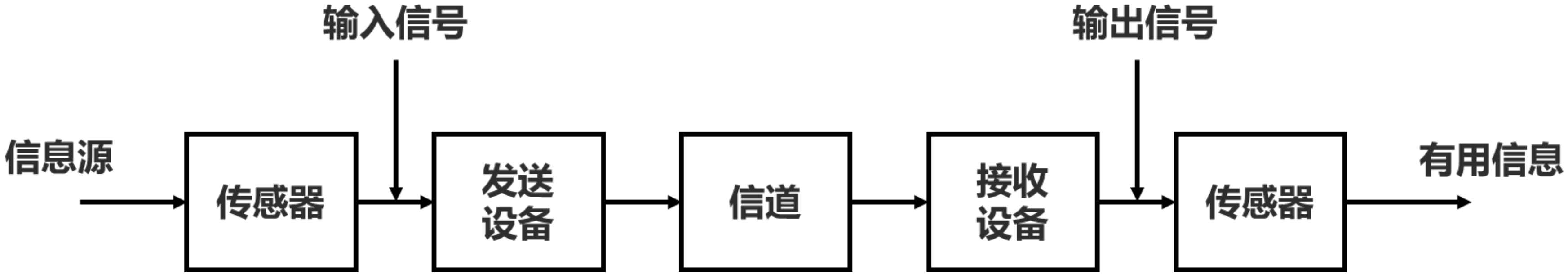
02 系统的时域分析

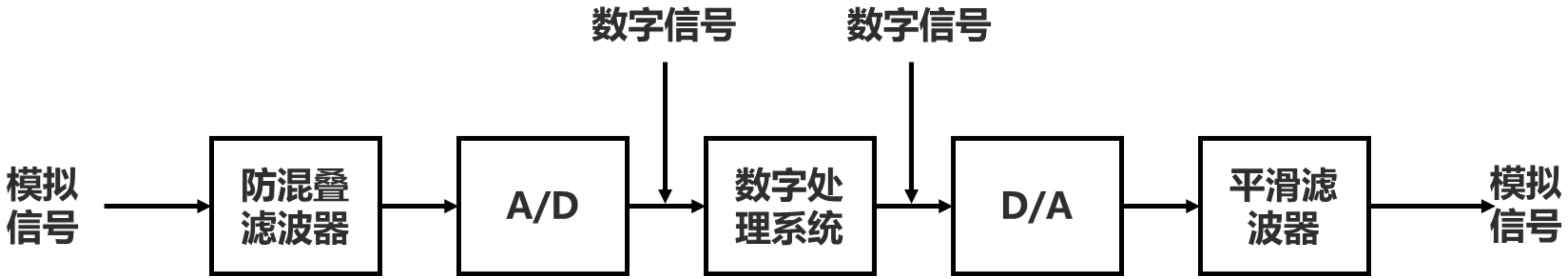
系统的描述以及卷积算子

系统（system）

- **系统**是指由相互作用和依赖的若干事物组成的、具有特定功能的整体
  - 从信息源到有用信息（电视广播通信系统）



  - 数字信号的处理（**A:Analog, D:Digital**）



本章概要

1.系统的分类和描述：线性系统和时不变系统

2.卷积：卷积运算的定义和运算

3.卷积的性质：卷积的性质和特殊信号的卷积

4.卷积的应用：使用卷积分析系统，卷积和相关

本章概要

1.系统的分类和描述：线性系统和时不变系统

2.卷积：卷积运算的定义和运算

3.卷积的性质：卷积的性质和特殊信号的卷积

4.卷积的应用：使用卷积分析系统，卷积和相关

系统的分析

什么是系统
（如何描述系统）

系统的类型

- 记忆性
- 可逆性
- 因果性
- 稳定性
- 线性
- 时不变性

系统的分析
（输出怎么变化）

系统的描述

- 模型描述
  - 输入输出描述：N阶**微分**方程或N阶**差分**方程，如

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)=x(t)$$

  - 状态空间描述

连续时间系统

- 系统的输入激励与输出响应都必须为**连续**时间信号
- 连续时间系统的数学模型是**微分**方程

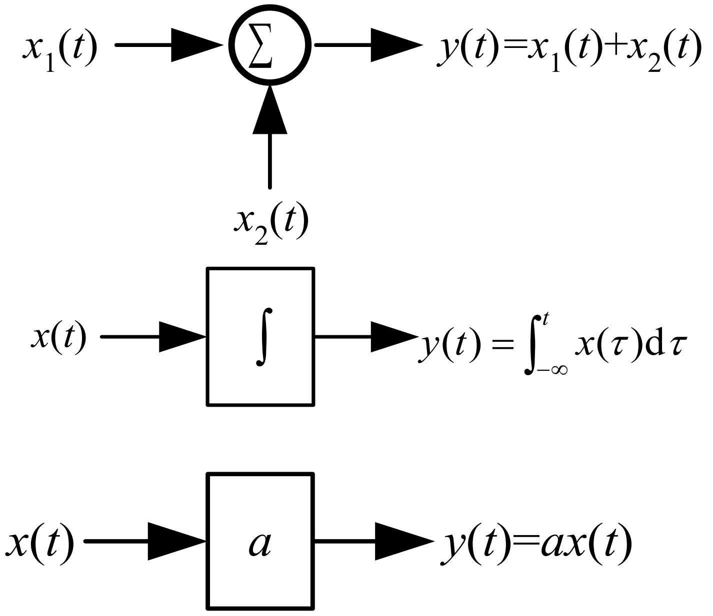
离散时间系统

- 系统的输入激励与输出响应都必须为离散时间信号
- 离散时间系统的数学模型是差分方程
- 优点：可靠性高，随环境变化小；系统参数精度高；利用存储器存储信息；应用更灵活；易消除噪声，易处理低频信号；多维信号处理技术成熟

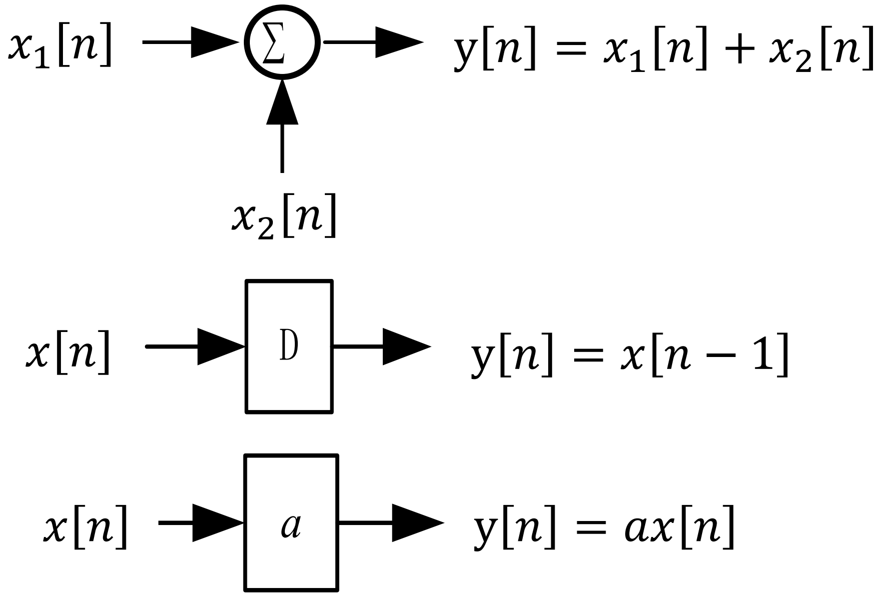
系统的描述

- 模型描述
  - 输入输出描述；状态空间描述
- 方框图表示

连续时间系统

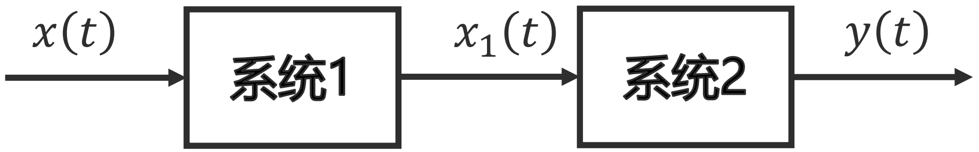


离散时间系统

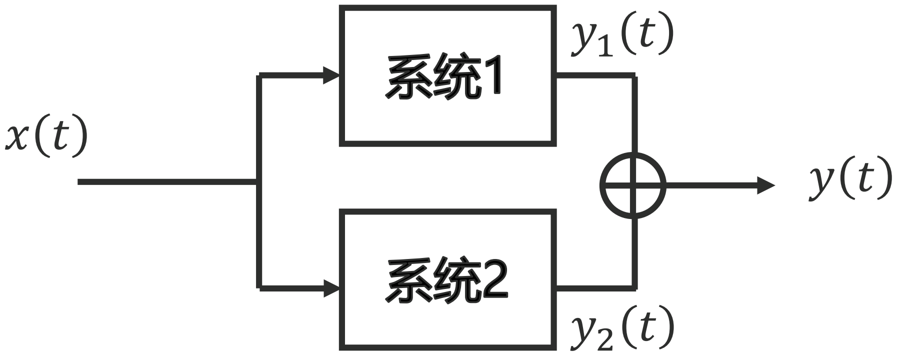


系统互联

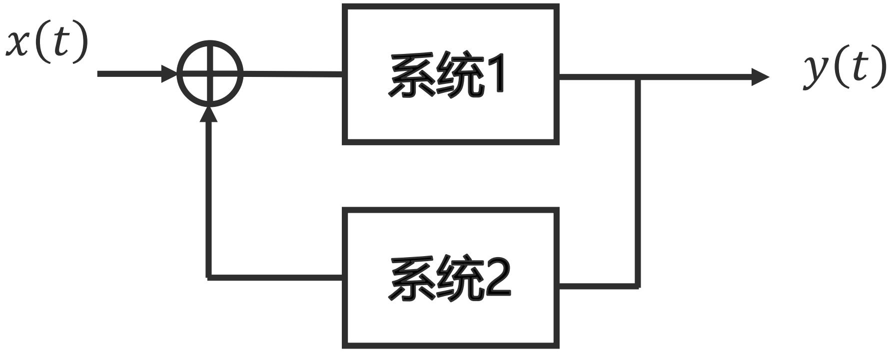
- 串联（级联）



- 并联

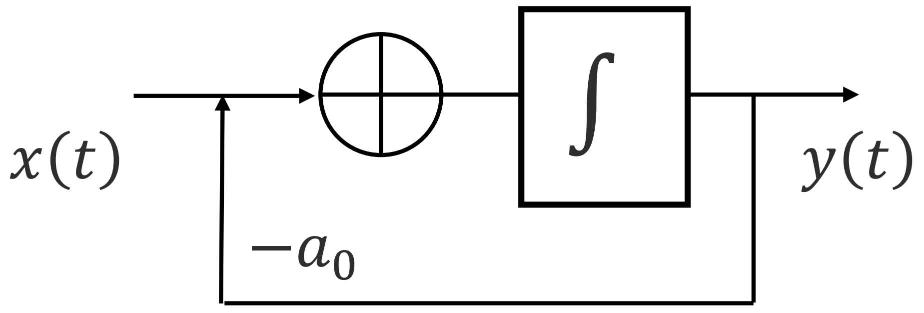


- 反馈连接



通过方框图写出系统方程

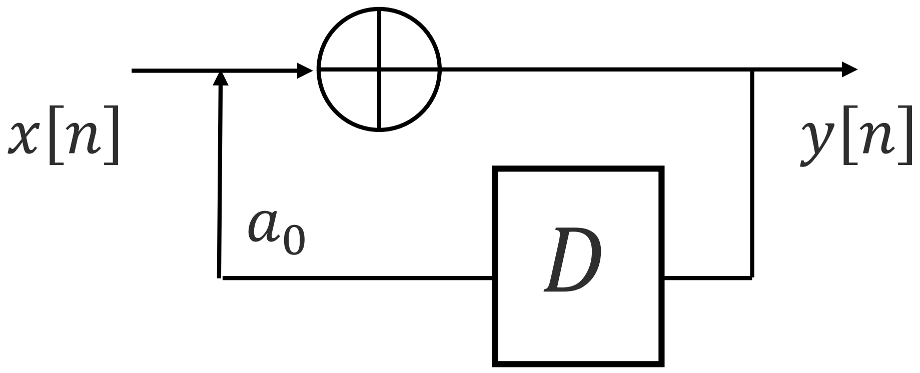
- 连续时间系统



$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) - a_0 y(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = x(t)$$

- 离散时间系统



$$y[n] = a_0 y[n-1] + x[n]$$

$$y[n] - a_0 y[n-1] = x[n]$$

系统的分类（记忆性）

- 记忆系统和无记忆系统
  - 无记忆系统：系统的输出只取决于系统**该时刻**的输入
  - 恒等系统

$$y(t) = x(t); \quad y[n] = x[n]$$

  - 累加器

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

  - 延时单元

$$y[n] = x[n-1]$$

系统的分类（可逆性）

- 可逆系统
  - 系统在不同的输入下，导致不同的输出，则系统可逆
  - 如果一个系统可逆，则存在一个**逆系统**，系统与逆系统级联，作用等效于恒等系统

  - 例：$y(t) = 2x(t)$为可逆系统，逆系统为$w(t) = \frac{1}{2}y(t)$
  - 例：累加器

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

为可逆系统，逆系统为

$$w[n] = y[n] - y[n-1]$$

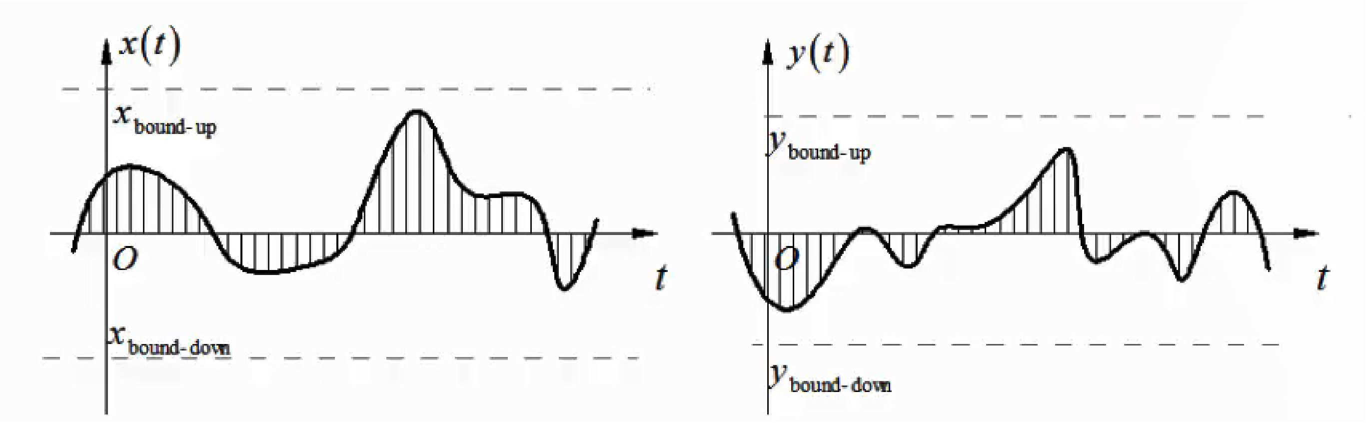
系统的分类（因果性）

- 因果系统：
  - 当且仅当输入信号激励系统时才产生系统输出响应的系统。
  - 如果响应$y(t)$并不依赖于将来的激励如$x(t+1)$，那么系统就是因果的

- **非因果**系统
  - $y[n] = x[-n]$
  - $y[n] = x[n] - x[n+1]$
  - $y(t) = x(2t)$
  - $y(t) = \frac{1}{3}\left(x(t-1) + x(t) + x(t+1)\right)$

系统的分类（稳定性）

- 稳定系统
  - 稳定系统在微小的输入下的响应不会发散
  - 指有界输入产生有界输出的系统
  - BIBO：Bounded Input, Bounded Output



- 不稳定系统：$y(t) = tx(t)$

系统的分类（线性系统）

- 如果一个输入信号是由几个**信号加权组成**的，则线性系统的输出是系统对这组信号中**每一个响应的加权和**
  - 齐次性（比例性）：若$x_1(t) \to y_1(t)$，则$Kx_1(t) \to Ky_1(t)$
  - 可加性（叠加性）：若$x_1(t) \to y_1(t), x_2(t) \to y_2(t)$，则$x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$

- 连续线性特性：若$x_1(t) \to y_1(t), x_2(t) \to y_2(t)$，

  则$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \to \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$　　（α，β为任意常数）

- 离散线性系统：若$x_1[n] \to y_1[n], x_2[n] \to y_2[n]$，

  则$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \to \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$

线性系统

- 系统的齐次性和可加性**可以不同时满足**
- 满足**可加**性，不满足齐次性

$$y(t) = Re[x(t)]$$

  - 满足可加性
  - 令$a = i$，则$y(t) = Re[i \cdot x(t)] = Im[x(t)] \neq i \cdot Re[x(t)]$，不满足齐次性
- 满足**齐次**性，不满足可加性

$$y(t) = \frac{[x'(t)]^2}{x(t)}$$

  - 满足齐次性
  - 输入为$x_1(t) + x_2(t)$时

$$y(t) = \frac{[x_1'(t)+x_2'(t)]^2}{x_1(t)+x_2(t)} \neq \frac{[x_1'(t)]^2}{x_1(t)} + \frac{[x_2'(t)]^2}{x_2(t)} = y_1(t) + y_2(t)\text{，不满足可加性}$$

系统的分类

- 如果一个输入信号是由几个**信号加权组成**的，则线性系统的输出是系统对这组信号中每一个响应的加权和
  - 齐次性：若$x_1(t) \to y_1(t)$，则$Kx_1(t) \to Ky_1(t)$
  - 可加性：若$x_1(t) \to y_1(t), x_2(t) \to y_2(t)$，则$x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$

- **叠加性质**：若

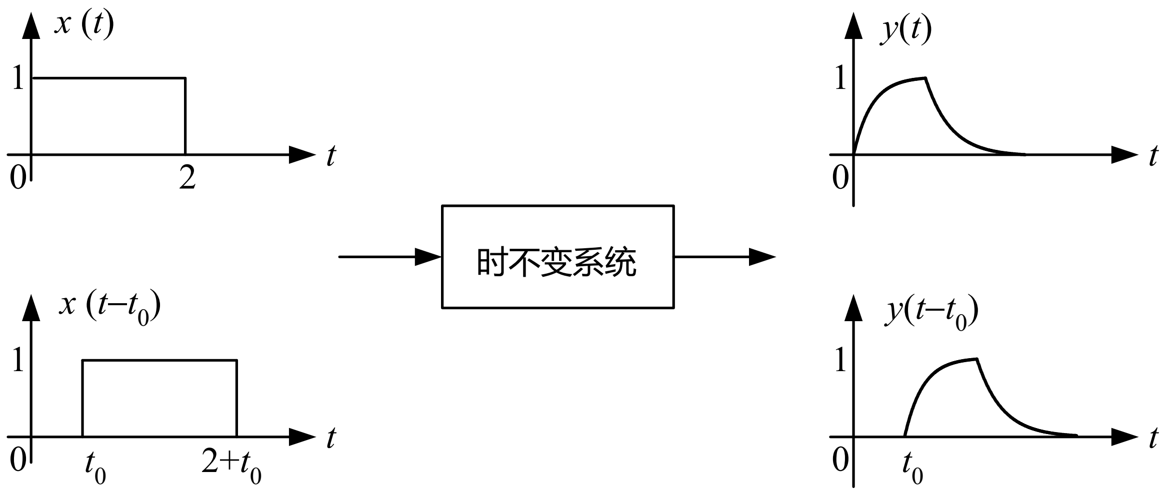
$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + \cdots$$

则响应为

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + \cdots$$

系统的分类

- 系统的输出响应与输入激励的关系不随输入激励作用于系统的时间起点而改变，就称为**时不变**系统。否则，就称为时变系统。
- 线性时不变系统可由定**常系数**的**线性**微分方程或差分方程描述。



- 连续时不变系统：$x(t) \rightarrow y(t)$ 则 $x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$
- 离散时不变系统：$x[n] \rightarrow y[n]$ 则 $x[n-k] \rightarrow y[n-k]$

时不变系统的判定

- $y(t) = \sin[x(t)]$ 时不变系统
- $y(t) = \cos t \cdot x(t)$ 时变系统
- $y(t) = 4x^2(t) + 3x(t)$ 时不变系统
- $y[n] = 2n \cdot x[n]$ 时变系统
- 线性时不变系统：Linear Time Invariant (LTI)

本章概要

1.系统的分类和描述：线性系统和时不变系统

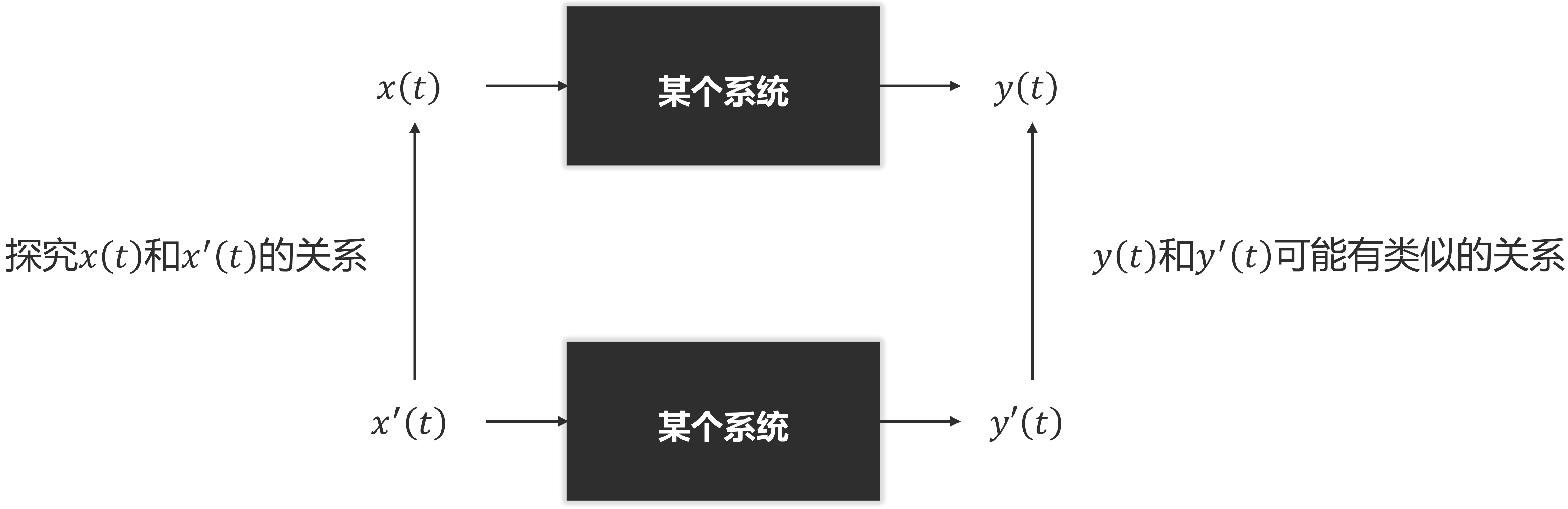
2.卷积：卷积运算的定义和运算

3.卷积的性质：卷积的性质和特殊信号的卷积

4.卷积的应用：使用卷积分析系统，卷积和相关

如何探究一个系统

$x(t)$非常复杂，对于每个$x(t)$都有不同的$y(t)$ $\longrightarrow$ 微分、差分方程刻画

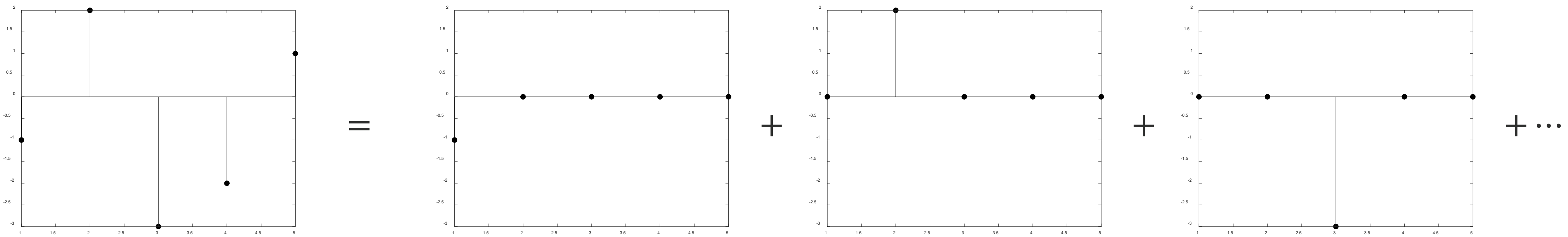


某个特殊信号的响应容易刻画

信号脉冲分解

- 信号的筛选性质

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \qquad \text{基信号}$$



系统的单位脉冲响应

- 线性时不变系统的**线性**性质

$$x[n] = \sum_{k} a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + \cdots$$

- 线性系统的单位脉冲响应

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \quad h_k[n]$$

- $h_k[n]$为单位脉冲$\delta[n-k]$的响应

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{离散系统}} \longrightarrow h_k[n]$$

系统的单位脉冲响应

- 线性时不变系统的**时不变性**

$$\begin{array}{lccc}
 & \delta[n+1], & \delta[n], & \delta[n-1] \\
\text{系统响应} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & h_{-1}[n], & h_0[n], & h_1[n] \\
\text{时不变性} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & h_0[n+1], & h_0[n], & h_0[n-1]
\end{array}$$

- 系统的响应表示为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

系统的单位脉冲响应

- 离散线性时不变系统

$x[n] \longrightarrow$ 离散系统 $\longrightarrow y[n]$

筛选性质

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

时不变性质

$\delta[n-k] \longrightarrow$ 离散系统 $\longrightarrow h_k[n] = h[n-k]$

- 系统的响应表示为

叠加性质

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

卷积和

- 卷积和定义：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- 符号记为

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- 线性时不变系统对任意输入的响应可以用系统对单位脉冲的响应表示；
- 线性时不变系统的**单位脉冲响应**刻画了系统的特性。

卷积和的计算

- 卷积和运算

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

- 计算步骤：
  - 将$x[n]$和$h[n]$中的自变量由n改为k；
  - 把其中一个信号**翻转**得$h[-k]$，再**平移**n；

$$h[k]\to h[-k]\to h[-(k-n)]=h[n-k]$$

  - 将$x[k]$与$h[n-k]$相乘；对乘积后信号的求和；
  - 不断改变n，计算$x[k]h[n-k]$在所有k上的求和

卷积和计算

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

- 计算$x[n]=\alpha^n u[n]$与$h[n]=\beta^n u[n]$的卷积和

$$\alpha^n u[n]*\beta^n u[n]$$

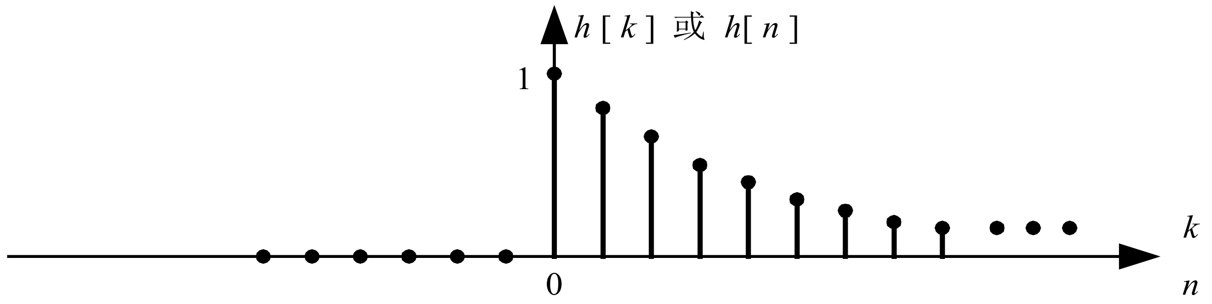
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^k u[k]\beta^{n-k}u[n-k]$$

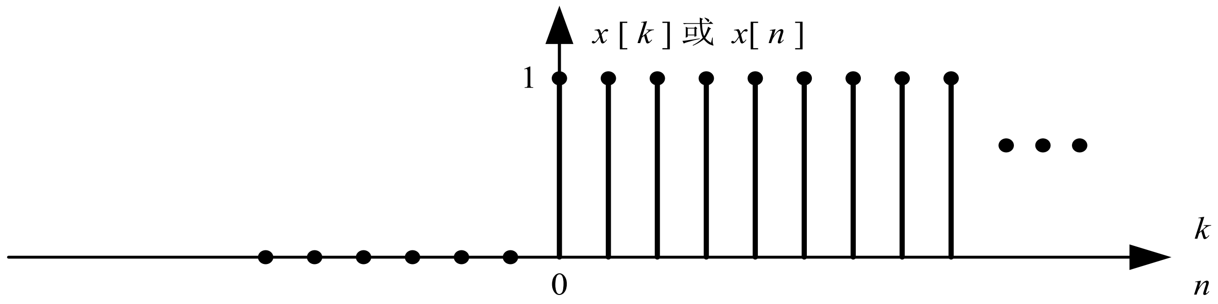
$$=\begin{cases}\sum_{k=0}^{n}\alpha^k\beta^{n-k}, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}u[n], & \alpha\neq\beta\\ (n+1)\alpha^n u[n], & \alpha=\beta\end{cases}$$

卷积和计算

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- 已知$x[n] = u[n]$，$h[n] = a^n u[n]$，$0 < a < 1$，计算$y[n] = x[n] * h[n]$

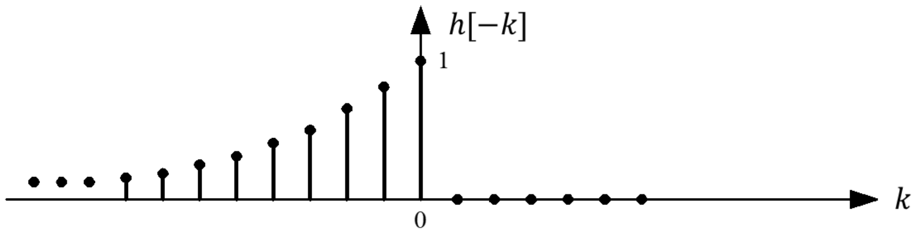


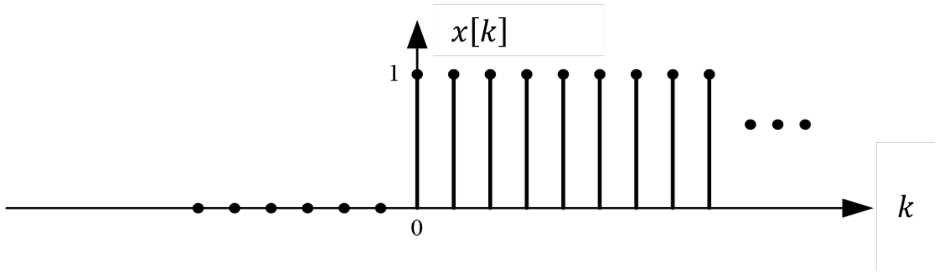


卷积和计算

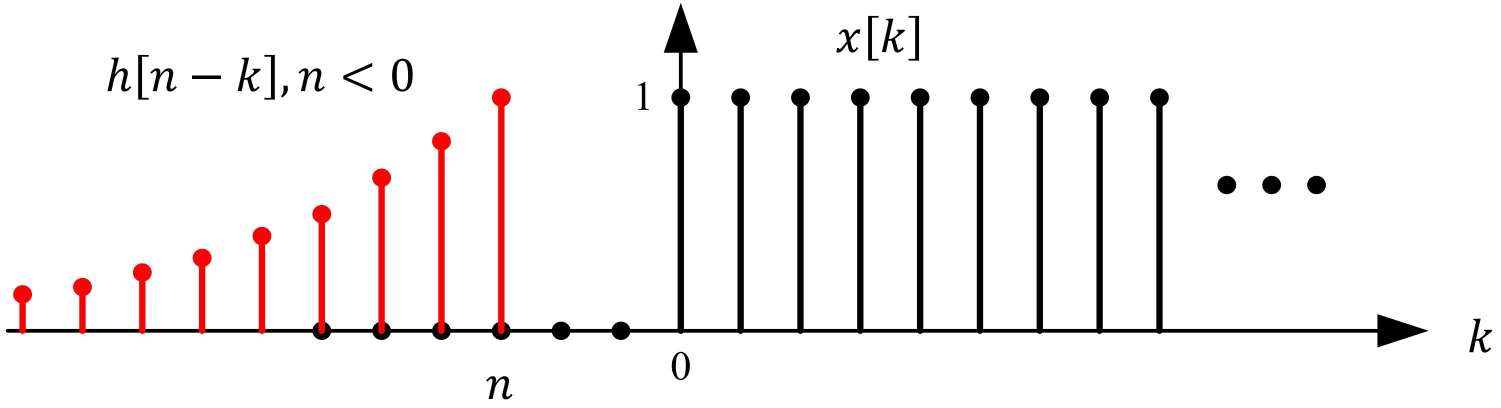
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

- 已知$x[n]=u[n]$，$h[n]=a^n u[n]$，$0<a<1$，计算$y[n]=x[n]*h[n]$





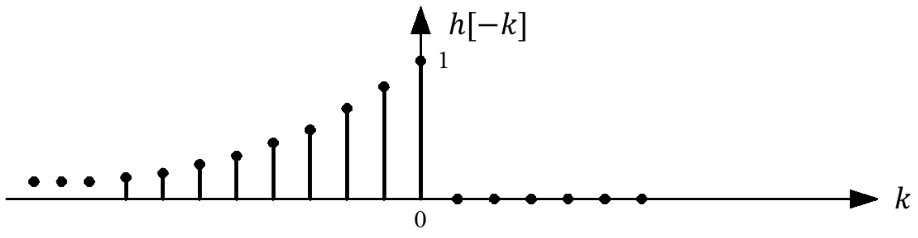
- $n<0, x[k]$与$h[n-k]$没有相遇, $y[n]=0$

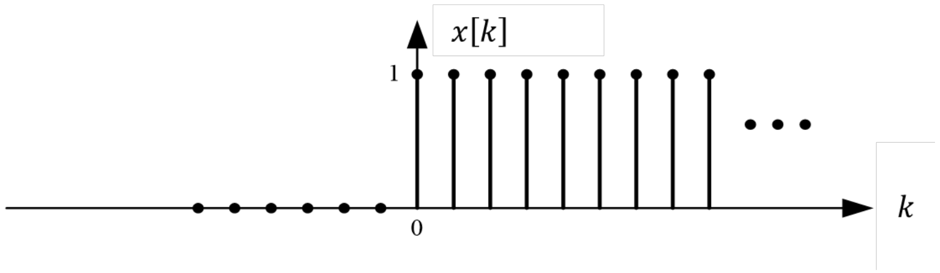


卷积和计算

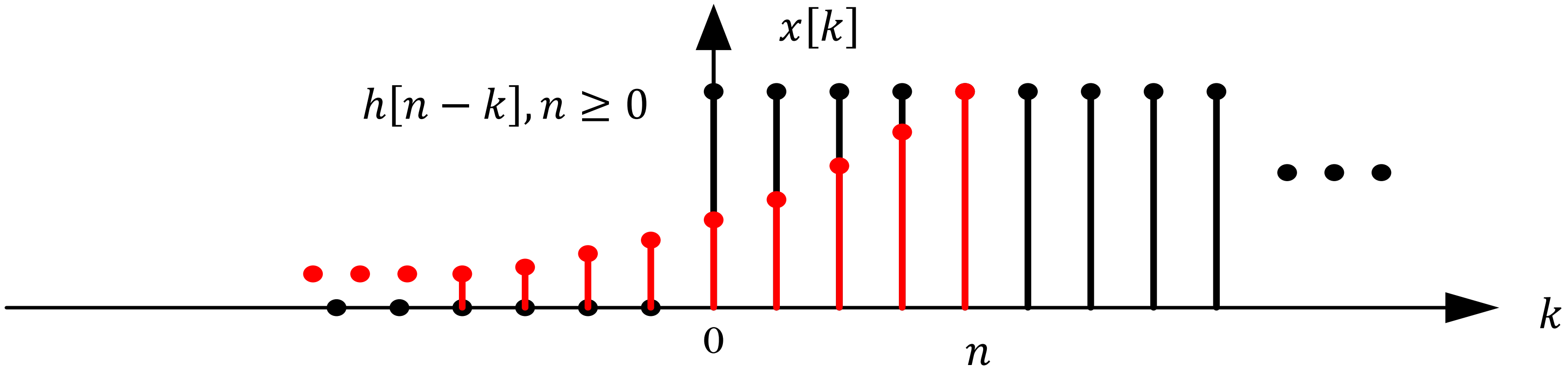
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

- 已知$x[n]=u[n]$，$h[n]=a^nu[n]$，$0<a<1$，计算$y[n]=x[n]*h[n]$





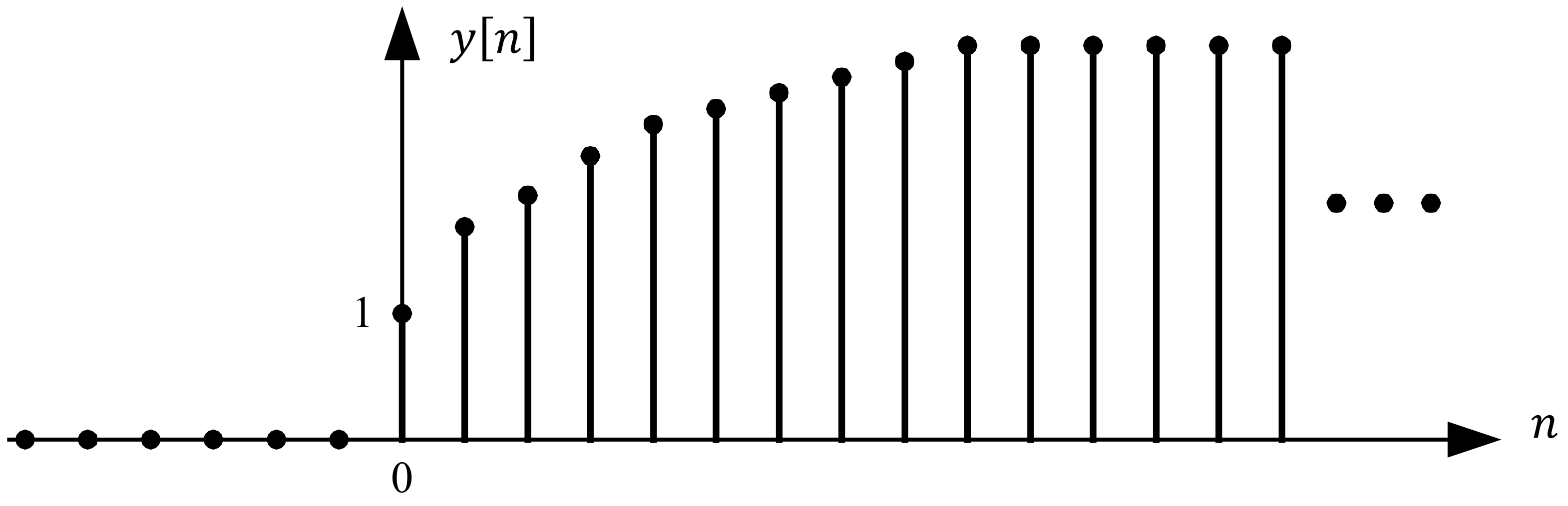
- $n\geq 0$, $x[k]$与$h[n-k]$相遇, $y[n]=\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}$



卷积和计算

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

- 已知$x[n]=u[n]$，$h[n]=a^n u[n]$，$0<a<1$，计算$y[n]=x[n]*h[n]$
  - $n<0, x[k]$与$h[n-k]$没有相遇, $y[n]=0$
  - $n\geq 0, x[k]$与$h[n-k]$相遇, $y[n]=\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}$

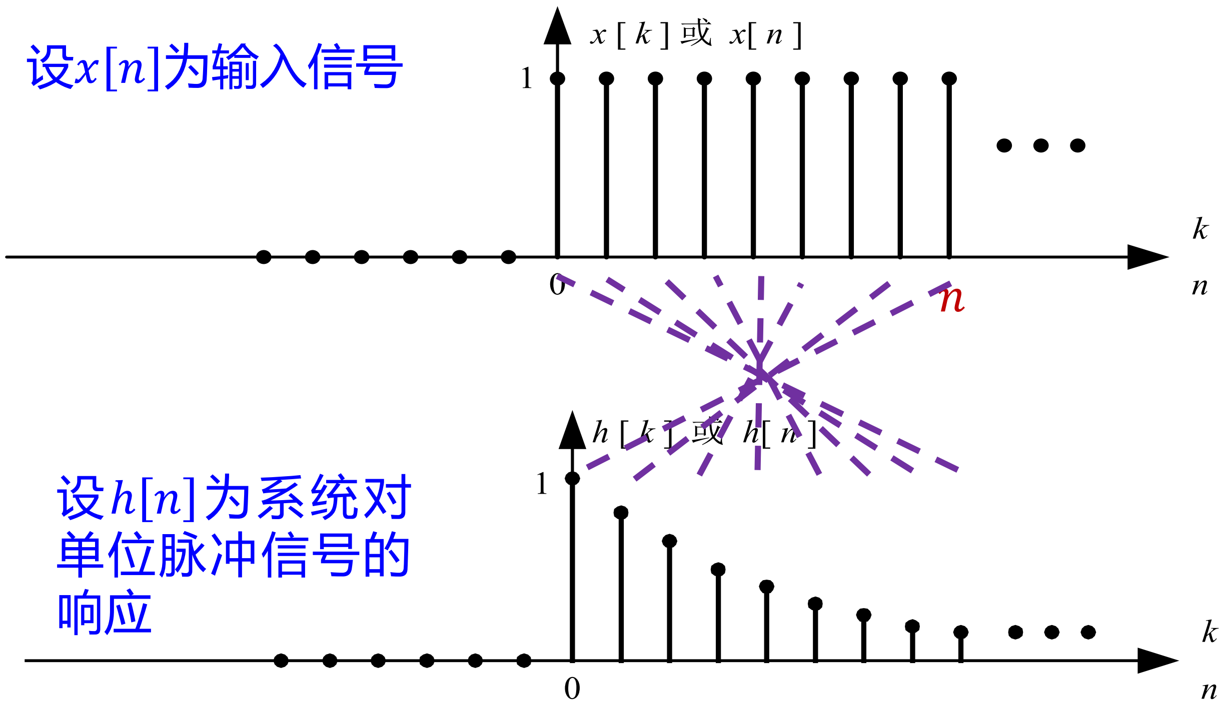


卷积和计算的补充说明

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

设$x[n]$为输入信号

设$h[n]$为系统对单位脉冲信号的响应



系统在n时刻的输出，由$x[0]\ldots x[n]$共同决定，距离n越远（输入系统越早）影响越弱

0时刻强度为1的信号输入系统，系统的响应$h[0]$较大

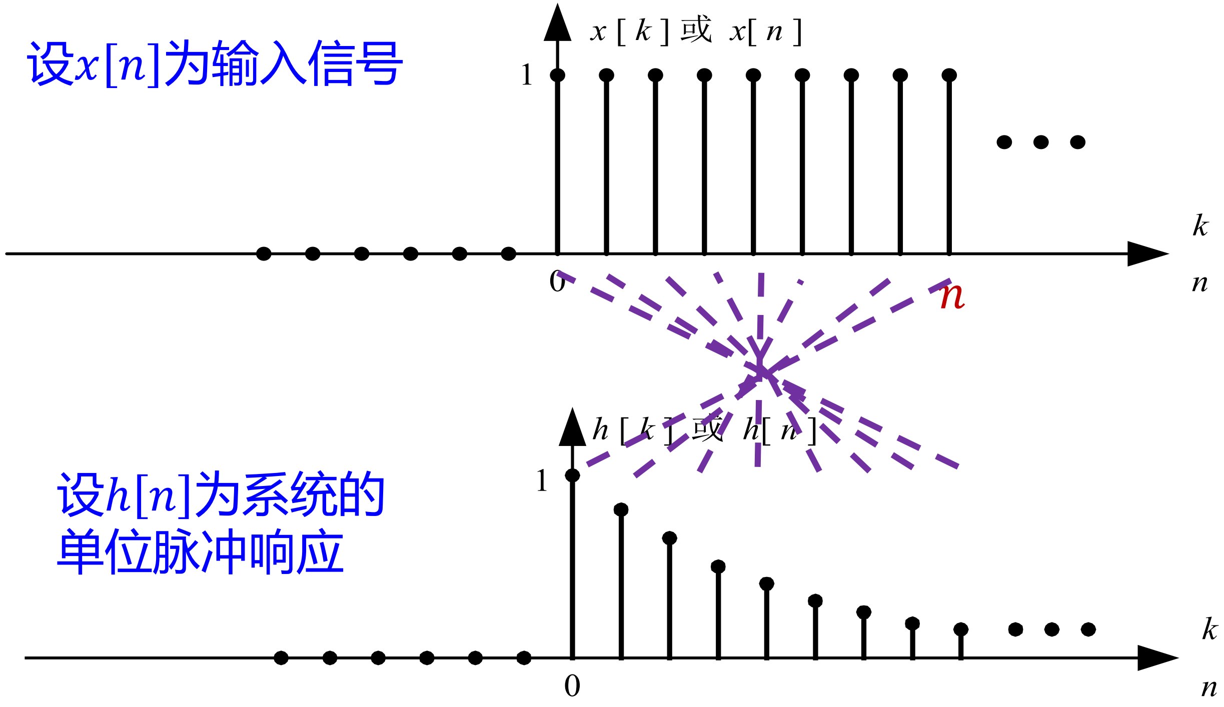
输入系统经过一段时间，响应$h[n]$逐渐变小

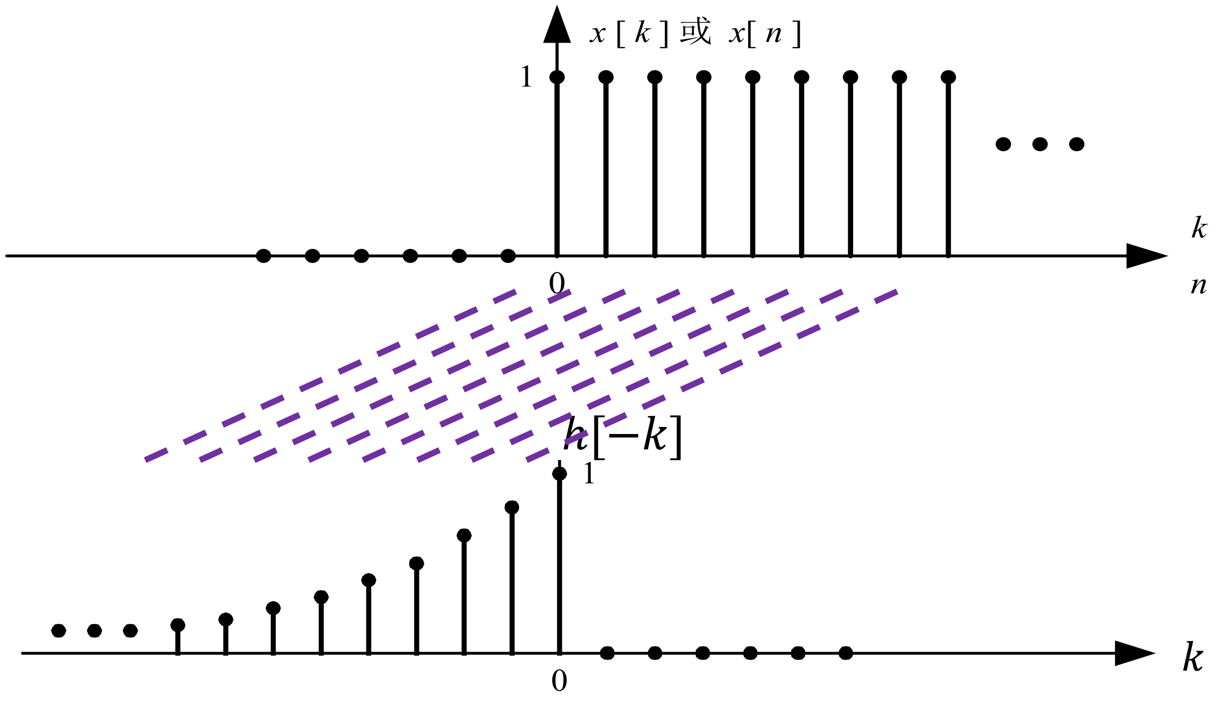
卷积和计算的补充说明

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

设$x[n]$为输入信号

设$h[n]$为系统的单位脉冲响应





0时刻强度为1的信号输入系统，系统的响应$h[0]$较大

输入系统经过一段时间，响应$h[n]$逐渐变小

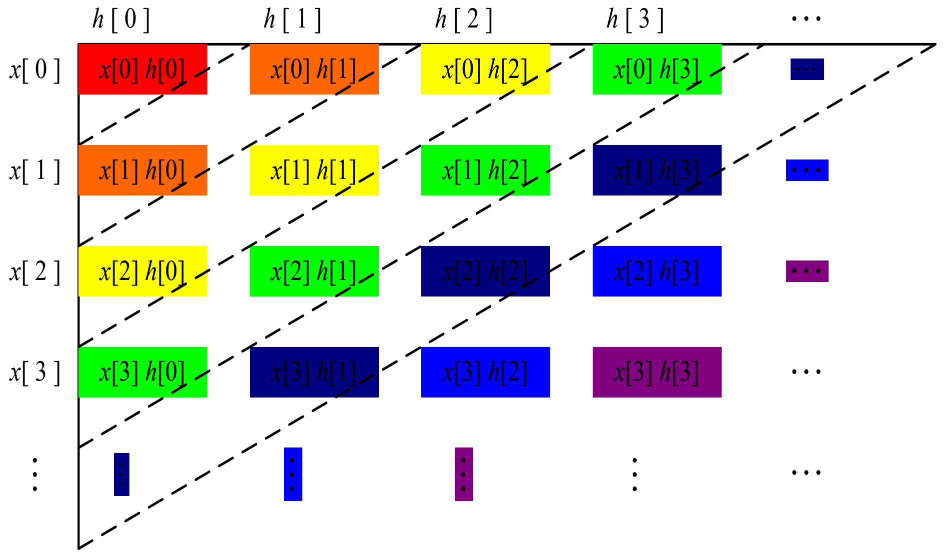
卷积和计算（表格法）

- 设$x[n]$和$h[n]$都是**因果序列**，则有

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=0}^{n}x[k]h[n-k],n\geq 0$$

- 当$n=0$，$y[0]=x[0]h[0]$
- 当$n=1$，$y[1]=x[0]h[1]+x[1]h[0]$
- 当$n=2$，$y[2]=x[0]h[2]+x[1]h[1]+x[2]h[0]$
- 当$n=3$，$y[3]=x[0]h[3]+x[1]h[2]+x[2]h[1]+x[3]h[0]$

- 将$h[n]$的值顺序排成**一行**，将$x[n]$的值顺序排成**一列**，行与列的交叉点记入相应$x[n]$与$h[n]$的乘积:



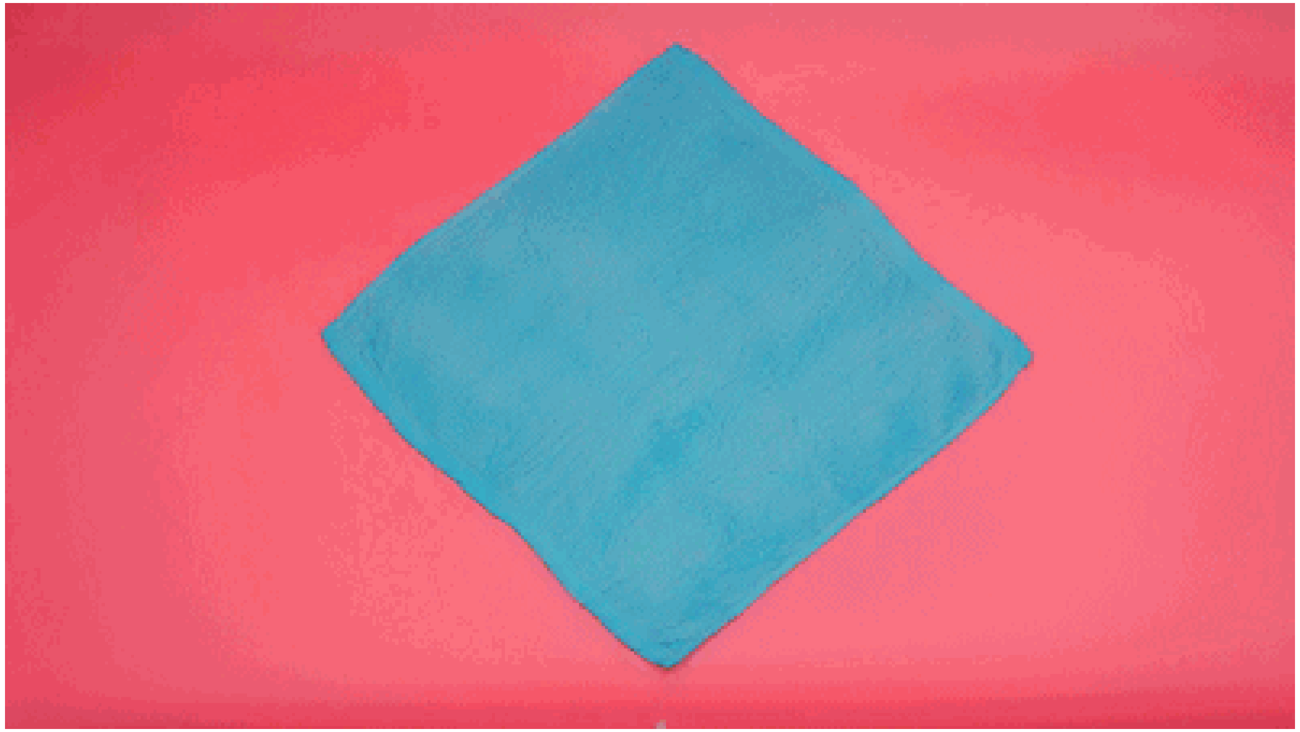
- 对角斜线上各数值就是 $x[k]h[n-k]$的值。
- 对角斜线上各数值的和就是$y[n]$各项的值。

卷积和计算（表格法）

- 计算$x[n] = \{1, 2, \overset{\downarrow}{0}, 3, 2\}$与$h[n] = \{1, \overset{\downarrow}{4}, 2, 3\}$的卷积和
  - 利用卷积和的起点坐标等于待卷积两序列起点之和，确定卷积和的**原点**

		$x[-2]$	$x[-1]$	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$
		1	2	0	3	2
$h[-1]$	1	1	2	0	3	2
$h[0]$	4	4	8	0	12	8
$h[1]$	2	2	4	0	6	4
$h[2]$	3	3	6	0	9	6

$$y[n] = \{1, 6, 10, \overset{\downarrow}{10}, 20, 14, 13, 6\}$$



https://www.zhihu.com/question/22298352

卷积和计算

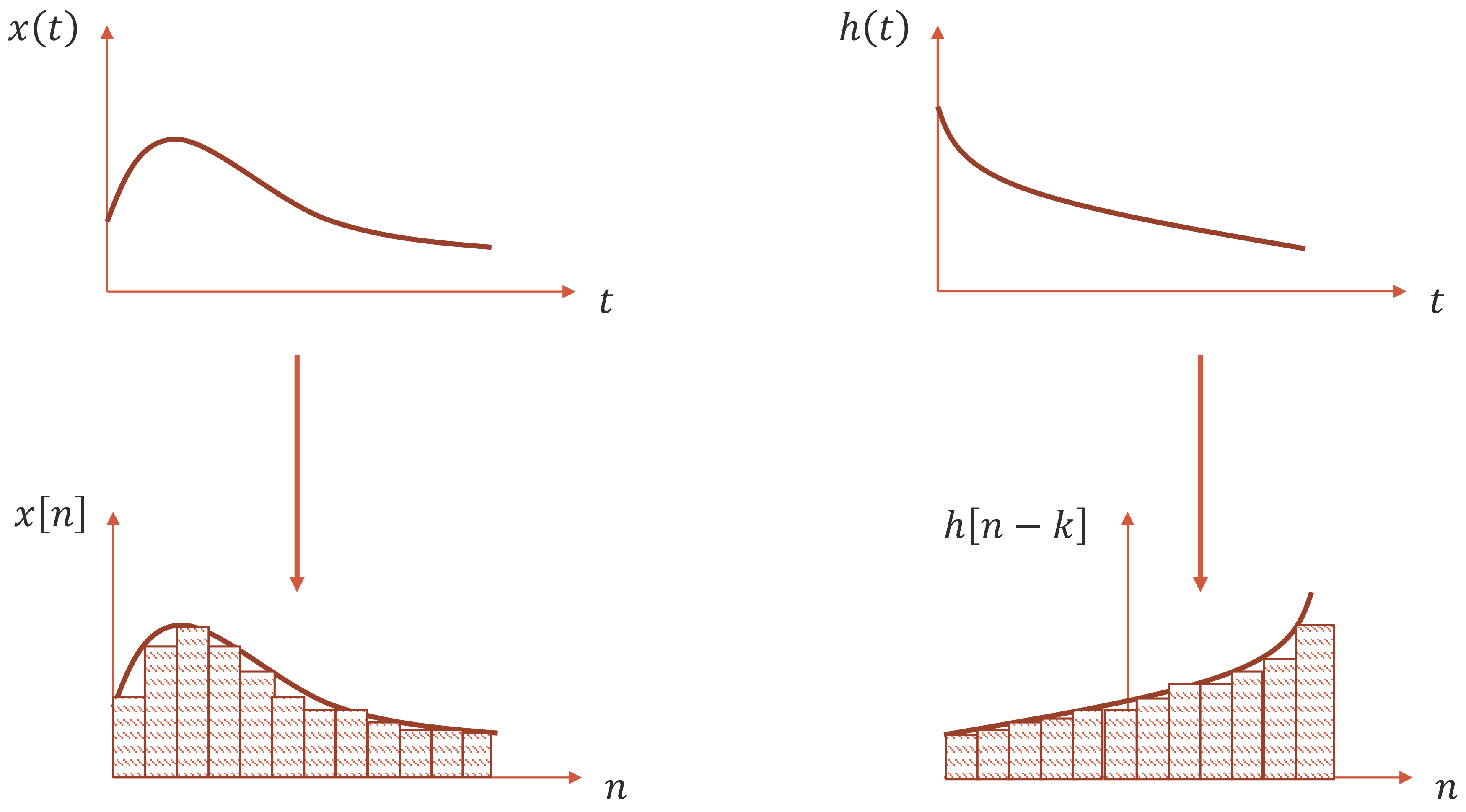
- 计算$x[n] = \{1, 2, \overset{\downarrow}{0}, 3, 2\}$与$h[n] = \{\overset{\downarrow}{1},4,2,3\}$的卷积和
  - 矩阵法，将离散卷积和表示为**矩阵乘法**

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ & 2 & 3 & 0 \\ & & 2 & 3 \\ & & & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \\ 10 \\ 20 \\ 14 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$y[n] = \{1, 6, 10, \overset{\downarrow}{10}, 20, 14, 13, 6\}$$

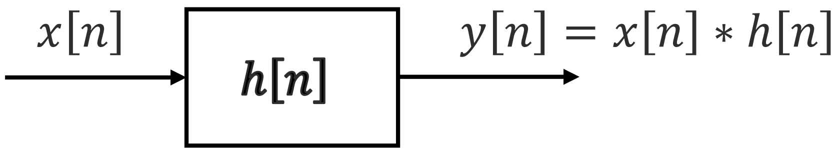
卷积和

- 将连续信号进行抽样，转化为离散序列，用求和替代积分



解卷积

- 卷积和解卷积



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k], \qquad n \geq 0$$

  - 已知$x[n], y[n]$，求$h[n]$：系统辨识
  - 已知$h[n], y[n]$，求$x[n]$：信号估计和恢复
  - 利用卷积和计算的矩阵形式进行逆推

卷积积分

- （连续）信号的筛选性质

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

线性

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_\tau(t)\mathrm{d}\tau$$

时不变性

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

- 符号记为

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- 连续时间线性时不变系统对任意输入的响应可以用系统对单位脉冲的响应表示；线性时不变系统的**单位脉冲响应**刻画了系统的特性。

卷积的计算

- 卷积运算

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

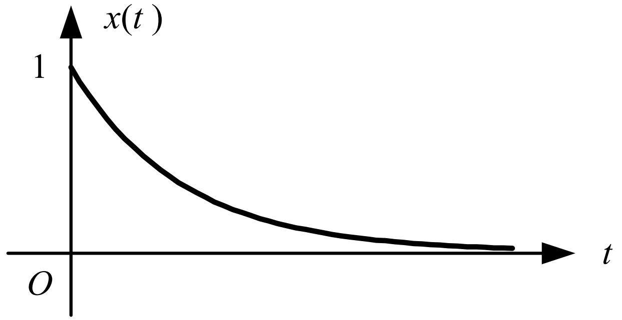
- 计算步骤：
  - 将$x(t)$和$h(t)$中的自变量由t改为τ；
  - 把其中一个信号**翻转**得$h(-\tau)$，再**平移**t；

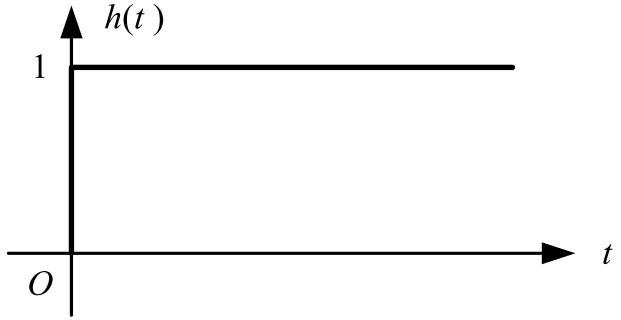
$$h(\tau)\rightarrow h(-\tau)\rightarrow h\big(-(\tau-t)\big)=h(t-\tau)$$

  - 将$x(\tau)$ 与$h(t-\ t)$相乘；对乘积后信号的积分;
  - 不断改变t，计算$x(t)h(t-\ t)$的积分。

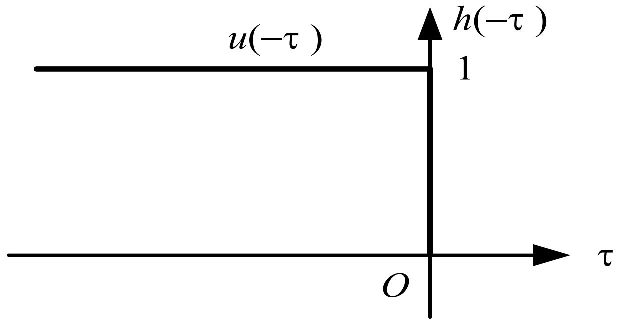
卷积计算

- 已知$x(t) = e^{-t}u(t), h(t) = u(t)$，计算$x(t) * h(t)$



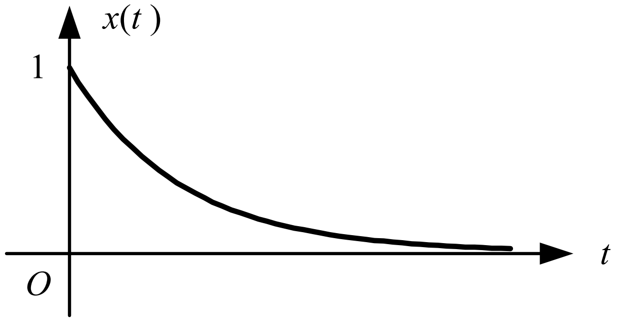


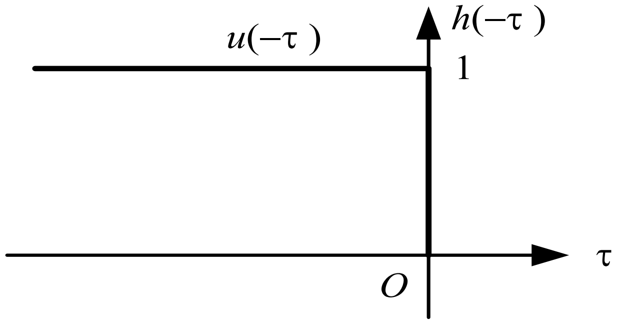
  - 将信号的自变量由t改为τ，将$h(\tau)$翻转得$h(-\tau)$



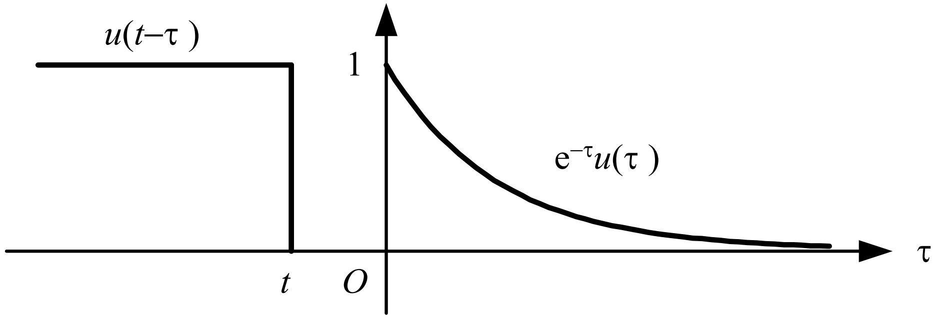
卷积计算

- 已知$x(t) = e^{-t}u(t), h(t) = u(t)$，计算$x(t) * h(t)$



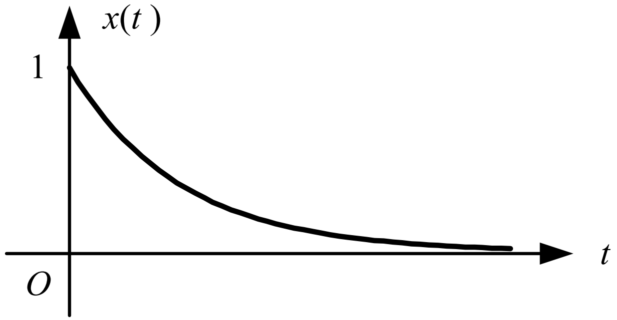


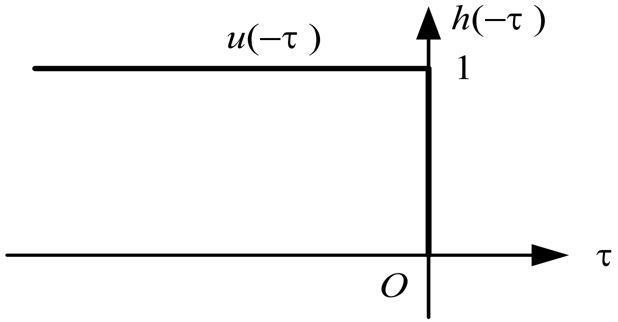
  - 将$h(-\tau)$平移t。当$t < 0$时，$x(\tau)h(t-\tau) = 0, x(t) * h(t) = 0$



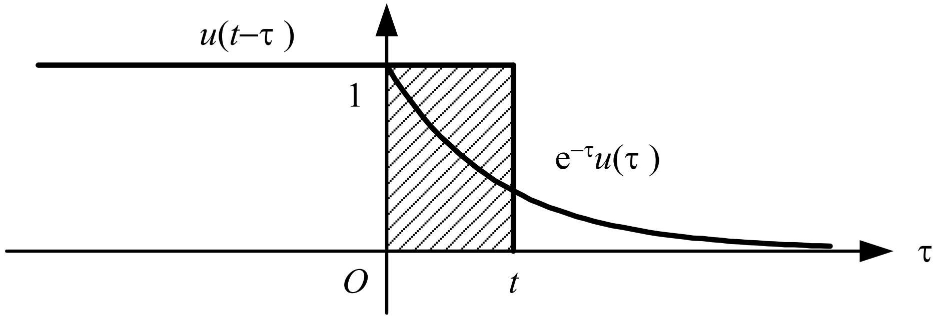
卷积计算

- 已知$x(t) = e^{-t}u(t), h(t) = u(t)$，计算$x(t) * h(t)$





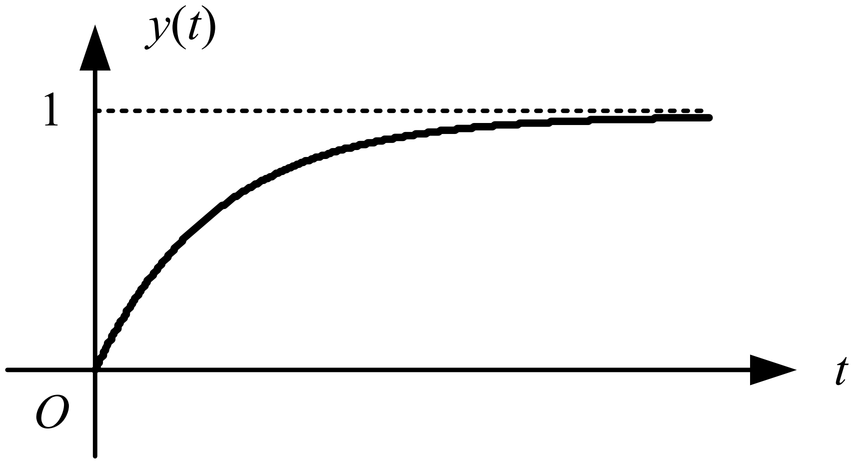
  - 将$h(-\tau)$平移t。当$t \geq 0$时，$x(\tau)h(t-\tau) = e^{-\tau}[u(\tau) - u(\tau - t)], x(t) * h(t) = \int_0^t e^{-\tau}\mathrm{d}\tau = 1 - e^{-t}$



卷积计算

- 已知$x(t)=e^{-t}u(t), h(t)=u(t)$，计算$x(t)*h(t)$
  - 将$h(-\tau)$平移t。当$t<\ 0$时，$x(\tau)h(t-\tau)=0, x(t)*h(t)=0$
  - 将$h(-\tau)$平移t。当$t\geq\ 0$时，$x(\tau)h(t-\tau)=e^{-\tau}[u(\tau)-u(\tau-t)], x(t)*h(t)=\int_0^t e^{-\tau}\mathrm{d}\tau=1-e^{-t}$

$$x(t)*h(t)=(1-e^{-t})u(t)$$



本章概要

1.系统的分类和描述：线性系统和时不变系统

2.卷积：卷积运算的定义和运算

3.卷积的性质：卷积的性质和特殊信号的卷积

4.卷积的应用：使用卷积分析系统，卷积和相关

卷积的性质

- 交换律 $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
- 分配律 $[x_1(t) + x_2(t)] * x_3(t) = x_1(t) * x_3(t) + x_2(t) * x_3(t)$
- 结合律 $[x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) = x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)]$
- 平移特性
  - 已知 $x_1(t) * x_2(t) = y(t)$，则
$$x_1(t - t_1) * x_2(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2)$$
- 展缩特性
  - 已知 $x_1(t) * x_2(t) = y(t)$，则
$$x_1(at) * x_2(at) = \frac{1}{|a|} y(at)$$

平移特性

已知 $x_1(t) * x_2(t) = y(t)$

则 $x_1(t-t_1) * x_2(t-t_2) = y(t-t_1-t_2)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

- **证明:**

$$x_1(t-t_1) * x_2(t-t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau-t_1) * x_2(t-\tau-t_2)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\overset{\tau-t_1=\lambda}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda) * x_2(t-t_1-t_2-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

$$= y(t-t_1-t_2)$$

展缩特性

已知 $x_1(t) * x_2(t) = y(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

则 $x_1(at) * x_2(at) = \frac{1}{|a|}y(at)$

证明:

$$x_1(at) * x_2(at) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(a\tau) * x_2[a(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau$$

$$\overset{a\tau=\lambda}{=} \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda) * x_2(at-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{|a|}y(at)$$

展缩特性

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (f(\tau) * g(\tau))(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cdot g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

$$(f(a\cdot\tau) * g(a\cdot\tau))(t) = \frac{1}{|a|}\cdot(f(\tau) * g(\tau))(a\cdot t), \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

首先先设 $a > 0$

$$(f(a\cdot\tau) * g(a\cdot\tau))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a\tau)\cdot g(a(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

$\xi := a\tau \Rightarrow \mathrm{d}\tau = \frac{1}{a}\cdot\mathrm{d}\xi,$

$$\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(a\tau)\cdot g(a(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{a}\cdot\int_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} f(\xi)\cdot g(at-\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

$a\cdot t := \bar{t}$

$$\frac{1}{a}\cdot\int_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} f(\xi)\cdot g(\bar{t}-\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{a}\cdot(f(\xi) * g(\xi))(\bar{t}).$$

再设 $a < 0, \quad a = -\bar{a}, \quad \bar{a} > 0$

卷积的性质

- 微分特性

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x_1(t)*x_2(t)]=x_1(t)*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t)*x_2(t)$$

- 积分特性

$$\int_{-\infty}^{t}[x_1(\tau)*x_2(\tau)]\mathrm{d}\tau=x_1(t)*\int_{-\infty}^{t}[x_2(\tau)]\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}[x_1(\tau)]\mathrm{d}\tau*x_2(t)$$

- **等效特性**

$$y(t)=x_1(t)*x_2(t)$$

$$y^{(i)}(t)=x_1^{(j)}(t)*x_2^{(i-j)}(t)$$

卷积的性质

$$((f(\tau) * g(\tau))(t))' = (f(\tau) * g'(\tau))(t).$$

$$((f(\tau) * g(\tau))(t))' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

由 Leibniz 求导法则：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\\&= f(x,b(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}b(x) - f(x,a(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}(f(\tau) \cdot g(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau\\&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} g(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau\\&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g'(t-\tau) \cdot 1\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g'(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = (f(\tau) * g'(\tau))(t).$$

卷积的性质

$$\int_{-\infty}^{t} (f(\xi) * g(\xi))(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left(\left(\int_{-\infty}^{\tau} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) * g(\tau)\right)(t).$$

$$(f(\tau) * u(\tau))(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

$$(f(\tau) * u(\tau))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} f(\tau) \cdot 1\,\mathrm{d}\tau + \int_{t}^{+\infty} f(\tau) \cdot 0\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

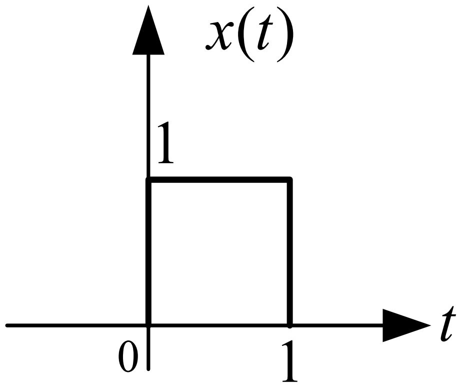
$$\left(\left(\int_{-\infty}^{\tau} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) * g(\tau)\right)(t) = ((f(\xi) * u(\xi))(\tau) * g(\tau))(t)$$

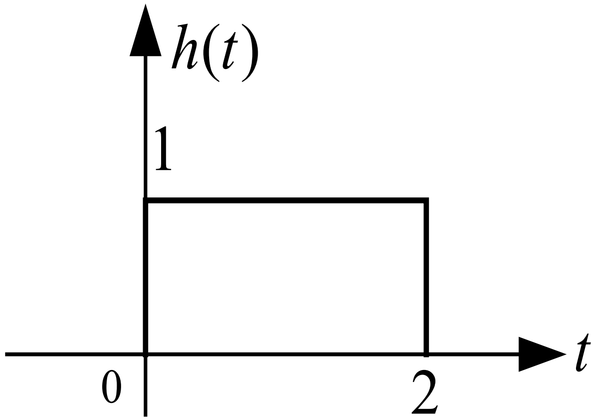
$$((f(\xi) * u(\xi))(\tau) * g(\tau))(t) = ((f(\xi) * g(\xi))(\tau) * u(\tau))(t).$$

$$((f(\xi) * g(\xi))(\tau) * u(\tau))(t) = \int_{-\infty}^{t} (f(\xi) * g(\xi))(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

利用卷积特性简化卷积运算

- 已知$u(t) * u(t) = r(t)$，计算$y(t) = x(t) * h(t)$





$$y(t) = x(t) * h(t) = [u(t) - u(t-1)] * [u(t) - u(t-2)]$$

$$= r(t) - r(t-1) - r(t-2) + r(t-3)$$

奇异信号的卷积

$$\delta(t) * \delta(t) = \delta(t)$$

$$x(t) * \delta(t-T) = x(t-T)$$

$$x(t) * \delta'(t) = x'(t)$$

$$u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$= tu(t)$$

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$= x^{(-1)}(t)$$

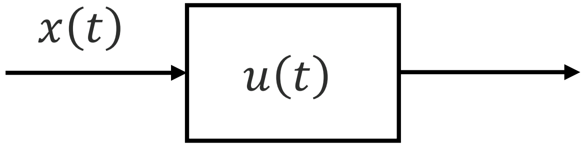
$$x_1(t) * x_2(t) = x_1^{(-1)}(t) * x_2'(t)$$
$$= x_1'(t) * x_2^{(-1)}(t)$$
$$= [x_1'(t) * x_2(t)]^{(-1)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x_1(t) * x_2(t)] = x_1(t) * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) * x_2(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}[x_1(\tau) * x_2(\tau)]\mathrm{d}\tau = x_1(t) * \int_{-\infty}^{t}[x_2(\tau)]\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t}[x_1(\tau)]\mathrm{d}\tau * x_2(t)$$

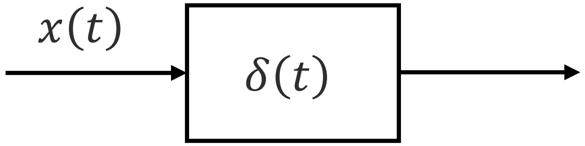
卷积的系统解释

- 积分



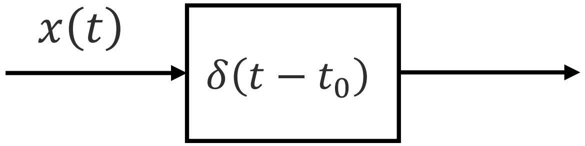
$$y(t) = x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

- 直通



$$y(t) = x(t) * \delta(t) = x(t)$$

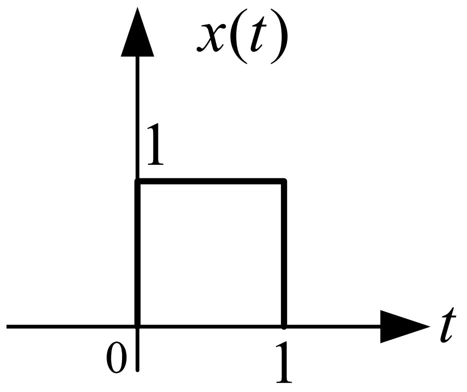
- 延迟

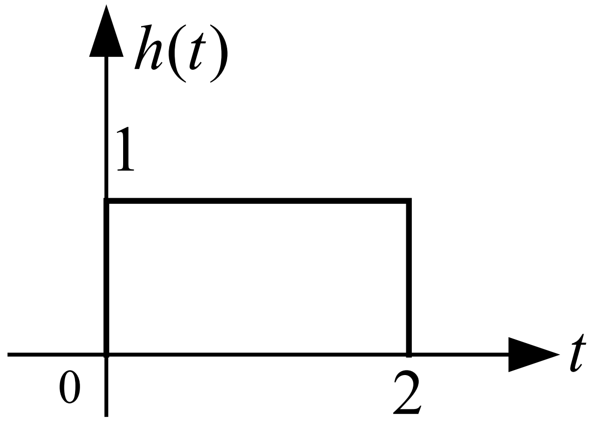


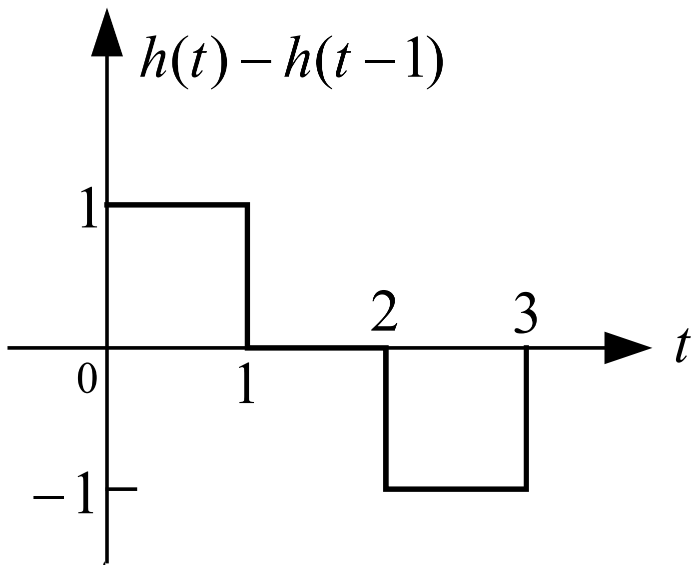
$$y(t) = x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

利用卷积特性简化卷积运算

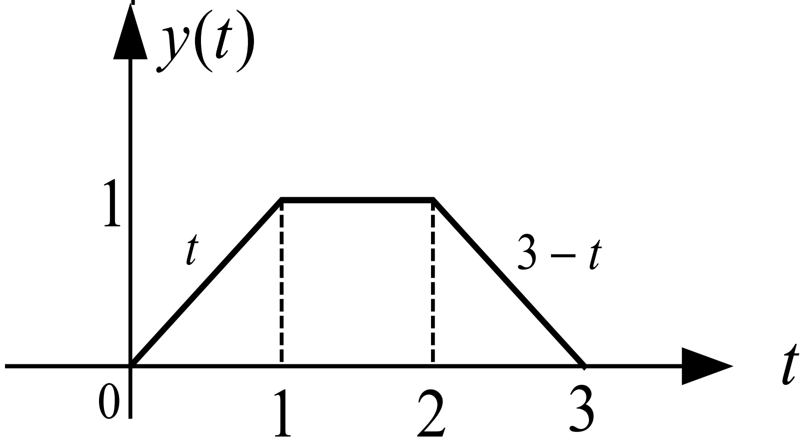
- 利用等效特性，计算$y(t) = x(t) * h(t)$







- $x'(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$
- $x'(t) * h(t) = h(t) - h(t-1)$
- $y(t) = \int_0^t [h(\tau) - h(\tau - 1)]\mathrm{d}\tau$



卷积和的性质

$x_1(t-t_1) * x_2(t-t_2) = y(t-t_1-t_2)$

- 交换律：$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
- 结合律：$x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\} = \{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n]$
- 分配率：$x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$
- 位移特性：$x[n] * \delta[n-k] = x[n-k]$
  - 若$x[n] * h[n] = y[n]$，则$x[n-k] * h[n-l] = y[n-(k+l)]$

卷积和的性质

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x_1(t) * x_2(t)] = x_1(t) * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) * x_2(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}[x_1(\tau) * x_2(\tau)]\mathrm{d}\tau = x_1(t) * \int_{-\infty}^{t}[x_2(\tau)]\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t}[x_1(\tau)]\mathrm{d}\tau * x_2(t)$$

- 差分与求和特性：若$x[n] * h[n] = y[n]$
- 则

$$\nabla x[n] * h[n] = x[n] * \nabla h[n] = \nabla y[n]$$

- 则

$$x[n] * \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] = \left(\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\right) * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} y[k]$$

利用卷积特性简化卷积运算

- 计算$x[n] = \{1, 0, \overset{\downarrow}{2}, 4\}$与$h[n] = \{1, \overset{\downarrow}{4}, 5, 3\}$的卷积和。
- 由于

$$x[n] = \delta[n+2] + 2\delta[n] + 4\delta[n-1]$$

- 基于位移特性

$$\begin{aligned} x[n] * h[n] &= \{\delta[n+2] + 2\delta[n] + 4\delta[n-1]\} * h[n] \\ &= h[n+2] + 2h[n] + 4h[n-1] \end{aligned}$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \{1, 4, 7, \overset{\downarrow}{15}, 26, 26, 12\}$$

本章概要

1.系统的分类和描述：线性系统和时不变系统

2.卷积：卷积运算的定义和运算

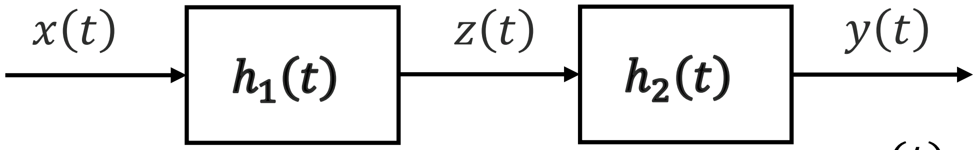
3.卷积的性质：卷积的性质和特殊信号的卷积

4.卷积的应用：使用卷积分析系统，卷积和相关

级联系统的冲激响应

- 级联系统的冲激响应

$$z(t) = x(t) * h_1(t)$$

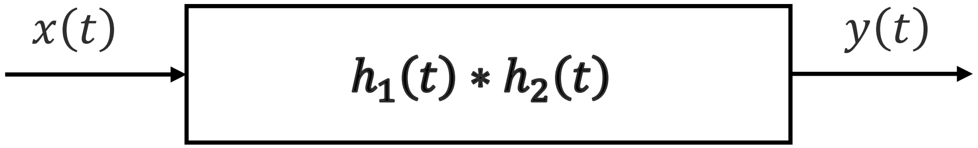


$$y(t) = z(t) * h_2(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$$

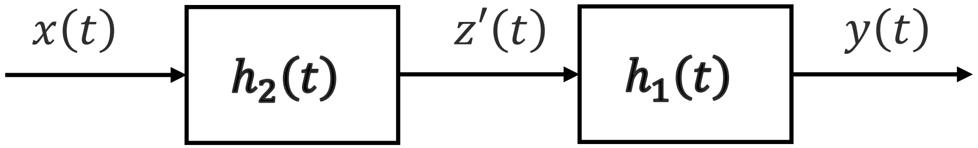
- 根据卷积积分的结合律性质，有

$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$

  - 级联系统的冲激响应等于两个子系统冲激响应的**卷积**

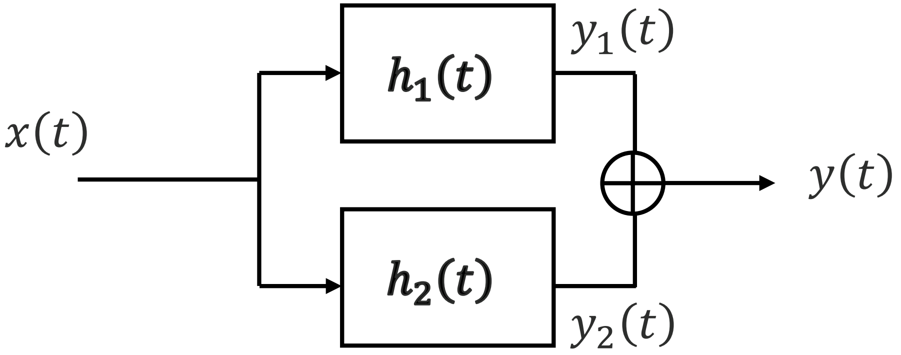


  - **交换**两个级联系统的先后连接次序不影响系统总的冲激响应。



并联系统的冲激响应

- 并联系统的冲激响应

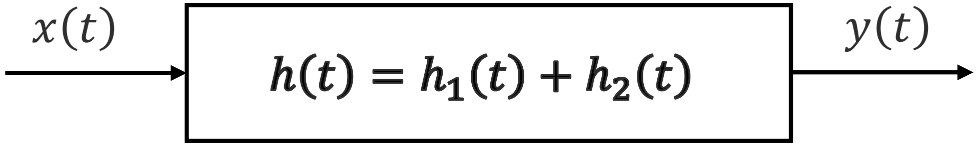


$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$

$$y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$

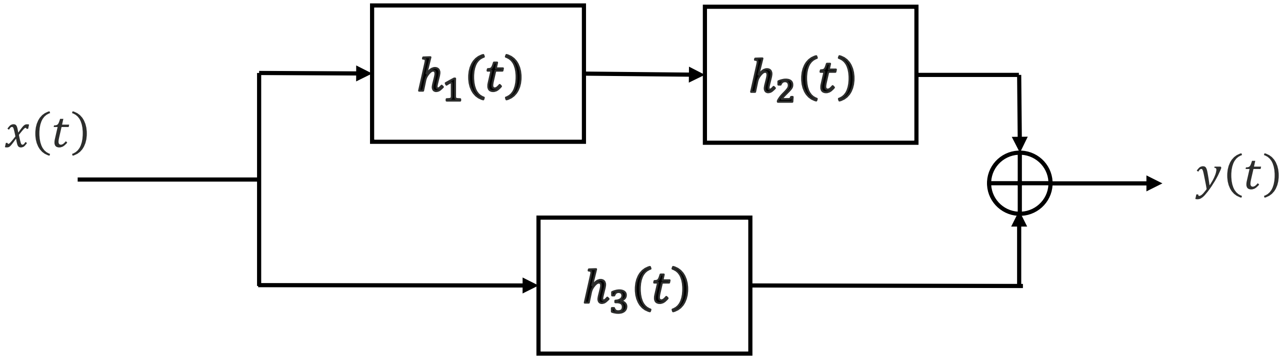
$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

- 应用卷积积分的分配律性质，有$y(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$
  - 并联系统的冲激响应等于两个子系统冲激响应之和



利用卷积分析系统

求图示系统的冲激响应，其中$h_1(t) = e^{-3t}u(t)$，$h_2(t) = \delta(t-1)$，$h_3(t) = u(t)$



- 子系统$h_1(t)$与$h_2(t)$ 级联，$h_3(t)$支路与$h_1(t)$ $h_2(t)$级联支路并联

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) + h_3(t)$$

$$= \delta(t-1) * e^{-3t}u(t) + u(t)$$

$$= e^{-3(t-1)}u(t-1) + u(t)$$

用卷积分析因果系统

- 因果系统是指系统t_0时刻的输出只和t_0时刻及以前的输入信号有关。

- LTI系统因果的充分必要条件
  - 因果连续时间LTI系统的冲激响应必须满足

$$h(t) = 0, \qquad t < 0$$

  - 因果离散时间LTI系统的单位脉冲响应必须满足

$$h[n] = 0, \qquad n < 0$$

用卷积分析因果系统

- 判断M_1+M_2+1点滑动平均系统是否为因果系统（$M_1, M_2 \geq 0$）
- M_1+M_2+1点滑动平均系统的输入输出关系为

$$y[n]=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$

  - 系统的单位脉冲响应为

$$h[n]=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k]=\begin{cases}\frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \leq n \leq M_2\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

  - 显然，只有当$M_1=0$时，才满足 $h[n]=0, n<0$ 的充要条件。即当$M_1=0$时，系统是因果的。

稳定系统

- 若系统对任意的有界输入其输出也有界，则称该系统是稳定系统。(BIBO稳定)

- LTI系统稳定的**充分必要**条件
  - 连续时间LTI系统稳定的充分必要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \, \mathrm{d}\tau < \infty$$

  - 离散时间LTI系统稳定的充分必要条件是

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

用卷积分析稳定系统

- 判断M_1+M_2+1点滑动平均系统是否为稳定系统（$M_1, M_2 \geq 0$）
- M_1+M_2+1点滑动平均系统的输入输出关系为

$$y[n]=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$

  - 系统的单位脉冲响应为

$$h[n]=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2}\delta[n-k]=\begin{cases}\dfrac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1\leq n\leq M_2\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

  - 对$h[n]$求和，可得

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|=\sum_{k=-M_1}^{M_2}\frac{1}{M_1+M_2+1}=1$$

  - 由离散时间LTI系统稳定的充分必要条件可以判断出该系统稳定。

用卷积分析稳定系统

- 已知一因果LTI连续系统的冲激响应为$h(t) = e^{at}u(t)$，判断该系统是否稳定
- 求解

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, \mathrm{d}\tau = \int_{0}^{\infty} e^{a\tau}\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{a} e^{a\tau}\Big|_{0}^{\infty}$$

  - $a < 0$时，系统稳定

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, \mathrm{d}\tau = -\frac{1}{a}$$

  - $a \geq 0$时，系统不稳定

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, \mathrm{d}\tau \to \infty$$

LTI特性与单位冲激响应的关系

特性	连续时间系统	离散时间系统
无记忆性	$h(t) = c\delta(t)$	$h[n] = c\delta[n]$
因果性	$h(t) = 0, t < 0$	$h[n] = 0, n < 0$
稳定性	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert h(\tau)\rvert \mathrm{d}\tau < \infty$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert h[n]\rvert < \infty$
可逆性	$h_0(t) * h_-(t) = \delta(t)$	$h_0[n] * h_-[n] = \delta[n]$
时不变性	$\delta(t - t_0) \to h(t - t_0)$	$\delta[n - n_0] \to h[n - n_0]$
线性	$a\delta(t) \to ah(t)$	$a\delta[n] \to ah[n]$

“卷积”和“相关”

- 卷积运算

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

满足$x(t) * h(t)$ =$h(t) * x(t)$

- 相关运算：衡量信号之间的相似程度

$$x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(\tau+t)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-t)h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

不满足$x(t) \star h(t)$ =$h(t) \star x(t)$

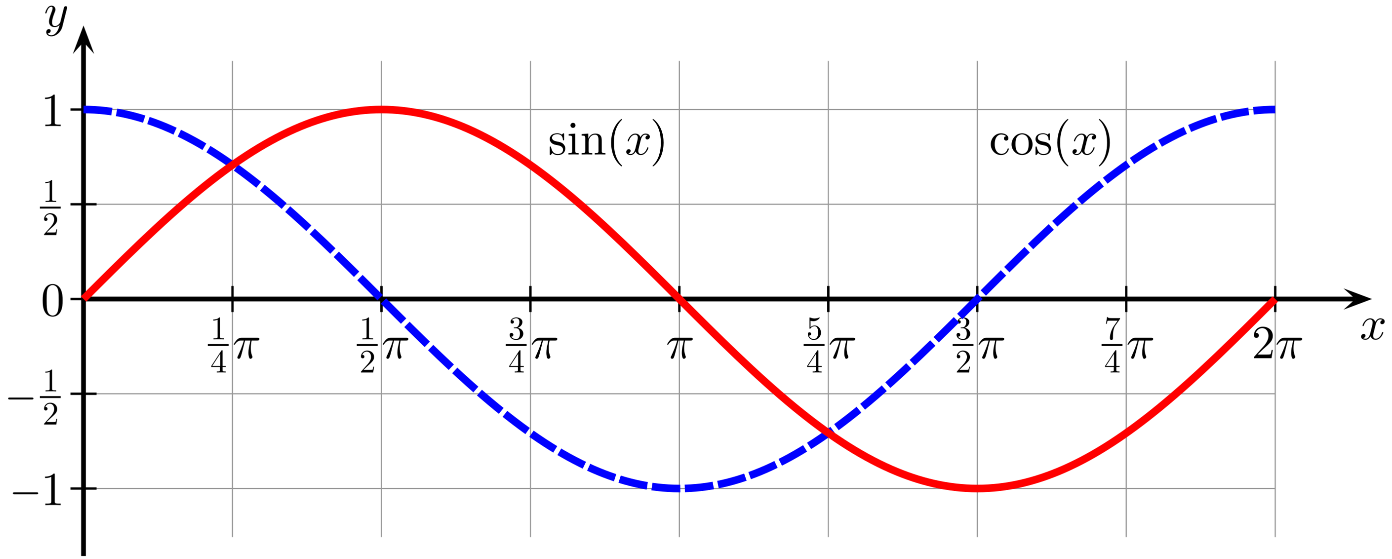
$x(t) \star h(t) = x(-t) * h(t)$

如何刻画两个信号的相似性?

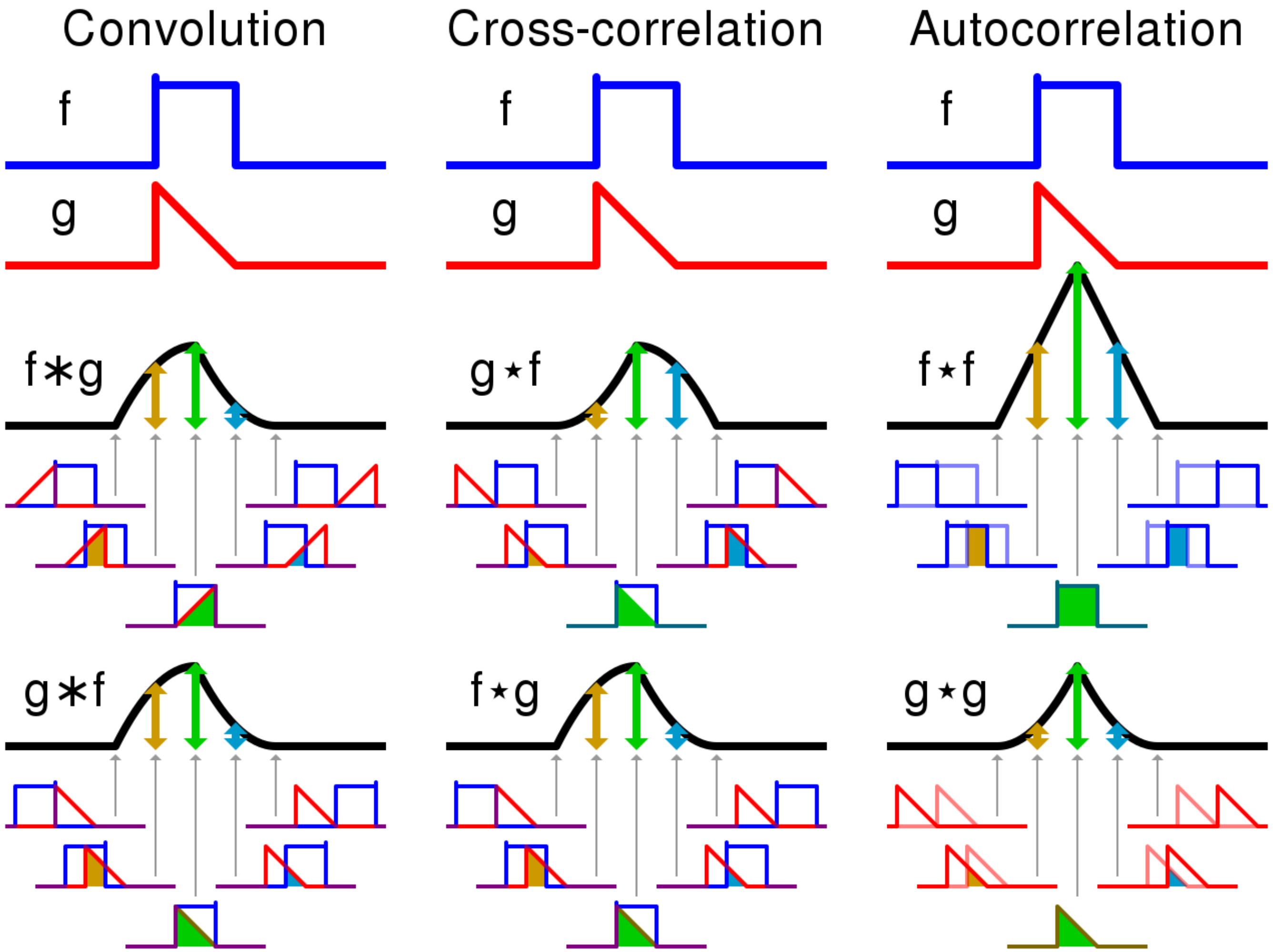
- 通过内积

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) \mathrm{d}t$$

- 如果两个信号不等长如何处理?
- 如何考虑到局部的相似性?

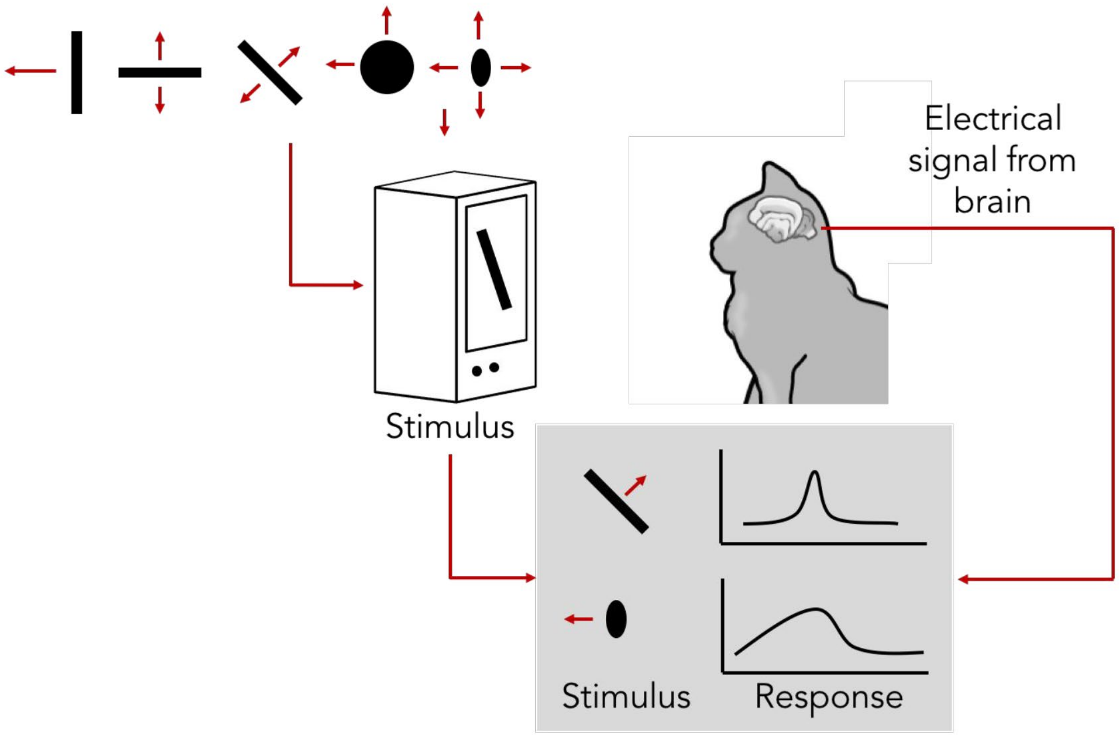


相关



Convolution
Cross-correlation
Autocorrelation
f
g
f
g
f
g
f∗g
g⋆f
f⋆f
g∗f
f⋆g
g⋆g

视觉和系统



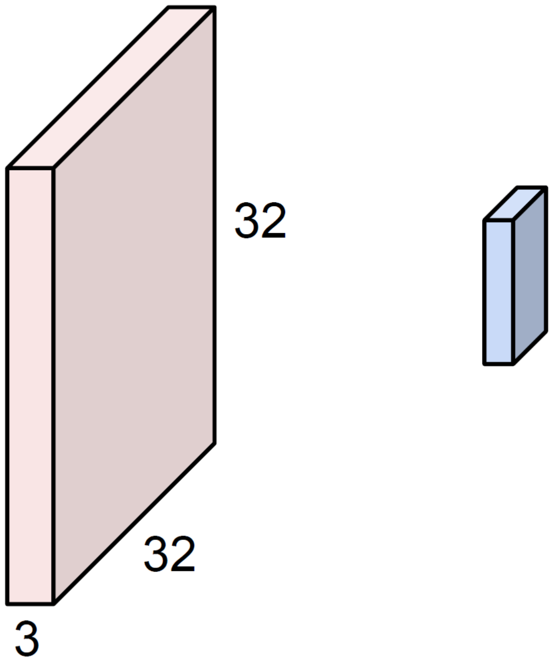
视觉输入“冲激” → 视觉系统 → 细胞响应 → 大脑处理

学出单位脉冲响应

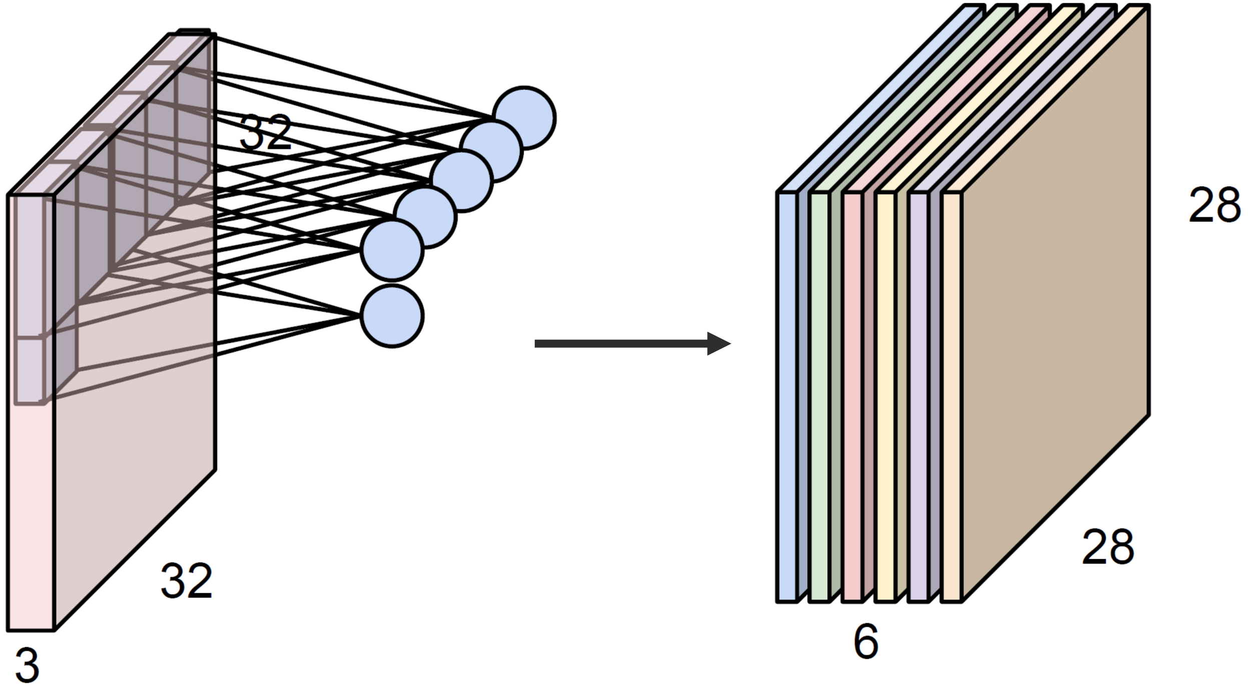
- 图片源于http://cs231n.stanford.edu/slides/2021

神经网络的卷积操作

- 卷积操作的对象
  - 输入图像：宽×高×深（$32 \times 32 \times 3$）
  - 卷积核：深度和图像深度一致（$5 \times 5 \times 3$）

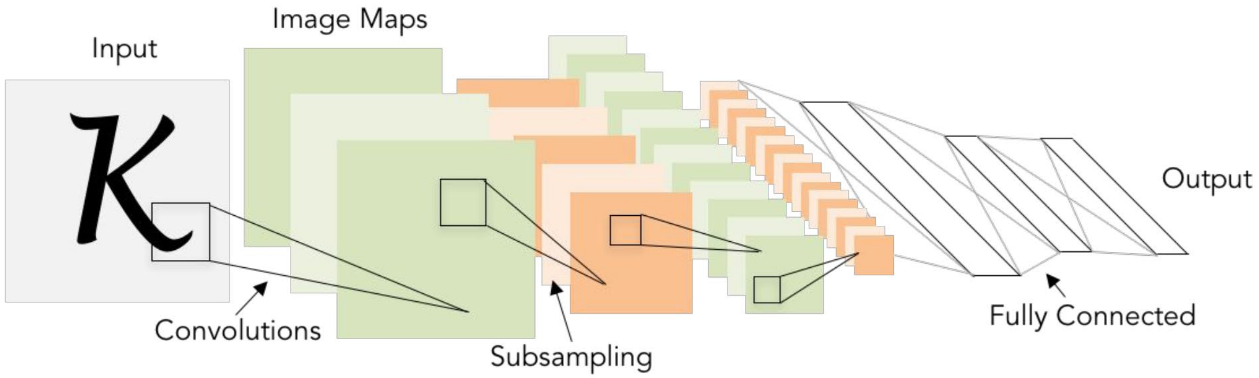


- 卷积操作的过程
  - 卷积核在输入图像上滑动，进行内积运算



卷积神经网络

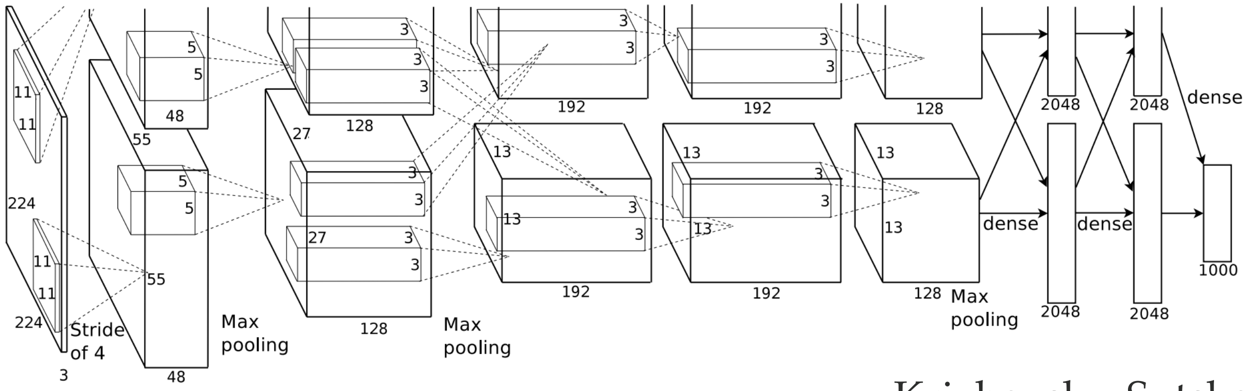
LeNet



LeNet-5

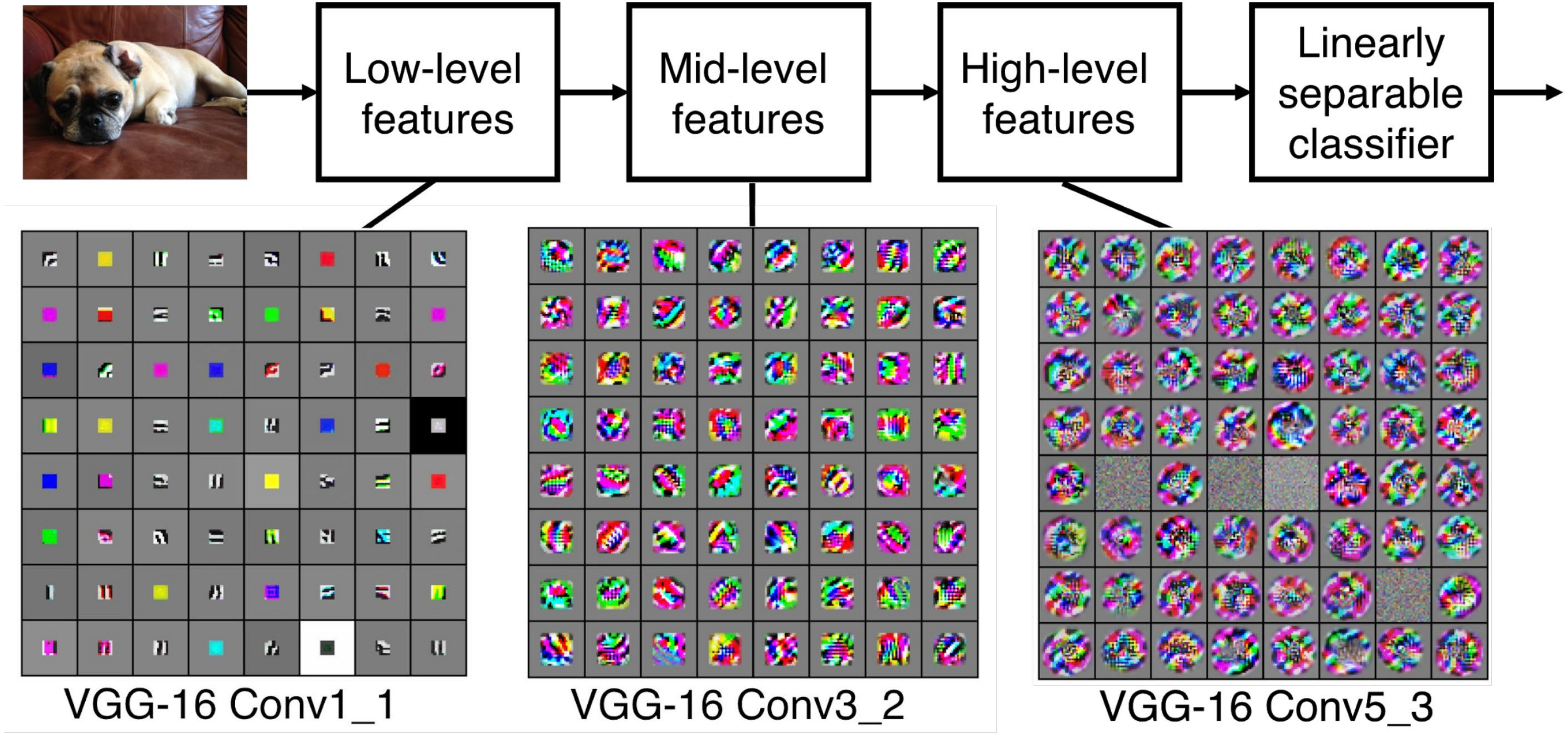
LeCun, Bottou, Bengio, Haffner. Gradient-based learning applied to document recognition. *Proceedings of the IEEE*. 1998.

AlexNet



Krizhevsky, Sutskever, Hinton. ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks. NIPS. 2012.

卷积算子的可视化



Zeiler and Fergus. Visualizing and Understanding Convolutional Networks. ECCV. 2014.