目录

- 根的搜索
- 迭代法
- Newton法
- 弦截法与抛物线法
- 代数方程求根

研究动机

- 在用Newton公式(6.3.3)求x_{k+1}时，不但要求给出函数值$f(x_k)$，而且要求提供导数值$f'(x_k)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{6.3.3}$$

  - 当函数f比较复杂时，提供它的导数值往往是有困难的
- 弦截法与抛物线法
  - 设法利用迭代过程中的“老信息” $f(x_k)$, $f(x_{k-1}), \cdots, f(x_{k-r})$来回避导数值$f'(x_k)$的计算
  - 导出这类求根方法的基础是插值原理

弦截法与抛物线法

- 设$x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-r}$是$f(x) = 0$的一组近似根
  - 利用函数值$f(x_k), f(x_{k-1}), \cdots f(x_{k-r})$构造插值多项式$P_r(x)$
  - 适当选取$P_r(x) = 0$的一个根作为$f(x) = 0$的新近似根x_{k+1}

- 这就确定了一个迭代过程，记迭代函数为φ，则

$$x_{k+1} = \varphi(x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-r})$$

  - 下面具体考察$r = 1$（弦截法）和$r = 2$（抛物线法）两种情形

弦截法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (6.3.3)$$

- 设x_k, x_{k-1}是$f(x) = 0$的近似根，利用$f(x_k)$, $f(x_{k-1})$构造一次插值多项式$P_1(x)$，并用$P_1(x) = 0$的根作为$f(x) = 0$的新近似根x_{k+1}
  - 易得

$$P_1(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k) \qquad (6.4.1)$$

  - 因此有

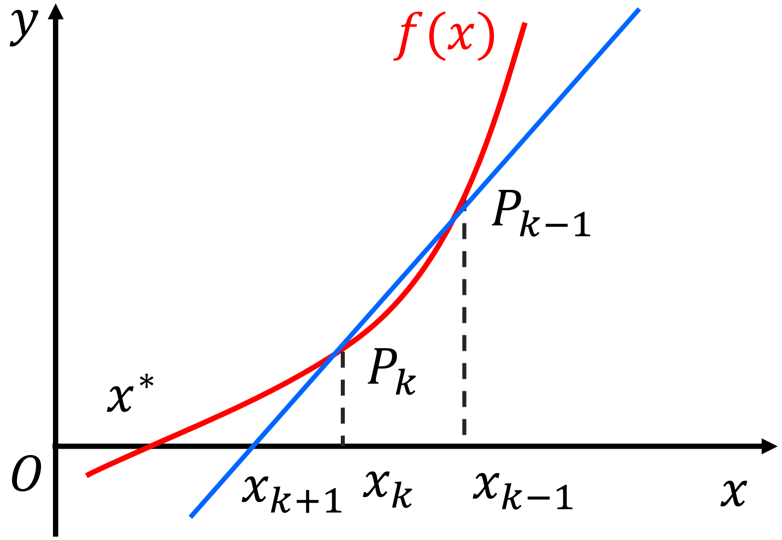
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}) \qquad (6.4.2)$$

  - 导出的迭代公式(6.4.2)可看作Newton公式中的导数$f'(x_k)$用差商$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$取代的结果

弦截法的几何意义

- 曲线$y=f(x)$上横坐标为x_k, x_{k-1}的点分别记作P_k, P_{k-1}，则弦线P_kP_{k-1}的斜率等于差商值$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$，其方程是

$$f(x_k)+\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x-x_k)=0$$



  - x_{k+1}是弦线P_kP_{k-1}与x轴交点的横坐标
  - 因此，被称为弦截法

弦截法 v.s. Newton法

- 弦截法与Newton法都是线性化方法，但有本质区别

- Newton法计算x_{k+1}时只用到前一步的值x_k

- 弦截法在求x_{k+1}时要用到前面两步的结果x_k, x_{k-1}，因此使用这种方法必须先给出两个开始值x_0, x_1

例6.9

- 用弦截法解方程：$f(x) = xe^x - 1 = 0$
  - 设取$x_0 = 0.5, x_1 = 0.6$作为开始值，用弦截法求得的结果如下表所示

k	0	1	2	3	4
x_k	0.5	0.6	0.56532	0.56709	0.56714

  - 比较例6.7用Newton法的计算结果，可见弦截法的收敛速度也是相当快的

k	0	1	2	3
x_k	0.5	0.57102	0.56716	0.56714

弦截法的收敛性

- 弦截法具有超线性的收敛性

- 定理**6.4** 假设$f(x)$在根x^*的邻域Δ: $|x-x^*| \le \delta$内具有二阶连续导数，且对于任意$x \in \Delta$，有$f'(x) \neq 0$，又设初值$x_0, x_1 \in \Delta$，那么当邻域Δ充分小时，弦截法(6.4.2)将按阶$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$收敛到根$x^*$

- Newton法在根x^*的邻近是平方收敛的

弦截法的计算步骤

1. 准备　选取初始近似值x_0, x_1，计算相应的函数值

$$f_0 = f(x_0), \qquad f_1 = f(x_1)$$

2. 迭代　按公式

$$x_2 = x_1 - f_1 / \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

迭代一次，得新的近似值x_2，计算$f_2 = f(x_2)$

3. 控制　如果x_2满足$|\delta| \le \varepsilon_1$或$|f_2| \le \varepsilon_2$，则认为过程收敛，终止迭代并输出$x_2$为所求根；否则执行步骤4

弦截法的计算步骤（续）

此处$\varepsilon_1, \varepsilon_2$是允许误差，且有

$$\delta = \begin{cases} |x_2 - x_1|, & |x_2| < C \\ \dfrac{|x_2 - x_1|}{|x_2|}, & |x_2| \geq C \end{cases}$$

其中C是预先指定的控制常数

4. 修改　若迭代次数达到预先指定的次数N，则认为过程不收敛，计算失败；否则以$(x_1, f_1), (x_2, f_2)$分别代替$(x_0, f_0), (x_1, f_1)$，继续进行第2步的迭代

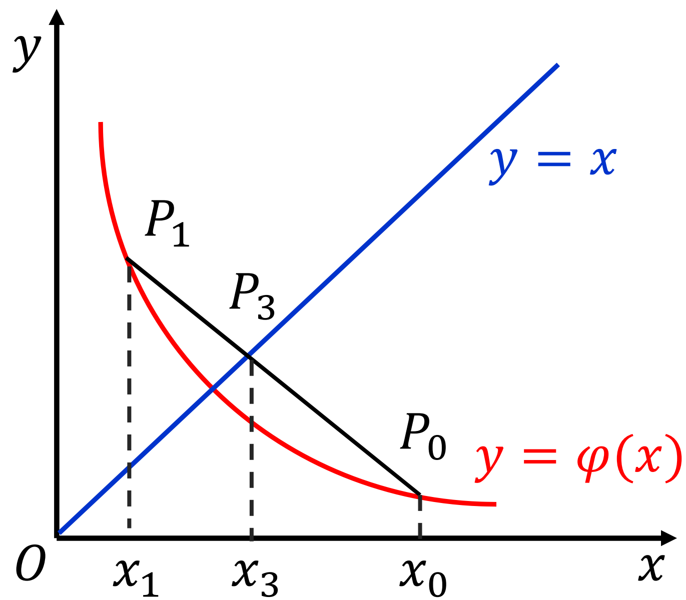
Aitken加速公式

- 用弦截法求解形如$x = \varphi(x)$的方程
  - 设x_0为方程$x = \varphi(x)$的一个近似根，依据迭代值$x_1 = \varphi(x_0)$， $x_2 = \varphi(x_1)$ 在曲线$y = \varphi(x)$上定出两点$P_0(x_0, x_1)$和$P_1(x_1, x_2)$
  - 引弦线P_0P_1，设与直线$y = x$交于一点P_3
  - 则点P_3的坐标x_3满足

$$x_3 = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}(x_3 - x_0)$$

  - 由此解出Aitken加速公式

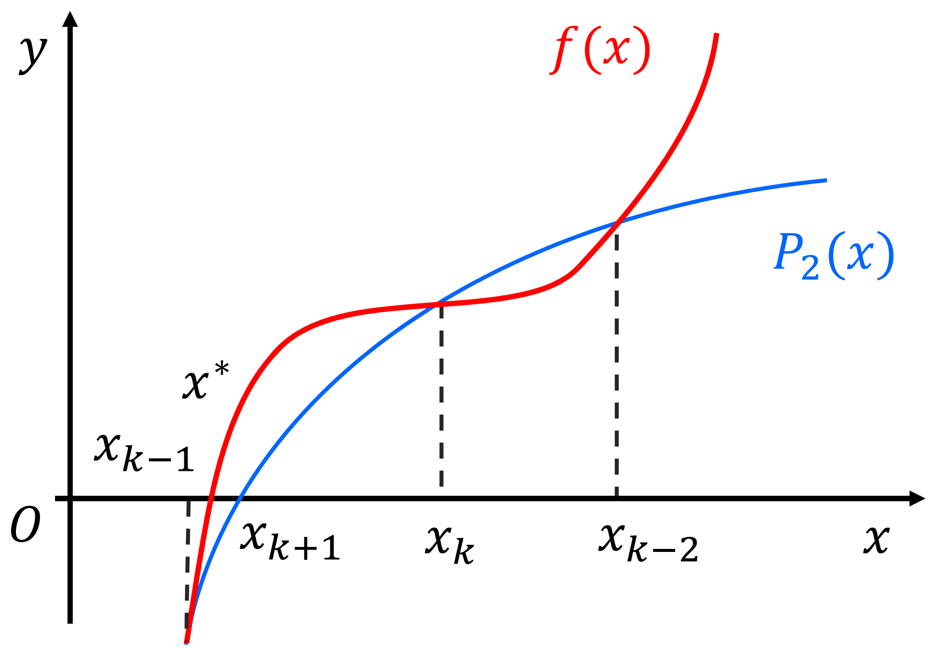
$$x_3 = \frac{x_0 x_2 - x_1^2}{x_0 - 2x_1 + x_2}$$



抛物线法

- 已知方程$f(x)=0$的三个近似根x_k, x_{k-1}, x_{k-2}，以这三点为节点构造二次插值多项式$P_2(x)$，并适当选取$P_2(x)$的一个零点x_{k+1}作为新的近似根，这样确定的迭代过程称为抛物线法

用抛物线$y=P_2(x)$与x轴的交点x_{k+1}作为所求根x^*的近似位置



抛物线法的计算公式

- 插值多项式

$$
\begin{aligned}
P_2(x) = {} & f(x_k) + f[x_k, x_{k-1}](x - x_k) \\
& + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x - x_k)(x - x_{k-1})
\end{aligned}
$$

有两个零点

$$
x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}} \qquad (6.4.3)
$$

- 其中

$$
\omega = f[x_k, x_{k-1}] + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1})
$$

抛物线法的计算公式（续）

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}} \qquad (6.4.3)$$

- 为了从式(6.4.3)中确定一个值x_{k+1}，需要讨论根式前的正负号
  - 在x_k, x_{k-1}, x_{k-2}三个近似根中，自然假定以x_k更接近所求的根x^*，这时，为了保证精度，可以选式(6.4.3)中较接近x_k的一个值作为新的近似根x_{k+1}
  - 为此，只要令根式前的符号与ω的符号相同

例6.10

- 用抛物线法求解方程$f(x)=xe^x-1=0$
  - 设用表6.9中的前三个值$x_0=0.5, x_1=0.6, x_2=0.56532$作为开始值，计算得

$$
\begin{aligned}
&f(x_0)=-0.175639, && f(x_1)=-0.093271,\\
&f(x_2)=-0.005031, && f[x_1,x_0]=2.68910,\\
&f[x_2,x_1]=2.83373, && f[x_2,x_1,x_0]=2.21418,
\end{aligned}
$$

  - 故$\omega=f[x_2,x_1]+f[x_2,x_1,x_0](x_2-x_1)=2.75694$
  - 代入式(6.4.3)，求得

$$x_3=x_2-\frac{2f(x_2)}{\omega+\sqrt{\omega^2-4f(x_2)f[x_2,x_1,x_0]}}=0.56714$$

抛物线法的收敛速率

- 在一定条件下可以证明，对于抛物线法，迭代误差有下列渐近关系式：

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^{1.840}} \to \left|\frac{f'''(x^*)}{6f'(x^*)}\right|^{0.42}$$

  - 可见抛物线法也是超线性收敛的，收敛的阶为 $p = 1.840$，收敛速率比弦截法更接近Newton法

- 弦截法(6.4.2)将按阶$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$收敛到根$x^*$

抛物线法的计算步骤

1. 准备　选定初始近似值x_0, x_1, x_2，计算$f(x)$对应的函数值f_0, f_1, f_2，以及

$$\lambda_2 = \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}$$

2. 迭代　计算

$$\delta_2 = 1 + \lambda_2, \qquad a = f_0\lambda_2^2 - f_1\lambda_2\delta_2 + f_2\lambda_2,$$
$$b = f_0\lambda_2^2 - f_1\delta_2^2 + f_2(\lambda_2 + \delta_2), \qquad c = f_2\delta_2,$$
$$\lambda_3 = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

分母中的±号表示取分母的模较大的一个

抛物线法的计算步骤（续）

于是得新的近似值$x_3 = x_2 + \lambda_3(x_2 - x_1)$，再计算$f_3 = f(x_3)$

3. 控制　若x_3满足$|\delta| \le \varepsilon_1$或$|f_3| \le \varepsilon_2$（$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta$的意义与弦截法的计算步骤中的相同），则终止迭代，输出x_3为所求根；否则执行第4步

4. 修改　如果迭代次数达到预先设定的次数N，则认为过程不收敛，输出计算失效标志；否则以$(x_1, x_2, x_3, f_1, f_2, f_3, \lambda_3)$分别代替$(x_0, x_1, x_2, f_0, f_1, f_2, \lambda_2)$，转第2步继续迭代

目录

- 根的搜索
- 迭代法
- Newton法
- 弦截法与抛物线法
- 代数方程求根

代数方程求根

- 如果$f(x)$是多项式，则$f(x) = 0$特别地称为代数方程
  - 前面介绍的求根方法原则上也适用于解代数方程
  - 由于多项式的特殊性，可以针对其特点提供更为有效的算法
- 多项式求值的秦九韶算法
  - 多项式求值、求导很方便
- 代数方程的Newton法
- 劈因子法

多项式求值的秦九韶算法

- 设给定多项式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

其中系数$a_i\ (0 \le i \le n)$均为实数

- 如何快速计算函数值$f(x_0)$及其各阶导数?
  - 用一次式$x - x_0$除$f(x)$，商记作$P(x)$，余数显然等于$f(x_0)$，即有

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)P(x) \tag{6.5.1}$$

  - 为了确定$P(x)$与$f(x_0)$，定义

$$P(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

多项式求值的秦九韶算法（续）

- 得到两种写法：

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)P(x)$$

$$= f(x_0) + (x - x_0)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2} x + b_{n-1})$$

- 比较两端同次幂的系数，得

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_i = b_i + x_0 b_{i-1}, \qquad 1 \le i \le n-1 \\ a_n = f(x_0) - x_0 b_{n-1} \end{cases}$$

多项式求值的秦九韶算法（续）

- 从而有

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_i = a_i + x_0 b_{i-1}, \qquad 1 \le i \le n \\ f(x_0) = b_n \end{cases} \tag{6.5.2}$$

- 这里提供的一种计算函数值$f(x_0)$的有效算法称为秦九韶法
  - 外国文献中通常称这种算法为Horner算法，其实Horner的工作比秦九韶晚了五六个世纪
  - 这种算法的优点是计算量小，结构紧凑，容易编制计算程序
  - 在计算$f(x_0)$的同时，还得到了$P(x)$的系数

多项式求值的秦九韶算法（续）

- 继续讨论如何求解$f'(x_0)$？
  - 进一步考察$f(x)$的Taylor展开式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

  - 对比式(6.5.1)

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)P(x) \qquad (6.5.1)$$

可知

$$P(x)=f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-1}$$

多项式求值的秦九韶算法（续）

- 由此可见，导数$f'(x_0)$又可看作$P(x)$用因式$x-x_0$相除得出的余数，即有

$$P(x)=f'(x_0)+(x-x_0)Q(x)$$

  其中$Q(x)$是$n-2$次多项式

- 注意到$P(x)$的具体形式在计算$f(x_0)$时已经得到，因此可以针对上式重复使用秦九韶算法，即可得到$f'(x_0)$和$Q(x)$

- 定义 $Q(x)=c_0x^{n-2}+c_1x^{n-3}+\cdots+c_{n-3}x+c_{n-2}$

多项式求值的秦九韶算法（续）

- 再次利用(6.5.2)中的算法

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_i = a_i + x_0 b_{i-1}, & 1 \le i \le n \\ f(x_0) = b_n \end{cases} \tag{6.5.2}$$

可得

$$\begin{cases} c_0 = b_0 \\ c_i = b_i + x_0 c_{i-1}, & 1 \le i \le n-1 \\ f'(x_0) = c_{n-1} \end{cases} \tag{6.5.3}$$

- 继续这一过程，可以依次求出$f(x)$在点x_0处的各阶导数

代数方程的Newton法

- 再就多项式方程

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

考察Newton公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (6.5.4)$$

- 根据式(6.5.2)与式(6.5.3)，式(6.5.4)中的函数值$f(x_k)$和导数值$f'(x_k)$均可方便地求出

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_i = a_i + x_k b_{i-1}, \qquad 1 \le i \le n \\ f(x_k) = b_n \end{cases} \qquad (6.5.5)$$

代数方程的Newton法

- 再就多项式方程

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

考察Newton公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (6.5.4)$$

- 根据式(6.5.2)与式(6.5.3)，式(6.5.4)中的函数值$f(x_k)$和导数值$f'(x_k)$均可方便地求出

$$\begin{cases} c_0 = b_0 \\ c_i = b_i + x_k c_{i-1}, \qquad 1 \le i \le n-1 \\ f'(x_k) = c_{n-1} \end{cases} \qquad (6.5.6)$$

劈因子法

- 如果能从多项式$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$中分离出一个二次因式

$$\omega^*(x) = x^2 + u^*x + v^*$$

就能获得它的一对共轭复根

- 劈因子法的基本思想：从某个近似的二次因子

$$\omega(x) = x^2 + ux + v$$

出发，用某种迭代过程使之逐步精确化

劈因子法（续）

- 用二次式$\omega(x)$除$f(x)$，商记作$P(x)$，它是个$n-2$次多项式，余式为一次式，记作r_0x+r_1

$$f(x)=\left(x^2+ux+v\right)P(x)+r_0x+r_1 \qquad (6.5.7)$$

  - 显然r_0,r_1均为u,v的函数$\begin{cases} r_0=r_0(u,v) \\ r_1=r_1(u,v) \end{cases}$
- 劈因子法的目的是逐步修改u,v的值，使余数r_0,r_1变得很小
- 考察方程

$$\begin{cases} r_0(u,v)=0 \\ r_1(u,v)=0 \end{cases} \qquad (6.5.8)$$

  - 这是关于u,v的非线性方程组

劈因子法（续）

- 设(6.5.8)有解(u^*, v^*)，将$r_0(u^*, v^*) = 0$, $r_1(u^*, v^*) = 0$的左端在(u, v)展开到一阶项，有

$$\begin{cases} r_0 + \dfrac{\partial r_0}{\partial u}(u^* - u) + \dfrac{\partial r_0}{\partial v}(v^* - v) \approx 0 \\ r_1 + \dfrac{\partial r_1}{\partial u}(u^* - u) + \dfrac{\partial r_1}{\partial v}(v^* - v) \approx 0 \end{cases}$$

- 用Newton法的处理思想，将非线性方程组(6.5.8)线性化，归结得到下列线性方程组

$$\begin{cases} r_0 + \dfrac{\partial r_0}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial r_0}{\partial v}\Delta v = 0 \\ r_1 + \dfrac{\partial r_1}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial r_1}{\partial v}\Delta v = 0 \end{cases} \qquad (6.5.9)$$

劈因子法（续）

- 从方程组(6.5.9)解出增量$\Delta u, \Delta v$，即可得改进后的二次因式

$$\omega(x) = x^2 + (u + \Delta u)x + v + \Delta v$$

- 关键问题：如何得到方程组(6.5.9)的各个系数

$$\begin{cases} r_0 + \dfrac{\partial r_0}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial r_0}{\partial v}\Delta v = 0 \\ r_1 + \dfrac{\partial r_1}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial r_1}{\partial v}\Delta v = 0 \end{cases} \tag{6.5.9}$$

$$f(x) = \left(x^2 + ux + v\right)P(x) + r_0 x + r_1 \tag{6.5.7}$$

劈因子法（续）

1. 计算r_0和r_1：将

$$P(x)=b_0x^{n-2}+b_1x^{n-3}+\cdots+b_{n-3}x+b_{n-2}$$

代入式(6.5.7)

$$f(x)=\left(x^2+ux+v\right)p(x)+r_0x+r_1 \qquad (6.5.7)$$

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

- 比较各次幂的系数，易知

$$\begin{cases} a_0=b_0 \\ a_1=b_1+ub_0 \\ a_i=b_i+ub_{i-1}+vb_{i-2}, \qquad 2\le i\le n-2 \\ a_{n-1}=ub_{n-2}+vb_{n-3}+r_0 \\ a_n=vb_{n-2}+r_1 \end{cases}$$

劈因子法（续）

- 于是r_0, r_1的计算公式为

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 - ub_0 \\ b_i = a_i - ub_{i-1} - vb_{i-2}, \qquad 2 \le i \le n \\ r_0 = b_{n-1} \\ r_1 = b_n + ub_{n-1} \end{cases} \tag{6.5.10}$$

- 注意到，在计算r_0, r_1的同时，我们还得到了$P(x)$的系数

$$P(x) = b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \cdots + b_{n-3} x + b_{n-2}$$

劈因子法（续）

2. 计算$\frac{\partial r_0}{\partial v},\frac{\partial r_1}{\partial v}$：对式(6.5.7)关于$v$求导

$$f(x)=(x^2+ux+v)P(x)+r_0x+r_1 \qquad (6.5.7)$$

得

$$P(x)=-(x^2+ux+v)\frac{\partial P}{\partial v}+s_0x+s_1 \qquad (6.5.11)$$

$$s_0=-\frac{\partial r_0}{\partial v},s_1=-\frac{\partial r_1}{\partial v} \qquad (6.5.12)$$

- 由(6.5.11)可知，用x^2+ux+v除$P(x)$，作为余式可得s_0x+s_1
- 由于$P(x)$是$n-2$次多项式，这里商$\frac{\partial P}{\partial v}$是$n-4$次多项式

劈因子法（续）

$$P(x) = -(x^2 + ux + v)\frac{\partial P}{\partial v} + s_0 x + s_1 \qquad (6.5.11)$$

- 记 $\dfrac{\partial P}{\partial v} = c_0 x^{n-4} + c_1 x^{n-5} + \cdots + c_{n-5} x + c_{n-4}$
- 注意到，$P(x)$已经在第一步计算得到，因此可以继续模仿(6.5.10)的计算过程，来计算s_0和s_1

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 - ub_0 \\ b_i = a_i - ub_{i-1} - vb_{i-2}, \qquad 2 \le i \le n \\ r_0 = b_{n-1} \\ r_1 = b_n + ub_{n-1} \end{cases} \qquad (6.5.10)$$

劈因子法（续）

- 得到

$$\begin{cases} c_0 = b_0 \\ c_1 = b_1 - ub_0 \\ c_i = b_i - uc_{i-1} - vc_{i-2}, \qquad 2 \le i \le n-2 \\ s_0 = c_{n-3} \\ s_1 = c_{n-2} + uc_{n-3} \end{cases}$$

- 根据

$$s_0 = -\frac{\partial r_0}{\partial v}, s_1 = -\frac{\partial r_1}{\partial v} \qquad (6.5.12)$$

可知

$$\frac{\partial r_0}{\partial v} = -s_0, \frac{\partial r_1}{\partial v} = -s_1$$

$$P(x) = -(x^2 + ux + v)\frac{\partial P}{\partial v} + s_0 x + s_1 \quad (6.5.11)$$

劈因子法（续）

3. 计算$\frac{\partial r_0}{\partial u}, \frac{\partial r_1}{\partial u}$：对式(6.5.7)关于$u$求导

$$f(x) = (x^2 + ux + v)P(x) + r_0 x + r_1 \qquad (6.5.7)$$

得

$$xP(x) = -(x^2 + ux + v)\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial r_0}{\partial u}x - \frac{\partial r_1}{\partial u}$$

- 另外，由式(6.5.11)有

$$\begin{aligned} xP(x) &= -(x^2 + ux + v)x\frac{\partial P}{\partial v} + (s_0 x + s_1)x \\ &= -(x^2 + ux + v)\left(x\frac{\partial P}{\partial v} - s_0\right) - (us_0 - s_1)x - vs_0 \end{aligned}$$

劈因子法（续）

- 对比

$$xP(x) = -(x^2+ux+v)\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial r_0}{\partial u}x - \frac{\partial r_1}{\partial u}$$

$$xP(x) = -(x^2+ux+v)\left(x\frac{\partial P}{\partial v} - s_0\right) - (us_0 - s_1)x - vs_0$$

可得

$$\frac{\partial r_0}{\partial u} = us_0 - s_1, \frac{\partial r_1}{\partial u} = vs_0$$

总结

- 根的搜索
  - 逐步搜索法、二分法、二分法的收敛性
- 迭代法
  - 收敛条件、误差估计、局部收敛性
  - 迭代公式的加工、Aitken方法
- Newton法
  - Newton公式、几何解释
  - 局部收敛性、Newton下山法

总结

- 弦截法与抛物线法
  - 弦截法、几何意义、收敛性
  - 抛物线法、几何意义、收敛性

- 代数方程求根
  - 多项式求值的秦九韶算法
  - 代数方程的Newton法
  - 劈因子法