

05 信号的傅里叶变换

傅里叶分析方法如何适用于一般的连续信号



傅里叶级数

- 针对连续周期信号

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega t}$$

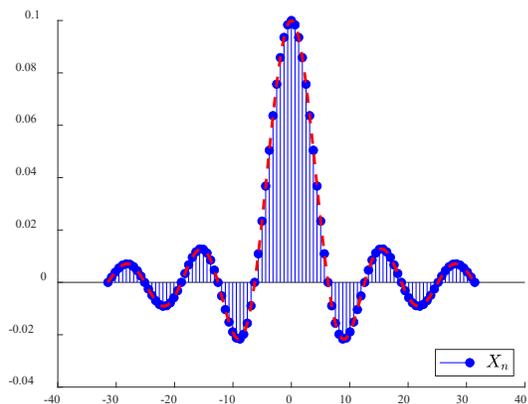
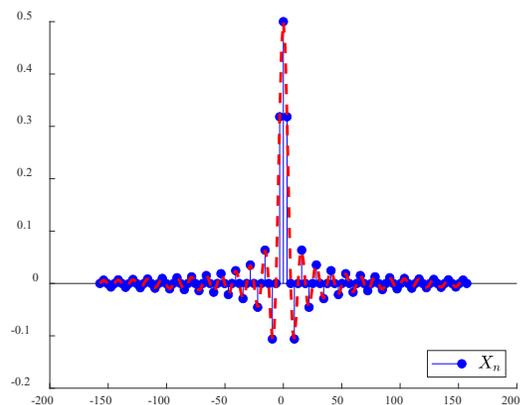
其中

$$X_n = \frac{\langle x, e^{jn\omega t} \rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t} \rangle} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

- 如何推广到（一般的）**非周期**信号？

离散频谱特性

- 增大周期 $T \rightarrow \infty$
 - 信号近似非周期信号, 谱线间隔 $\omega \rightarrow 0$, 离散频谱趋于连续频谱
 - $X_n \rightarrow 0$



频谱密度

- 傅里叶级数

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nj\omega) e^{jn\omega t}$$


$$X(nj\omega) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

- 两边乘 T

$$TX(nj\omega) = \frac{X(nj\omega)2\pi}{\omega} = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

- $T \rightarrow \infty$ 时 $TX(nj\omega) = \frac{X(nj\omega)2\pi}{\omega}$ 趋于有限值

- 定义频谱密度函数

$$X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} X(nj\omega)T = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{X(nj\omega)2\pi}{\omega}$$

- $\frac{X(nj\omega)}{\omega}$ 表示单位频带的频谱值，即频谱密度

$$X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

- 谱线间隔 $\Delta(n\omega) = \omega$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nj\omega) e^{jn\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi X(nj\omega)}{\omega} e^{jn\omega t} \cdot \Delta(n\omega) \end{aligned}$$

- 可得

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

傅里叶变换

- 傅里叶变换

$$X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

- 傅里叶逆变换

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

非周期信号可以分解为无数个
频率为 ω ，复振幅为 $\frac{X(j\omega)}{2\pi} d\omega$ 的
虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 的线性组合。

$X(j\omega)$ 一般是复函数，

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$|X(j\omega)|$ — ω 曲线为幅度频谱

$e^{j\varphi(\omega)}$ — ω 曲线为相位频谱

傅里叶变换

- 对于实信号 $x(t)$, 有

$$\begin{aligned}x(t) &= \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t} d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega\end{aligned}$$

- 傅里叶变换的正弦/余弦分量表示, 包含从0到无穷大的余弦分量

收敛条件（类比傅里叶级数的收敛条件）

- 能量条件

- 波形条件

- 非周期信号在无限区间上绝对可积 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

- 在任意有限区间内，信号只有有限个最大值和最小值

- 在任意有限区间内，信号仅有有限个不连续点，且这些点必须是有限值

- 是**充分**条件，但不是必要条件

傅里叶变换与傅里叶级数

- $\hat{x}(t)$ 为周期信号, $x(t)$ 为有限持续信号, 信号的值为 $\hat{x}(t)$ 在一个周期 T 内的值, 在周期外的值为0
- $x(t)$ 的傅里叶变换

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

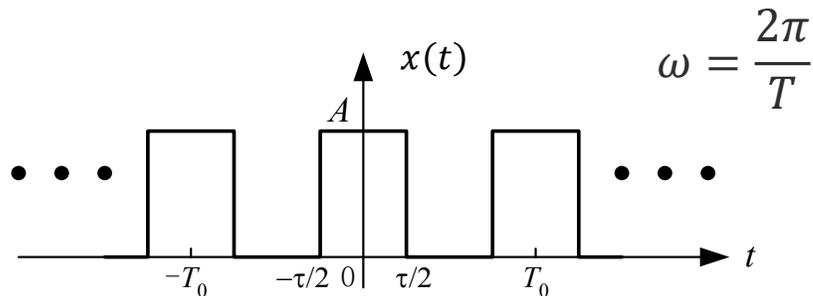
- $\hat{x}(t)$ 的傅里叶级数

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \hat{x}(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega=n\omega} \end{aligned}$$

$x(t)$ 在 $-\frac{T}{2} \sim \frac{T}{2}$ 之外值为0

傅里叶变换与傅里叶级数

计算**周期**矩形脉冲信号的傅里叶级数



$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

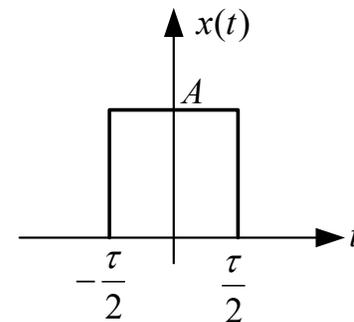
$$= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cdot e^{-jn\omega t} dt = \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$$

▪ 傅里叶级数

$$x(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) e^{jn\omega t}$$

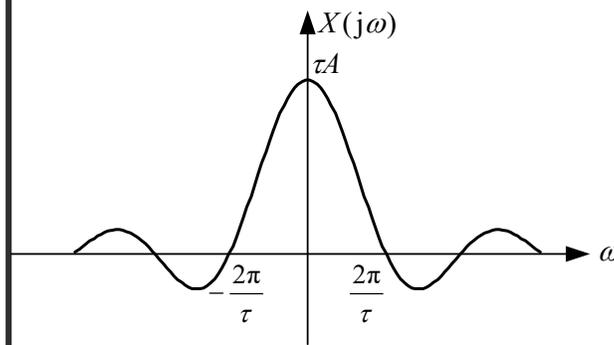
求图示**非周期**矩形脉冲信号的频谱函数。

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$



▪ 由傅里叶变换定义式, 可得

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cdot e^{-j\omega t} dt = A\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

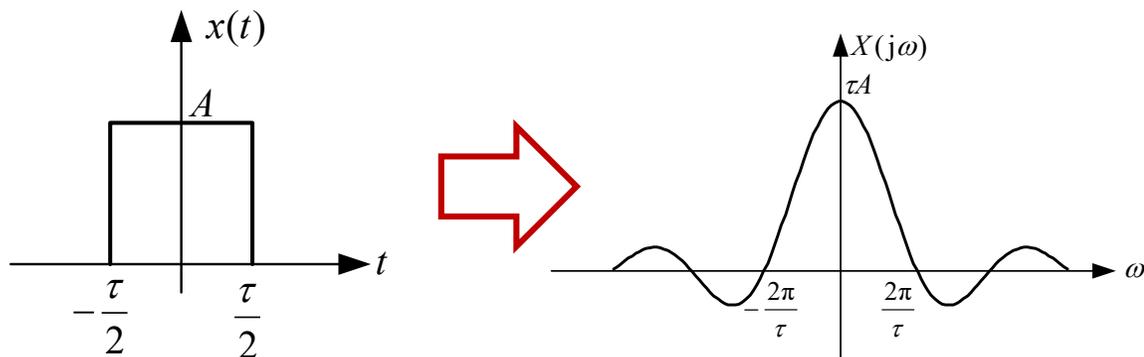


幅度谱: $|X(j\omega)| = A\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$

相位谱: $\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \frac{4n\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} \\ \pi, & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{4(n+1)\pi}{\tau} \end{cases}$

傅里叶变换的特点

- 非周期矩形脉冲信号的频谱是**连续频谱**，其形状与周期矩形脉冲信号离散频谱的包络线相似



- 周期信号的离散频谱可以通过对非周期信号的连续频谱**等间隔抽样**求得

- 信号在时域有限，则在频域将**无限延续**
- 信号的频谱分量主要集中在零频到第一个过零点之间，工程中往往将此宽度作为**有效带宽**
- 脉冲宽度 τ 越窄，有效带宽越宽，高频分量越多。即信号信息量大、传输速度快，传送信号所占用频带越宽。

概要

1. 典型信号的傅里叶变换:
傅里叶变换的定义和计算技巧

2. 傅里叶变换的性质:
对称性, 尺度变换, 频域卷积

3. 周期信号的傅里叶变换:
关联连续信号的傅里叶变换和
傅里叶级数

4. 傅里叶变换的应用:
傅里叶变换思想在AI中的应用

概要

1. 典型信号的傅里叶变换:
傅里叶变换的定义和计算技巧

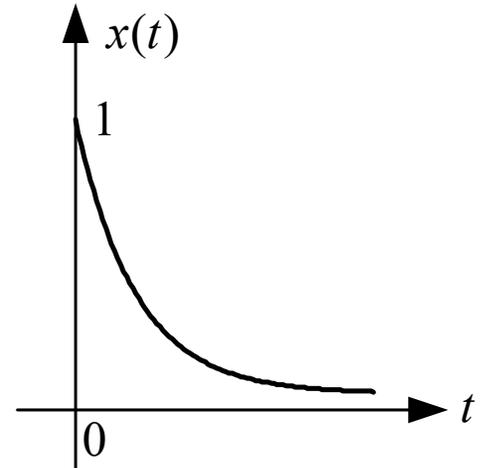
2. 傅里叶变换的性质:
对称性, 尺度变换, 频域卷积

3. 周期信号的傅里叶变换:
关联连续信号的傅里叶变换和
傅里叶级数

4. 傅里叶变换的应用:
傅里叶变换思想在AI中的应用

单边指数信号的频谱

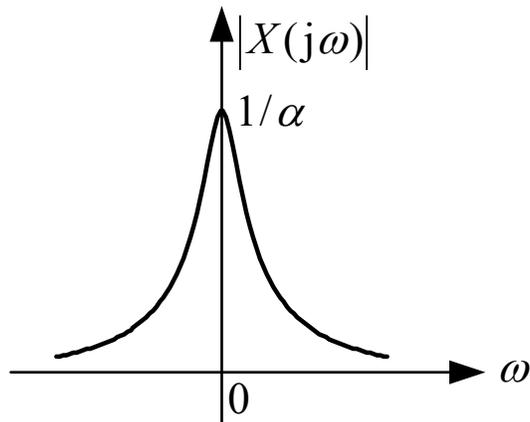
- 单边指数信号 $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, $\alpha > 0$,



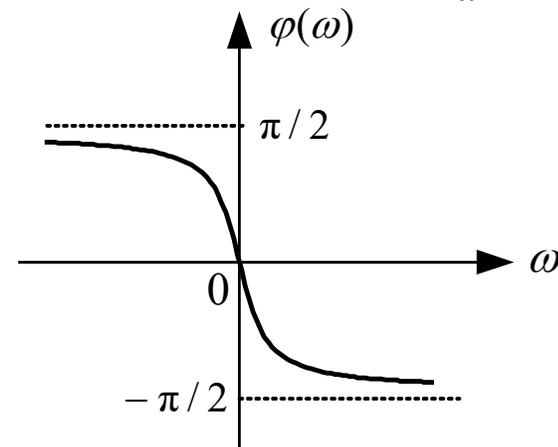
- 根据定义

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+j\omega}$$

幅度谱: $|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$



相位谱: $\varphi(\omega) = -\arctan(\frac{\omega}{\alpha})$



双边指数信号的频谱

- 双边指数信号 $e^{-a|t|}$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-at} \cos \omega t dt \\ &= 2e^{-at} \frac{(\omega \sin \omega t - \alpha \cos \omega t)}{\alpha^2 + \omega^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

- 幅度谱: $|X(j\omega)| = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

- 相位谱: $\varphi(\omega) = 0$

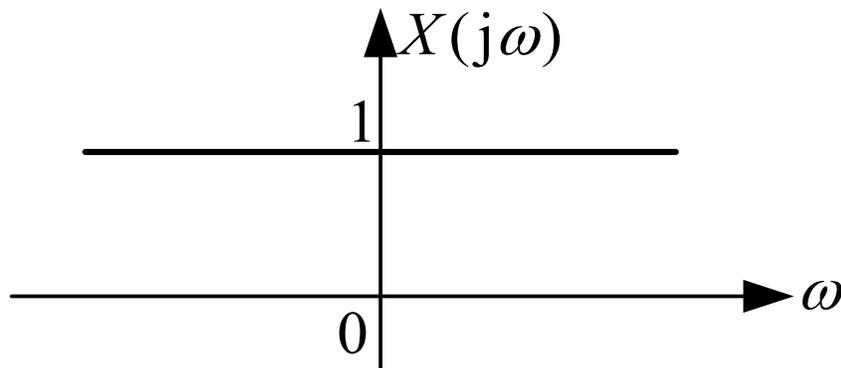
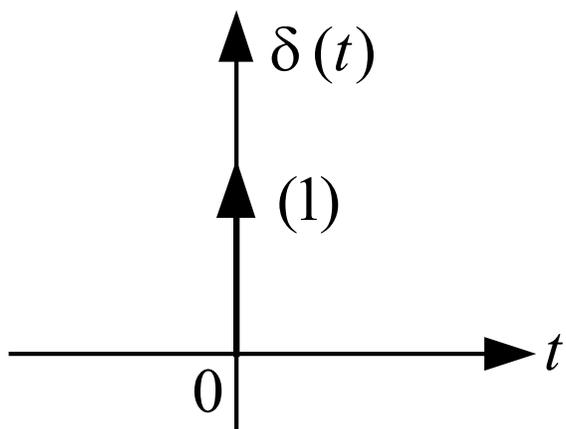
单位冲激信号的频谱

- 单位冲激信号 $\delta(t)$

- 由于冲激信号的抽样特性:

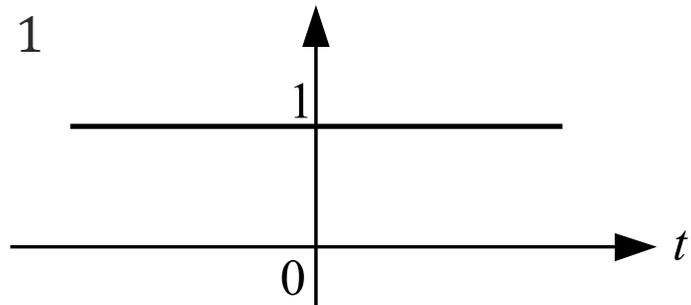
$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1$$

- 时域变化异常剧烈的冲激函数包含幅度相等的所有频率分量，这种频谱也称为“均匀谱”或“白色谱”



直流信号的频谱

- 直流信号 $x(t) = 1$



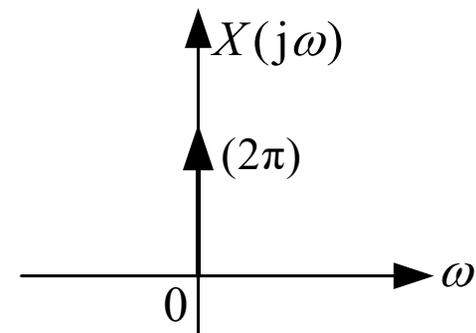
$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- 类比 $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, 由于

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

- 所以

$$\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega)] = 1$$



- 直流信号的傅里叶变换是冲激信号

直流信号的频谱

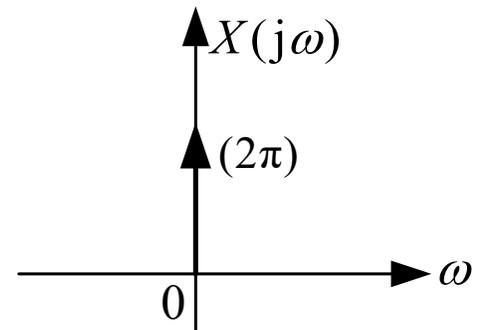
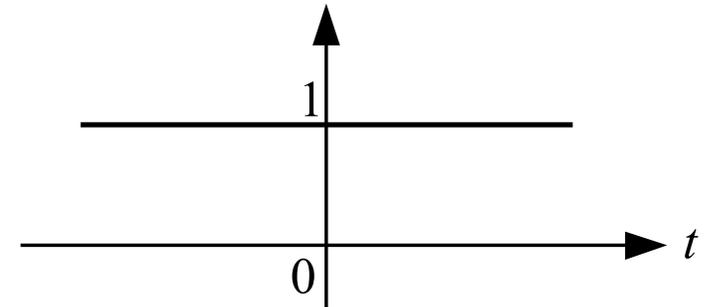
- 直流信号 $x(t) = 1$
- 直流信号**不满足**绝对可积条件，可用**极限**的方法求出傅里叶变换。

$$\mathcal{F}[1] = \lim_{\sigma \rightarrow 0} F[1 \cdot e^{-\sigma|t|}] = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[\frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} \right] = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[\frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} \right] = \begin{cases} 0 & \omega \neq 0 \\ \infty & \omega = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega = 2 \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi$$

- 对照冲激、直流时频曲线可看出：
 - 时域持续越宽的信号，其频域的频谱越窄；
 - 时域持续越窄的信号，其频域的频谱越宽。



符号函数的频谱

- 符号函数信号

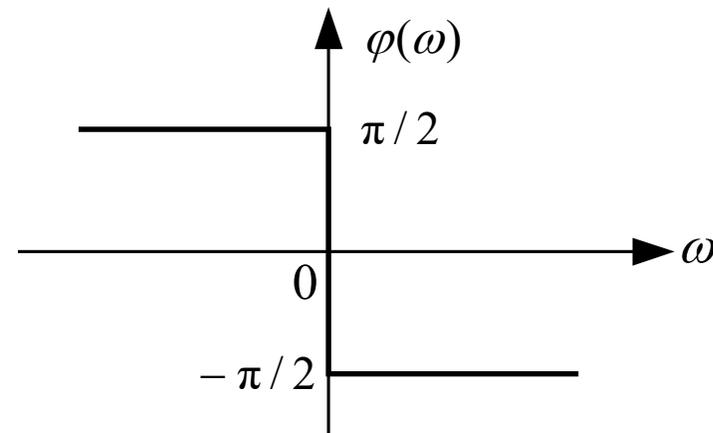
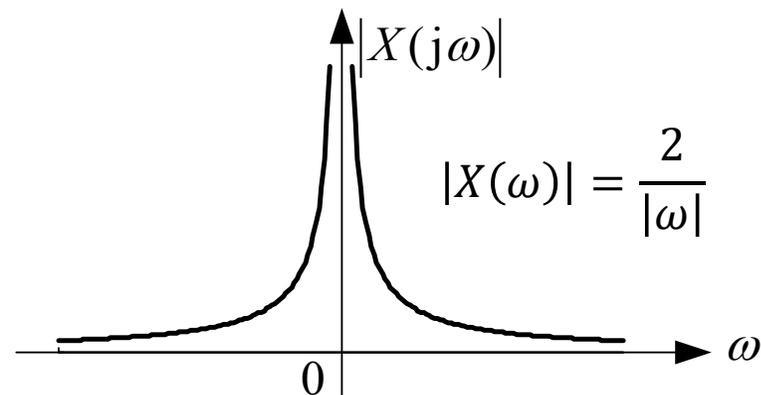
$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

- 根据定义

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)e^{-\sigma|t|}] = \int_{-\infty}^0 (-1)e^{\sigma t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= -\left. \frac{e^{(\sigma-j\omega)t}}{\sigma-j\omega} \right|_{t=-\infty}^0 - \left. \frac{e^{-(\sigma+j\omega)t}}{\sigma+j\omega} \right|_{t=0}^{\infty} = \frac{-1}{\sigma-j\omega} + \frac{1}{\sigma+j\omega}$$

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \{\mathcal{F}[\text{sgn}(t)e^{-\sigma|t|}]\} = \frac{2}{j\omega}$$



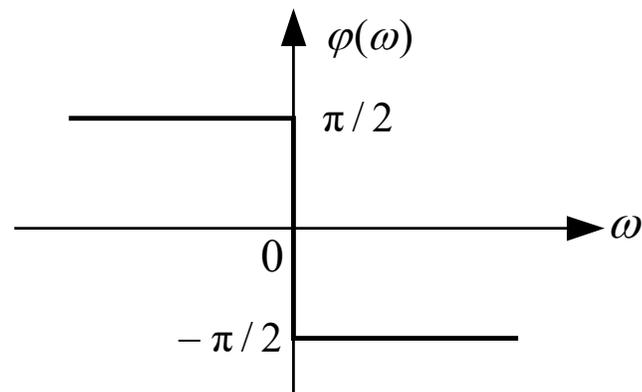
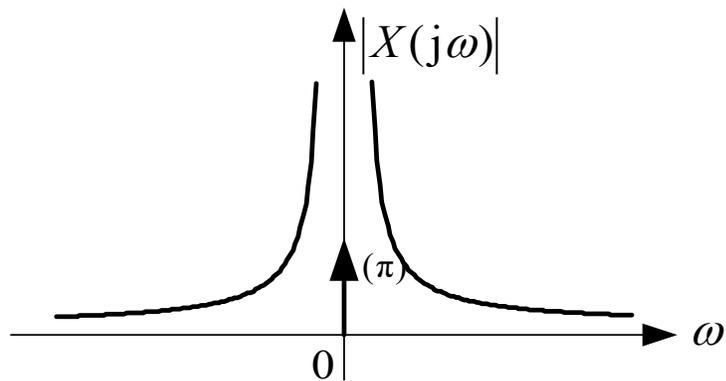
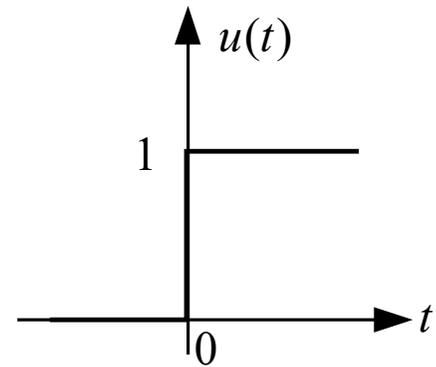
单位阶跃信号的频谱

- 单位阶跃信号 $u(t)$

$$u(t) = \frac{1}{2}\{u(t) + u(-t)\} + \frac{1}{2}\{u(t) - u(-t)\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$$

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

- 由于 $u(t)$ 含有直流分量, 因此 $\omega = 0$ 处有冲激函数
- $u(t)$ 在 $t = 0$ 时有跳变, 频谱中也包含其他分量



概要

1. 典型信号的傅里叶变换:
傅里叶变换的定义和计算技巧

2. 傅里叶变换的性质:
对称性, 尺度变换, 频域卷积

3. 周期信号的傅里叶变换:
关联连续信号的傅里叶变换和
傅里叶级数

4. 傅里叶变换的应用:
傅里叶变换思想在AI中的应用

线性特性

- 傅里叶变换的线性特性：若 $x_1(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(j\omega)$ ， $x_2(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_2(j\omega)$ ，
则 $ax_1(t) + bx_2(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$ ，其中 a 和 b 均为常数

对称性

- 对称性: 若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$, 则 $X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-j\omega)$; 若 $x(t)$ 为偶函数, 则 $X(t) \leftrightarrow 2\pi x(j\omega)$
- 由于

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

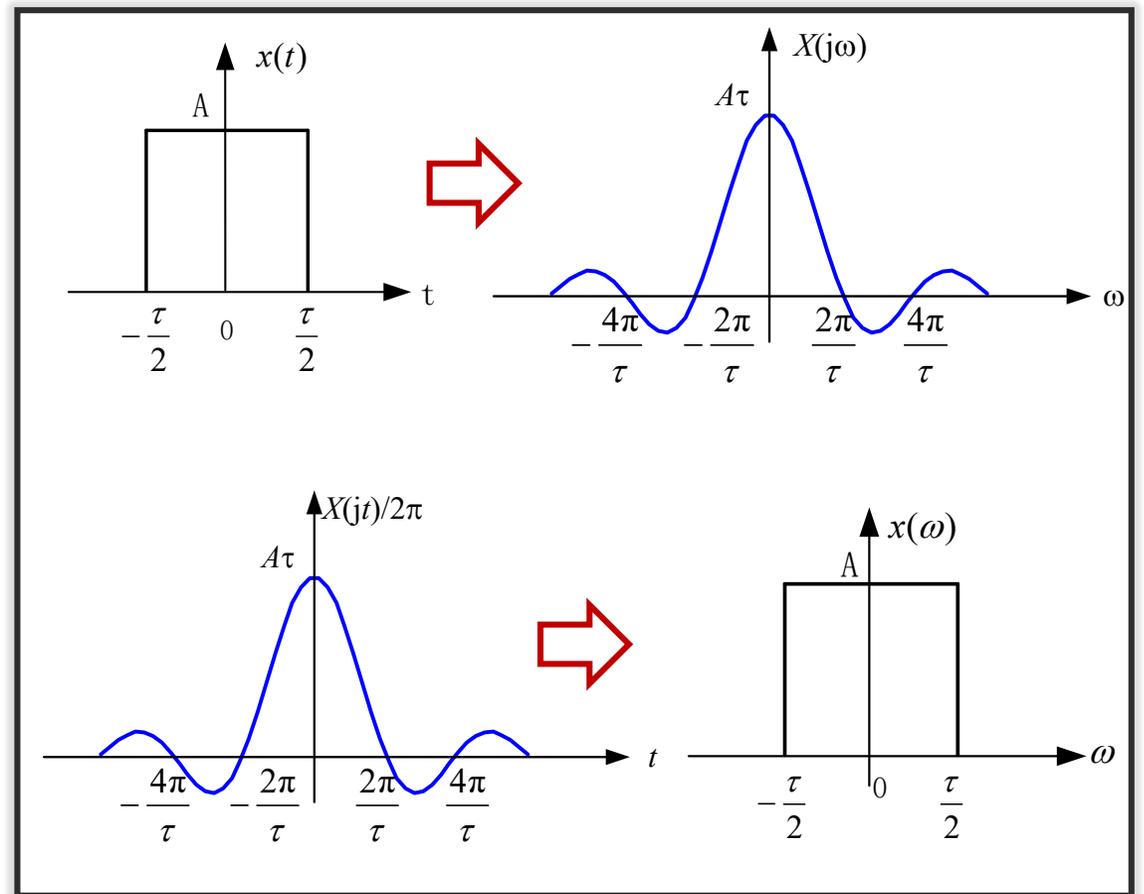
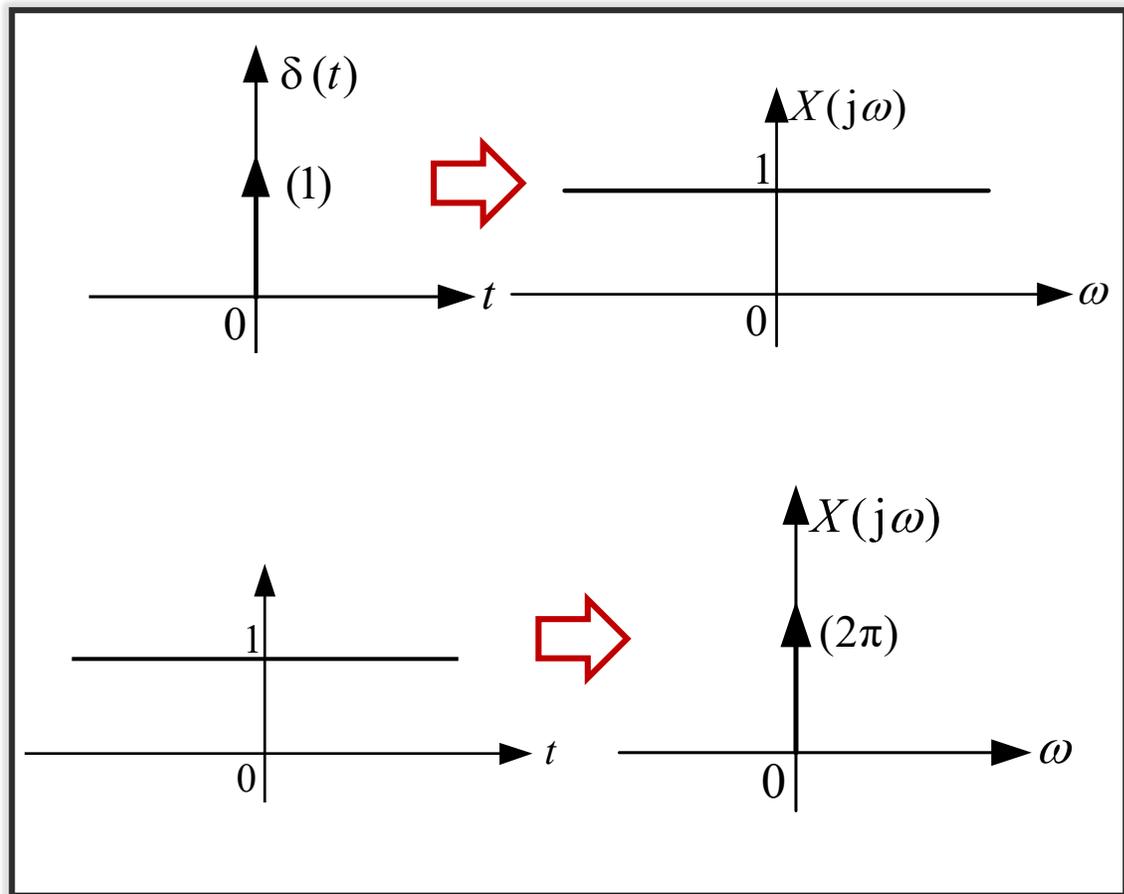
$$x(-t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

将 t 和 $j\omega$ 互换

$$x(-j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{\mathcal{F}[X(t)]}{2\pi}$$

傅里叶变换的对称性

- 对称性: 若 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$, 则 $X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-j\omega)$; 若 $x(t)$ 为偶函数, 则 $X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(j\omega)$



奇偶虚实性

- $X(j\omega)$ 可表示为

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = X_R(\omega) + jX_I(\omega)$$

且有

$$|X(\omega)| = \sqrt{X_R^2(\omega) + X_I^2(\omega)}, \varphi(\omega) = \arctan \frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)}$$

- 若 $x(t)$ 是实函数,

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt$$

则 $X_R(\omega)$ 为偶函数, $X_I(\omega)$ 为奇函数, $|X(\omega)|$ 为偶函数, $\varphi(\omega)$ 为奇函数, $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$

奇偶虚实性

- 若 $x(t)$ 是实函数,

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt$$

$X_R(\omega)$ $X_I(\omega)$

- 若 $x(t)$ 是实偶函数, $X_I(\omega) = 0$

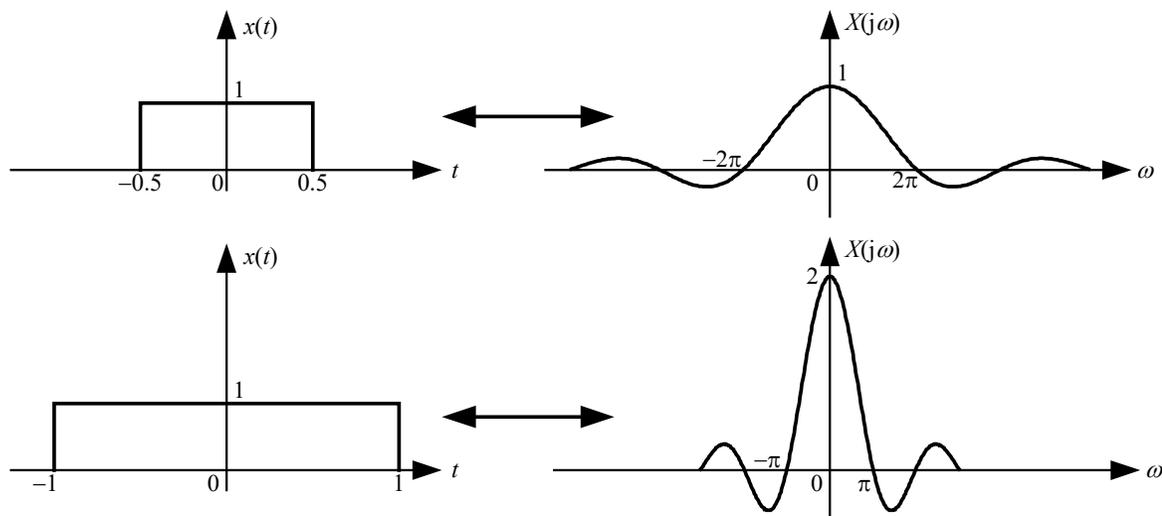
$$X(j\omega) = X_R(\omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos \omega t dt$$

- 若 $x(t)$ 是实奇函数, $X_R(\omega) = 0$

$$X(j\omega) = jX_I(\omega) = -2j \int_0^{\infty} x(t) \sin \omega t dt$$

尺度变换特性

- 若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$, 则 $x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X(j\omega/a)$
- 若 $a = -1$, 则 $x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-j\omega)$, 时域翻转频域也翻转
- 时域压缩, 则频域拉伸; 拉伸时域, 则频域压缩。



- 证明:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

- 令 $\lambda = at$, 则 $d\lambda = a dt$,

- 代入上式可得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(at)] &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j\frac{\omega}{a}\lambda} d\lambda \\ &= \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

尺度变换特性

- 若 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$, 则 $x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X(j\omega/a)$

- 由于 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$, 所以

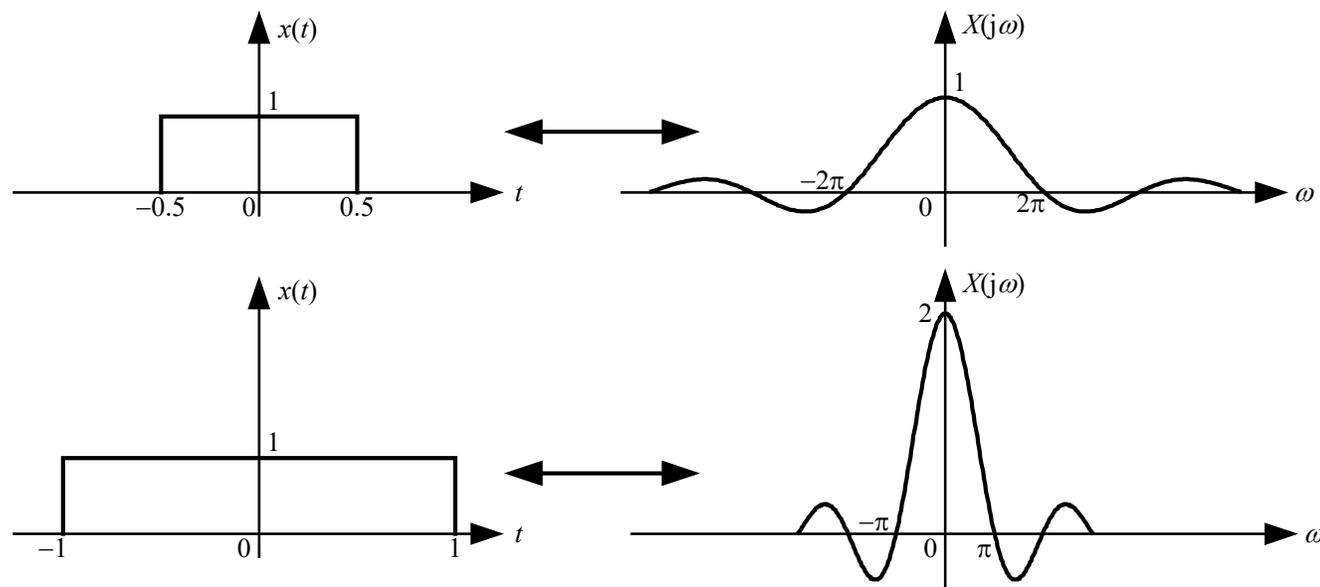
$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

时域覆盖面积

- 由于 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$, 所以

$$2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega$$

频域覆盖面积



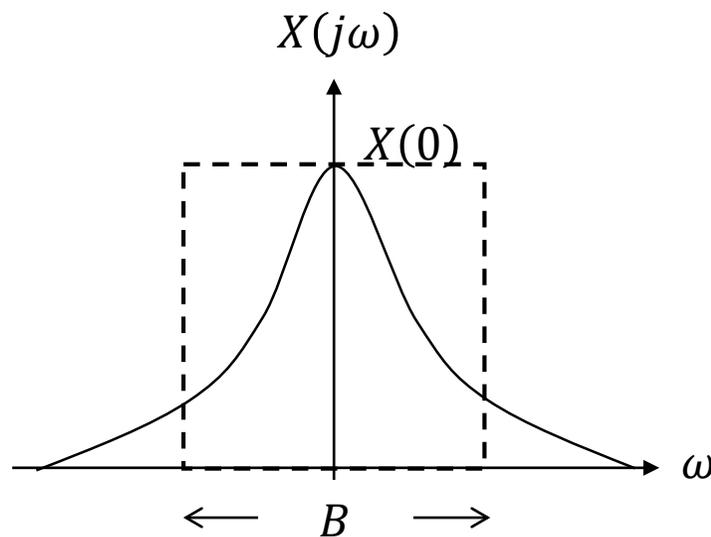
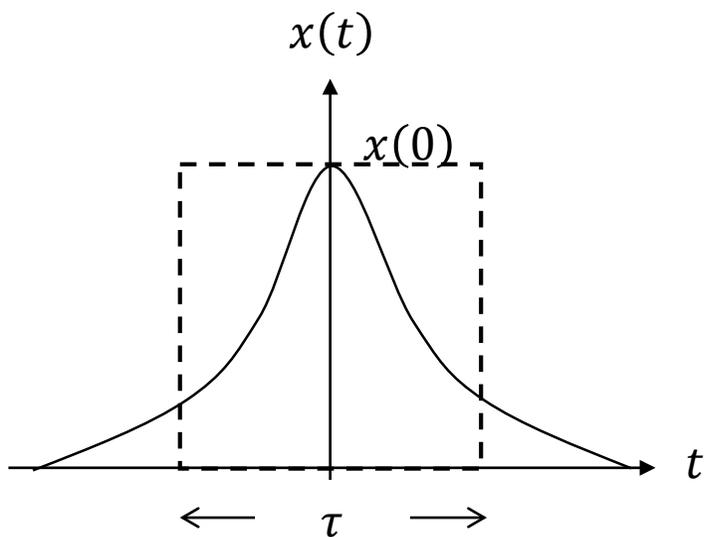
尺度变换特性

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = x(0)\tau$$

时域覆盖面积

$$2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega = X(0)B$$

频域覆盖面积



$$B = \frac{2\pi}{\tau}$$

若要压缩信号的通信时间，需占用更大的频带宽度

时移特性

- 若 $x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$, 则 $x(t - t_0) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
- 信号在时域中的时移, 对应频谱函数在频域中产生的附加**相移**, 而幅度频谱保持不变。
- 同理, 若 $x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$, 则

$$x(at - t_0) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

$$x(t_0 - at) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(-\frac{j\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

频移特性 (调制定理)

- 若 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$, 则 $x(t)e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j(\omega - \omega_0))$; $x(t)e^{-j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j(\omega + \omega_0))$
- 频谱移动时, 时域信号乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$ 或 $e^{-j\omega_0 t}$
- 信号 $x(t)$ 与余弦信号 $\cos\omega_0 t$ 相乘后, 其频谱是将原来信号频谱向**左右**搬移 ω_0 , **幅度减半**。

$$\mathcal{F}[x(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} \mathcal{F}[x(t)e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[x(t)e^{-j\omega_0 t}]$$

$$= \frac{1}{2} X[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} X[j(\omega + \omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[x(t) \sin \omega_0 t] = \frac{1}{2j} \mathcal{F}[x(t)e^{j\omega_0 t}] - \frac{1}{2j} \mathcal{F}[x(t)e^{-j\omega_0 t}]$$

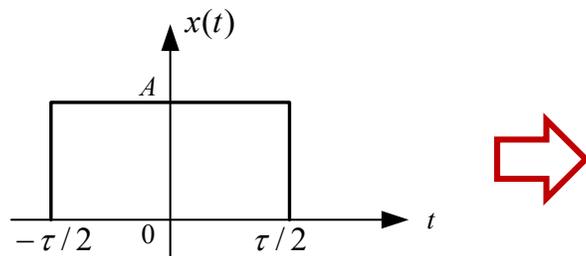
$$= -\frac{j}{2} X[j(\omega - \omega_0)] + \frac{j}{2} X[j(\omega + \omega_0)]$$

频移特性 (调制定理)

- 求矩形脉冲信号 $x(t)$ 与余弦信号 $\cos\omega_0 t$ 相乘后信号的频谱函数

- 已知宽度为 τ 的矩形脉冲信号对应的频谱函数为

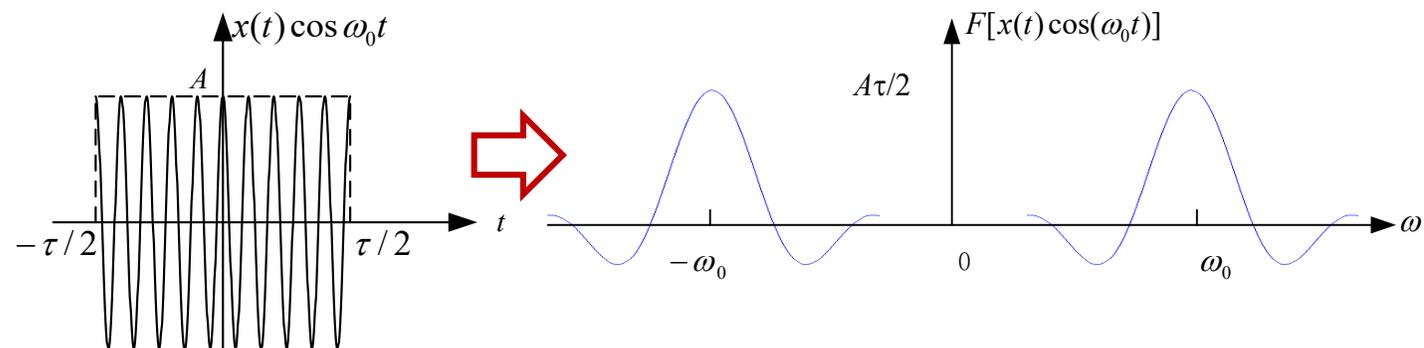
$$X(j\omega) = A\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



$$\mathcal{F}[x(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2}X[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2}X[j(\omega + \omega_0)]$$

- 应用频移特性可得

$$= \frac{A\tau}{2} \left\{ \text{Sa}\left(\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}\right) + \text{Sa}\left(\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}\right) \right\}$$



时域积分微分特性

- 若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$, 则

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

- $X(0)$ 为时域信号的面积, 若**面积** $\int x(t)dt$ **为0**, 则第二项可忽略, 如: $x(t)$ 为奇函数; $x(t)$ 为偶函数的导数; $x(t)$ 为**有限长**函数的导数

- 若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$, 则 $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n \cdot X(j\omega)$

- 时域微分, 频域使用 $j\omega$ 进行加权, 增加高频

- **【修正】** 若 $x'(t) = x_1(t)$, 且 $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$, $x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\omega)$, 则

$$X(j\omega) = \pi[x(\infty) + x(-\infty)]\delta(\omega) + \frac{X_1(j\omega)}{j\omega}$$

频域微分特性

▪ 若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$, 则 $t^n x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j^n \frac{dX^n(j\omega)}{d\omega^n}$

▪ 求单位斜坡信号 $tu(t)$ 的频谱

▪ 已知单位阶跃信号傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

▪ 故利用频域微分特性可得:

$$\mathcal{F}[tu(t)] = j \frac{d}{d\omega} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

时域卷积特性

- 若 $x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\omega)$, $x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_2(j\omega)$, 则 $x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\omega)X_2(j\omega)$

$$\mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau \right) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \right) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) X_2(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau = X_1(j\omega)X_2(j\omega)$$

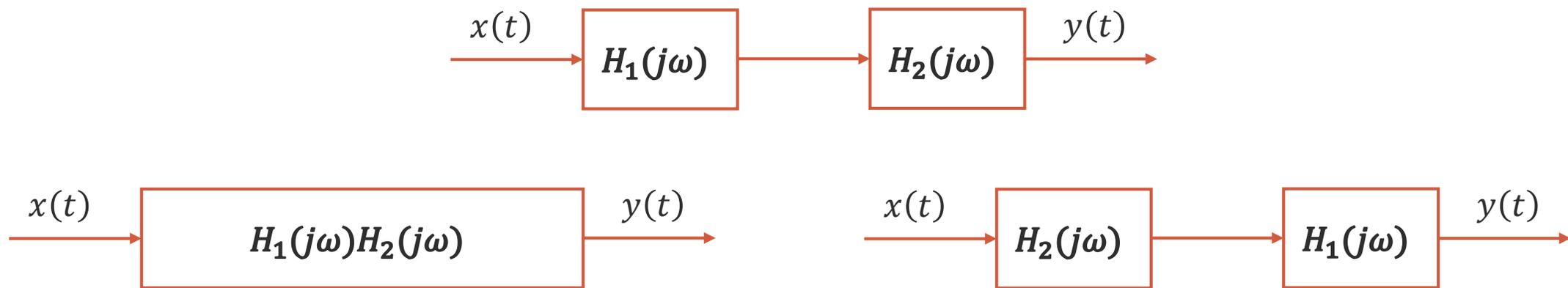
- 时域函数**卷积**的频谱等于各个时域信号的频谱的**乘积**

时域卷积特性

- 线性时不变系统

$$y(t) = h(t) * x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

- 通过让某一频带 $H(j\omega) \rightarrow 0$ ，即可消除该频带能的频率分量



频域卷积特性（调制特性）

- 若

$$x_1(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(j\omega), x_2(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_2(j\omega)$$

- 则

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} [X_1(j\omega) * X_2(j\omega)]$$

- 时域信号的乘积正比于对应信号在频域的卷积（类比傅里叶变换的对称性）

非周期信号的能量谱密度

- Parseval能量守恒定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

- 上式表明信号的能量也可以由 $|X(j\omega)|^2$ 在整个频率范围的积分乘以 $1/2\pi$ 来计算。
- 物理意义：非周期能量信号的归一化能量在时域中与在频域中相等，保持**能量守恒**。
- 定义单位角频率的信号能量为能量频谱密度函数

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} |X(j\omega)|^2$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \cdot X(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

傅里叶变换性质总结

线性特性	$ax_1(t) + bx_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$
对称特性	$X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-j\omega)$
展缩特性	$x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{ a } X(j\omega/a)$
时移特性	$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
频移特性	$x(t)e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j(\omega - \omega_0))$
时域卷积特性	$x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\omega)X_2(j\omega)$
频域卷积特性	$x_1(t) \cdot x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} [X_1(j\omega) * X_2(j\omega)]$
时域微分特性	$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n \cdot X(j\omega)$
积分特性	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$
频域微分特性	$t^n x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j^n \frac{dX^n(j\omega)}{d\omega^n}$

概要

1. 典型信号的傅里叶变换:
傅里叶变换的定义和计算技巧

2. 傅里叶变换的性质:
对称性, 尺度变换, 频域卷积

3. 周期信号的傅里叶变换:
关联连续信号的傅里叶变换和
傅里叶级数

4. 傅里叶变换的应用:
傅里叶变换思想在AI中的应用

连续周期信号的傅里叶变换

- 傅里叶级数（针对周期信号）

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

- 傅里叶变换（针对非周期信号）
 - 周期信号**不满足**傅里叶变换的绝对可积条件

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

典型周期信号

- 正弦、余弦信号的傅里叶变换

- 已知

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$$

- 利用频移特性, 有

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

- 合并, 有

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]\right] = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

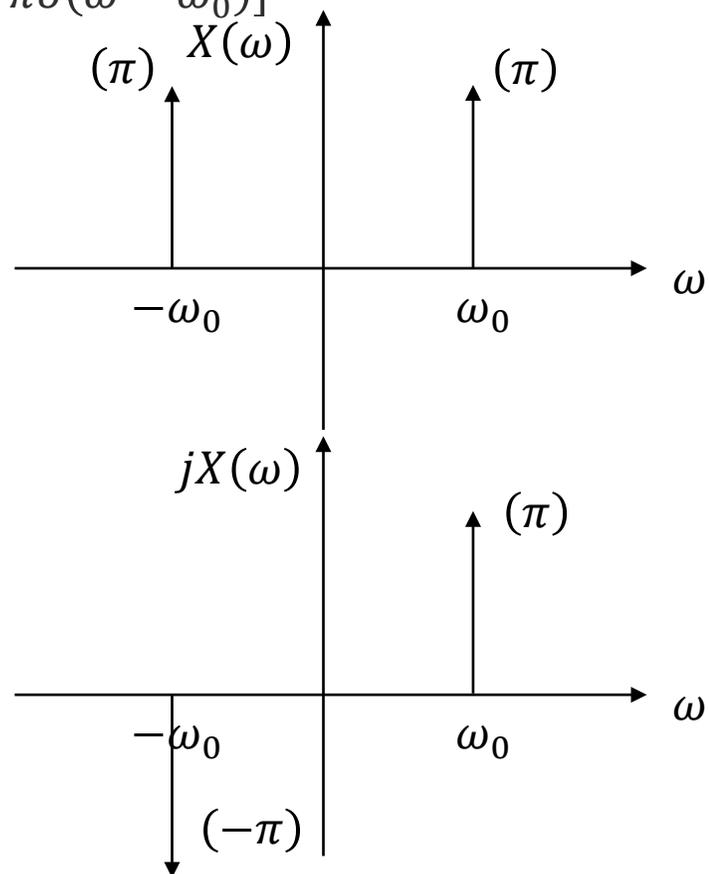
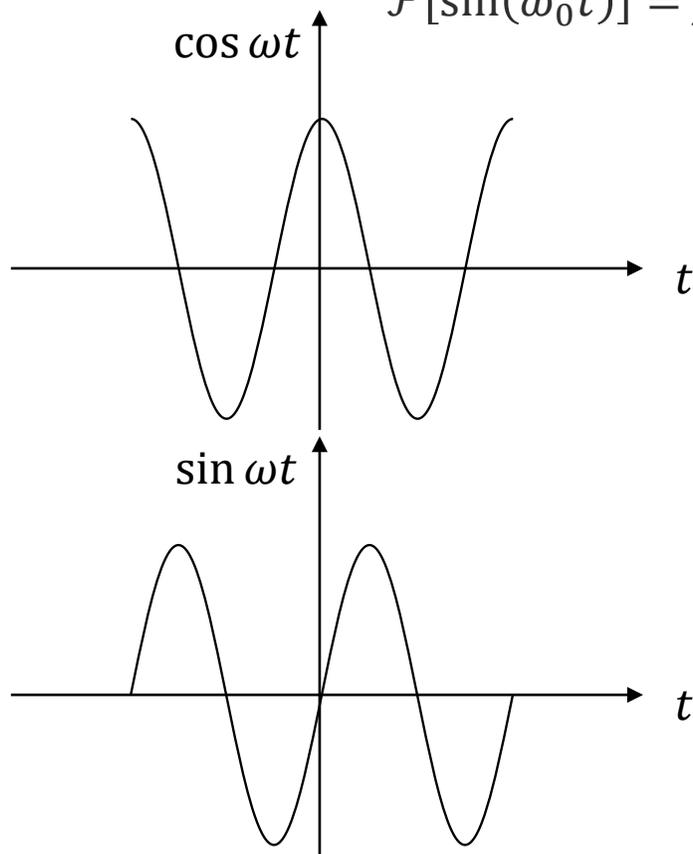
$$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}]\right] = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \pi\delta(\omega - \omega_0)]$$

典型周期信号

- 正弦、余弦信号的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)] = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$



一般周期信号

- 设信号 $x(t)$ 的周期为 T_0 , 角频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, $x(t)$ 的傅里叶级数为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

- 两边同时取傅里叶变换

$$\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

一般周期信号

- 设信号 $x(t)$ 的周期为 T_0 , 角频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$,

$$\mathcal{F}[x(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- 周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换有位于 $0, \pm\omega_0, \pm2\omega_0, \dots$ 处的冲激信号组成, 冲激信号的强度等于对应傅里叶级数系数的 2π 倍
- 傅里叶变换反应频谱密度, 因此周期信号的傅里叶变换不是有限值, 是冲激函数, 表明在**无穷小的频带范围内取得无穷大的频谱值**
- 周期信号的频谱是**离散的**

周期信号傅里叶级数与傅里叶变换的关系

- 设信号 $x(t)$ 的周期为 T_0 , 角频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$,
- 傅里叶级数

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- 截取一个周期的信号, 对应的傅里叶变换为

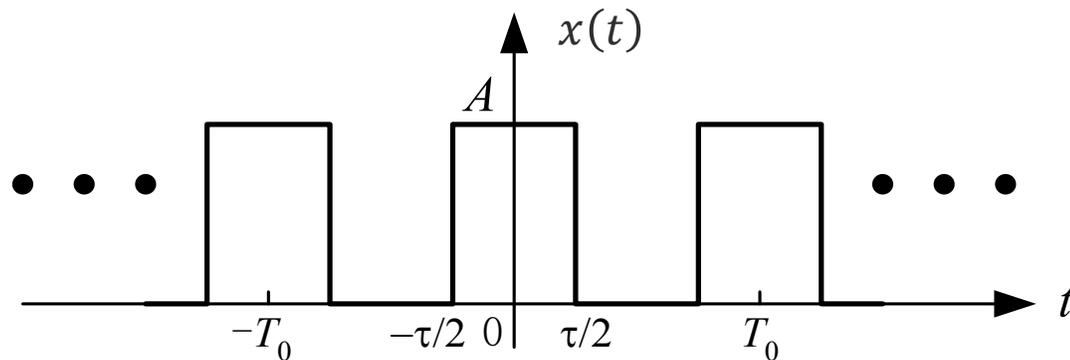
$$X_{T_0}(j\omega) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} X_{T_0}(j\omega) \Big|_{\omega=n\omega_0}$$

周期脉冲序列的傅里叶级数的系数等于单位脉冲傅里叶变换在 $n\omega_0$ 点处取值乘 $\frac{1}{T_0}$

周期信号傅里叶变换

求周期矩形脉冲的傅里叶级数和傅里叶变换



- 矩形脉冲的傅里叶变换为

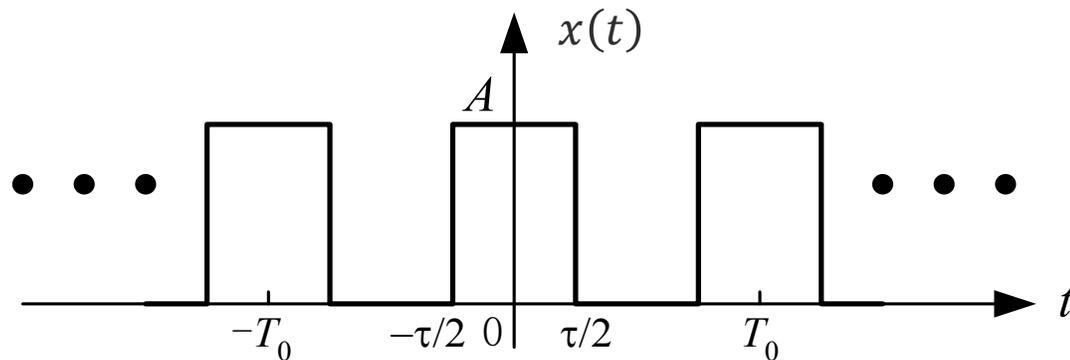
$$X_{T_0}(j\omega) = A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)$$

- 对应周期矩形脉冲的傅里叶级数为

$$X_n = \frac{A\tau}{T_0} \text{Sa}\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right) = \frac{A\tau}{T_0} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

周期信号傅里叶变换

求周期矩形脉冲的傅里叶级数和傅里叶变换



- 傅里叶级数

$$x(t) = \frac{A\tau}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

- 傅里叶变换

$$X(j\omega) = A\tau\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0)$$

概要

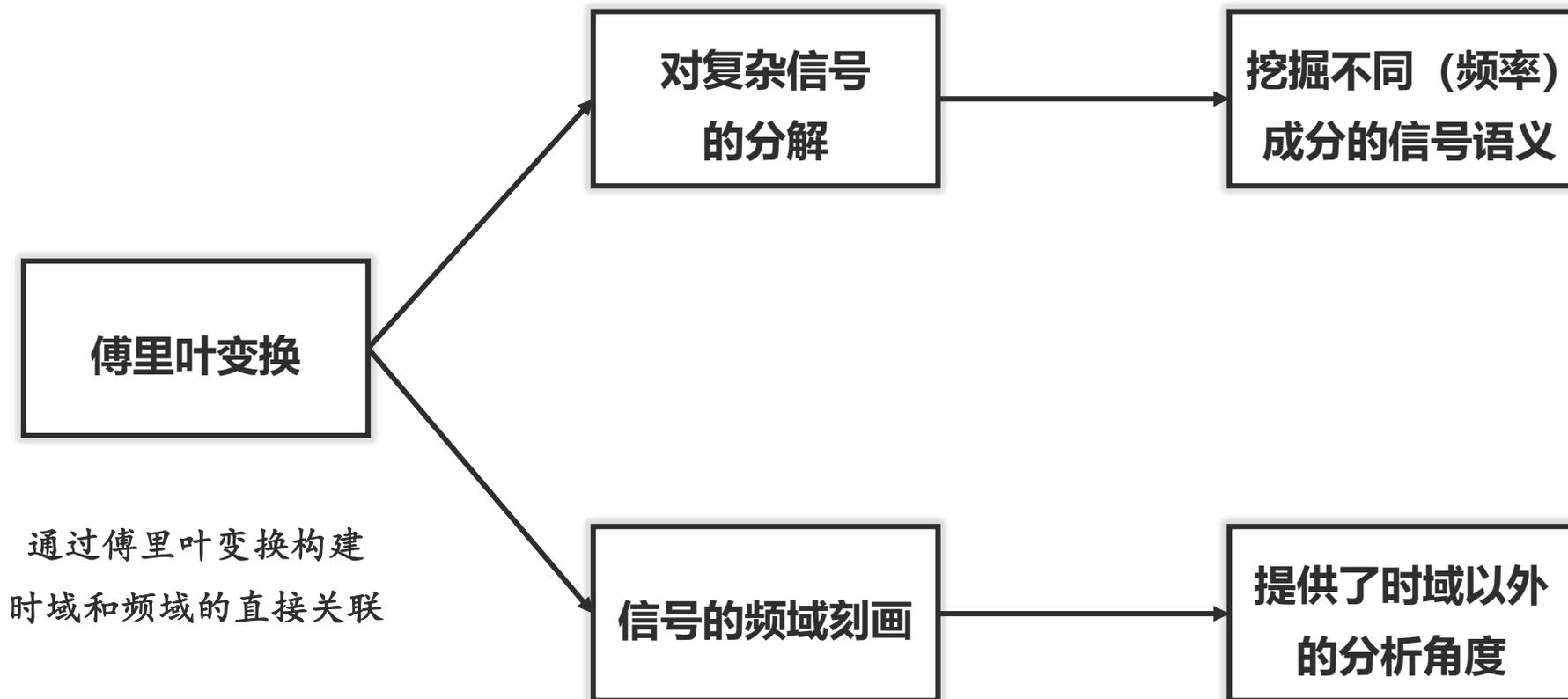
1. 典型信号的傅里叶变换:
傅里叶变换的定义和计算技巧

2. 傅里叶变换的性质:
对称性, 尺度变换, 频域卷积

3. 周期信号的傅里叶变换:
关联连续信号的傅里叶变换和
傅里叶级数

4. 傅里叶变换的应用:
傅里叶变换思想在AI中的应用

傅里叶变换的应用

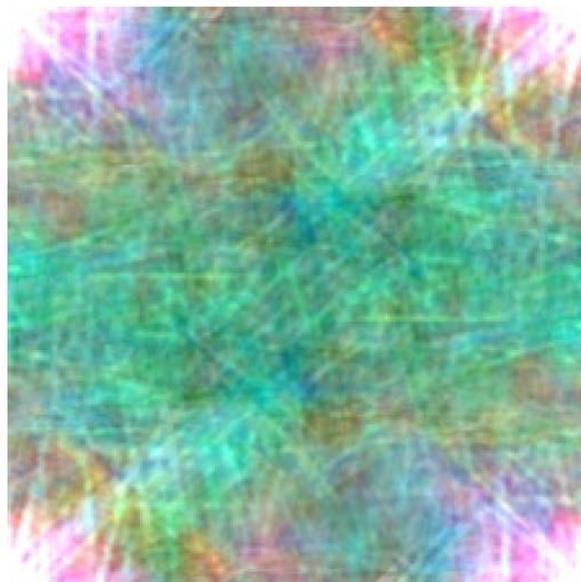


频域的数据增广

- 图像的频域表示



原始图像



幅度谱
(相位置为常数)



相位谱
(幅度置为常数)

利用频域做数据增广

- 通过二维图像的傅里叶变换，能够实现空域和频域的互换

$$\mathcal{F}(x)(u, v) = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{w=0}^{W-1} x(h, w) e^{-j2\pi\left(\frac{h}{H}u + \frac{w}{W}v\right)}$$

- 幅度

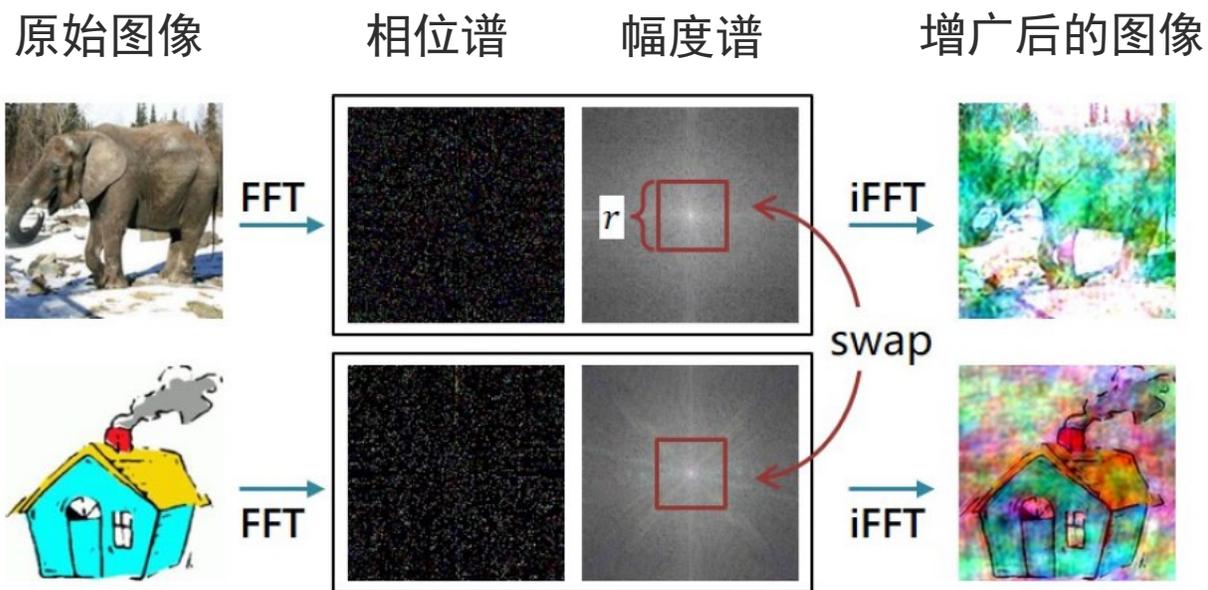
$$\mathcal{A}(x)(u, v) = [R^2(x)(u, v) + I^2(x)(u, v)]^{1/2}$$

- 相位

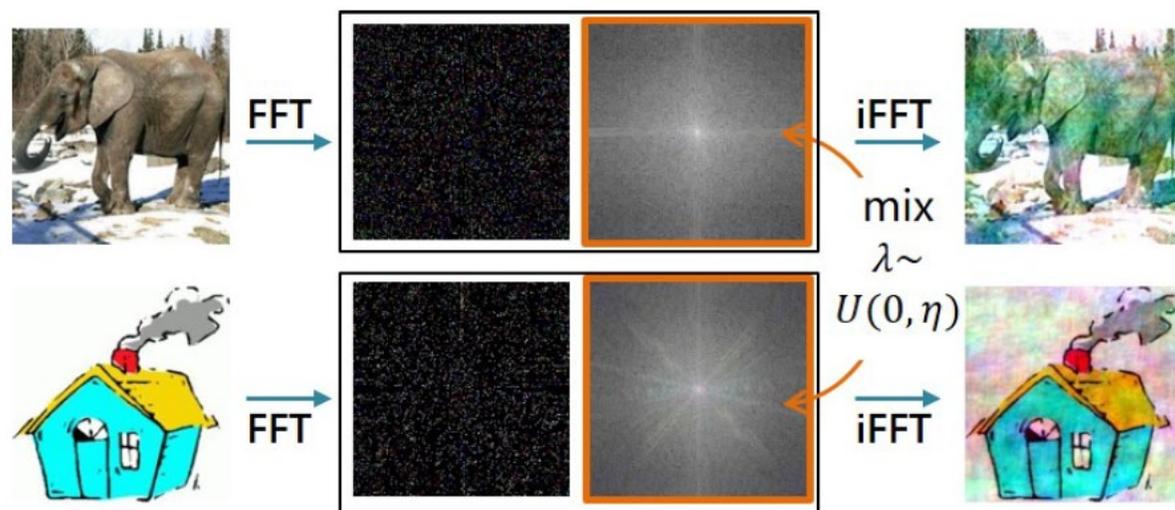
$$\mathcal{P}(x)(u, v) = \arctan \left[\frac{I(x)(u, v)}{R(x)(u, v)} \right]$$

利用频域做数据增广

- 在频域上实现对图像的增广



两幅图像的幅度谱互换



两幅图像的幅度谱混合