04 信号的傅里叶级数

如何从频率角度重构周期信号

如何探究一个系统

$x(t)$非常复杂，对于每个$x(t)$都有不同的$y(t)$ $\longrightarrow$ 求解微分、差分方程

$x(t) \longrightarrow$ **某个系统** $\longrightarrow y(t)$

探究$x(t)$和$x'(t)$的关系

$y(t)$和$y'(t)$可能有类似的关系

$x'(t) \longrightarrow$ **某个系统** $\longrightarrow y'(t)$

关联**特殊信号**对系统的响应

- 冲激信号 $\rightarrow$ 卷积
- 指数信号 $\rightarrow$?

指数信号的特殊性

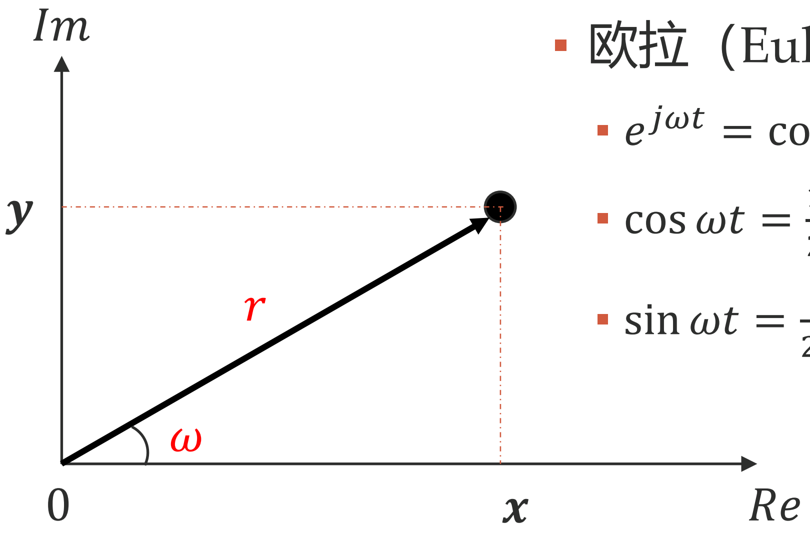
- 是线性时不变系统的**特征信号**

$$y(t) = e^{j\omega t} * h(t)$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= e^{j\omega t} \int_{\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} h(\tau)\mathrm{d}\tau \propto e^{j\omega t}$$

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{\text{某个LTI系统}} \longrightarrow \lambda e^{j\omega t}$$



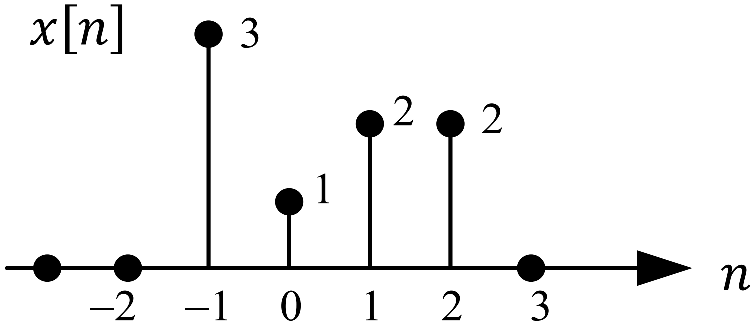
- 欧拉（Euler）公式
  - $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$
  - $\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$
  - $\sin\omega t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$

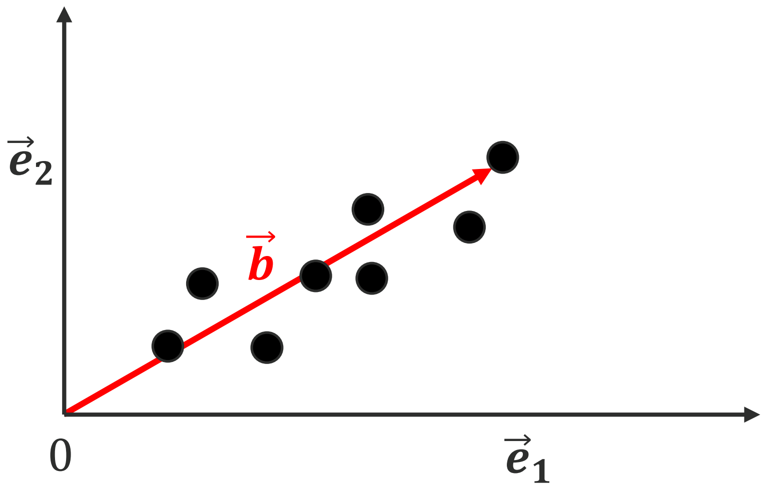
指数信号，正弦（余弦）信号可能可以作为基信号

指数信号、正弦信号的表示能力

- 使用单位脉冲表示任意离散时间信号

$$x[n]=3\delta[n+1]+\delta[n]+2\delta[n-1]+2\delta[n-2]$$





$$\langle sin, cos\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=0$$

- 三角级数构成**完备正交**函数集
  - 在区间(t_0, t_0+T)上的完备正交集，令$\omega=\frac{2\pi}{T}$
    - 三角函数

      $\{\cos n\omega t, \sin n\omega t\}, n=0,1,2,\dots,\infty$
    - 复指数函数

      $\{e^{jn\omega t}\}, n=0,\pm1,\pm2,\dots,\pm\infty$

三角函数族的正交性

- 三角函数在区间(t_0, t_0+T)上的完备正交集，令$\omega=\frac{2\pi}{T}$

$$\{\cos n\omega t, \sin n\omega t\}, n=0,1,2,\ldots,\infty$$

- 计算任意两个不同函数之间的内积：

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \underbrace{\cos n\omega t \cdot \cos m\omega t}_{\frac{1}{2}[\cos(n+m)\,\omega t+\cos(n-m)\,\omega t]}\ \mathrm{d}t=0, n\neq m$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \underbrace{\sin n\omega t \cdot \sin m\omega t}_{\frac{1}{2}[\cos(n-m)\,\omega t-\cos(n+m)\,\omega t]}\ \mathrm{d}t=0, n\neq m$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \underbrace{\sin n\omega t \cdot \cos m\omega t}_{\frac{1}{2}[\sin(n+m)\,\omega t+\sin(n-m)\,\omega t]}\ \mathrm{d}t=0$$

- 函数的模为$\|\sin n\omega t\|_2^2=\|\cos n\omega t\|_2^2=\frac{T}{2}$，　$\langle 1,1\rangle=T$

指数函数族的正交性

- 复指数函数在区间(t_0, t_0+T)上的完备正交集，令$\omega=\frac{2\pi}{T}$

$$\{e^{jn\omega t}\}, n=0,\pm1,\pm2,\dots,\pm\infty$$

- 计算任意两个不同函数之间的内积：

$$\langle e^{jn\omega t}, e^{jm\omega t}\rangle=\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jn\omega t}\cdot e^{-jm\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(n-m)\omega t}\mathrm{d}t=\begin{cases}T, n=m\\0, n\neq m\end{cases}$$

通过指数信号、正弦（余弦）信号构造正交基信号，用来表示周期信号

概要

1. 傅里叶级数的定义：

指数、正弦正交基

表示一般信号

2. 傅里叶级数和频域：

傅里叶级数怎么理解

3. 傅里叶级数的计算：

傅里叶级数的计算方法和性质

4. 系统函数：

傅里叶级数和系统的关系

概要

1. 傅里叶级数的定义：
指数、正弦正交基
表示一般信号

2. 傅里叶级数和频域：
傅里叶级数怎么理解

3. 傅里叶级数的计算：
傅里叶级数的计算方法和性质

4. 系统函数：
傅里叶级数和系统的关系

基于三角函数族、指数函数族的分解

- 三角函数族的分解
  - 基函数集：$\{\cos n\omega t, \sin n\omega t\}, n=0,1,2,\dots,\infty$
  - 分解系数：

$$a_0=\frac{\langle x,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\mathrm{d}t$$

$$a_n=\frac{\langle x,\cos n\omega t\rangle}{\langle \cos n\omega t,\cos n\omega t\rangle}=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$b_n=\frac{\langle x,\sin n\omega t\rangle}{\langle \sin n\omega t,\sin n\omega t\rangle}=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

  - 函数表示

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\omega t$$

- 指数函数族的分解
  - 基函数集：$\{e^{jn\omega t}\}, n=0,\pm1,\pm2,\dots,\pm\infty$
  - 分解系数：

$$X_n=\frac{\langle x,e^{jn\omega t}\rangle}{\langle e^{jn\omega t},e^{jn\omega t}\rangle}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\cdot e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t$$

  - 函数表示

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n\,e^{jn\omega t}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n\,(\cos n\omega t+j\sin n\omega t)$$

基于三角函数族、指数函数族的分解

- 指数函数族分解

$$X_n = \frac{\langle x, e^{jn\omega t}\rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t}\rangle} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cdot e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cdot(\cos n\omega t - j\sin n\omega t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a_n - \frac{j}{2}b_n$$

$$\boxed{X_n^* = \frac{1}{2}a_n + \frac{j}{2}b_n}$$

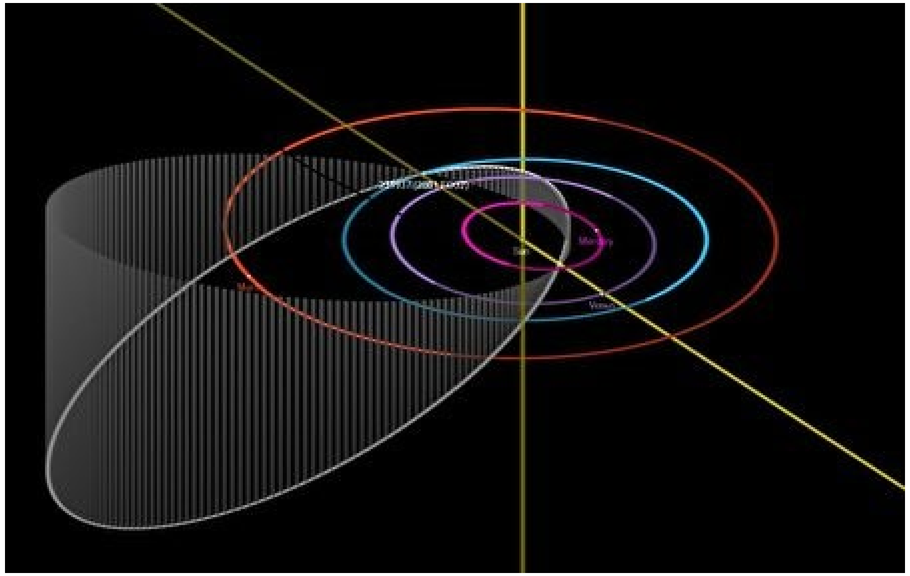
$$a_n = \frac{\langle x, \cos n\omega t\rangle}{\langle \cos n\omega t\,, \cos n\omega t\rangle} = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{\langle x, \sin n\omega t\rangle}{\langle \sin n\omega t\,, \sin n\omega t\rangle} = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

傅里叶变换的发展历程

Leonhard Paul Euler

Joseph-Louis
Lagrange



Euler在研究声波传播时发现可以将传播函数分解为多个正弦信号之和

Lagrange发展了Euler思想，将这一分解用于天体轨道的观察和预测中

$$f(x) = \sum_k a_k \cos(2\pi k x)$$

Lagrange使用轨道位置拟合$\{a_k\}$，从而预测运行轨道。

对于不连续的“信号”还能否用三角函数进行分解？

傅里叶变换的发展历程

1822 年在代表作《热的分析理论》中解决了热在非均匀加热的固体中分布传播问题，成为分析学在物理中应用的最早例证之一，对19世纪数学和理论物理学的发展产生深远影响 。

Joseph Fourier

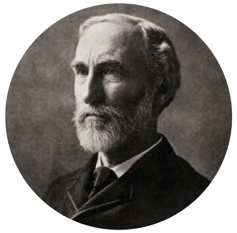
Gaspard Monge

Pierre-Simon Laplace

Joseph-Louis Lagrange

Sylvestre François Lacroix

Peter Gustav Lejeune Dirichlet



Joseph Willard Gibbs

法国数学家、物理学家

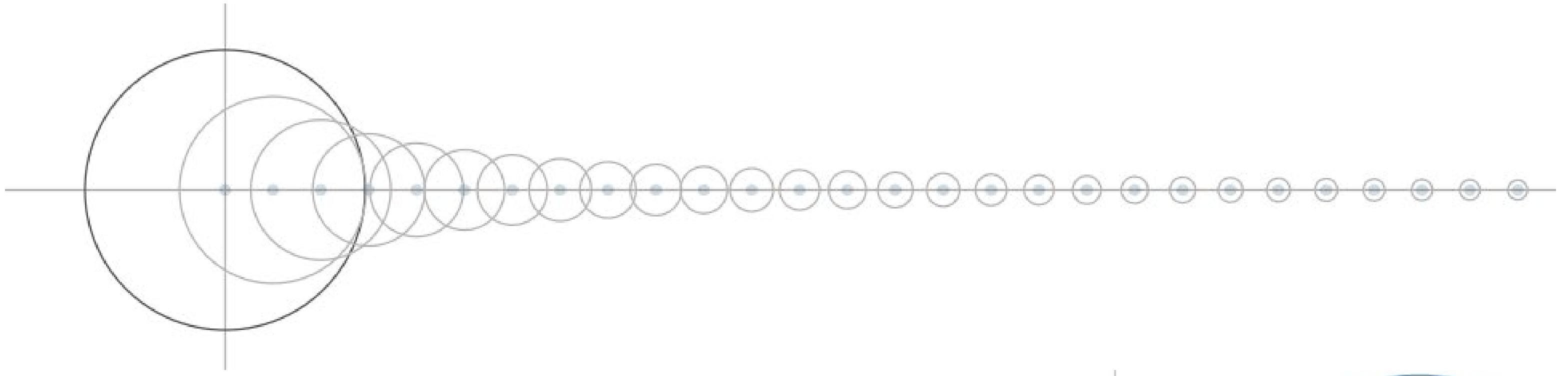
Fourier于1807年向巴黎科学院呈交《热的传播》论文，推导出著名的热传导方程，并在求解该方程时发现解函数可以由三角函数构成的级数形式表示，从而提出任一函数都可以展成三角函数的无穷级数。

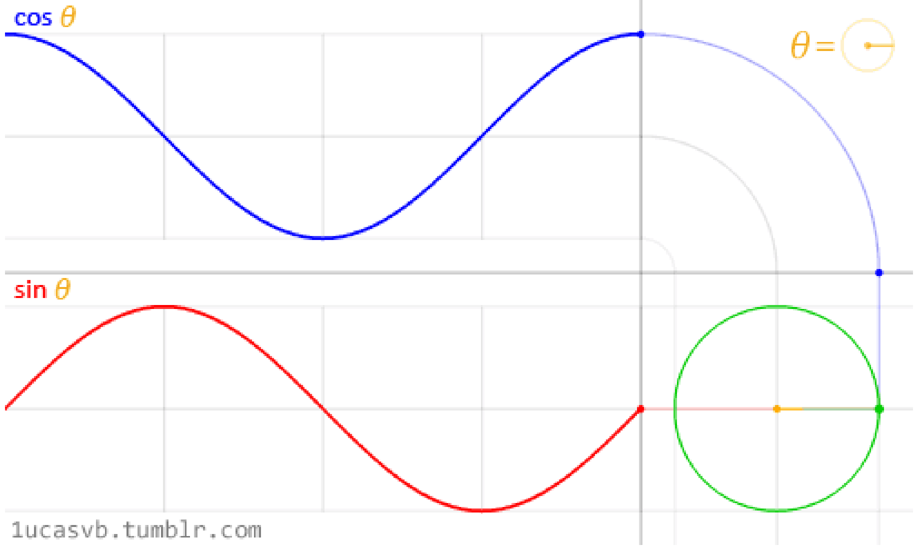
1829年Dirichlet给出傅里叶级数收敛的精确条件（针对信号不连续情况）

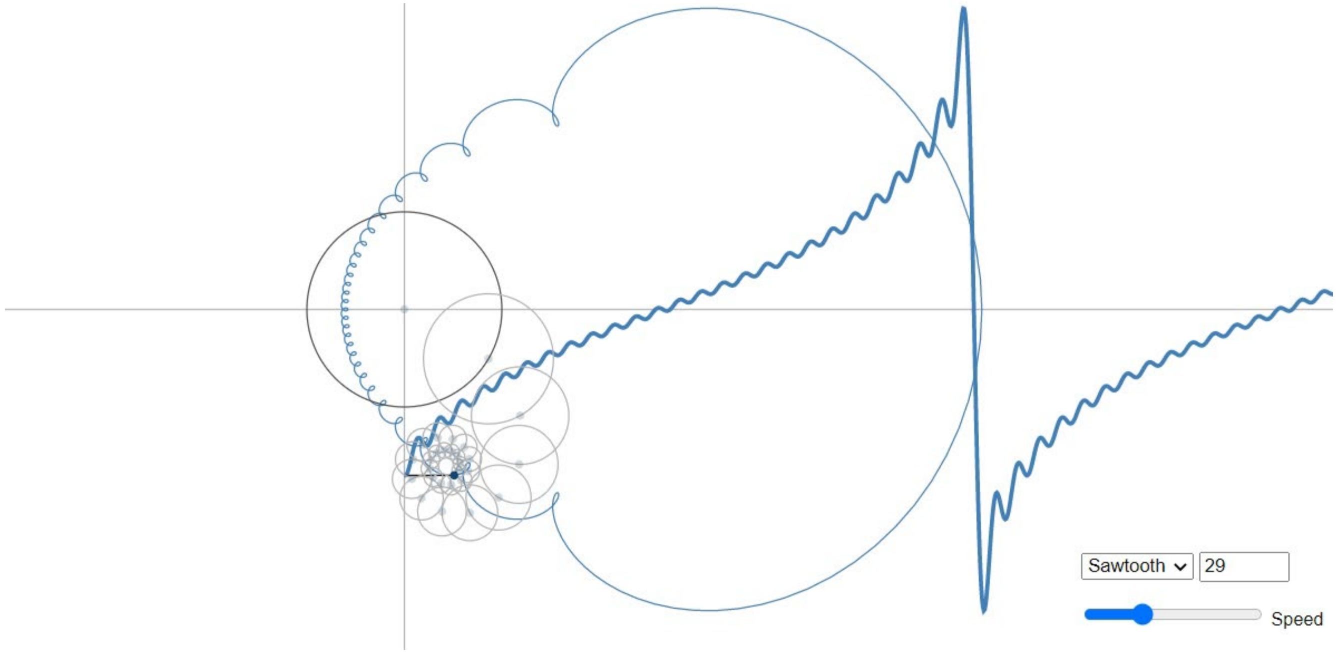
1899 Gibbs给出针对跳变信号处9%震荡的“吉布斯现象”

A short biography of Joseph Fourier and historical development of Fourier series and Fourier transforms. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2012 43(5). pp 589-612.

正弦函数的研究

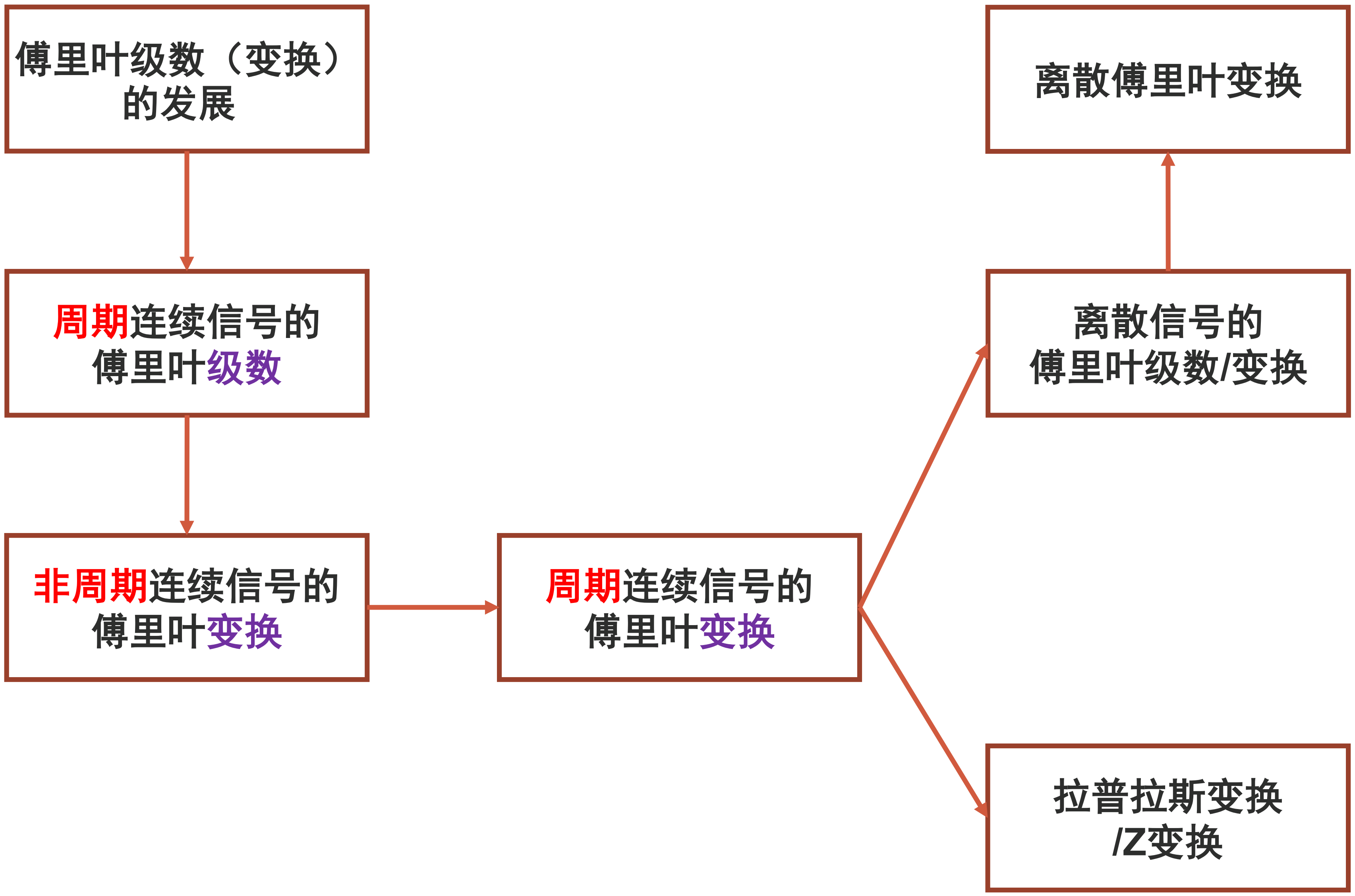






https://bl.ocks.org/jinroh/7524988

傅里叶变换部分的思路


傅里叶级数（变换）的发展
周期连续信号的傅里叶级数
非周期连续信号的傅里叶变换
周期连续信号的傅里叶变换
离散信号的傅里叶级数/变换
离散傅里叶变换
拉普拉斯变换/Z变换

概要

1. 傅里叶级数的定义：
指数、正弦正交基
表示一般信号

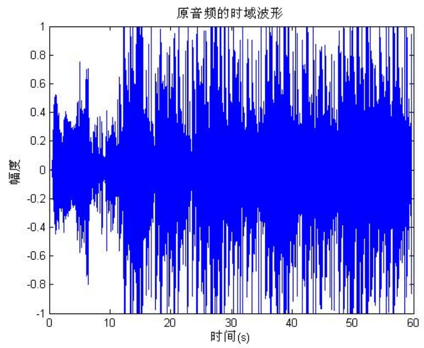
2. 傅里叶级数和频域：
傅里叶级数怎么理解

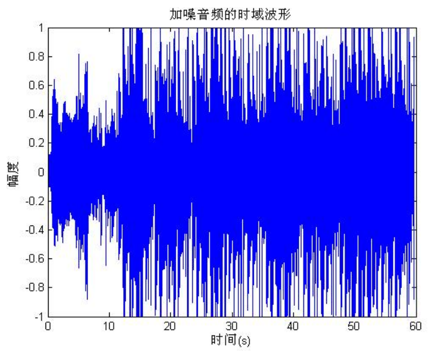
3. 傅里叶级数的计算：
傅里叶级数的计算方法和性质

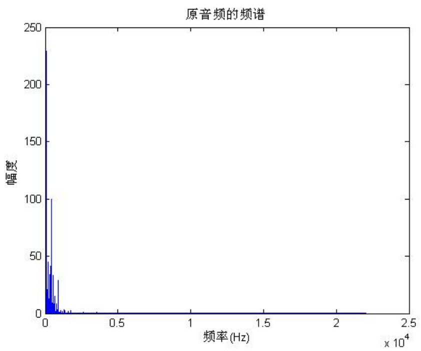
4. 系统函数：
傅里叶级数和系统的关系

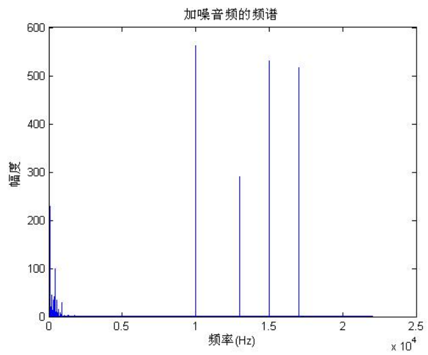
时域 vs. 频域

- 频域将信号表示为不同频率正弦分量的线性组合
  - 从**信号**分析的角度，将信号表示为不同频率正弦分量的线性组合，为不同信号之间进行比较提供了途径。
  - 从**系统**分析角度，已知单频正弦信号激励下的响应，利用迭加特性可求得多个不同频率正弦信号同时激励下的总响应,及每个正弦分量通过系统后的变化。





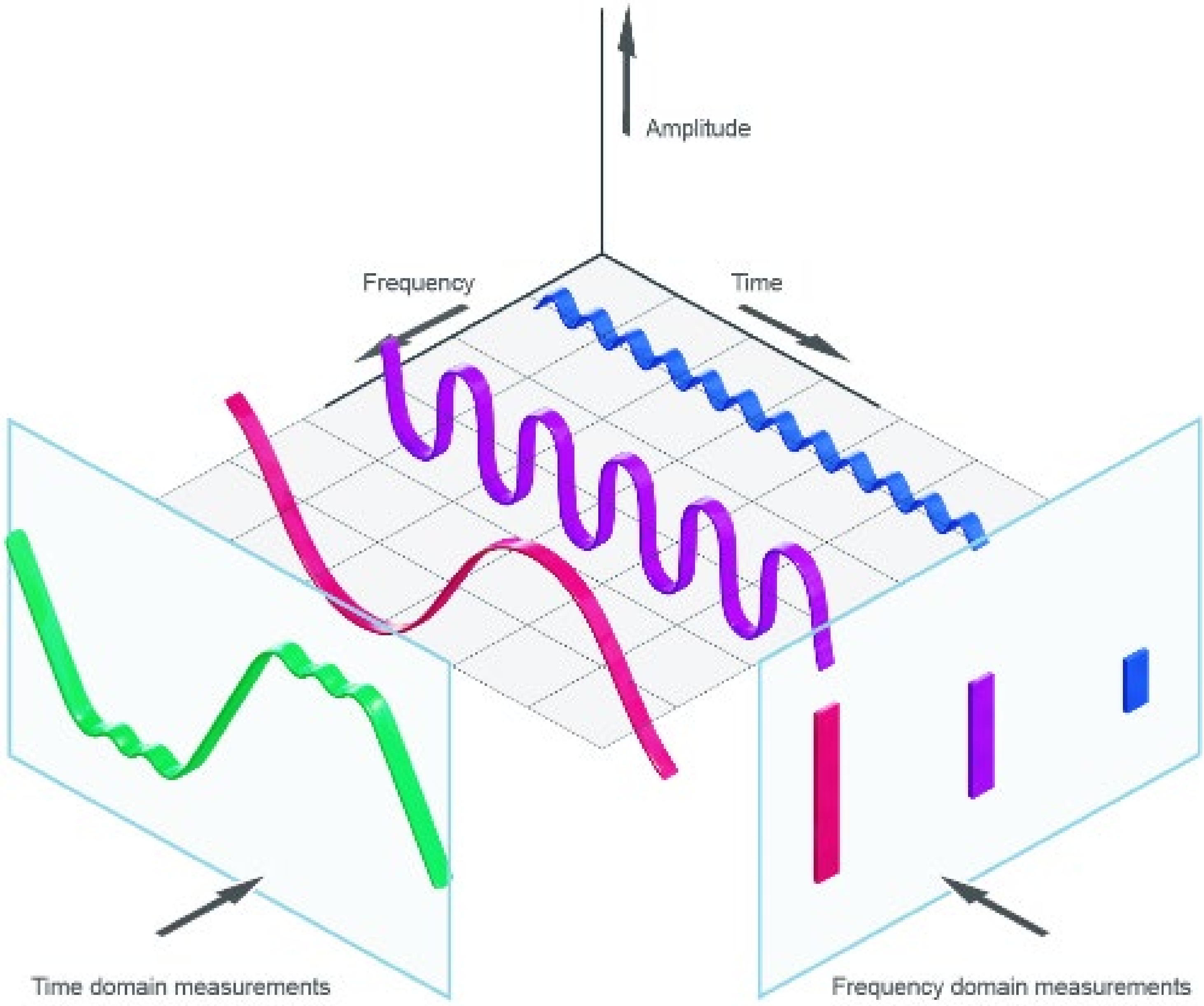




时域 vs. 频域

- 时域：时间 – 幅度

- 频域：频率 – 幅度



周期信号的傅里叶级数（三角形式）

- 信号（函数）的傅里叶级数表示

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

  - 直流分量:

$$a_0 = \frac{\langle x,1 \rangle}{\langle 1,1 \rangle} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\mathrm{d}t$$

  - 余弦分量:

$$a_n = \frac{\langle x,\cos n\omega t \rangle}{\langle \cos n\omega t,\cos n\omega t \rangle} = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cos n\omega t \,\mathrm{d}t = a_{-n}$$

  - 正弦分量:

$$b_n = \frac{\langle x,\sin n\omega t \rangle}{\langle \sin n\omega t,\sin n\omega t \rangle} = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\sin n\omega t \,\mathrm{d}t = -b_{-n}$$

周期信号的傅里叶级数（三角形式）

- 信号（函数）的傅里叶级数表示

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\omega t+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\omega t=c_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(n\omega t+\varphi_n)$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\mathrm{d}t$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$c_0=a_0$$

$$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

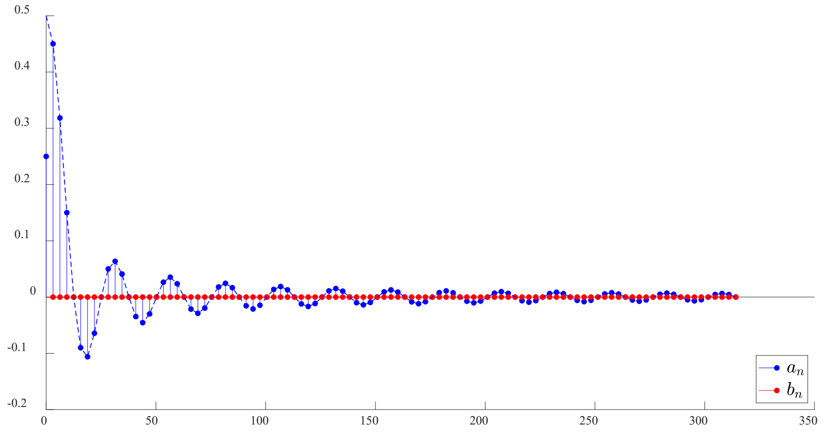
$$b_n=-c_n\sin\varphi_n\,,\ a_n=c_n\cos\varphi_n$$

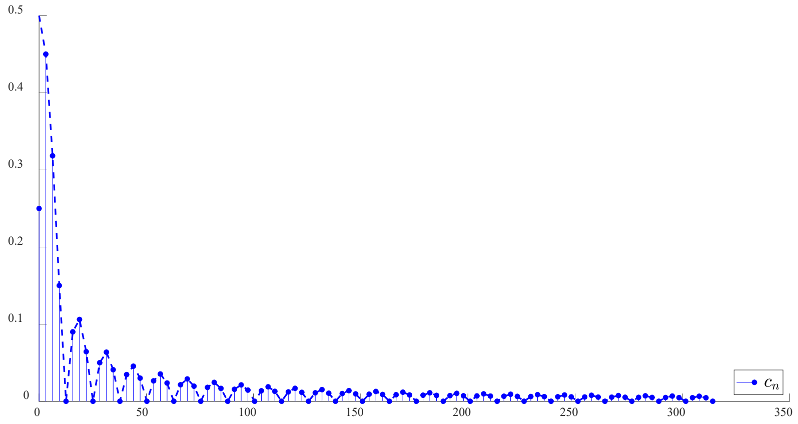
$$\tan\varphi_n=-\frac{b_n}{a_n}$$

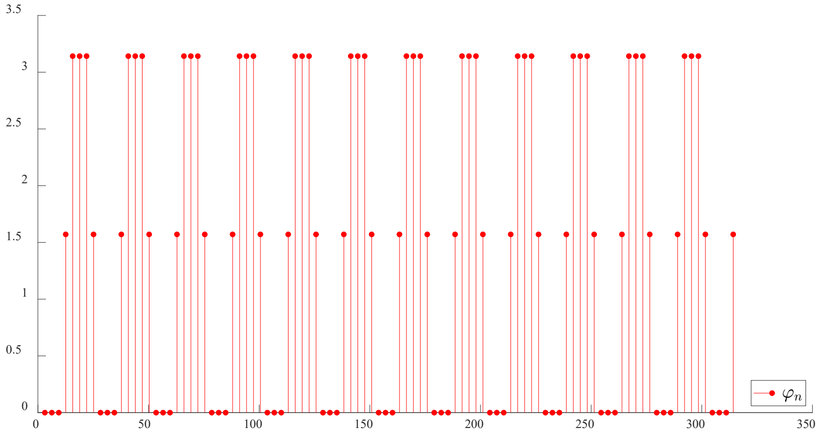
- c_0为信号的直流分量
- $c_n\cos(n\omega t+\varphi_n)$为$n$次谐波分量
- 正弦、余弦分量的频率为基频$f=1/T$的整数倍

周期信号的傅里叶级数（三角形式）

- 信号（函数）的傅里叶级数表示
  - 离散
  - 谐波
  - 衰减







周期信号的傅里叶级数（指数形式）

- 周期信号$x(t)$可以分解为不同频率虚指数信号之和

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n\, e^{jn\omega t}$$

合成（synthesis）公式

- 分量

$$X_n=\frac{\langle x, e^{jn\omega t}\rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t}\rangle}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cdot e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t$$

分析（analysis）公式

  - $n=\pm 1$，两项的基波频率为ω，两项合起来称为信号的**基波**分量
  - $n=\pm 2$，两项的基波频率为2ω，两项合起来称为信号的2次谐波分量
  - $n=\pm N$，两项的基波频率为$N\omega$，两项合起来称为信号的N次谐波分量

周期信号的傅里叶级数（指数形式）

- 周期信号$x(t)$可以分解为不同频率虚指数信号之和

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \, e^{jn\omega t}$$

- 分量

$$X_n = \frac{\langle x, e^{jn\omega t} \rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t} \rangle} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot (\cos n\omega t - j \sin n\omega t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} a_n - \frac{j}{2} b_n$$

$$X_0 = c_0 = a_0, \qquad X_{-n} = \frac{1}{2} a_n + \frac{j}{2} b_n, \qquad |X_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$a_n = X_n + X_{-n}, \qquad b_n = j(X_n - X_{-n}), \qquad c_n = |X_n| + |X_{-n}|$$

周期信号的傅里叶级数（指数形式）

- 周期信号$x(t)$可以分解为不同频率虚指数信号之和

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n\, e^{jn\omega t}$$

- 分量

$$X_n=\frac{\langle x, e^{jn\omega t}\rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t}\rangle}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cdot e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t$$

- 不同的时域信号，只是傅里叶级数的系数X_n不同，因此通过研究傅里叶级数的系数来研究信号的特性。
- X_n是频率的函数，它反映了组成信号各次谐波的幅度和相位随频率变化的规律，称频谱函数。

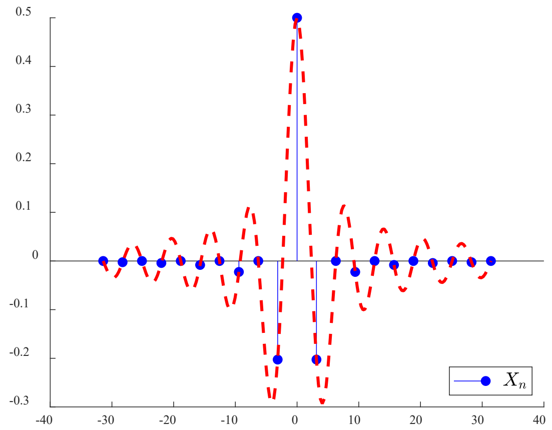
周期信号的傅里叶级数（指数形式）

- 周期信号$x(t)$可以分解为不同频率虚指数信号之和

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n\, e^{jn\omega t}$$

- 分量

$$X_n=\frac{\langle x, e^{jn\omega t}\rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t}\rangle}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cdot e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t=|X_n|e^{j\varphi_n}$$



- 双边频谱（包络线是三角频谱高度的一半）
- 负频率是计算的结果，没有实际物理意义
- 当相位仅为$\{0,\pm\pi\}$时，幅度和相位可以合成为一张频谱

周期信号的傅里叶级数收敛条件

- 收敛
  - 分析公式中的积分不收敛（系数无穷大）
  - 代入系数后，无法收敛于（重构）原始信号
- 所有**连续**信号都有傅里叶级数表示
- 大多数**不连续**信号也有类似性质

- 能量条件
  - 周期信号$x(t)$在一个周期内的能量

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$$

  有限

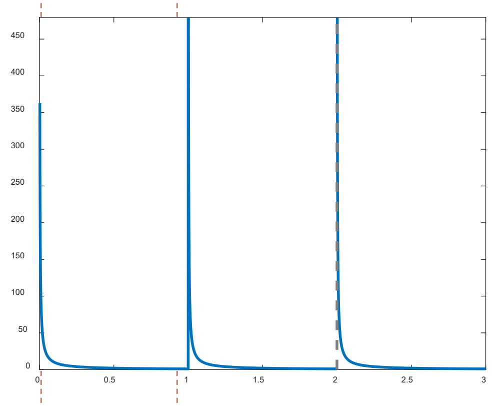
  - 能量有限不代表重构的信号和 $x(t)$ 在每一个 t值 上都相等，只说明二者在能量上没有差异

- 波形条件
  - （1）在一个周期内绝对可积，即满足$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$
  - （2）在一个周期内只有有限个有限的不连续点；
  - （3）在一个周期内只有有限个极大值和极小值。

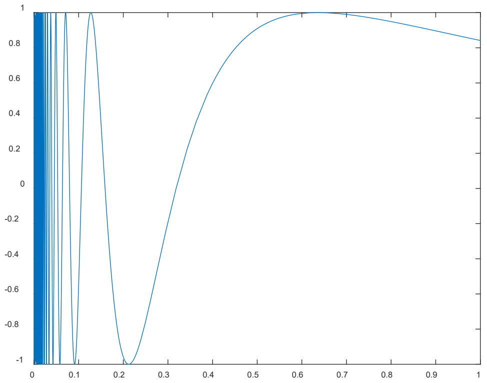
周期信号的傅里叶级数收敛条件

- Dirichlet条件（波形条件）
  - （1）【充分非必要条件】在一个周期内绝对可积，即满足$\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|\mathrm{d}t < \infty$
  - （2） 【必要非充分条件】在一个周期内只有有限个**有限的**不连续点；
  - （3） 【必要非充分条件】在一个周期内只有有限个极大值和极小值。
- 在$x(t)$不连续点处，傅里叶级数重构信号收敛于不连续点两边的平均值

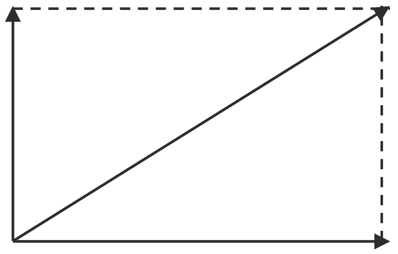
$$x(t) = \frac{1}{t}, (0 < t < T)$$



$$x(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right), (0 < t < T)$$



帕塞瓦尔定理



- 时域和频域能量/功率守恒定理

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left|x^2(t)\right|\ \mathrm{d}t$$

$$=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=c_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|X_n|^2$$

- 物理意义：任意周期信号的平均功率等于信号所包含的直流、基波以及各次谐波的平均功率之和。
- 周期信号的功率频谱： $|X_n|^2$ 随$n\omega$分布情况称为周期信号的功率频谱，简称功率谱。

概要

1. 傅里叶级数的定义：
指数、正弦正交基
表示一般信号

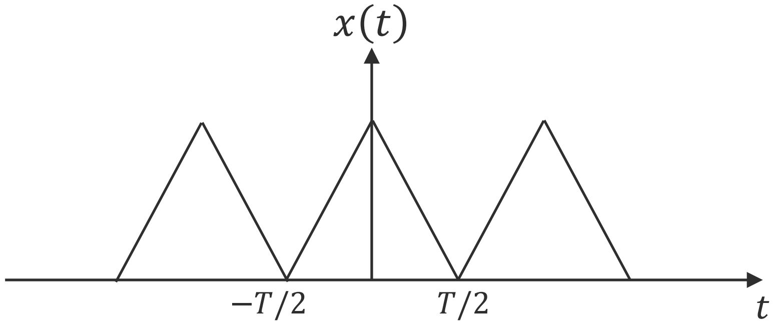
2. 傅里叶级数和频域：
傅里叶级数怎么理解

3. 傅里叶级数的计算：
傅里叶级数的计算方法和性质

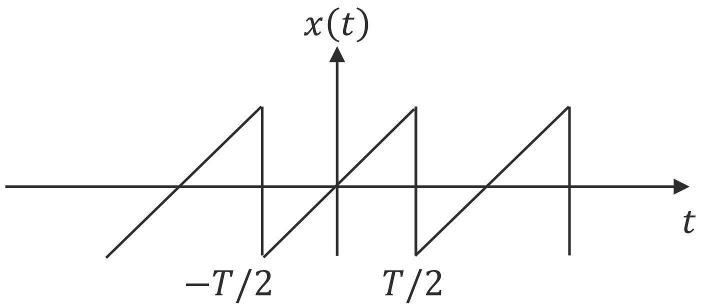
4. 系统函数：
傅里叶级数和系统的关系

傅里叶级数的对称特性

- 偶信号：$x(t) = x(-t)$
  - 傅里叶级数展开式中**只含有直流项与余弦项**
    - $a_0 = X_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} x(t)\mathrm{d}t$
    - $a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t \quad (n \neq 0)$
    - $b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t = 0$
    - $X_n = X_{-n} = \frac{a_n}{2} \ (n \geq 1)$

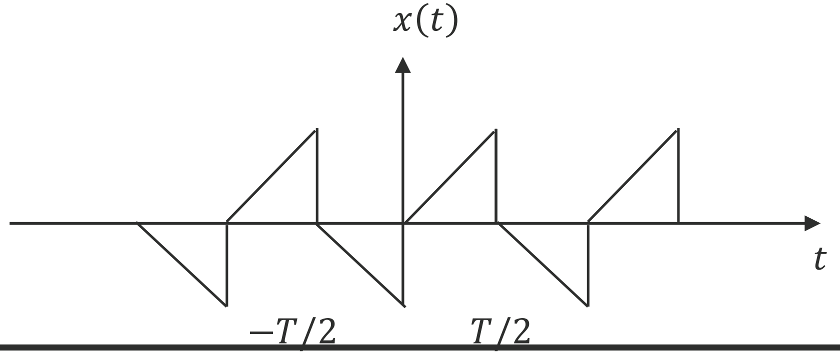


- 奇信号：$-x(t) = x(-t)$
  - 傅里叶级数展开式中只含有正弦项。
    - $a_0 = X_0 = 0$
    - $a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t = 0$
    - $b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t \ \ (n \geq 1)$
    - $X_n = X_{-n} = -j\frac{b_n}{2} \quad (n \geq 1)$

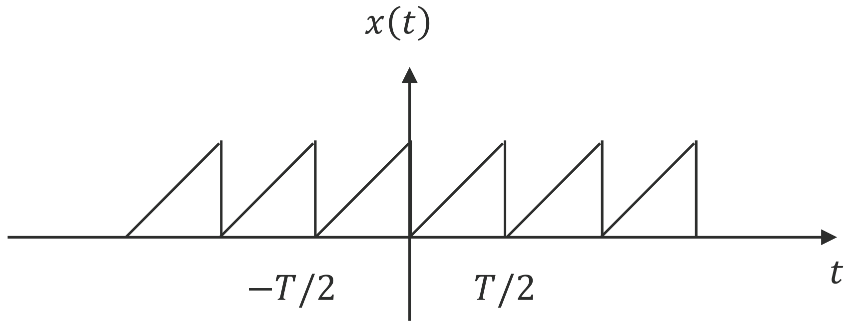


傅里叶级数的对称特性

- 奇谐（半波镜像）信号：$x(t) = -x\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$
  - 只含有正弦与余弦的奇次谐波分量，而无直流分量与偶次谐波分量。
    - $a_0 = X_0 = 0$；$a_n = b_n = 0$，n为偶数
    - $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t$，$n$为奇数
    - $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$，$n$为奇数
    - $X_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$，$n$为奇数

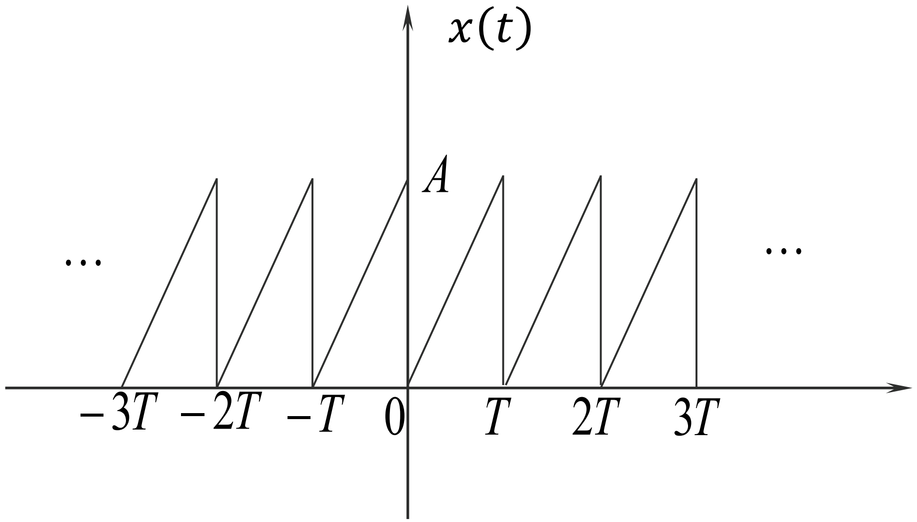


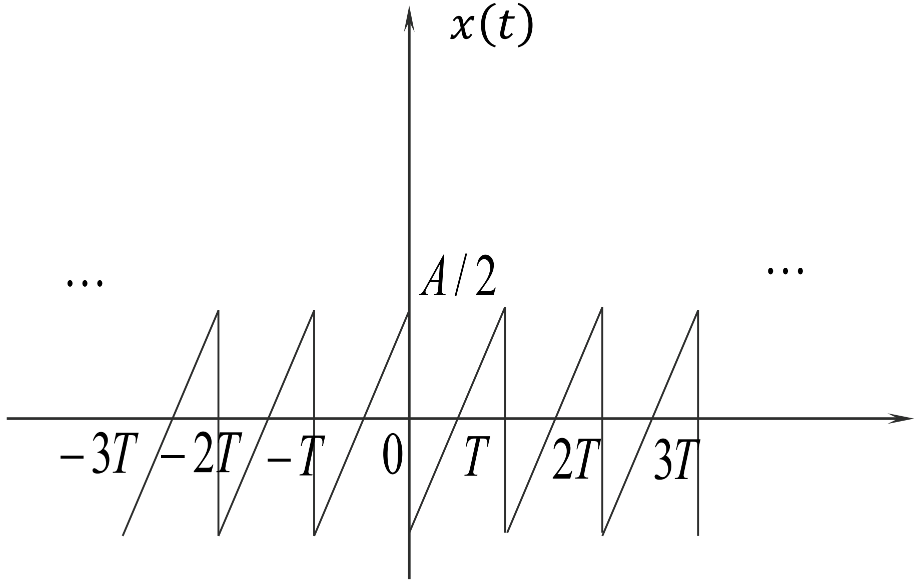
- 偶谐（半波重叠）信号$x(t) = x\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$
  - 半波重叠周期信号只含有正弦与余弦的偶次谐波分量，而无奇次谐波分量



傅里叶级数的对称特性

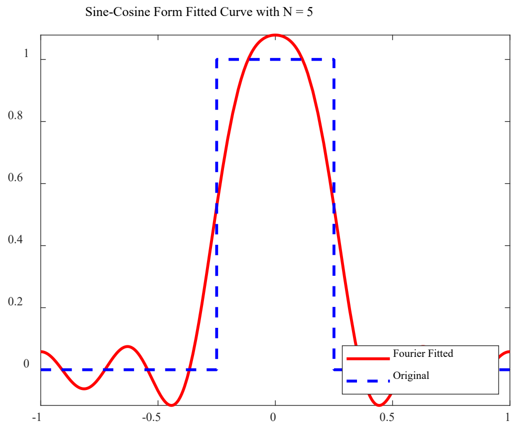
- 某些信号波形经上下或左右平移后，才呈现出某种对称特性
  - 去掉直流分量后，信号呈奇对称，只含有正弦各次谐波分量。
  - 因此该信号含有正弦各次谐波分量，直流分量。



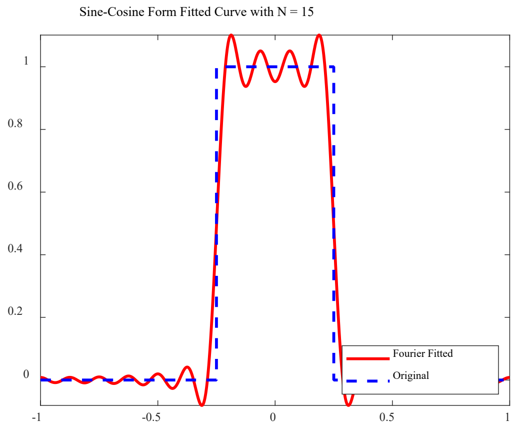


吉布斯（Gibbs）现象

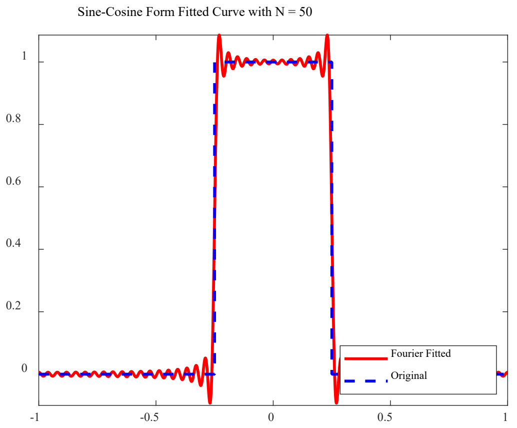
- 用**有限次**谐波分量来近似原信号，在**不连续点**出现过冲，过冲峰值不随谐波分量增加而减少，随N增大而**趋于一个常数**，约等于总跳变值的9% 。
- 吉布斯现象产生原因
  - 时间信号存在跳变破坏了信号的收敛性，使得在间断点傅里叶级数出现非一致收敛。



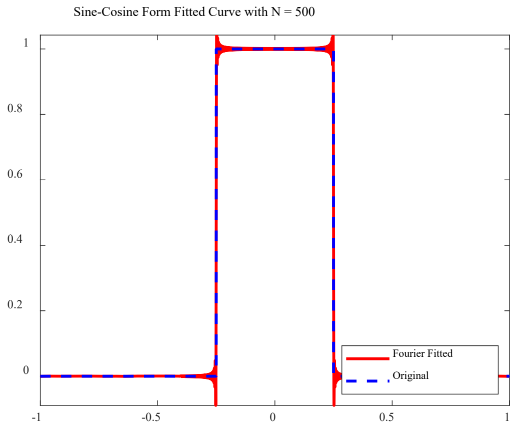
N=5



N=15



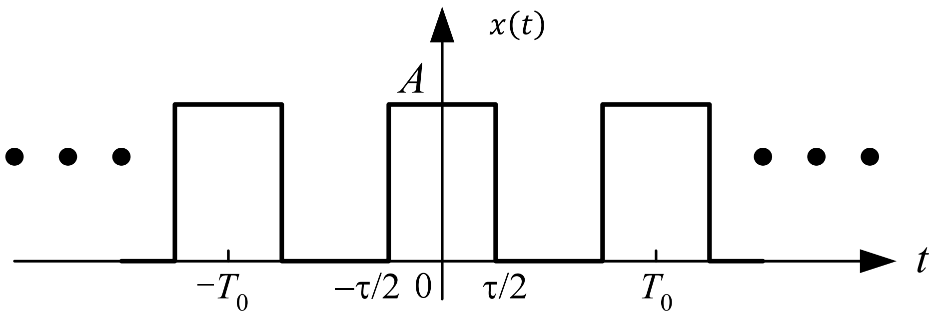
N=50



N=500

傅里叶级数计算

计算图示周期矩形脉冲信号的傅里叶级数展开式



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$$

- 直流分量:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{dt} = \frac{A\tau}{T}$$

- 正弦余弦分量

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos n\omega t\,\mathrm{dt} = \frac{2A}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos n\omega t\,\mathrm{dt} = \frac{4A}{Tn\omega}\sin\frac{n\omega\tau}{2} = \frac{2A}{n\pi}\sin\frac{\pi n\tau}{T} = \frac{2A\tau}{T}Sa\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right)$$

$$b_n = 0$$

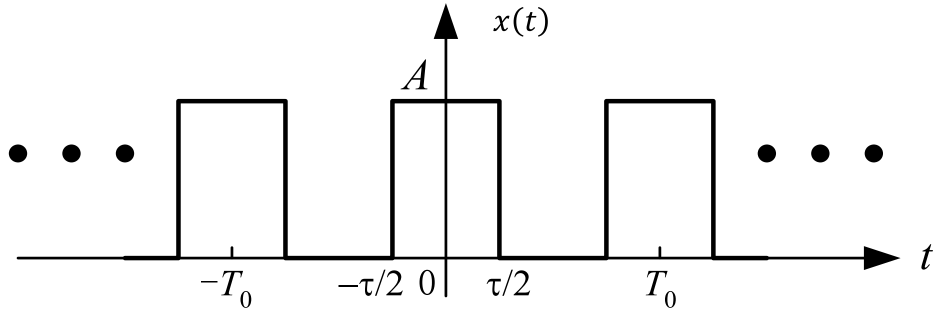
$$x(t) = \frac{A\tau}{T} + \frac{2A\tau}{T}\sum_{n=1}^{\infty} Sa\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right)\cos n\omega t$$

若$\tau = T/2$，则

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left(cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t\ - \cdots\right)$$

傅里叶级数计算

计算图示周期矩形脉冲信号的傅里叶级数展开式。



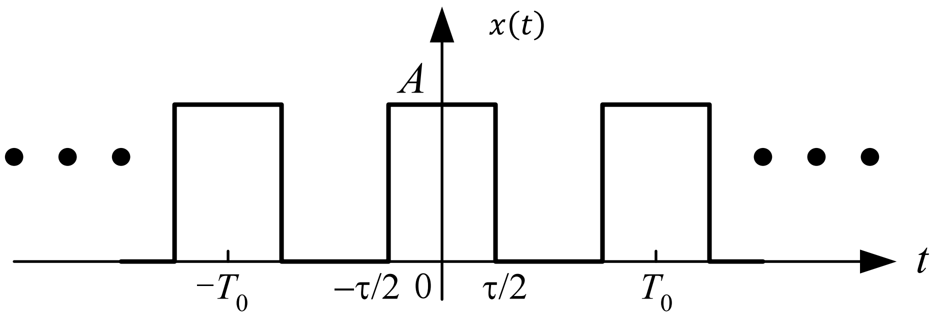
- 指数分量

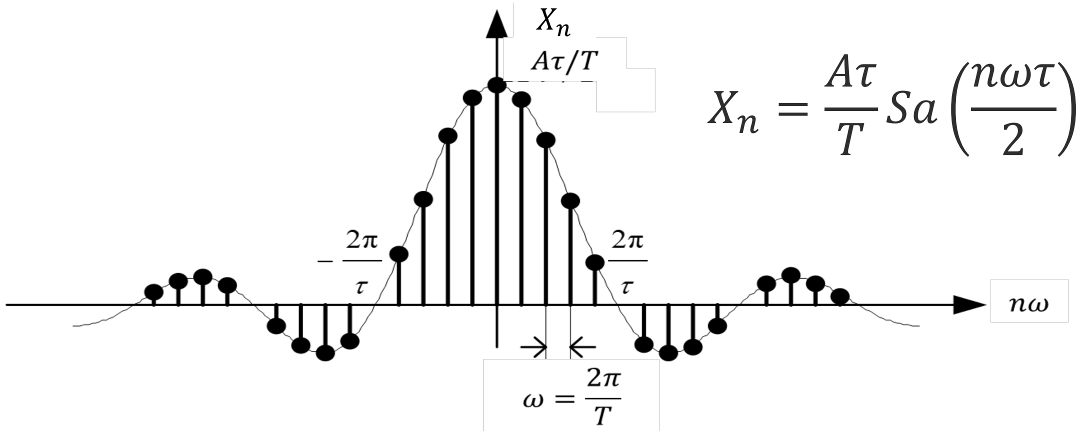
$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\cdot e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{A\tau}{T}Sa\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$$

$$x(t) = \frac{A\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)e^{jn\omega t}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

傅里叶级数计算

- 周期信号的频谱是由间隔为ω的谱线组成的。
  - 信号周期T越大，ω就越小，则谱线越密。反之，T越小，ω越大，谱线则越稀疏。
  - 当周期信号的幅度频谱随着谐波$n\omega$增大时，幅度频谱$|X_n|$不断衰减，并最终趋于零。





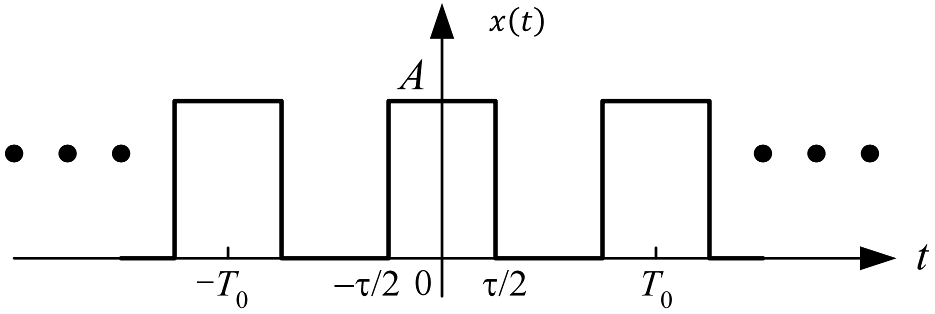
$$X_n = \frac{A\tau}{T} Sa\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$$

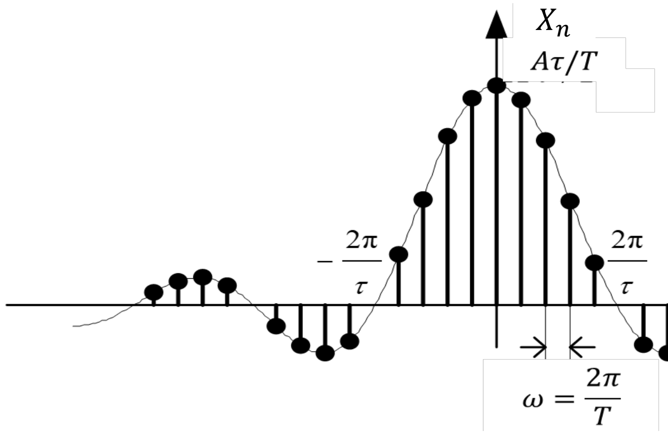
离散频谱特性

- 信号的有效带宽
  - $0 \sim 2\pi/\tau$ 这段频率范围称为周期矩形脉冲信号的**有效频带宽度**, 即

$$\omega_B = \frac{2\pi}{\tau}$$

  - 信号的有效带宽与信号时域的持续时间τ成反比。τ越大，其ω_B越小；反之，τ越小，其ω_B越大。
  - 信号的有效带宽的物理意义：在信号的有效带宽内，**集中了信号绝大部分谐波分量。**若信号丢失有效带宽以外的谐波成分，不会对信号产生明显影响。当信号通过系统时，信号与系统的有效带宽必须“匹配”。

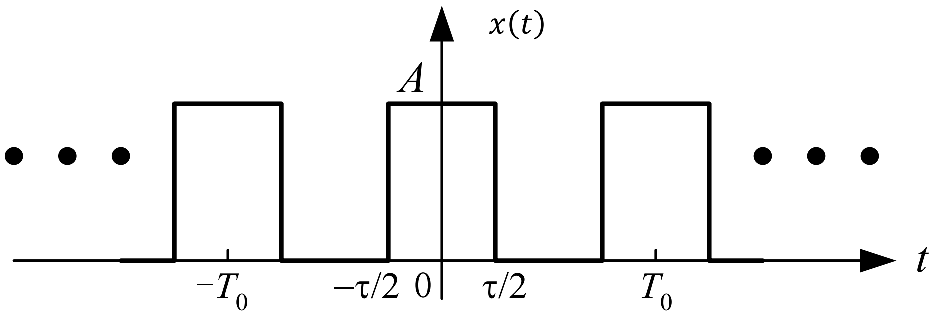


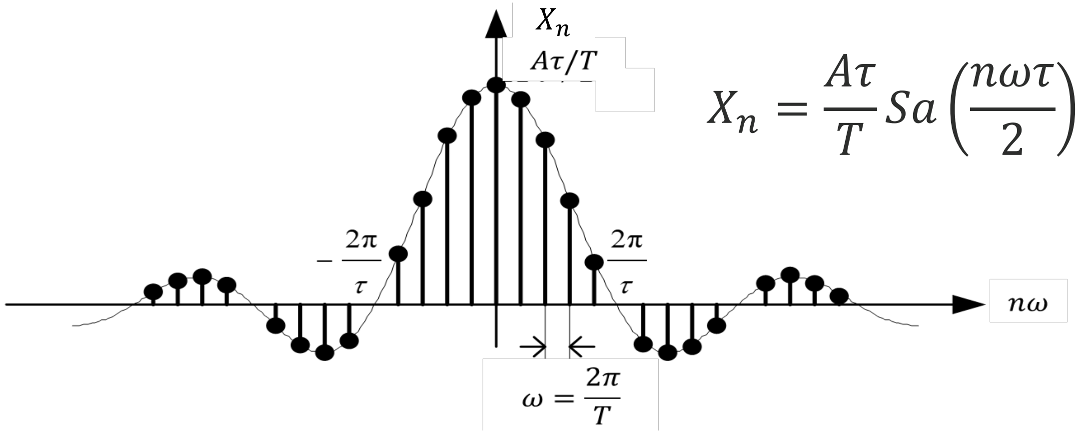


$$X_n = \frac{A\tau}{T} Sa\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$$

离散频谱特性

- 幅度衰减特性
  - 若信号时域波形变化越平缓，高次谐波成分就越少，幅度频谱衰减越快; 若信号时域波形变化跳变越多，高次谐波成分就越多，幅度频谱衰减越慢。
  - $x(t)$不平滑， $|X_n|$按$1/n$的速度衰减
  - $x(t)$平滑， $|X_n|$按$1/n^2$的速度衰减

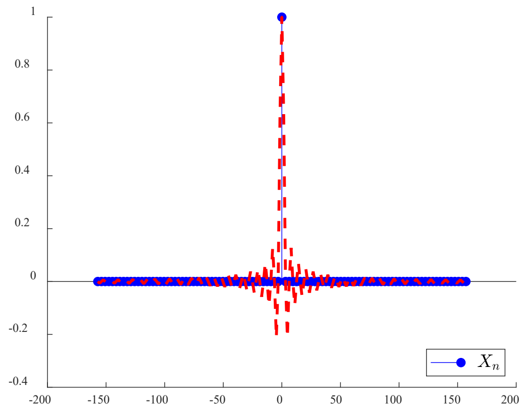




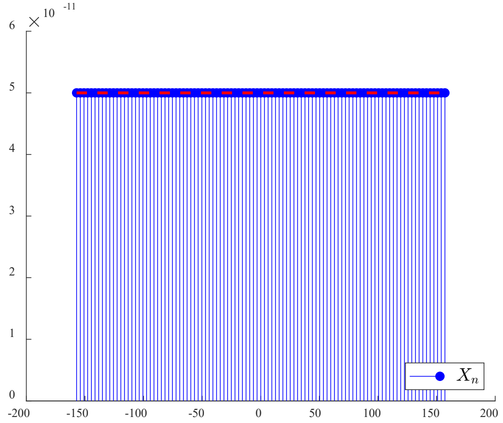
$$X_n = \frac{A\tau}{T} Sa\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$$

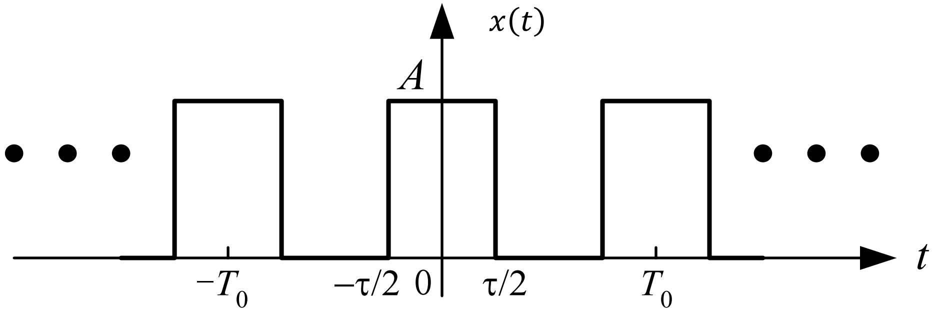
离散频谱特性

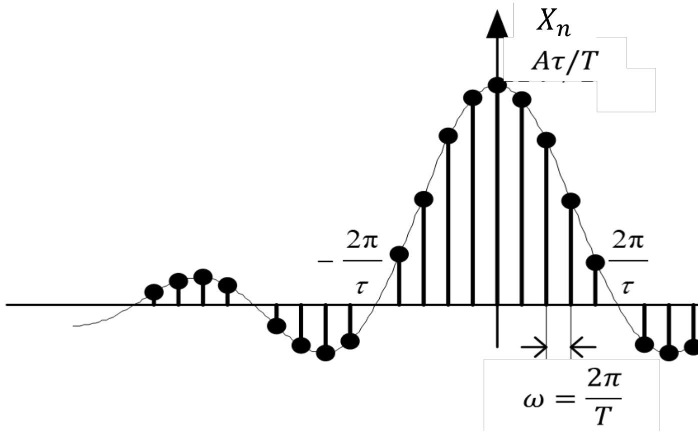
- $\tau \to T$，信号变为直流信号
  - 频谱变为冲激信号



- $\tau \to 0$, 信号变为周期脉冲序列
  - 频谱变平坦（白色频谱）







$$X_n = \frac{A\tau}{T} Sa\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$$

概要

1. 傅里叶级数的定义：
指数、正弦正交基
表示一般信号

2. 傅里叶级数和频域：
傅里叶级数怎么理解

3. 傅里叶级数的计算：
傅里叶级数的计算方法和性质

4. 系统函数：
傅里叶级数和系统的关系

系统函数

- 假设$h(t)$为**线性时不变系统**的单位冲激响应，则

$$e^{j\omega t} * h(t) = \int_{\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= e^{j\omega t}\int_{\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} h(\tau)\mathrm{d}\tau = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

- 针对一般复数s，$H(s)$为系统函数；
- 若为纯虚数，则$H(j\omega)$为频率响应

系统函数

- 若周期信号的傅里叶级数为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \, e^{jn\omega t}$$

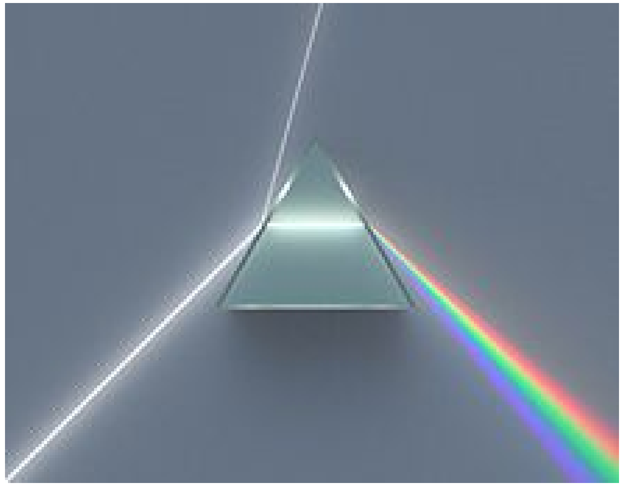
- 若该信号输入冲激响应为$h(t)$的线性时不变系统，则输出为

$$y(t) = x(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n H(jn\omega) e^{jn\omega t}$$

- $y(t)$也是周期的，与$x(t)$有相同的基波频率，$\{X_n H(jn\omega)\}$为$y(t)$的傅里叶级数

什么是谱

Isaac Newton
英国数学家、物理学家



白光通过透镜会产生多
个颜色的光

透镜产生多个颜色？

白光能被分解，包含了各种颜色的光。牛顿在拉丁文手稿中用了specter描述这个现象，最后演化为spectrum，表示彩虹中的各种颜色。