.2.5)才能成立

■ 于是 $P(x_k) = Q(x_k) (k = 1, \dots, n+2)$ 从而表明 $P(x) - Q(x)$ 有 $n+2$ 个根, 这个矛盾说明 $Q(x) \equiv P(x)$



Chebyshev定理的推论

- 推论2 若 $f(x) \in C[a, b]$, 则其最佳逼近多项式 $P_n^*(x) \in H_n$ 就是 $f(x)$ 的一个Lagrange插值多项式
 - 由定理3.4可知, $P_n^*(x) - f(x)$ 在 $[a, b]$ 上要么恒为零, 要么有 $n + 2$ 个轮流取“正”、“负”的偏差点
 - 于是存在 $n + 1$ 个点 $x_k \leq \overline{x}_k \leq x_{k+1} (k = 1, 2, \dots, n + 1)$ 使 $P_n^*(\overline{x}_k) - f(\overline{x}_k) = 0$, 以 $\overline{x}_k$ 为插值节点的Lagrange插值多项式就是 $P_n^*(x)$
 - ✓ 插值多项式的唯一性



最佳一次逼近多项式

□ 定理3.4给出了最佳逼近多项式 $P(x)$ 的特性，但要求出 $P(x)$ 却相当困难

□ 简单起见，考虑 $n = 1$ 的情形

■ 假定 $f(x) \in C^2[a, b]$ ，且 $f''(x)$ 在 (a, b) 内不变号，要求最佳一次逼近多项式 $P_1(x) = a_0 + a_1x$

■ 根据定理3.4可知，至少有3个点 $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$ ，使

$$P_1(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \max_{a \leq x \leq b} |P_1(x) - f(x)| \quad (\sigma = \pm 1, k = 1, 2, 3)$$

■ 根据函数连续性， $P_1(x) - f(x)$ 在 (a, b) 内至少有2个零点



最佳一次逼近多项式（续）

- 根据Rolle定理， $P_1'(x) - f'(x) = a_1 - f'(x)$ 在 (a, b) 内至少有1个零点
- 由于 $f''(x)$ 在 (a, b) 上不变号，故 $f'(x)$ 单调， $a_1 - f'(x)$ 在 (a, b) 内只有1个零点
- 因此， $P_1'(x) - f'(x)$ 的变化趋势为 “+0 -” 或者 “-0 +”，必然导致

（1） x_2 处梯度为0

$$P_1'(x_2) - f'(x_2) = a_1 - f'(x_2) = 0 \Rightarrow f'(x_2) = a_1$$

（2） x_1 和 x_3 位于区间端点

$$x_1 = a, x_3 = b$$

$$\Rightarrow P_1(a) - f(a) = P_1(b) - f(b) = -[P_1(x_2) - f(x_2)]$$

$$f'(x_2) = a_1$$



最佳一次逼近多项式（续）

■ 由此得到

$$\begin{cases} a_0 + a_1 a - f(a) = a_0 + a_1 b - f(b) \\ a_0 + a_1 a - f(a) = f(x_2) - (a_0 + a_1 x_2) \end{cases} \quad (3.2.6)$$

■ 解出

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (3.2.7)$$

■ 代入(3.2.6)，得到

$$a_0 = \frac{f(a) + f(x_2)}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{a + x_2}{2} \quad (3.2.8)$$

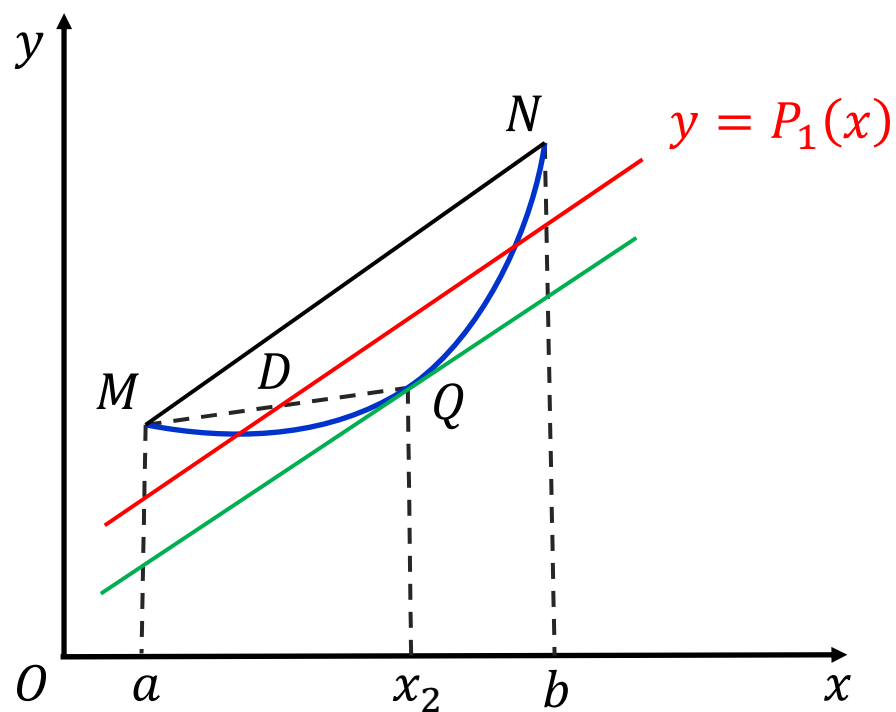
■ 这就得到最佳一次逼近多项式 $P_1(x)$ ，其方程为

$$P_1(x) = \frac{1}{2} [f(a) + f(x_2)] + a_1 \left(x - \frac{a + x_2}{2} \right)$$



几何意义

□ 直线 $y = P_1(x)$ 与弦 MN 平行，且通过 MQ 的中点 D





例3.1

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (3.2.7)$$

□ 求 $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的最佳一次逼近多项式

■ 由式(3.2.7)可算出

$$a_1 = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$$

■ 此外，由于 $f'(x_2) = a_1$ ，可得

$$\frac{x_2}{\sqrt{1 + x_2^2}} = \sqrt{2} - 1$$

■ 解得

$$x_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \approx 0.4554 \quad f(x_2) = \sqrt{1 + x_2^2} \approx 1.0986$$



例3.1 (续)

$$a_0 = \frac{f(a) + f(x_2)}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{a + x_2}{2}$$

- 由式(3.2.8)得

$$a_0 = \frac{1 + \sqrt{1 + x_2^2}}{2} - a_1 \frac{x_2}{2} \approx 0.955$$

- 得 $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ 的最佳一次逼近多项式为

$$P_1(x) = 0.955 + 0.414x$$

- 故

$$\sqrt{1 + x^2} \approx 0.955 + 0.414x, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.2.9)$$

- 误差限为

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left| \sqrt{1 + x^2} - P_1(x) \right| \leq f(0) - 0.955 = 0.045$$

- 在式(3.2.9)中若令 $x = \frac{a}{b} \leq 1$, 得到近似求根公式

$$\sqrt{a^2 + b^2} \approx 0.955a + 0.414b$$



目录

- 引言与预备知识
- 最佳一致逼近多项式
- 最佳平方逼近
- 正交多项式
- 函数按正交多项式展开
- 曲线拟合的最小二乘法



最佳平方逼近

□ 均方逼近或平方逼近

$$\|f(x) - P(x)\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx}$$

□ $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最佳平方逼近多项式

■ 若存在 $P_n^*(x) \in H_n$, 使

$$\|f - P_n^*\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(x) - P_n^*(x)]^2 dx} = \inf_{P \in H_n} \|f - P\|_2$$

□ 先介绍内积空间的预备知识



权函数

□ 定义3.4 设在区间 (a, b) 内, 非负函数 $\rho(x)$ 满足以下条件, 就称 $\rho(x)$ 为区间 (a, b) 内的权函数:

1. $\int_a^b |x|^n \rho(x) dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)存在

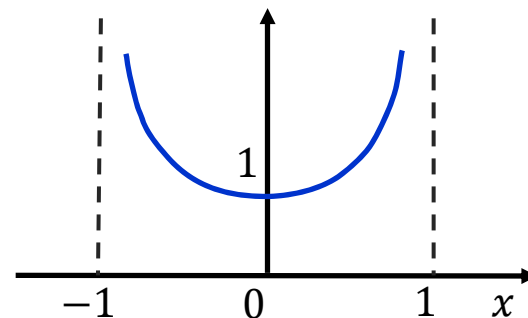
2. 对于非负的连续函数 $g(x)$, 若

$$\int_a^b g(x) \rho(x) dx = 0 \quad (3.3.2)$$

则在 (a, b) 内 $g(x) \equiv 0$

□ $\rho(x)$ 对 (a, b) 内的点赋予权重

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$





函数内积

□ 定义**3.5** 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, $\rho(x)$ 是 $[a, b]$ 上的权函数, 积分

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx \quad (3.3.3)$$

称为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的内积

□ 这样定义的内积满足下列四条公理:

1. $(f, g) = (g, f)$
2. $(cf, g) = c(f, g)$, c 为常数
3. $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$
4. $(f, f) \geq 0$, 当且仅当 $f = 0$ 时 $(f, f) = 0$



欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的内积和范数

□ 设 $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 其内积定义为

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum_{k=1}^n f_k g_k$$

□ $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ 的模（范数）定义为

$$\|\mathbf{f}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} = \left(\sum_{k=1}^n f_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

□ 通常没有权函数



函数的范数

□ 定义**3.6** $f(x) \in C[a, b]$, 称

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx} \quad (3.3.4)$$

为 $f(x)$ 的**Euclid范数**（满足范数的三条性质）

□ 定理**3.5** 对于任何 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, 下列结论成立:

1. $|(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ (Cauchy-Schwarz不等式)
2. $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ (三角不等式)
3. $\|f + g\|_2^2 + \|f - g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)$ (平行四边形定律)



正交函数

□ 定义3.7 若 $f(x), g(x) \in C[a, b]$ 满足

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0 \quad (3.3.7)$$

则称 f 与 g 在 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交

若函数族 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ 满足关系

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b \rho(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ A_k > 0, & j = k \end{cases} \quad (3.3.8)$$

则称 $\{\varphi_k\}$ 是 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交函数族;
若 $A_k \equiv 1$, 则称 $\{\varphi_k\}$ 为标准正交函数族



举例

□ 例如，三角函数族

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

就是区间 $[-\pi, \pi]$ 上的正交函数族（权 $\rho(x) \equiv 1$ ），
其

$$(1,1) = 2\pi$$

$$(\sin nx, \sin mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (n, m = 1, 2, \dots)$$

$$(\cos nx, \cos mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (n, m = 1, 2, \dots)$$

$$(\cos nx, \sin mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0 \quad (n, m = 1, 2, \dots)$$



线性无关函数

□ **定义3.8** 设 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 如果

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_{n-1}\varphi_{n-1}(x) = 0$$

当且仅当 $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ 时成立, 则称 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ 在 $[a, b]$ 上是线性无关的

□ 若函数族 $\{\varphi_k\} (k = 0, 1, \dots)$ 中的任何有限个 φ_k 线性无关, 则称 $\{\varphi_k\}$ 为线性无关函数族

■ $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ 就是 $[a, b]$ 上的线性无关函数族



线性无关函数（续）

- 若 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ 是 $[a, b]$ 上的线性无关函数，且 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ 是任意实数，则

$$S(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

的全体是 $C[a, b]$ 中的一个子集，记作

$$\Phi = \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\}$$

- **定理 3.6** $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ 在 $[a, b]$ 上线性无关的充要条件是它的Cramer行列式 $G_{n-1} \neq 0$

$$G_{n-1} = G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \dots & (\varphi_0, \varphi_{n-1}) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_{n-1}, \varphi_0) & (\varphi_{n-1}, \varphi_1) & \dots & (\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}) \end{vmatrix}$$



函数的最佳平方逼近

□ 对 $f(x) \in C[a, b]$, 及 $C[a, b]$ 中的一个子集 $\Phi = \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, 若存在 $S^*(x) \in \Phi$, 使

$$\|f - S^*\|_2^2 = \inf_{S \in \Phi} \|f - S\|_2^2 = \inf_{S \in \Phi} \int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 dx \quad (3.3.11)$$

则称 $S^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 Φ 中的最佳平方逼近函数

□ 显然, 求 $S^*(x)$ 等价于求多元函数

$$I(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) - f(x) \right]^2 dx$$

的最小值



求解最佳平方逼近函数

- 由于 $I(a_0, a_1, \dots, a_n)$ 是关于 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 的二次函数, 利用多元函数极值的必要条件

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0 (k = 0, 1, \dots, n)$$

可得

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2 \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) - f(x) \right] \varphi_k(x) dx = 0 (k = 0, 1, \dots, n)$$

- 于是有

$$\sum_{j=0}^n (\varphi_k, \varphi_j) a_j = (f, \varphi_k) (k = 0, 1, \dots, n) \quad (3.3.13)$$

是关于 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 的线性方程组, 称为法方程



求解最佳平方逼近函数（续）

- 由于 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 线性无关，故系数行列式 $G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \neq 0$ ，于是方程组(3.3.13)有唯一解 $a_k = a_k^* (k = 0, 1, \dots, n)$ ，从而得到

$$S^*(x) = a_0^* \varphi_0(x) + a_1^* \varphi_1(x) + \dots + a_n^* \varphi_n(x)$$

- 下面证明 $S^*(x)$ 满足式(3.3.11)

$$\|f - S^*\|_2^2 = \inf_{S \in \Phi} \|f - S\|_2^2 = \inf_{S \in \Phi} \int_a^b \rho(x) [f(x) - S(x)]^2 dx \quad (3.3.11)$$

即对任何 $S \in \Phi$

$$\int_a^b \rho(x) [f(x) - S^*(x)]^2 dx \leq \int_a^b \rho(x) [f(x) - S(x)]^2 dx \quad (3.3.14)$$



求解最佳平方逼近函数（续）

■ 为此只要考虑

$$\begin{aligned} D &= \int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 dx - \int_a^b \rho(x)[f(x) - S^*(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b \rho(x)[S(x) - S^*(x)]^2 dx + 2 \int_a^b \rho(x)[S(x) - S^*(x)][f(x) - S^*(x)] dx \end{aligned}$$

■ 由于 $S^*(x)$ 的系数 a_k^* 满足下面的方差

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2 \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) - f(x) \right] \varphi_k(x) dx = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

因此

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - S^*(x)]\varphi_k(x) dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

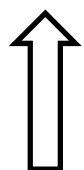


求解最佳平方逼近函数（续）

■ 为此只要考虑

$$\begin{aligned} D &= \int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 dx - \int_a^b \rho(x)[f(x) - S^*(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b \rho(x)[S(x) - S^*(x)]^2 dx + 2 \int_a^b \rho(x)[S(x) - S^*(x)][f(x) - S^*(x)] dx \end{aligned}$$

$$\int_a^b \rho(x)[S(x) - S^*(x)][f(x) - S^*(x)] dx = 0$$



$S(x) - S^*(x)$ 一定可以写成
 $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 的线性组合

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - S^*(x)]\varphi_k(x) dx = 0 (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$



求解最佳平方逼近函数（续）

■ 因此

$$\begin{aligned} D &= \int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 dx - \int_a^b \rho(x)[f(x) - S^*(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b \rho(x)[S(x) - S^*(x)]^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

■ 于是(3.3.14)成立。这就证明了 $S^*(x)$ 的是 $f(x)$ 在 Φ 中的最佳平方逼近函数

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - S^*(x)]^2 dx \leq \int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 dx \quad (3.3.14)$$



最佳平方逼近函数的平方误差

□ 若令 $\delta = f(x) - S^*(x)$, 则平方误差为

$$\begin{aligned}\|\delta\|_2^2 &= (f - S^*, f - S^*) \\ &= (f, f - S^*) - (S^*, f - S^*)\end{aligned}$$

□ 由于

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - S^*(x)]\varphi_k(x) dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

□ 可得 $(S^*, f - S^*) = 0$, 因此

$$\|\delta\|_2^2 = (f, f) - (f, S^*) = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n a_k^*(\varphi_k, f) \quad (3.3.15)$$



举例

- 取 $\varphi_k(x) = x^k, \rho(x) \equiv 1, f(x) \in C[0,1]$, 即要在 H_n 中求 n 次最佳平方逼近多项式

$$S^*(x) = a_0^* + a_1^*x + \cdots + a_n^*x^n$$

- 回顾法方程

$$\sum_{j=0}^n (\varphi_k, \varphi_j) a_j = (f, \varphi_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (3.3.13)$$

- 此时

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_0^1 x^{k+j} dx = \frac{1}{k+j+1}$$

$$(f, \varphi_k) = \int_0^1 f(x) x^k dx \equiv d_k$$



举例（续）

- 构造下面的方程组，求解即可得到系数 a_k^*

$$\mathbf{H}\mathbf{a} = \mathbf{d}$$

- $\mathbf{H}$ 表示行列式 $G_n = G(1, x, x^2, \dots, x^n)$ 对应的矩阵

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & \dots & 1/(2n+1) \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

$\mathbf{H}$ 称为Hilbert矩阵

- 此外

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \quad \mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T$$

$$d_k = (f, x^k) (k = 0, 1, \dots, n) \quad (3.3.17)$$



$$d_k = (f, x^k) (k = 0, 1, \dots, n) \quad (3.3.17)$$

例3.2

□ 求 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式

■ 由式(3.3.17)可算出

$$d_0 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1.147$$

$$d_1 = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \approx 0.609$$

■ 构造方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.147 \\ 0.609 \end{pmatrix}$$



例3.2 (续)

■ 求解, 得到

$$a_0 = 0.934, \quad a_1 = 0.426, \quad S_1^* = 0.934 + 0.426x$$

■ 平方误差

$$\begin{aligned} \|\delta\|_2^2 &= (f, f) - (f, S_1^*) = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^1 a_k^*(\varphi_k, f) \\ &= \int_0^1 (1 + x^2) dx - 0.426d_1 - 0.934d_0 = 0.0026 \end{aligned}$$

■ 最大误差

$$\|\delta\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \sqrt{1 + x^2} - S_1^*(x) \right| = 0.066$$



问题

- $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ 作基求最佳平方逼近多项式，当 n 较大时，系数矩阵式(3.3.16)是高度病态的，求解法方程舍入误差很大

$$Ha = d$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & \dots & 1/(2n+1) \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

- 解决方案：用正交多项式作基