

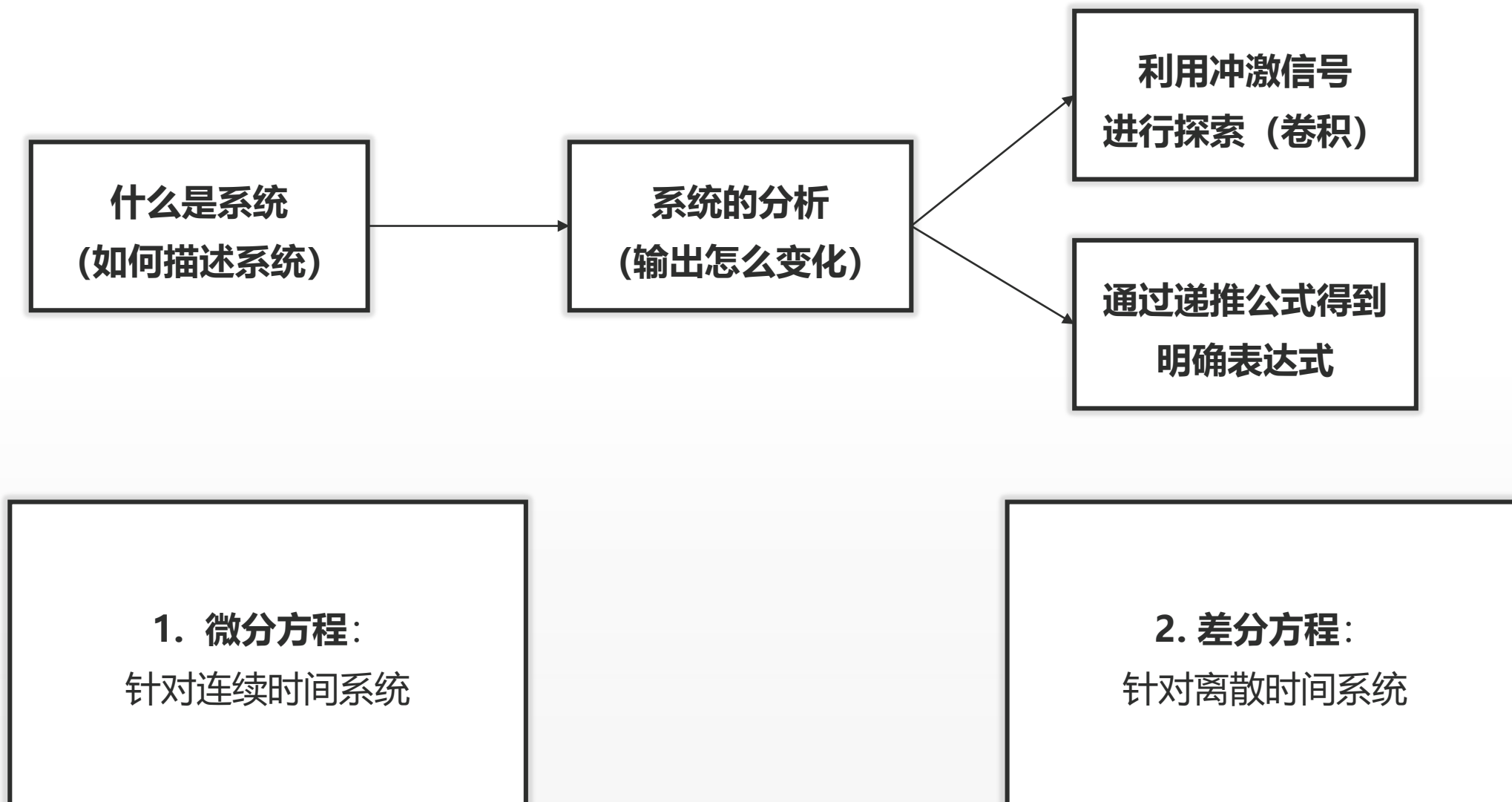
# 03 系统的时域分析

---

微分和差分方程的构建和求解



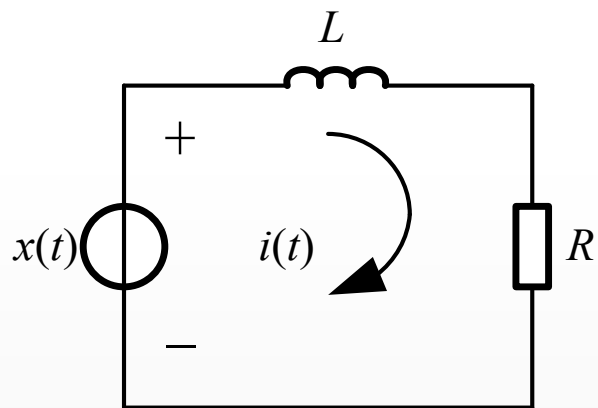
# 如何描述一个系统



# 系统的时域分析

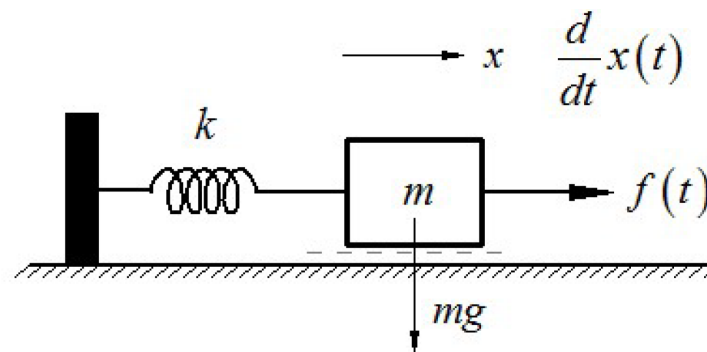
- 系统数学模型的时域表示
  - 端口（输入-输出）描述：一元 $N$ 阶微分/差分方程

电路系统



$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = x(t)$$

力学系统



$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{\mu}{m} \frac{d}{dt}x(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}f(t)$$

- 状态方程描述： $N$ 元联立一阶微分/差分方程

# 微分方程

- 如果组成系统的原件都是参数恒定的**线性**元件，则相应的数学模型是一个**线性常系数常微分方程**。
- 若此时系统中各元件起始**无储能**，则构成一个线性**时不变**系统。
  - 微分方程（一般 $N > M$ ）

$$\begin{aligned} & y^{(N)}(t) + a_{N-1}y^{(N-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) \\ = & b_Mx^{(M)}(t) + b_{M-1}x^{(M-1)}(t) + \cdots + b_1x'(t) + b_0x(t) \end{aligned}$$

$a_i, b_j$ 为常数

$$\begin{aligned} & \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{n-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = & b_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{M-1} \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned}$$

# 差分方程

## 案例一：空谷回声

- $x[n]$ 为当前时刻发出的声音， $y[n]$ 为当前时刻听到的声音， $b_k$ 刻画声音传播过程中的衰减

$$y[n] = x[n] + b_k x[n - k]$$

- 对于 $n$ 时刻的输出仅仅和 $n$ 之前时刻的输入相关的模型，称为MA (Moving Average)模型

## 案例二：银行理财

- 当前存款为 $x[n]$ ，当前账户总额为 $y[n]$ ， $a_i$ 为存款利率，则

$$y[n] = y[n - 1] + a_i y[n - 2] + x[n]$$

- 对于 $n$ 时刻的输出仅仅和 $n$ 之前时刻的输出相关的模型，称为AR (Auto Regressive)模型

# 差分方程

- (后向) 线性常系数差分方程

$$\sum_{i=0}^N a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^M b_j x[n-j]$$

- 给定初始条件后，可使用**递推法**进行求解
- 一个线性时不变 (LTI) 系统可以用常系数微分方程或常系数差分方程描述。
- 但一个常系数微分方程或差分方程描述的系统**不一定是**线性时不变系统。

# 微分方程求解

- 微分方程

$$y^{(N)}(t) + a_{N-1}y^{(N-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t)$$

$$= b_Mx^{(M)}(t) + b_{M-1}x^{(M-1)}(t) + \cdots + b_1x'(t) + b_0x(t)$$

的（完全）解由**齐次解** $y_h(t)$ 和**特解** $y_p(t)$ 构成。

- 求解步骤

- 求**齐次解**：输入有关的所有项全部为0时方程的解
- 求**特解**：方程任意一个解
- 借助初始条件求**待定系数**

# 求齐次解

- 当微分方程的激励项及其各阶导数都为零时，方程的解为**齐次解**

$$y^{(N)}(t) + a_{N-1}y^{(N-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$$

- 齐次解为形如 $Ae^{\alpha t}$ 函数的线性组合，令 $y(t) = Ae^{\alpha t}$ ，代入有

$$A\alpha^N e^{\alpha t} + Aa_{N-1}\alpha^{N-1}e^{\alpha t} + \dots + Aa_0e^{\alpha t} = 0$$

化简为（特征方程）

$$\alpha^N + a_{N-1}\alpha^{N-1} + \dots + a_0 = 0$$

具有 $N$ 个特征根

$$\alpha_1, \dots, \alpha_N$$



# 求齐次解

- 构建特征方程

$$\alpha^N + a_{N-1}\alpha^{N-1} + \dots + a_0 = 0$$

- 求解 $N$ 个特征根 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ , 分情况讨论

- 特征根各不相同 (**无重根**) , 齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \dots + A_N e^{\alpha_N t} = \sum_{i=1}^N A_i e^{\alpha_i t}$$

$A_1, A_2, \dots, A_N$ 为待定系数

- 若有**共轭复根** $\alpha_1 = m + jn, \alpha_2 = m - jn$ , 则

$$\begin{aligned} y_h(t) &= A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} \\ &= e^{mt} ((A_1 + A_2) \cos nt + (A_1 - A_2)j \sin nt) \end{aligned}$$

齐次解为增长或衰减的正弦函数

# 求齐次解

- 构建特征方程

$$\alpha^N + a_{N-1}\alpha^{N-1} + \dots + a_0 = 0$$

- 求解 $N$ 个特征根 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ , 分情况讨论

- 特征根有重根, 设 $\alpha_1$ 为 $k$ 阶重根, 即

$$\alpha^N + a_{N-1}\alpha^{N-1} + \dots + a_0 = (\alpha - \alpha_1)^k \prod_{i=2}^{N-k+1} (\alpha - \alpha_i)$$

齐次解为

$$y_h(t) = (A_1 t^{k-1} + A_2 t^{k-2} + \dots + A_{k-1} t + A_k) e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \dots + A_{N-k+1} e^{\alpha_{N-k+1} t}$$

$$= \left( \sum_{i=1}^k A_i t^{k-i} \right) e^{\alpha_1 t} + \sum_{i=2}^{N-k+1} A_i e^{\alpha_i t}$$

$A_1, A_2, \dots, A_N$ 为待定系数

# 求齐次解

求微分方程 $y^{(3)}(t) + 7y^{(2)}(t) + 16y'(t) + 12y(t) = x(t)$ 的齐次解

- 特征方程为

$$\alpha^3 + 7\alpha^2 + 16\alpha + 12 = 0$$

$$(\alpha + 2)^2(\alpha + 3) = 0$$

特征根为 $\alpha_1 = -2$  (重根),  $\alpha_2 = -3$

齐次解为

$$y_h(t) = (A_1t + A_2)e^{-2t} + A_3e^{-3t}$$

# 求特解

- **特解**的形式和**激励函数的形式**有关，通过代入激励函数，观察形式，代入微分方程求解待定系数

激励函数 $x(t)$	响应函数 $y(t)$ 的特解
常数	$B$
$t^p$	$B_1 t^p + B_2 t^{p-1} + \dots + B_p t + B_{p+1}$
$e^{at}$	$B e^{at}$
$\cos(\omega t)$	$B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$
$\sin(\omega t)$	
$t^p e^{at} \cos(\omega t)$	$(B_1 t^p + B_2 t^{p-1} + \dots + B_p t + B_{p+1}) e^{at} \cos(\omega t) + (D_1 t^p + D_2 t^{p-1} + \dots + D_p t + D_{p+1}) e^{at} \sin(\omega t) +$
$t^p e^{at} \sin(\omega t)$	

- 若特解和齐次解重复，如均为 $e^{at}$ ，则特解设为 $B_0 t e^{at}$
- 若对应的特征根为二重根，齐次解为 $t e^{at}$ ，特解为 $B_0 t^2 e^{at}$
- 若特解为0时刻加入，则微分方程的解区间为 $0_+ \leq t < \infty$

# 求特解

微分方程  $y^{(2)}(t) + 2y'(t) + 3y(t) = x'(t) + x(t)$ , 设  $x(t) = t^2$ , 求特解

- 代入  $x(t)$ , 右端为  $2t + t^2$ , 设特解形式为

$$y_p(t) = B_1 t^2 + B_2 t + B_3$$

- 代入得

$$3B_1 t^2 + (4B_1 + 3B_2)t + (2B_1 + 2B_2 + 3B_3) = t^2 + 2t$$

$$\text{得 } B_1 = \frac{1}{3}, B_2 = \frac{2}{9}, B_3 = -\frac{10}{27}$$

- 特解为  $y_p(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t - \frac{10}{27}$

# 求特解

微分方程  $y^{(2)}(t) + 2y'(t) + 3y(t) = x'(t) + x(t)$ , 设  $x(t) = e^t$ , 求特解

- 代入  $x(t)$ , 右端为  $2e^t$ , 设特解形式为

$$y_p(t) = Be^t$$

- 代入得

$$(B + 2B + 3B)e^t = 2e^t$$

$$\text{得 } B = \frac{1}{3}$$

- 特解为  $y_p(t) = \frac{1}{3}e^t$

# 基于初始条件求待定系数

- 基于齐次解 $y_h(t)$ 和特解 $y_p(t)$ 构造完全解 $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ ，需借助**边界条件**确定齐次解中的待定系数。
  - 求解方程组，需要一组已知数据，确定待定系数
- 边界条件：
  - 给定某一时刻 $t_0$ ，要求解满足 $y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{N-1}(t_0)$ 处的各值（一般设该时刻为 $t_0 = 0$ ）
  - 边界条件是 $t_0$ 时的**瞬时**状态，将其作为已知数据，根据系统模型和 $t > t_0$ 时的激励信号，即可求出 $t_0$ 之后所有时刻的响应

# 微分方程求解

微分方程 $y^{(2)}(t) + 7y'(t) + 6y(t) = 6 \sin(2t)$ , ( $t \geq 0$ ), 边界条件为 $y(0) = 0, y'(0) = 0$ .

- 求齐次解, 特征方程为

$$\alpha^2 + 7\alpha + 6 = (\alpha + 1)(\alpha + 6) = 0$$

齐次解为 $y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t}$

- 求特解, 设特解形式为

$$B_1 \sin(2t) + B_2 \cos(2t)$$

- 代入, 得

$$y_p(t) = \frac{3}{50} \sin(2t) - \frac{21}{50} \cos(2t)$$

- 求待定系数

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$= A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t} + \frac{3}{50} \sin(2t) - \frac{21}{50} \cos(2t)$$

根据初始条件, 有

$$\begin{cases} A_1 + A_2 - \frac{21}{50} = 0 \\ -A_1 - 6A_2 + \frac{3}{25} = 0 \end{cases}$$

得 $A_1 = \frac{12}{25}, A_2 = -\frac{3}{50}$



# 求差分方程齐次解

- 当微分方程的激励项及其各阶导数都为零时，方程的解为**齐次解**

$$\sum_{i=0}^N a_i y[n-i] = 0$$

- 齐次解为形如 $C\alpha^n$ 函数的线性组合，令 $y[n] = C\alpha^n$ ，代入有

$$a_N C \alpha^{n-N} + a_{N-1} C \alpha^{N-1} + \dots + a_0 C \alpha^0 = 0$$

化简为（特征方程）

$$a_0 \alpha^N + a_1 \alpha^{N-1} + \dots + a_N = 0$$

具有 $N$ 个特征根

$$\alpha_1, \dots, \alpha_N$$

# 求齐次解

系统	连续时间系统	离散时间系统
方程	$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$	$\sum_{i=0}^N a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^M b_j x[n-j]$
齐次方程	$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y_h(t) = 0$	$\sum_{i=0}^N a_i y_h[n-i] = 0$
特征方程	$\sum_{k=0}^N a_k \alpha^k = 0$	$\sum_{k=0}^N a_k \alpha^{N-k} = 0$
齐次解	<p><math>\alpha_i</math> 为单根, <math>y_h(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{\alpha_i t}</math>  <math>\alpha_j</math> 为 <math>k</math> 重根, <math>y_h(t)</math> 中 <math>\alpha_j</math> 对应项变为</p> $\left( \sum_{i=1}^k A_i t^{k-i} \right) e^{\alpha_j t}$	<p><math>\alpha_i</math> 为单根, <math>y_h[n] = \sum_{i=1}^N C_i \alpha_i^n</math>  <math>\alpha_j</math> 为 <math>k</math> 重根, <math>y_h[n]</math> 中 <math>\alpha_j</math> 对应项变为</p> $\left( \sum_{i=1}^k A_i n^{k-i} \right) \alpha_j^n$

# 求特解

微分方程		差分方程	
激励函数 $x(t)$	特解 $y_p(t)$	激励函数 $x[n]$	特解 $y_p[n]$
常数	常数	常数	常数
$t^p$	$\sum_{i=0}^p B_i t^i$	$n^k$	$\sum_{i=0}^k C_i n^i$
$\cos(\omega t)$	$B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$	$\cos[\omega n]$	$C_1 \cos[\omega n] + C_2 \sin[\omega n]$
$\sin(\omega t)$		$\sin[\omega n]$	
$e^{at}$	$Be^{at}$ , $a$ 不是方程的特征根	$a^n$	$Ca^n$ , $a$ 不是方程的特征根
	$(B_1 t + B_2)e^{at}$ , $a$ 是方程的特征单根		$(C_1 n + C_2)a^n$ , $a$ 是方程的特征单根
	$\sum_{i=0}^k B_i t^i e^{at}$ $a$ 是方程的 $k$ 重特征根		$\sum_{i=0}^k C_i n^i$ $a$ 是方程的 $k$ 重特征根

# 差分方程求解

激励信号  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ ,  $y[-1] = 0$ ,  $y[-2] = 1$ ,  $y[-3] = \frac{1}{2}$ , 求差分方程

$$y[n] + \frac{1}{3}y[n-1] - \frac{5}{9}y[n-2] + \frac{1}{9}y[n-3] = x[n] - x[n-1]$$

的完全响应

特征方程:  $\alpha^3 + \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{5}{9}\alpha + \frac{1}{9} = 0$

特征根:  $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$

齐次解为:

$$y_h[n] = A_1(-1)^n + (A_2 + A_3n) \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

设特解为  $y_p[n] = C \left(\frac{1}{2}\right)^n$

代入, 得  $C = -3$

特解为:

$$y_p[n] = -3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

# 差分方程求解

激励信号  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ ,  $y[-1] = 0$ ,  $y[-2] = 1$ ,  $y[-3] = \frac{1}{2}$ , 求差分方程

$$y[n] + \frac{1}{3}y[n-1] - \frac{5}{9}y[n-2] + \frac{1}{9}y[n-3] = x[n] - x[n-1]$$

的完全响应

激励信号在  $n = 0$  时刻引入, 令  $n = 0$  有

$$y[0] + \frac{1}{3}y[-1] - \frac{5}{9}y[-2] + \frac{1}{9}y[-3] = x[0] - x[-1]$$

代入, 得  $y[0] = \frac{3}{2}$ ,  $y[1] = -\frac{10}{9}$ ,  $y[2] = \frac{103}{108}$

完全解为:

$$y[n] = \frac{35}{12}(-1)^n + \left(\frac{109}{32} + \frac{25}{24}n\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 0$$

# 初始松弛条件

- 一种特殊的边界条件（相当于激励信号加入时的零起始条件）：
  - 微分方程：若 $x(t) = 0, t \leq t_0$ ，可得 $y(t) = 0, t \leq t_0$ ，则对 $t > t_0$ 的响应可以使用的初始条件为：

$$y(t_0) = y'(t_0) = \dots = y^{(N-1)}(t_0) = 0$$

- 差分方程：若 $x[n] = 0, n \leq n_0$ ，可得 $y[n] = 0, n \leq n_0$
- 若边界条件为初始松弛条件，则系统为因果、线性、时不变系统

# 自由响应与强迫响应

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

齐次解, 自由响应

特解, 强迫响应

- 自由响应: 齐次解, 反应系统的固有频率 (本身的特性)
  - 齐次解的形式和激励信号无关, 但待定系数和激励信号有关
- 强迫响应: 特解, 和激励函数形式有关

# 确定解的初始条件 $0_+$

- 实际系统中，系统的初始条件要根据激励信号接入瞬时系统所处状态决定。由于激励信号作用，响应 $y(t)$ 及其各阶导数可能在 $t = 0$ 处发生**跳变** ( $0_- \rightarrow 0_+$ )。
- 系统状态：系统在 $t = t_0$ 时刻的状态是一组必须要知道的最少量数据，根据**这组数据、系统的数学模型、 $t > t_0$ 接入的激励信号**，就能完全确定 $t_0$ **以后任意时刻**系统的响应。对于 $n$ 阶系统，这组数据由 $n$ 个独立条件给定（如系统响应的各阶导数值）。
- $0_-$ 状态：  $y^{(n)}(0_-) = [y(0_-), y'(0_-), \dots, y^{(n-1)}(0_-)]$ ;
- $0_+$ 状态：  $y^{(n)}(0_+) = [y(0_+), y'(0_+), \dots, y^{(n-1)}(0_+)]$
- 如何判断信号在 $0$ 时刻输入是否发生改变（跳变）
  - 奇异函数匹配法
  - 差分方程迭代



# 系统的零输入响应和零状态响应

- **零输入响应**：无外加激励信号（输入信号为零），仅由系统的**起始状态（起始时刻系统储能）单独作用**而产生的响应，记为 $y_{zi}(t)$ ;

$$y_{zi}^{(N)}(t) + a_{N-1}y_{zi}^{(N-1)}(t) + \dots + a_1y_{zi}'(t) + a_0y_{zi}(t) = 0$$

并符合 $y^{(N)}(0_-)$ 约束，是齐次解的一部分

$$y_{zi}(t) = \sum_{k=1}^N A_{zik} e^{\alpha_k t}$$

由于从 $t < 0$ 到 $t > 0$ 没有激励，所以系统的状态在**0点**不会变化 $y^{(N)}(0_-) = y^{(N)}(0_+)$

- **零状态响应**：不考虑系统起始时刻储能的作用（起始状态为0），由系统外加激励信号所产生的**响应**，记为 $y_{zs}(t)$

$$y_{zs}^{(N)}(t) + a_{N-1}y_{zs}^{(N-1)}(t) + \dots + a_1y_{zs}'(t) + a_0y_{zs}(t) = b_M x^M(t) + b_{M-1}x^{(M-1)}(t) + \dots + b_1x'(t) + b_0x(t)$$

并符合 $y^{(N)}(0_-) = 0$ 约束，包含齐次解（的一部分）和特解 **无储能**

$$y_{zi}(t) = \sum_{k=1}^N A_{zsk} e^{\alpha_k t} + B(t)$$

# 系统的零输入响应和零状态响应

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$= \sum_{k=1}^N A_k e^{\alpha_k t} + B(t)$$

自由响应

强迫响应

- 自由响应和零输入响应都满足齐次方程的解，但系数不同

$y_{zi}(t)$ 的系数仅由起始储能情况决定，而  $y_h$ 要同时依赖起始状态和激励信号

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

$$= \sum_{k=1}^N A_{zik} e^{\alpha_k t} + \sum_{k=1}^N A_{zsk} e^{\alpha_k t} + B(t)$$

零输入响应

零状态响应

- 若起始无储能，则0<sub>-</sub>状态为0， $y_{zi}(t) = 0$ ， $y_h(t)$ 可以非零

- $y_{zi}(t)$ 由0<sub>-</sub> → 0<sub>+</sub>不跳变，若有跳变则出现在 $y_{zs}(t)$ 中

# 系统的响应

系统 $y'(t) + 3y(t) = 3u(t)$ , 起始状态为 $y(0_-) = \frac{3}{2}$ , **无跳变**, 求解自由响应和强迫响应。

- 特征方程 $\alpha + 3 = 0, \alpha = -3$ , 齐次解为 $Ae^{-3t}$
- 激励信号为 $u(t)$ , 特解为常数1
- 由于无跳变, 则 $y(0_+) = y(0_-) = \frac{3}{2}$ 
  - 求解待定系数 $A = \frac{1}{2}$
- 自由响应:  $y_h(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}$ , 强迫响应: 1
- 完全响应:  $y(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} + 1$

# 系统的响应

系统 $y'(t) + 3y(t) = 3u(t)$ , 起始状态为 $y(0_-) = \frac{3}{2}$ , **无跳变**, 求解零输入响应和零状态响应。

- 求零输入响应:
  - 特征方程 $\alpha + 3 = 0, \alpha = -3$ , 齐次解为 $Ae^{-3t}$
  - 根据初始条件 $y(0_-) = \frac{3}{2}$ , 求得 $A = \frac{3}{2}$
  - **零输入响应:**  $y_{zi}(t) = \frac{3}{2}e^{-3t}$
- 求零状态响应:
  - 基于 $y(0_-) = 0$ 求  $Ae^{-3t} + 1$ 的待定系数, 得 $A = -1$
  - **零状态响应:**  $y_{zs}(t) = -e^{-3t} + 1$
- 完全响应:  $y(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} + 1$

# 系统的响应

系统 $y'(t) + 3y(t) = 3u(t)$ , 起始状态为 $y(0_-) = \frac{3}{2}$ , **无跳变**, 求解零输入响应和零状态响应。

- 求零输入响应:
  - 特征方程 $\alpha + 3 = 0, \alpha = -3$ , 齐次解为 $Ae^{-3t}$
  - 根据初始条件 $y(0_-) = \frac{3}{2}$ , 求得 $A = \frac{3}{2}$

## 微分、差分方程的不足之处

1. 若微分（差分）方程右边激励项较复杂，则难以处理。
2. 若激励信号发生变化，则须全部重新求解。
3. 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。
4. 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

# 连续线性时不变系统的响应

- 响应时域求解方法

- 经典法：求解微分、差分方程

- 卷积法：系统**完全**响应 = 零输入响应 + 零状态响应

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = y_{zi}(t) + x(t) * h(t)$$

- 求解齐次微分方程得到零输入响应

- 利用卷积积分可求出零状态响应

# 利用卷积求解零状态响应

已知系统微分方程为：

$$y'(t) + 3y(t) = 2x(t)$$

系统的冲激响应  $h(t) = 2e^{-3t}u(t)$ ,  $x(t) = 3u(t)$ , 试求系统的零状态响应  $y_{zs}(t)$

▪ 求解卷积

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 3u(\tau) \cdot 2e^{-3(t-\tau)}u(t - \tau) d\tau = \begin{cases} \int_0^t 3 \cdot 2e^{-3(t-\tau)} d\tau & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2(1 - e^{-3t}) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = 2(1 - e^{-3t})u(t) \end{aligned}$$

# 冲激响应求解

某离散因果线性时不变系统的差分方程为

$$y[n] + 3y[n - 1] + 2y[n - 2] = x[n]$$

求冲激响应 $h[n]$

已知因果系统，因此

$$h[-1] = h[-2] = 0$$

代入

$$h[0] + 3h[-1] + 2h[-2] = \delta[0] = 1$$

$$h[1] + 3h[0] + 2h[-1] = \delta[1] = 0$$

求得初始条件： $h[0] = 1, h[1] = -3$

冲激响应对应差分方程

$$h[n] + 3h[n - 1] + 2h[n - 2] = \delta[n]$$

特征方程： $\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$

特征根： $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2$

齐次解： $h[n] = C_1(-1)^n + C_2(-2)^n, n \geq 0$

代入初始条件，求解 $C_1 = -1, C_2 = 2$

冲激响应 $h[n] = [-1(-1)^n + 2(-2)^n]u[n]$