08 离散信号的傅里叶变换

傅里叶分析方法的“离散化”

傅里叶级数和傅里叶变换

- 傅里叶级数（FS），针对连续周期信号

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \, e^{jn\omega t}$$

其中

$$X_n = \frac{\langle x, e^{jn\omega t} \rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t} \rangle}$$

$$= \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} \, \mathrm{d}t$$

- 离散频谱

- 傅里叶变换（FT），针对一般连续信号

$$X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, \mathrm{d}t$$

- 逆变换

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \, e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

- 连续频谱

概要

1. 序列的傅里叶变换：
傅里叶变换用于离散信号

2. 离散信号的频域分析：
从离散时间傅里叶变换到离散傅里叶级数

3. 离散傅里叶变换：
离散变换的数字化处理

4. 快速傅里叶变换：
离散傅里叶变换的加速版本

概要

1. 序列的傅里叶变换：
傅里叶变换用于离散信号

2. 离散信号的频域分析：
从离散时间傅里叶变换到离散傅里叶级数

3. 离散傅里叶变换：
离散变换的数字化处理

4. 快速傅里叶变换：
离散傅里叶变换的加速版本

离散信号（序列）的傅里叶变换

- 傅里叶变换（FT），针对一般连续信号

$$X(j\omega)=\mathcal{F}[x(t)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

- 逆变换

$$x(t)=\mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\,e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

- 连续频谱

- **离散时间**傅里叶变换（DTFT）：

$$\mathrm{DTFT}\big[x[n]\big]=X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-jn\omega}$$

- 逆变换

$$\mathrm{IDTFT}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=x[n]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\,\mathrm{d}\omega$$

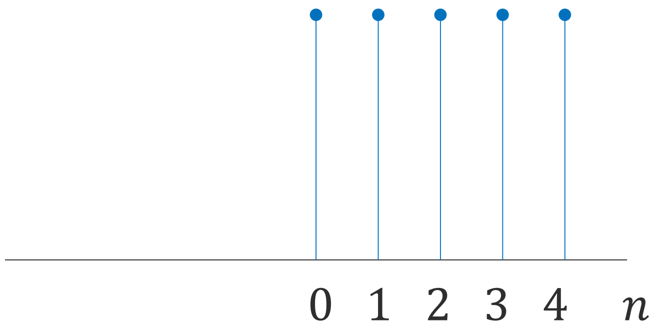
- $X\left(e^{j\omega}\right)$是复数，是以$2\pi$为周期的**周期函数**
- 收敛充分条件：能量受限或绝对可和

DTFT的计算

计算$x[n]=u[n]-u[n-5]$的傅里叶变换

- 根据定义

$$\mathrm{DTFT}\big[x[n]\big]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-jn\omega}=\sum_{n=0}^{4}e^{-jn\omega}=\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$



$$=\frac{e^{-j\omega 2.5}}{e^{-j\omega 0.5}}\left(\frac{e^{j\omega 2.5}-e^{-j\omega 2.5}}{e^{j\omega 0.5}-e^{-j\omega 0.5}}\right)=e^{-j2\omega}\left[\frac{\sin(2.5\omega)}{\sin(0.5\omega)}\right]$$

DTFT的性质

- 时移

$$\mathrm{DTFT}\{x[n-k_0]\}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k_0}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

- 频移

$$\mathrm{DTFT}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 n}x[n]\}=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)})$$

- 能量定理

$$\sum_n |x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2\mathrm{d}\omega$$

- 时域卷积

$$\mathrm{DTFT}\{x[n]*h[n]\}=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

- 频域卷积

$$\mathrm{DTFT}\{x[n]h[n]\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\theta)})\,\mathrm{d}\theta$$

- 频域微分

$$\mathrm{DTFT}\{nx[n]\}=\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}{\mathrm{d}\omega}$$

DTFT的性质

- $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = 1 - \frac{|\omega|}{\pi} \quad |\omega| \le \pi$，求$x[n]$
- 令

$$G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{\mathrm{d}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}{\mathrm{d}\omega} = \begin{cases} 1/\pi & -\pi \le \omega < 0 \\ -1/\pi & 0 < \omega \le \pi \end{cases}$$

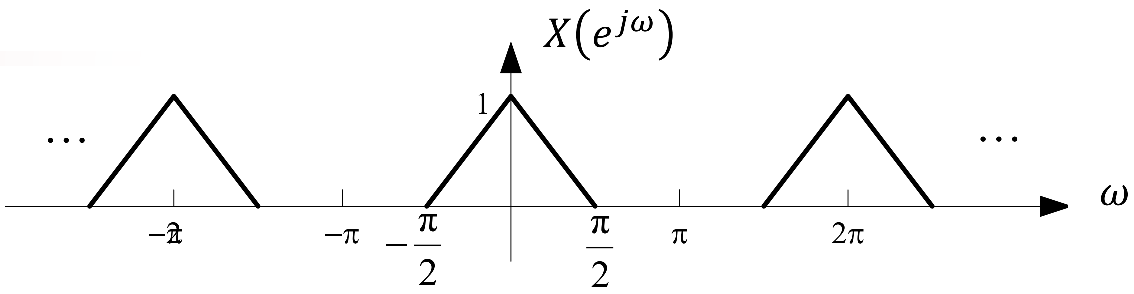
$$g[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}\,\mathrm{d}\omega = -\frac{\mathrm{j}}{\pi^2}\int_{0}^{\pi} \sin n\,\omega\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \mathrm{j}[\frac{(-1)^n - 1]}{\pi^2 n} & n \ne 0 \end{cases}$$

- 利用频域微分特性

$$x[n] = \frac{\mathrm{j}g[n]}{n} = \begin{cases} 0 & n = \text{even} \\ 2/(\pi^2 n^2) & n = \text{odd} \end{cases}$$

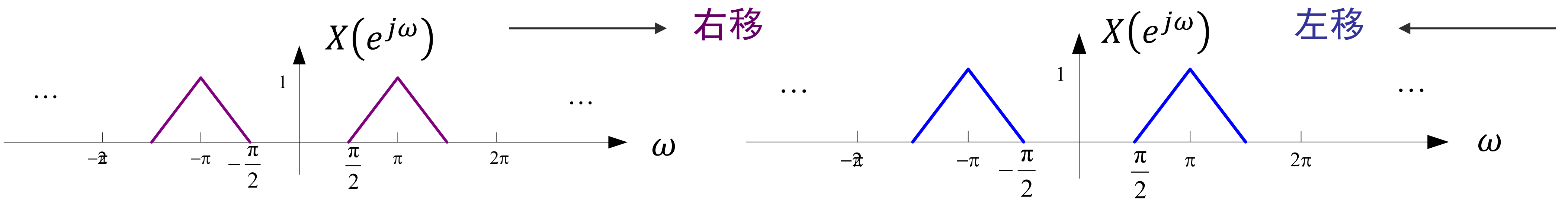
DTFT的性质

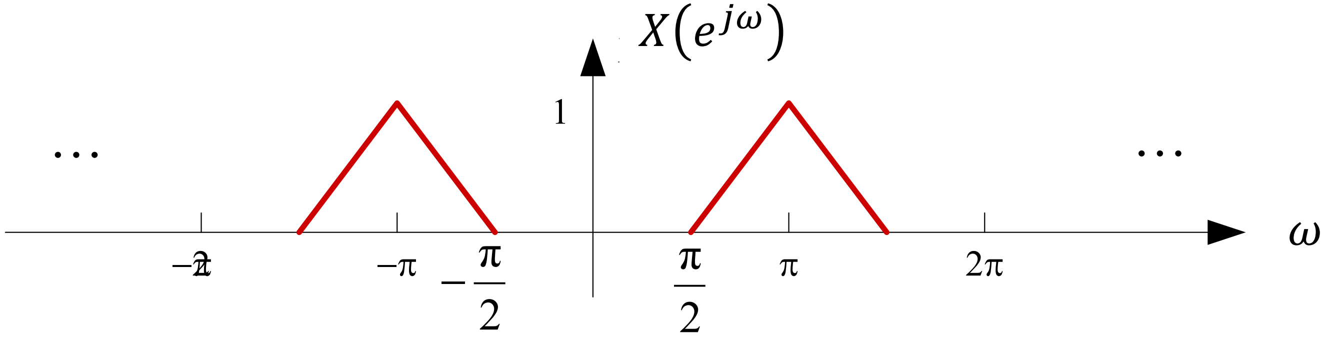
已知$x[n]$的频谱如图，试求DTFT$\{x[n]\cos(\pi n)\}$



- 利用频移特性，可得

$$\mathrm{DTFT}\{x[n]\cos(\pi n)\} = [X(e^{j(\omega-\pi)}) + X(e^{j(\omega+\pi)})]/2$$





概要

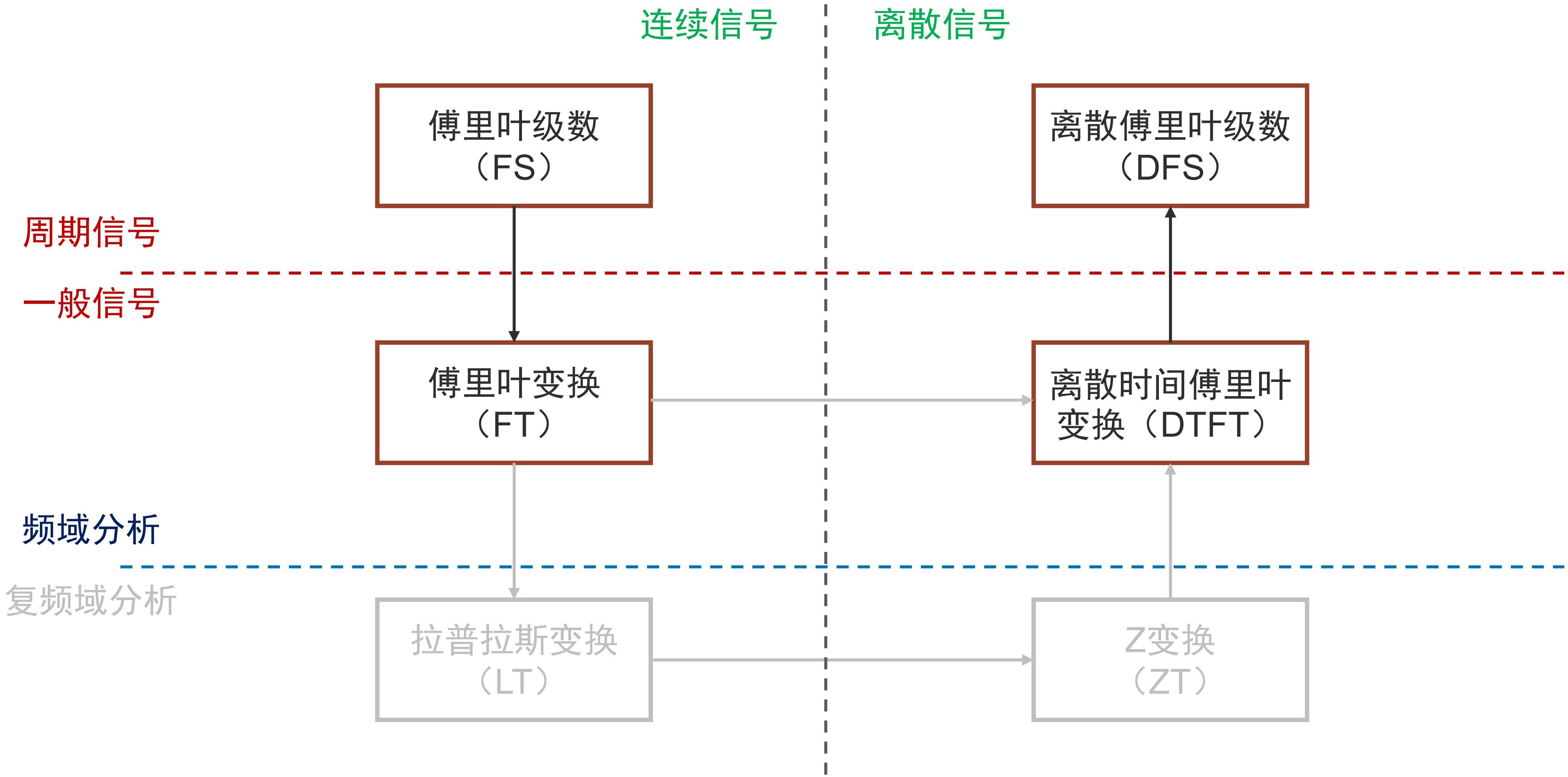
1. 序列的傅里叶变换：
傅里叶变换用于离散信号

2. 离散信号的频域分析：
从离散时间傅里叶变换到离散傅里叶级数

3. 离散傅里叶变换：
离散变换的数字化处理

4. 快速傅里叶变换：
离散傅里叶变换的加速版本

几类变换之间的关系


连续信号
离散信号
周期信号
一般信号
频域分析
复频域分析
傅里叶级数（FS）
离散傅里叶级数（DFS）
傅里叶变换（FT）
离散时间傅里叶变换（DTFT）
拉普拉斯变换（LT）
Z变换（ZT）

离散傅里叶级数

- **连续**周期信号的傅里叶级数

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{jk\omega t}$$

$$X_k=\frac{\langle x, e^{jk\omega t}\rangle}{\langle e^{jk\omega t}, e^{jk\omega t}\rangle}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cdot e^{-jk\omega t}\,\mathrm{d}t$$

- 离散正交基?

$$e^{jk\omega n}=e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- 周期为N的序列$\tilde{x}[n]$可分解为基本序列$e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$的和

$$\tilde{x}[n]=\sum_{k}\tilde{X}[k]e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

- 周期序列$\tilde{x}[n]$使用周期序列$e^{j\frac{2\pi}{N}n}$的各次谐波表示
- $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$是关于n的周期函数，周期为N

$$e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=e^{j\frac{2\pi}{N}(n+mN)k}=e^{j\frac{2\pi}{N}nk}e^{j2\pi mk}$$

- $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$是关于k的周期函数，周期为N

$$e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=e^{j\frac{2\pi}{N}(k+lN)n}=e^{j\frac{2\pi}{N}nk}e^{j2\pi ln}$$

离散傅里叶级数

- 周期为N的序列$\tilde{x}[n]$可分解为基本序列$e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$的和
  - 只用**一个周期**信息表示
  - DFS:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$\tilde{X}[k] = \mathrm{DFS}(\tilde{x}[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}$$

DFS只有N个不同的数值

  - IDFS:

$$\tilde{x}[n] = \mathrm{IDFS}(\tilde{X}[k]) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}$$

  - 整体记为

$$\tilde{x}[n] \overset{\mathrm{DFS}}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k]$$

常用离散周期序列的频谱

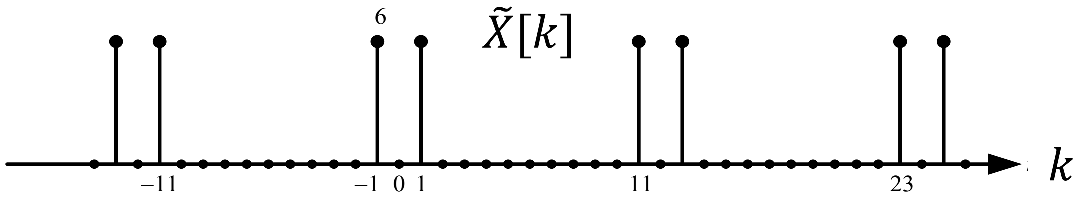
- 周期单位脉冲序列$\delta_N[n]$

$$\tilde{X}[k] = \mathrm{DFS}\{\delta_N[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta_N[n] W_N^{kn} = 1$$

- 正弦序列
  - 周期序列$\tilde{x}[n] = \cos(\pi n/6)$的频谱, $N = 12$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi n}{12}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi n}{12}} = \frac{1}{12}\left(6W_{12}^{k} + 6W_{12}^{-k}\right)$$

$$\tilde{X}[k] = \begin{cases} 6 & k = \pm 1 \\ 0 & -5 \le k \le 6, k \ne \pm 1 \end{cases} \qquad \tilde{X}[k] = \begin{cases} 6 & k = 1,11 \\ 0 & 2 \le k \le 10, k = 0 \end{cases}$$



常用离散周期序列的频谱

求周期为4序列$\tilde{x}_4[n]=\{\cdots,1,1,-1,1,\cdots\}$的频谱

- 根据定义

$$\tilde{X}[k]=\mathrm{DFS}(\tilde{x}_N[n])=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_N[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}$$

  - $\tilde{X}[0]=\tilde{x}_4[0]+\tilde{x}_4[1]+\tilde{x}_4[2]+\tilde{x}_4[3]=2$
  - $\tilde{X}[1]=\tilde{x}_4[0]+\tilde{x}_4[1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}}+\tilde{x}_4[2]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 2}+\tilde{x}_4[3]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 3}=2$
  - $\tilde{X}[2]=\tilde{x}_4[0]+\tilde{x}_4[1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 2}+\tilde{x}_4[2]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 4}+\tilde{x}_4[3]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 6}=-2$
  - $\tilde{X}[3]=\tilde{x}_4[0]+\tilde{x}_4[1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 3}+\tilde{x}_4[2]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 6}+\tilde{x}_4[3]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 9}=2$

DFS的性质

- 线性特性

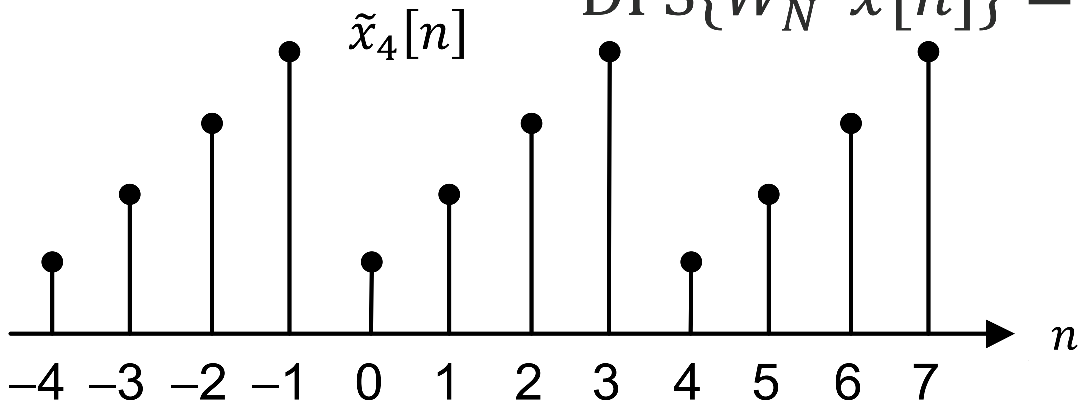
$$DFS\{a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n]\} = aDFS\{\tilde{x}_1[n]\} + bDFS\{\tilde{x}_2[n]\}$$

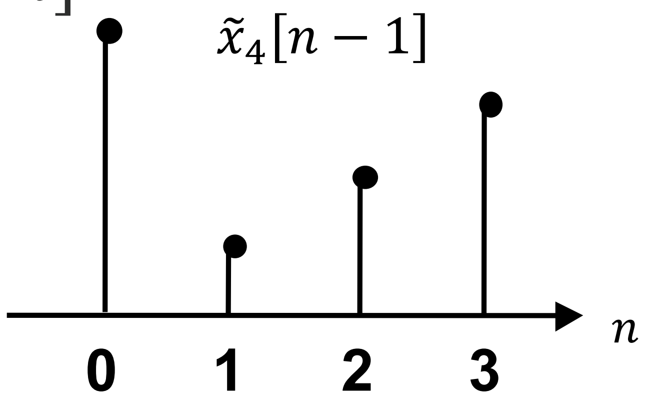
- 位移特性
  - 时域位移

$$\mathrm{DFS}\{\tilde{x}[n+m]\} = W_N^{-km}\tilde{X}[k]$$

  - 频域位移

$$\mathrm{DFS}\{W_N^{ln}\tilde{x}[n]\} = \tilde{X}[m+l]$$





DFS的性质

- 对称性

$$DFS\{\tilde{x}^*[n]\} = \tilde{X}^*[-k], \qquad DFS\{\tilde{x}^*[-n]\} = \tilde{X}^*[k]$$

  - $\tilde{x}[n]$为实序列，$\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k]$
  - $\tilde{x}[n]$为偶对称实序列，$\tilde{X}[k]$为偶对称实序列
  - $\tilde{x}[n]$为奇对称实序列，$\tilde{X}[k]$为奇对称虚序列 (实部为零)
  - 偶对称：$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[-n] = \tilde{x}[N-n]$
  - 奇对称：$\tilde{x}[n] = -\tilde{x}[-n] = -\tilde{x}[N-n]$

DFS的性质

- 周期卷积定理

$$\mathrm{DFS}\{\tilde{x}_1[n] \tilde{*} \tilde{x}_2[n]\} = \mathrm{DFS}\{\tilde{x}_1[n]\}\mathrm{DFS}\{\tilde{x}_2[n]\}$$

$$\mathrm{DFS}\{\tilde{x}_1[n] \cdot \tilde{x}_2[n]\} = \frac{1}{N}\mathrm{DFS}\{\tilde{x}_1[n]\} \tilde{*} \mathrm{DFS}\{\tilde{x}_2[n]\}$$

- 周期卷积的结果一般和线性卷积不同

- 通过对序列补零可使周期卷积的结果和线性卷积的结果相同

概要

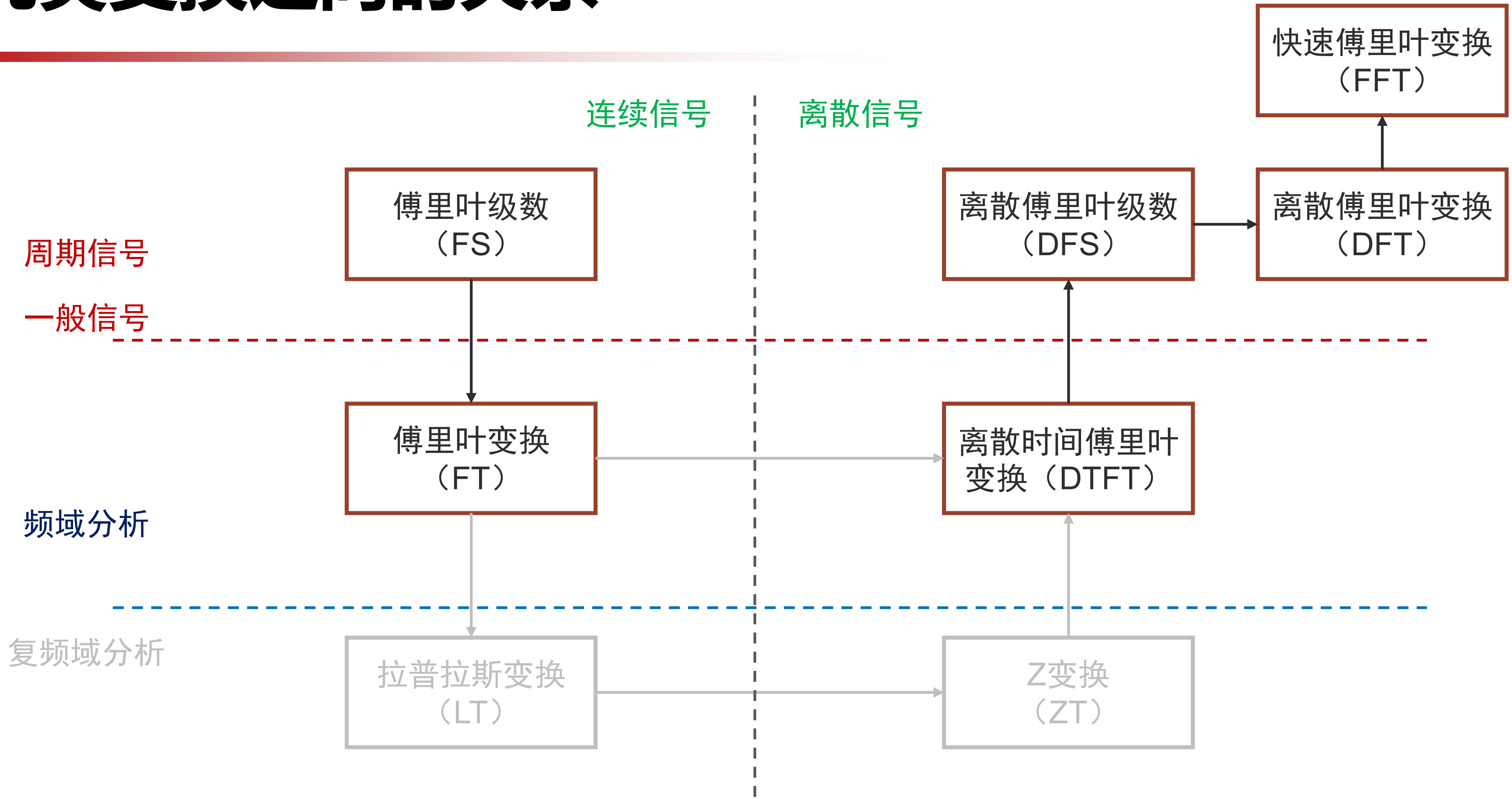
1. 序列的傅里叶变换：
傅里叶变换用于离散信号

2. 离散信号的频域分析：
从离散时间傅里叶变换到离散傅里叶级数

3. 离散傅里叶变换：
离散变换的数字化处理

4. 快速傅里叶变换：
离散傅里叶变换的加速版本

几类变换之间的关系


连续信号
离散信号
周期信号
一般信号
频域分析
复频域分析
傅里叶级数（FS）
傅里叶变换（FT）
拉普拉斯变换（LT）
离散傅里叶级数（DFS）
离散傅里叶变换（DFT）
快速傅里叶变换（FFT）
离散时间傅里叶变换（DTFT）
Z变换（ZT）

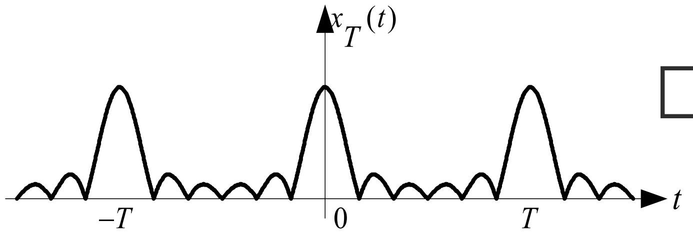
四类信号的傅里叶变换

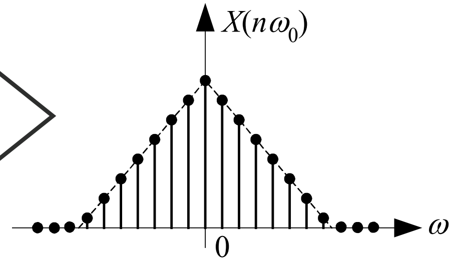
连续信号

周期为 T 的**连续**时间**周期**信号（频谱**离散非周期**）

$$\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$X_n=X(n\omega_0)=\frac{1}{T}\int_{<T>}\tilde{x}(t)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$





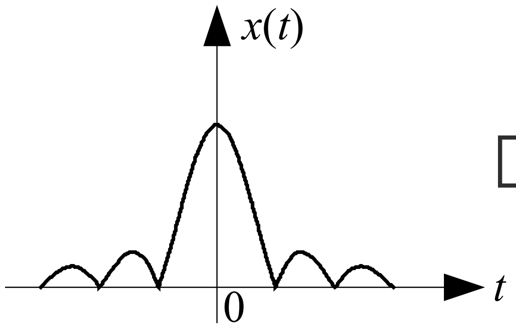
周期信号

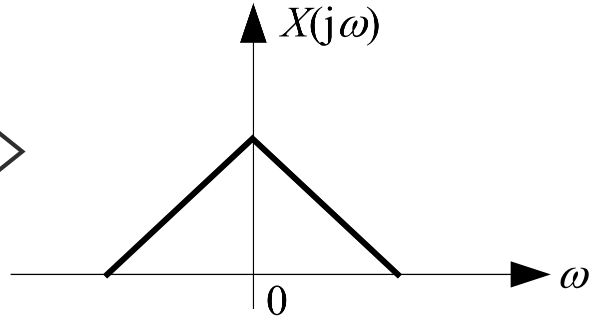
非周期信号

连续时间**非周期**信号（频谱**连续非周期**）

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\mathrm{j}\omega)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$X(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$





四类信号的傅里叶变换

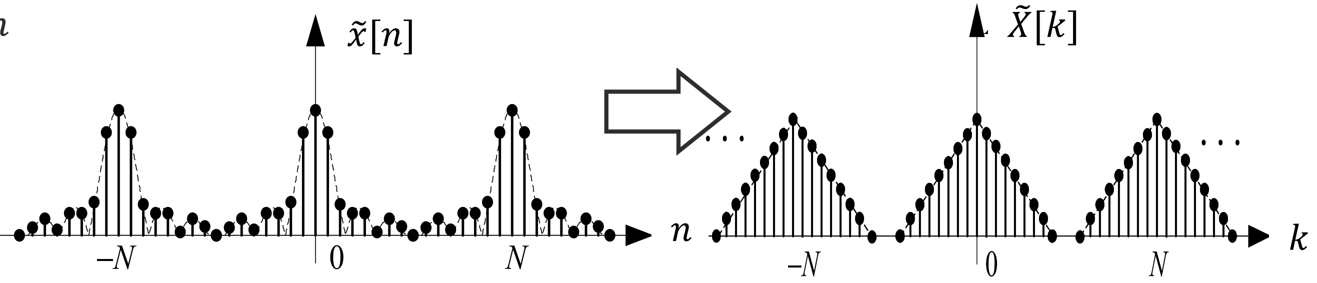
离散信号

周期为N的**离散周期**信号（频谱**周期**为N的**离散**谱）

$$\tilde{x}[n]=\mathrm{IDFS}\{\tilde{X}[k]\}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

周期信号

$$\tilde{X}[k]=\mathrm{DFS}\{x[n]\}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

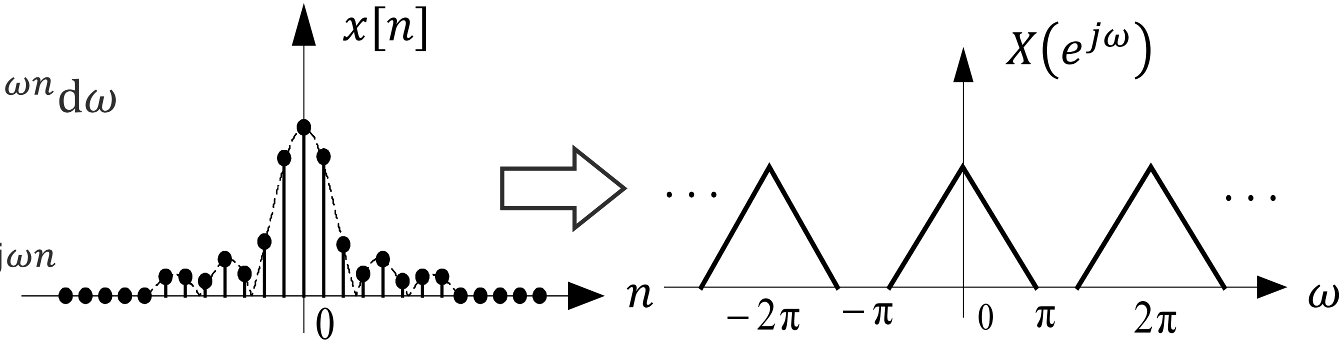


非周期信号

离散非周期信号（频谱**周期**为2π的**连续**谱）

$$x[n]=\mathrm{IDTFT}\{X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega$$

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\mathrm{DTFT}\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$



四类信号的傅里叶变换

	连续信号	离散信号
周期信号	周期为 T 的**连续**时间**周期**信号（频谱**离散非周期**） $$\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$ $$X_n=X(n\omega_0)=\frac{1}{T}\int_{<T>}\tilde{x}(t)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$	周期为N的**离散周期**信号（频谱**周期**为N的**离散**谱） $$\tilde{x}[n]=\mathrm{IDFS}\{\tilde{X}[k]\}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$ $$\tilde{X}[k]=\mathrm{DFS}\{x[n]\}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$
非周期信号	**连续**时间**非周期**信号（频谱**连续非周期**） $$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\mathrm{j}\omega)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$ $$X(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$	**离散非周期**信号（频谱**周期**为2π的**连续**谱） $$x[n]=\mathrm{IDTFT}\{X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega$$ $$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\mathrm{DTFT}\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

信号的数字处理

- 信号的计算机处理
  - 输入、输出为**离散**信号
  - 何种变换满足输入输出离散条件?

$x[n] \rightarrow$ 数字计算机 $\rightarrow X[k]$

输入为离散信号$x[n]$

$\Rightarrow$ 基于DTFT，输出为**连续**频谱

输出为离散（周期）信号$X[k]$

$\Rightarrow$ 基于DFS，输入为离散**周期**信号

输入非周期序列，计算机计算时，当作由$x[n]$延拓的周期序列处理

离散傅里叶变换

- 基于**主值序列**定义长度为N（非周期）序列的离散傅里叶变换（**DFT**）
- DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{nk}, \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

- IDFT

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, W_N^{-nk}, n = 0,1,\cdots,N-1$$

- 表示为

$$X[k] = \mathrm{DFT}\{x[n]\}, \qquad x[n] = \mathrm{IDFT}\{X[k]\}$$

离散傅里叶变换

$x[n] = \delta[n]$， $0 \leq \mathrm{n} \leq N-1$，求$N$点序列$x[n]$的DFT

- 根据DFT定义

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x\,[n] W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta\,[n] W_N^{nk} = 1, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$x[n] = \cos(\frac{2\pi}{N} n)$， $0 \leq n \leq N-1$, 求N点DFT

- 根据

$$x[n] = \frac{1}{N}(\frac{N}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}n} + \frac{N}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}(N-1)n})$$

可得$X[k] = \begin{cases} N/2 & k = 1, N-1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

离散傅里叶变换

$$W_N = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$$

求有限长4点序列$x[n] = \{1,1,-1,1\}$的DFT

- 根据

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{nk}$$

有

$$X[0] = x[0] + x[1] + x[2] + x[3] = 2$$

$$X[1] = x[0] + x[1]W_4^1 + x[2]W_4^2 + x[3]W_4^3 = 2$$

$$X[2] = x[0] + x[1]W_4^2 + x[2]W_4^4 + x[3]W_4^6 = -2$$

$$X[3] = x[0] + x[1]W_4^3 + x[2]W_4^6 + x[3]W_4^9 = 2$$

因此$X[k] = \{2, 2, -2, 2\}$，$k = 0,1,2,3$

- 使用矩阵方式表示左侧计算过程

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{j} & -1 & \mathrm{j} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{j} & -1 & -\mathrm{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

DFT的矩阵表示

$$W_N = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$$

求有限长4点序列$x[n] = \{1,1,-1,1\}$的DFT

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{j} & -1 & \mathrm{j} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{j} & -1 & -\mathrm{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- 因此$X[k] = \{2, 2, -2, 2\}$，$k = 0,1,2,3$

- 设

$$\mathbf{X} = [X[0] \quad X[1] \quad \cdots \quad X[N-1]]^T,$$
$$\mathbf{x} = [x[0] \quad x[1] \quad \cdots \quad x[N-1]]^T,$$

- DFT矩阵形式为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{D}_N \boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{D}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)\times(N-1)} \end{bmatrix}$$

DFT、DFS、DTFT的关系

- DFT可以看成是截取DFS的**主值序列**构成的变换对

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\tilde{x}[n]\cdot R_N[n]$$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[k]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\tilde{X}[k]\cdot R_N[k]$$

- 其中

$$R_N[n]=\begin{cases}1, 0\le n\le N-1\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

- $x[n]$的DFT $X[k]$是其DTFT $X(e^{j\omega})$在一个周期$[0,2\pi)$的**等间隔抽样**

$$X(e^{j\omega})=\mathrm{DTFT}\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\cdot e^{-jn\omega}$$

$$X[k]=\mathrm{DFT}\{x[n]\}=\sum_{k=0}^{N-1}x[n]\cdot \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$X[k]=X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k},\quad k=0,1,\cdots,N-1$$

DFT的周期性

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}, \qquad n = 0,1,\cdots,N-1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}, \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

- （隐藏的）周期性
  - $X[k]$的周期为N

$$X[k+N] = X[k]$$

  - $x[n]$的周期为N

$$x[n+N] = x[n]$$

离散傅里叶变换的性质

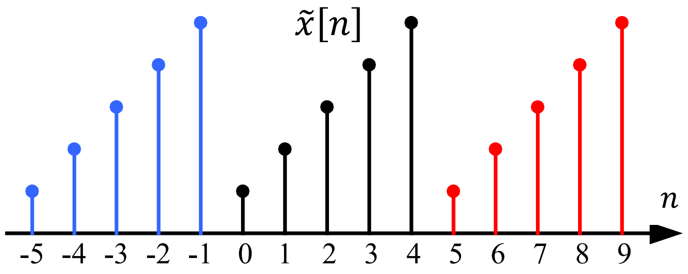
- 线性：需将较短序列**补零**后，再按长序列的点数做DFT

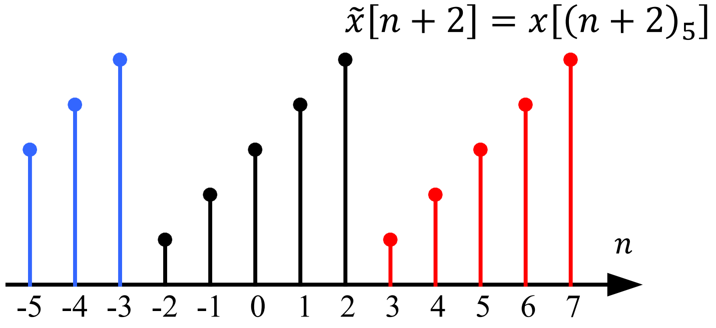
$$\mathrm{DFT}\{ax_1[n]+bx_2[n]\}=a\mathrm{DFT}\{x_1[n]\}+b\mathrm{DFT}\{x_2[n]\}$$

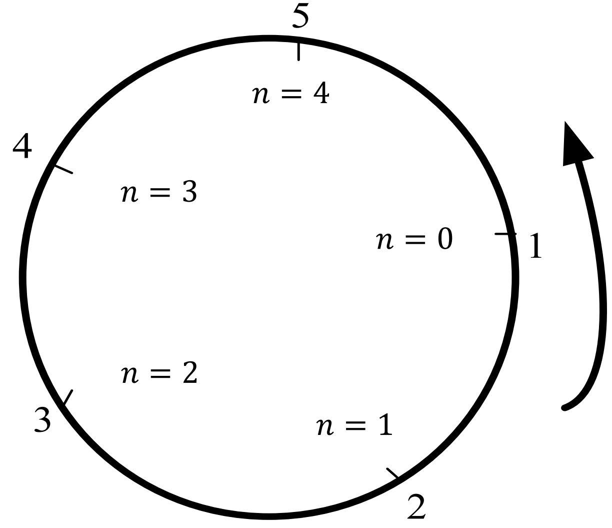
- DFT**循环位移**特性

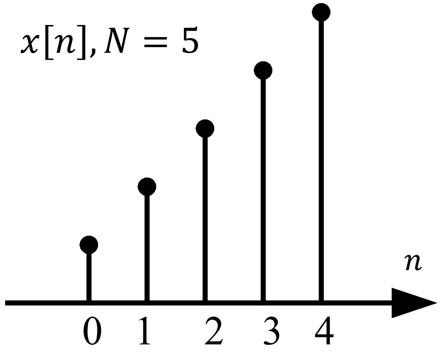
$$y[n]=x[(n\pm m)_N]R_N[n]$$

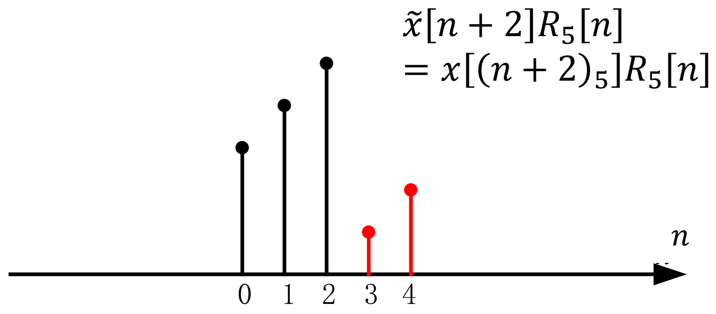
  - 序列周期延拓
  - 周期序列移位
  - 抽取主值序列











离散傅里叶变换的性质

- DFT循环位移特性
  - **时域**的循环位移对应频域的相移

$$\mathrm{DFT}\{x[(n+m)_N]\} = W_N^{-mk}X[k]$$

$$\mathrm{DFT}\{x[(n-m)_N]\} = X[k]W_N^{mk}$$

  - 时域的相移对应**频域**的循环位移

$$\mathrm{DFT}\{W_N^{ln}x[n]\} = X[(k+l)_N]$$

$$\mathrm{DFT}\{W_N^{-ln}x[n]\} = X[(k-l)_N]$$

离散傅里叶变换的性质

- 序列的**循环**卷积

$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[(k)_N] x_2[(n-k)_N] R_N[n]$$

离散傅里叶变换的性质

- 若$x_1[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_1[k], x_2[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_2[k]$
- 时域卷积定理
  - 时域的**循环卷积**对应频域的乘积

$$\mathrm{DFT}\{x_1[n] \circledast x_2[n]\} = X_1[k] \cdot X_2\ [k]$$

- 频域卷积定理
  - 时域的乘积对应频域的**循环卷积**

$$\mathrm{DFT}\{x_1[n] \cdot x_2[n]\} = \frac{1}{N} X_1[k] \circledast X_2[k]$$

卷积和循环卷积

$x_1[n]=\{1,1,1\},\ x_2[n]=\{1,1,0,1\}$，计算

- (1) $x_1[n]$和$x_2[n]$的线性卷积；

$$x_1[n]*x_2[n]=[1,2,2,2,1,1]$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\2\\1\\1\end{bmatrix}$$

$x_1[n]=\{1,1,1\},\ x_2[n]=\{1,1,0,1\}$，计算

- (2) $x_1[n]$和$x_2[n]$的4点**循环卷积**$y[n]$；

$$\begin{bmatrix}y[0]\\y[1]\\y[2]\\y[3]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1[0]&x_1[3]&x_1[2]&x_1[1]\\x_1[1]&x_1[0]&x_1[3]&x_1[2]\\x_1[2]&x_1[1]&x_1[0]&x_1[3]\\x_1[3]&x_1[2]&x_1[1]&x_1[0]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2[0]\\x_2[1]\\x_2[2]\\x_2[3]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\2\\2\end{bmatrix}$$

卷积和循环卷积

$x_1[n]=\{1,1,1\}$, $x_2[n]=\{1,1,0,1\}$，计算

- (3) $x_1[n]$和$x_2[n]$的5点、6点和7点循环卷积
- $x_1[n]$和$x_2[n]$的5点循环卷积$y_5[n]$为

$$y_5[n]=\{2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1\}$$

- $x_1[n]$和$x_2[n]$的6点循环卷积$y_6[n]$为

$$y_6[n]=\{1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1\}$$

和线性卷积结果一致

- $x_1[n]$和$x_2[n]$的7点循环卷积$y_7[n]$为

$$y_7[n]=\{1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0\}$$

卷积的矩阵表示

- **线性**卷积的矩阵表示

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1[0] & & & & & \\ x_1[1] & x_1[0] & & & & \\ x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & & & \\ 0 & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & & \\ 0 & 0 & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & \\ 0 & 0 & 0 & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2[0] \\ x_2[1] \\ x_2[2] \\ x_2[3] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

卷积的矩阵表示

- **4点循环卷积**的矩阵表示

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1[0] & x_1[3] & x_1[2] & x_1[1] \\ x_1[1] & x_1[0] & x_1[3] & x_1[2] \\ x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & x_1[3] \\ x_1[3] & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2[0] \\ x_2[1] \\ x_2[2] \\ x_2[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- **6点循环卷积**的矩阵表示

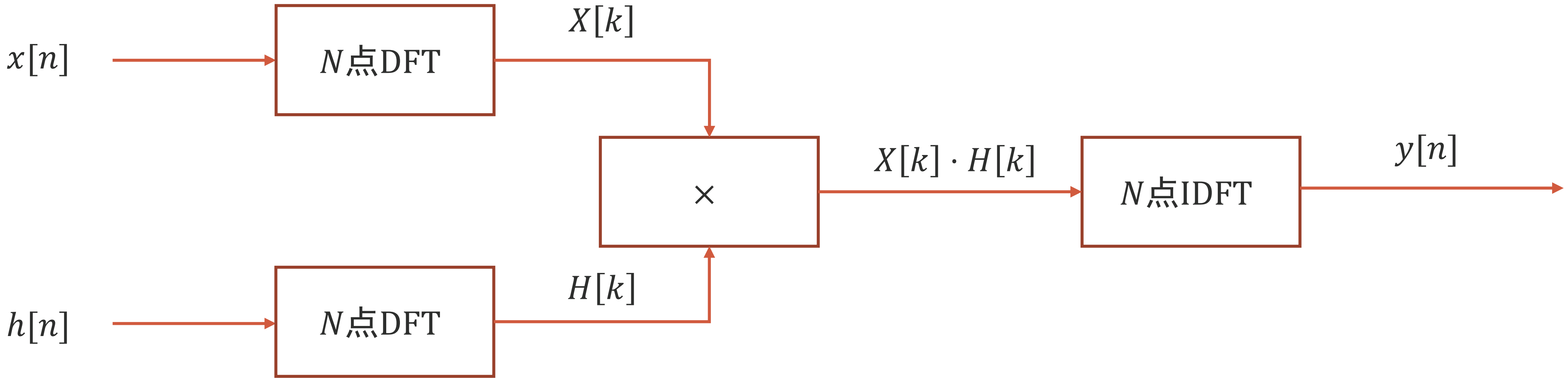
$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1[0] & 0 & 0 & 0 & x_1[2] & x_1[1] \\ x_1[1] & x_1[0] & 0 & 0 & 0 & x_1[2] \\ x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2[0] \\ x_2[1] \\ x_2[2] \\ x_2[3] \\ x_2[4] \\ x_2[5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

基于DFT的卷积计算

- 利用DFT计算长为M, L序列的卷积（输出长度为$M+L-1$）

$$y[n]=\mathrm{IDFT}\big[X[k]\cdot H[k]\big]=x[n]*h[n]$$

  - 对$x[n], h[n]$补零到长度为N，做N点DFT
  - 在频域做乘积得到$Y[k]$
  - 对$Y[k]$做IDFT



DFT的计算

- 利用MATLAB由DFT计算$x[n] * h[n]$. $x[n] = [1, 2, 0, 1]$, $h[k] = [2, 2, 1, 1]$
- % Calculate Linear Convolution by DFT
- x = [1 2 0 1];
- h = [2 2 1 1];
- % determine the length for zero padding
- L = length(x) + length(h) - 1;
- % Compute the DFTs by zero-padding
- XE = fft(x, L);
- HE = fft(h, L);
- % Determine the IDFT of the product
- y1 = ifft(XE .* HE);

概要

1. 序列的傅里叶变换：
傅里叶变换用于离散信号

2. 离散信号的频域分析：
从离散时间傅里叶变换到离散傅里叶级数

3. 离散傅里叶变换：
离散变换的数字化处理

4. 快速傅里叶变换：
离散傅里叶变换的加速版本

离散傅里叶变换

- 基于主值序列定义长度为N（非周期）序列离的散傅里叶变换（**DFT**）
- DFT

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,W_N^{nk},\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

- IDFT

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\,W_N^{-nk},n=0,1,\cdots,N-1$$

- 表示为

$$X[k]=\mathrm{DFT}\{x[n]\},\qquad x[n]=\mathrm{IDFT}\{X[k]\}$$

DFT和IDFT有**相同的**时间复杂度，且只包含加法和乘法

离散傅里叶变换的复杂度

- $N=4$点序列[2，3，3，2] DFT的计算复杂度

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,W_N^{nk},\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

$$X[0]=x[0]W_N^0+x[1]W_N^0+x[2]W_N^0+x[3]W_N^0=10$$

$$X[1]=x[0]W_N^0+x[1]W_N^1+x[2]W_N^2+x[3]W_N^3=-1-\mathrm{j}$$

$$X[2]=x[0]W_N^0+x[1]W_N^2+x[2]W_N^4+x[3]W_N^6=0$$

$$X[3]=x[0]W_N^0+x[1]W_N^3+x[2]W_N^6+x[3]W_N^9=-1+\mathrm{j}$$

- 复数加法$N(N-1)$; 复数乘法N^2

降低DFT计算量的思路

- 将长序列DFT分解为短序列的DFT
- 利用旋转因子W_N^{nk}的周期性、对称性、可约性
- 周期性

$$W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k}$$

- 对称性

$$\left(W_N^{nk}\right)^* = W_N^{-nk} = W_N^{(N-n)k}$$

- 可约性

$$W_N^{nk} = W_{mN}^{mnk} = W_{N/m}^{nk/m}, \quad N/m\text{为整数}$$

- 特殊值

$$W_N^0 = 1; \quad W_N^{\frac{N}{2}} = -1; \quad W_N^{\frac{N}{4}} = -j; \quad W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$$

离散傅里叶变换的复杂度

- $N = 4$点序列[2，3，3，2] DFT的计算复杂度

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{nk}, \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

$$X[0] = x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot 1 + x[2] \cdot 1 + x[3] \cdot 1 = 10$$

$$X[1] = x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot W_4^1 + x[2] \cdot -1 + x[3] \cdot -W_4^1 = -1 - \mathrm{j}$$

$$X[2] = x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot -1 + x[2] \cdot 1 + x[3] \cdot -1 = 0$$

$$X[3] = x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot -W_4^1 + x[2] \cdot -1 + x[3] \cdot -W_4^1 = -1 + \mathrm{j}$$

降低DFT计算量的思路

- 将时域序列逐次分解为一组**子序列**，利用旋转因子的特性，由**子序列**的DFT来实现整个序列的DFT
- 基2时间抽取(Decimation in time)FFT算法

$$x[n] \to \begin{cases} x[2r] \\ x[2r+1] \end{cases} \quad r = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

- 基2频率抽取(Decimation in frequency)FFT算法

$$X[k] \to \begin{cases} X[2m] \\ X[2m+1] \end{cases} \quad m = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

基2时间抽取FFT算法推导

$$X[m]=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]W_N^{km}$$

$$=\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r]W_N^{2rm}+\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r+1]W_N^{(2r+1)m}=\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r]W_{N/2}^{rm}+W_N^m\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r+1]W_{N/2}^{rm}$$

记 $X_1[m]=\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r]W_{N/2}^{rm}$ $\quad X_2[m]=\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r+1]W_{N/2}^{rm}$

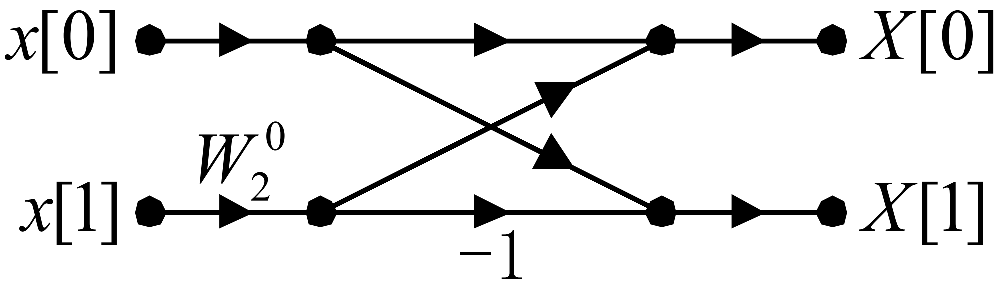
- 因此
- $X[m]=X_1[m]+W_N^mX_2[m]$
- $X[m+N/2]=X_1[m]-W_N^mX_2[m]$，$m=0,1\cdots\frac{N}{2}-1$

2点基2时间抽取FFT算法流图

- $N = 2$， $x[n] = \left[x[0], x[1]\right]$
- 则

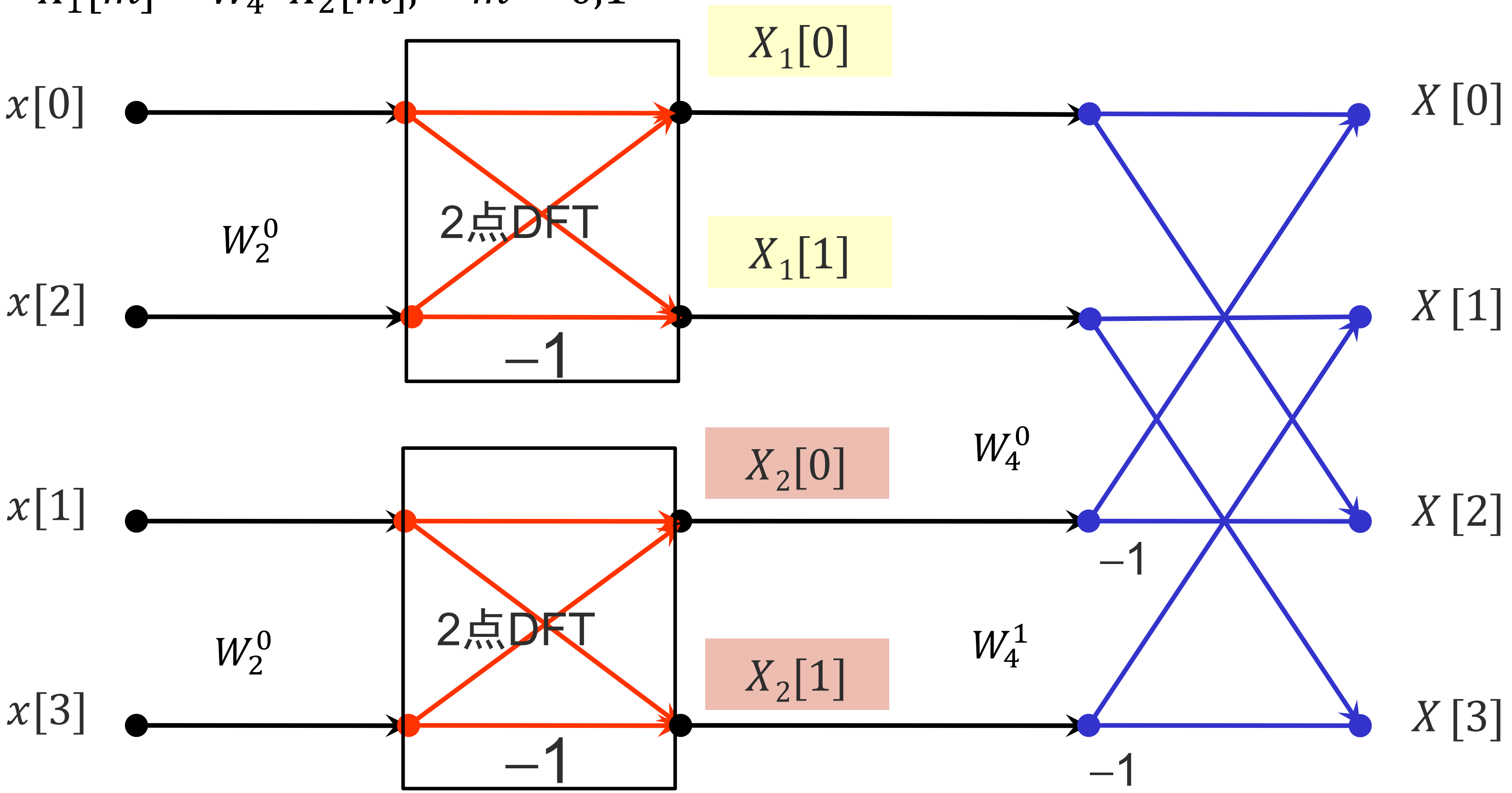
$$X[0] = x[0] + W_2^0 x[1]$$

$$X[1] = x[0] + W_2^1 x[1] = x[0] - W_2^0 x[1]$$



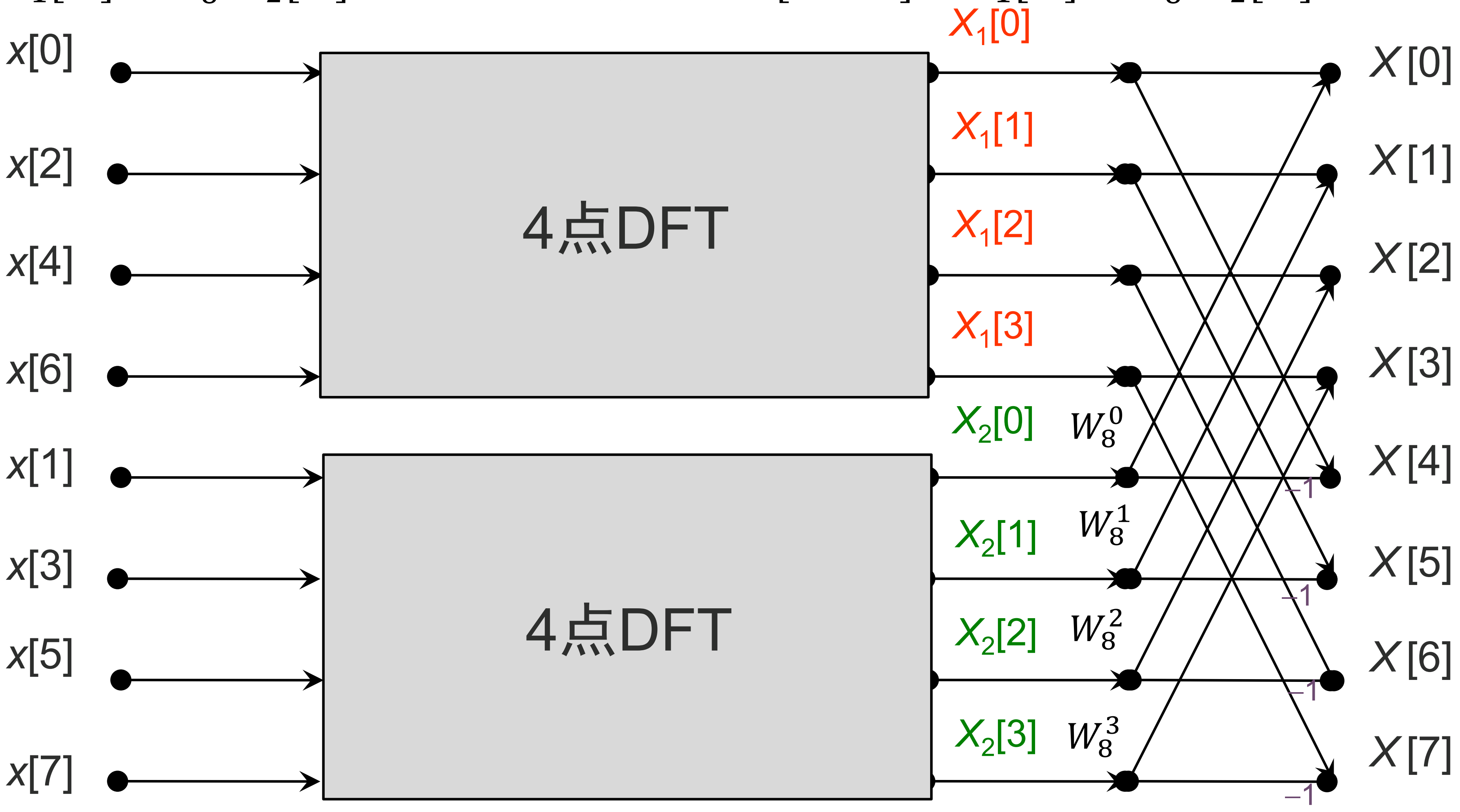
4点基2时间抽取FFT算法流图

- $X[m] = X_1[m] + W_4^m X_2[m], \quad m = 0,1$
- $X[m+2] = X_1[m] - W_4^m X_2[m], \quad m = 0,1$

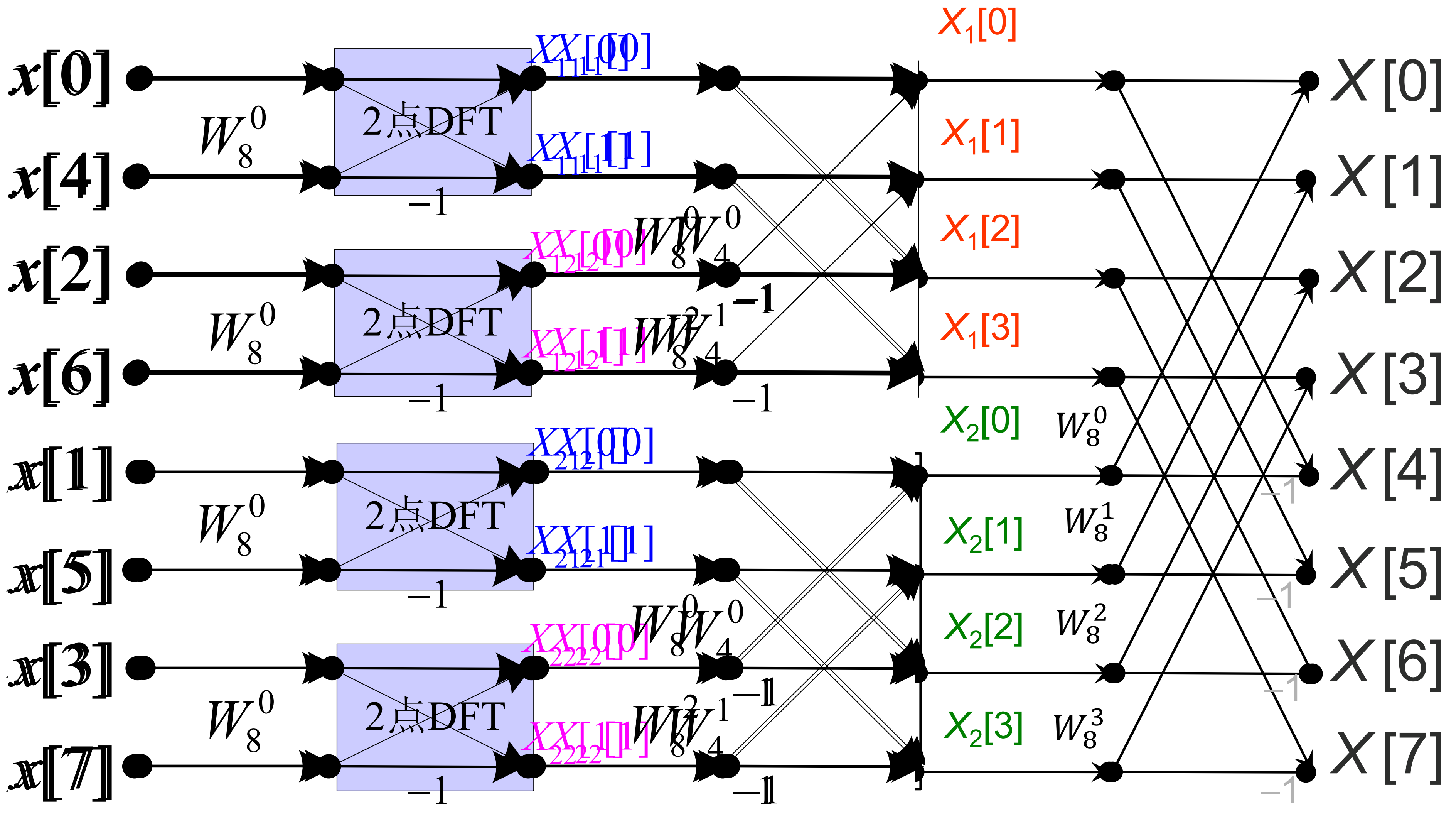


8点基2时间抽取FFT算法流图

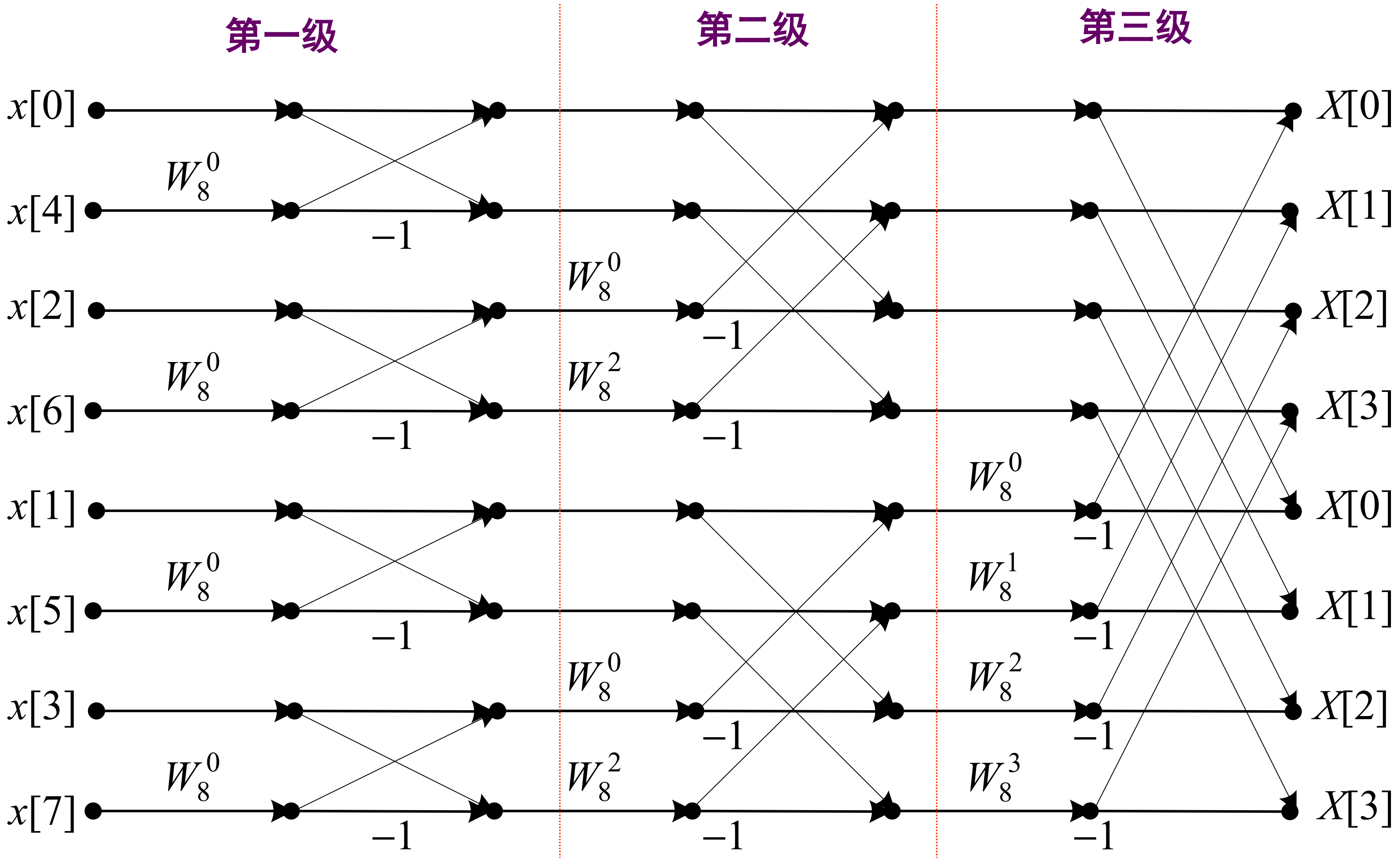
- $X[m] = X_1[m] + W_8^m X_2[m], \quad m = 0,1,2,3; \qquad X[m+4] = X_1[m] - W_8^m X_2[m], \quad m = 0,1,2,3$



8点基2时间抽取FFT算法流图



8点基2时间抽取FFT算法流图

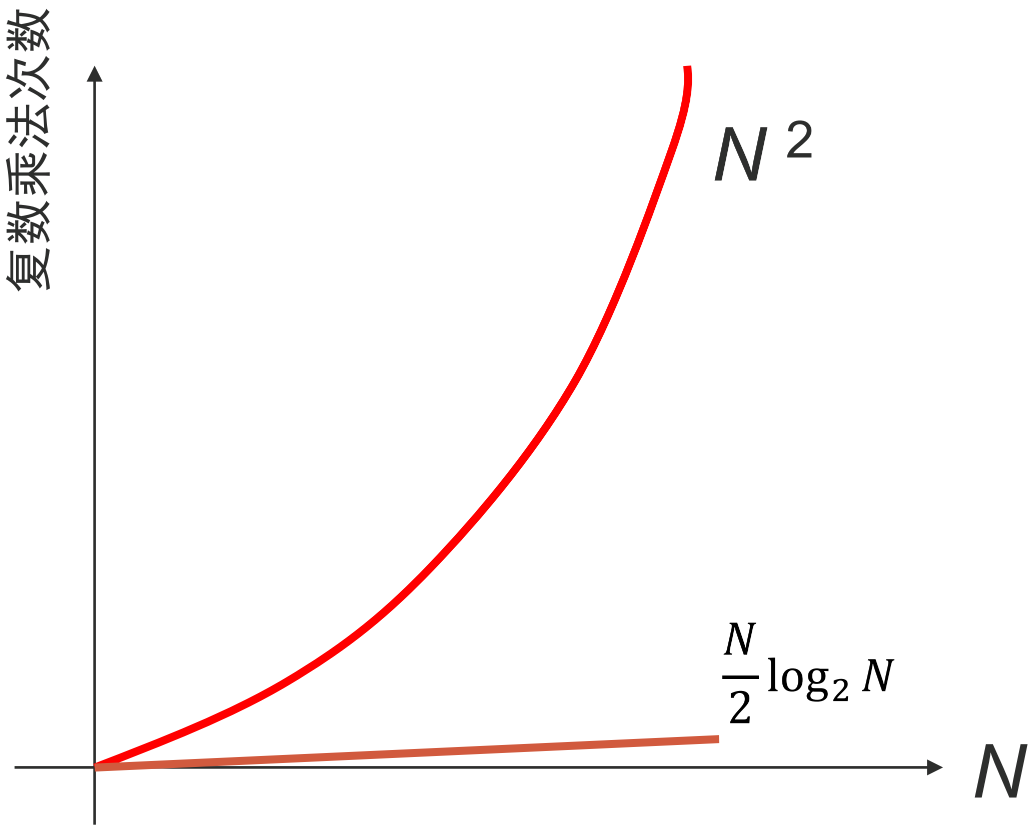


FFT算法流图旋转因子W_N^P规律

- 第一级的蝶形系数均为W_N^0，蝶形节点的距离为1
- 第二级的蝶形系数为W_N^0，$W_N^{N/4}$，蝶形节点的距离为2
- 第三级的蝶形系数为W_N^0，$W_N^{N/8}$，$W_N^{2N/8}$，$W_N^{3N/8}$，蝶形节点的距离为4
- 第M级的蝶形系数为W_N^0，W_N^1，$\cdots$，$W_N^{(N/2-1)}$，蝶形节点的距离为$N/2$

算法的计算复杂度

- FFT 复数乘法次数$\frac{N}{2}\log_2 N$



FFT计算

- 利用$N=4$基2时间抽取的FFT流图计算8点序列$x[n]=[1,-1,1,-1,2,1,1,2]$的DFT。
- 根据基2时间抽取FFT算法原理，8点序列的DFT $X[k]$可由两个4点序列的DFT $X_1[k]$和$X_2[k]$表达。

  如果按照序列$x[n]$序号的奇偶分解为$x_1[n]$和 $x_2[n]$，则存在

$$\begin{aligned} X[k] &= X_1[k] + W_8^k \cdot X_2[k] \\ X[k+4] &= X_1[k] - W_8^k \cdot X_2[k] \end{aligned} \qquad k=0,1,2,3$$

其中$x_1[n]=[1,1,2,1]$， $x_2[n]=[-1,-1,1,2]$，$X_1[k]$和$X_2[k]$可通过4点的FFT来计算。

利用FFT实现IFFT

$$X[k] = \mathrm{DFT}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

$$x[n] = \mathrm{IDFT}\{X[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X^*[k] W_N^{kn} \right)^*$$

- (1) 将$X[m]$取共轭
- (2) 用FFT流图计算$\mathrm{DFT}\{X^*[m]\}$
- (3) 对步骤(2)中结果取共轭并除以N

快速傅里叶变换 FFT

Carl Friedrich Gauss

Joseph Fourier

Cornelius Lanczos

James Cooley

John Tukey

德国数学家高斯于1805年通过观测数据对小行星轨道进行插值时提出过类似后续FFT的思想，但未分析计算时间，且使用其他数学工具

法国数学家、物理学家，1822 年在代表作《热的分析理论》中解决了热在非均匀加热的 固体中分布传播问题，成为分析学在物理中应用的最早例证之一，对19世纪数学和理论物理学的发展产生深远影响 。

1942年G. C. Danielson和C. Lanczos提出针对X射线晶体学的快速DFT算法，使用周期性将DFT复杂度降低到$O(N\log N)$

1965年Colley和Tukey的论文《An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series》提出N不是2的幂时的快速傅里叶变换算法，当前最著名的FFT算法，极大促进了DSP领域的发展