

08 离散信号的傅里叶变换

数字图像的傅里叶分析方法



傅里叶变换

- 傅里叶变换基本思想

将任意周期函数，分解为一组不同频率的**正弦**或者**余弦**函数的加权和

- 傅里叶变换效果

把函数从时间域变到频率域

- 傅里叶变换作用

把图像或者信号在频域中进行处理，从而简化处理过程、增强处理效果

傅里叶变换

- 一维连续函数的傅里叶变换对的符号表示为：

$$f(x) \Leftrightarrow F(u)$$

- 一些性质

$f(x)$ 为实函数，其傅里叶变换 $F(u)$ 通常为复函数，若 $F(u)$ 的实部为 $R(u)$ ，虚部为 $I(u)$ ，则

- 复数形式： $F(u) = R(u) + jI(u)$

- 指数形式： $F(u) = |F(u)|e^{j\theta(u)}$

- 相角： $\theta(u) = \arctan \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right]$

- 振幅： $|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$

- 振幅谱的平方称为 $f(x)$ 的能量谱：

$$E(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

二维傅里叶变换

- 一维连续函数的傅里叶变换推广到二维。
- 如果二维函数满足狄利克雷条件，则其傅里叶变换对为

$$\mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(u, v)] = f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

式中， x, y 为时域变量， u, v 为频域变量。

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$

- 二维连续函数的傅里叶变换对的符号表示为：

二维傅里叶变换

■ 一些性质

■ 若 $F(u, v)$ 的实部为 $R(u, v)$, 虚部为 $I(u, v)$, 则

■ 复数形式: $F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v)$

■ 指数形式: $F(u, v) = |F(u, v)|e^{j\theta(u, v)}$

■ 相角: $\theta(u) = \arctan \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$

■ 振幅: $|F(u)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$

■ 振幅谱的平方称为 $f(x, y)$ 的能量谱:

$$E(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

离散函数的傅里叶变换

- 连续傅里叶变换在计算机上无法直接使用，因为计算机只能处理离散数值
- 为了在计算机上实现傅里叶变换计算，**必须把连续函数离散化**，即将连续傅里叶变换转化为离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform, 简称DFT)

离散函数的傅里叶变换

- 设 $\{f(x) | f(0), f(1), f(2), \dots, f(N-1)\}$ 为一维信号 $f(x)$ 的 N 个抽样, 其离散傅里叶变换对为:

$$F[f(x)] = F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi ux/N}$$

$$F^{-1}[F(u)] = f(x) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi ux/N}$$

式中 $x, u = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

离散函数的傅里叶变换

由欧拉公式可知

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

将上式代入，并利用 $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ ，可得

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \left(\cos \frac{2\pi ux}{N} - j \sin \frac{2\pi ux}{N} \right)$$

可见，**离散序列的傅里叶变换仍是一个离散的序列**，每一个 u 对应的傅里叶变换结果是所有输入序列 $f(x)$ 的加权和（每一个 $f(x)$ 都乘以不同频率的正弦和余弦值）， u 决定了每个傅里叶变换结果的频率。

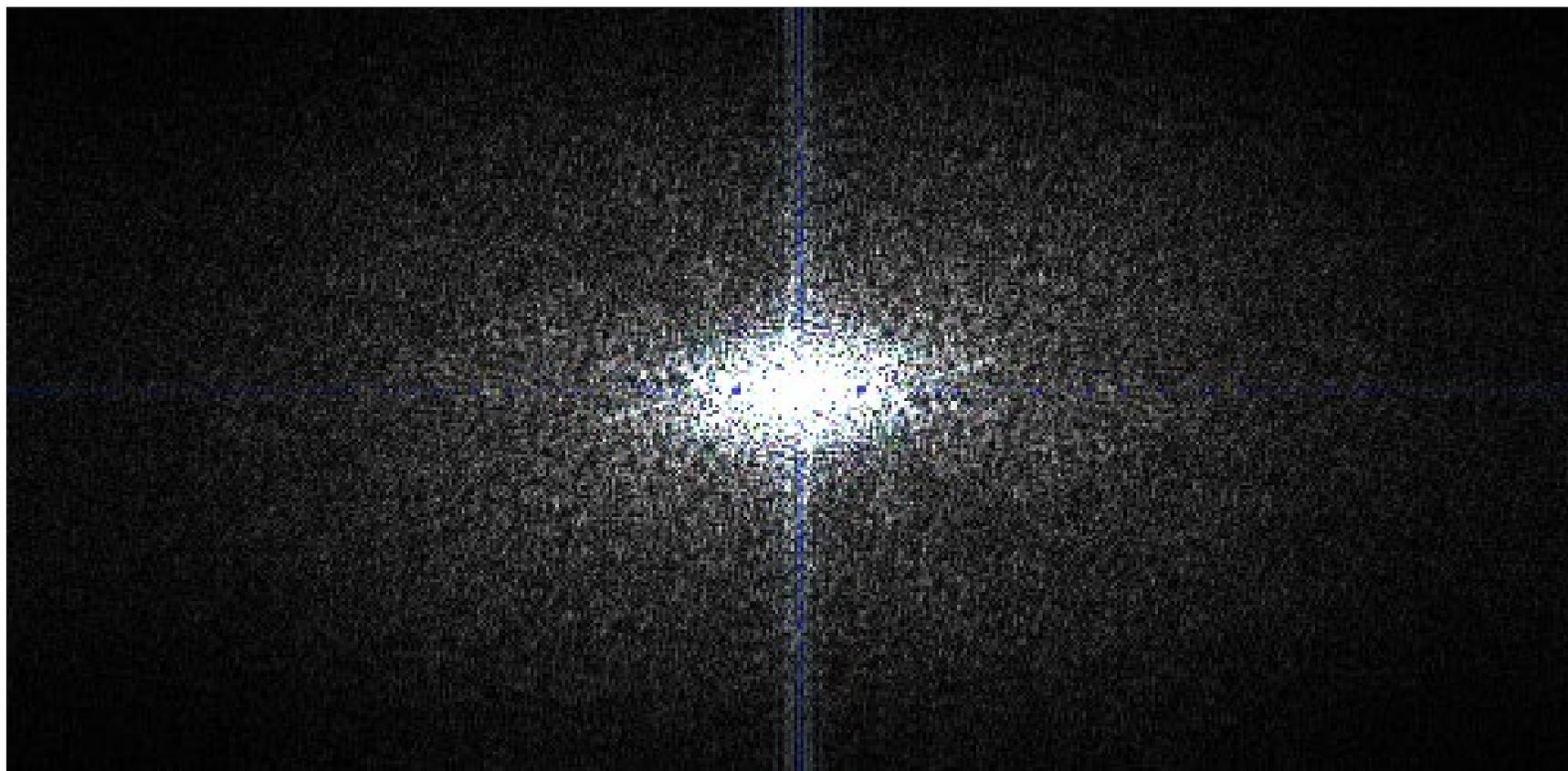
离散函数的傅里叶变换

- 一维离散傅里叶变换的复数形式、指数形式、振幅、相角以及能量谱的表示类似一维连续函数的相应的表达式
- 将一维离散傅里叶变换推广到二维，则二维离散傅里叶变换对定义为：

$$F[f(x, y)] = F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$
$$F^{-1}[F(u, v)] = f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

- 类似一维离散傅里叶变换，系数 $1/MN$ 可以在正变换或逆变换中，也可以在正变换和逆变换前分别乘以系数，只要两式系数的乘积等于 $1/MN$ 即可
- 二维离散函数的复数形式、指数形式、振幅、相角、能量谱的表示类似二维连续函数的相应的表达式。





二维离散傅里叶变换的基本性质

名称	表达式
1) $f(x, y)$ 的离散傅里叶变换(DFT)	$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$
2) $F(u, v)$ 的离散傅里叶反变换(IDFT)	$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$
3) 极坐标表示	$F(u, v) = F(u, v) e^{j\phi(u, v)}$
4) 谱	$ F(u, v) = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$ $R = \text{Real}(F); \quad I = \text{Imag}(F)$
5) 相角	$\phi(u, v) = \arctan \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$
6) 功率谱	$P(u, v) = F(u, v) ^2$
7) 均值	$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \frac{1}{MN} F(0, 0)$

二维离散傅里叶变换的基本性质

8) 周期性(k_1 和 k_2 为整数)	$F(u, v) = F(u + k_1 M, v) = F(u, v + k_2 N) = F(u + k_1 M, v + k_2 N)$ $f(x, y) = f(x + k_1 M, y) = f(x, y + k_2 N) = f(x + k_1 M, y + k_2 N)$
9) 卷积	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x-m, y-n)$
10) 相关	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n) h(x+m, y+n)$
11) 可分性	二维 DFT 可以用先沿图像的行(列)计算一维 DFT 变换, 然后沿结果的列(行)计算一维变换。见 4.11.1 节
12) 使用正变换算法得到傅里叶反变换	$MNf^*(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$ <p>该式指出, 将 $F^*(u, v)$ 输入计算正变换的算法(上式右侧)中, 将得到 $MNf^*(x, y)$。取复共轭并除以 MN 就可给出希望的反变换。见 4.11.2 节</p>

二维离散傅里叶变换的基本性质

名称	DFT 对
1) 对称性	见表 4.1
2) 线性	$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$
3) 平移性(一般)	$f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$
4) 平移到频率矩形的中心($M/2, N/2$)	$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v)(-1)^{u+v}$
5) 旋转	$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$ $x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \varphi \quad v = \omega \sin \varphi$
6) 卷积定理*	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$ $f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$
7) 相关定理*	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v)H(u, v)$ $f^*(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$
8) 离散单位冲激	$\delta(x, y) \Leftrightarrow 1$

二维离散傅里叶变换的基本性质

9) 矩形函数	$\text{rect}[a, b] \Leftrightarrow ab \frac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)} \frac{\sin(\pi ub)}{(\pi ub)} e^{-j\pi(ua+vb)}$
10) 正弦函数	$\sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow j \frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nu_0) - \delta(u - Mu_0, v - Nu_0)]$
11) 余弦函数	$\cos(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nu_0) + \delta(u - Mu_0, v - Nu_0)]$
下面的傅里叶变换对仅连续变量可推导，如之前那样，用 t 和 z 表示空间变量，用 μ 和 ν 表示频率变量。对连续函数取样后，这些结果可用于 DFT 处理。	
12) 微分 [右边的表达式假定 $f(\pm\infty, \pm\infty) = 0$]	$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(t, z) \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$ $\frac{\partial^m f(t, z)}{\partial t^m} \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m F(\mu, \nu); \frac{\partial^n f(t, z)}{\partial z^n} \Leftrightarrow (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$
13) 高斯	$A 2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2+z^2)} \Leftrightarrow A e^{-(\mu^2+\nu^2)/2\sigma^2} \quad (A \text{ 是常数})$

基本性质

设二维离散函数为 $f_1(x, y)$ 和 $f_2(x, y)$, 它们所对应的傅里叶变换分别为 $F_1(u, v)$ 和 $F_2(u, v)$

- 线性性质

- $af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$ (a, b 为常数)

- 此性质可以节约求傅里叶变换的时间。若已经得到了 $f_1(x, y)$ 和 $f_2(x, y)$ 及 $F_1(u, v)$ 和 $F_2(u, v)$ 的值, 则 $af_1(x, y) + bf_2(x, y)$ 的傅里叶变换只要求得 $aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$ 就可以了。

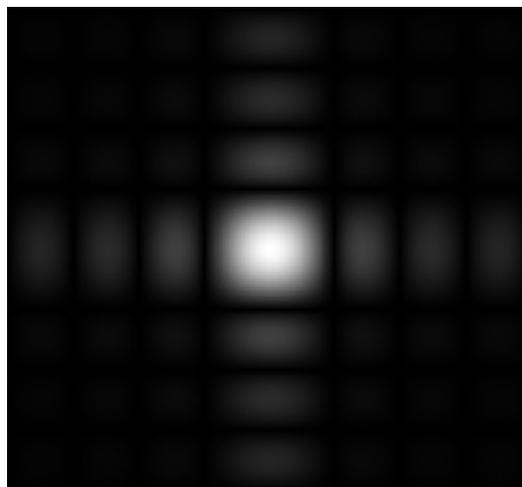
基本性质

- 比例性质

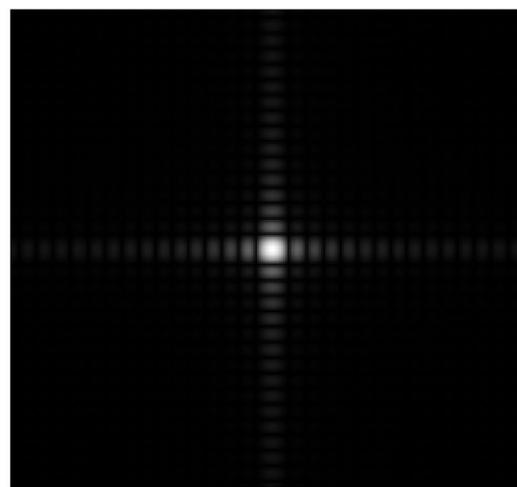
- 对于两个标量 a 和 b ，有

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

- 上式说明了在空间比例尺度的展宽，相应于频域比例尺度的压缩，其幅值也减少为原来的 $1/|ab|$ ，如图所示。



(a) 比例尺度展宽前的频谱



(b) 比例尺度展宽后的频谱

基本性质

- 可分离性

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \left[\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \right] e^{-j2\pi ux/M}$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \left[\sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi vy/N} \right] e^{j2\pi ux/M}$$

利用这个性质，一个二维离散傅里叶变换（或逆变换）可通过进行两次一维离散傅里叶变换（或逆变换）来完成

可分离性

- 例如，以正变换为例，

先对 $f(x, y)$ 沿 y 轴进行傅里叶变换得到 $F(x, v)$,

$$F(x, v) = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi y/N}$$

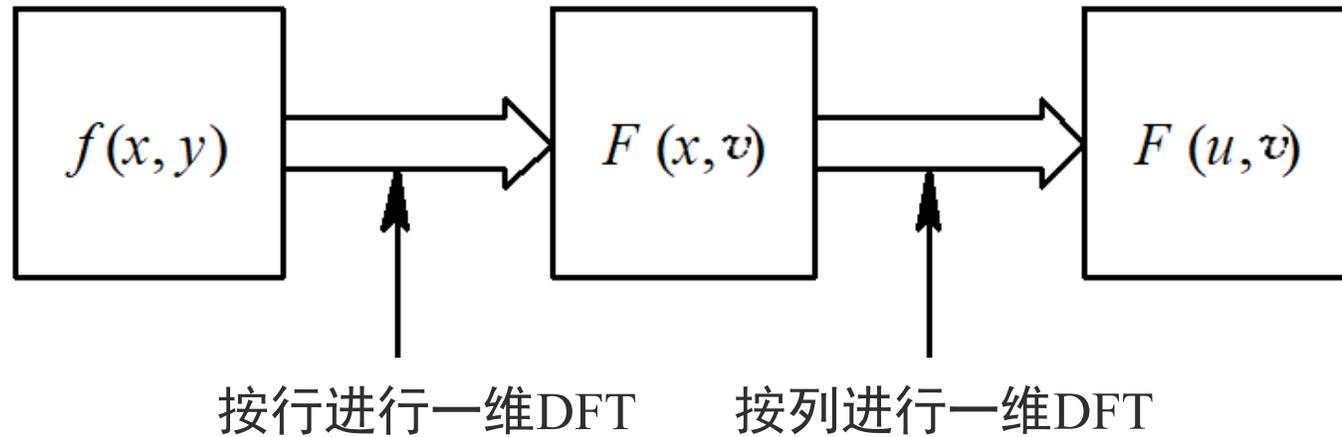
再沿着 x 轴对 $F(x, v)$ 进行一维离散傅里叶变换，得到 $F(u, v)$

$$F(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) e^{-j2\pi x/M}$$

显然对 $f(x, y)$ 先沿 x 轴进行离散傅里叶变换，再沿 y 轴进行离散傅里叶变换结果一样。逆变换也是如此

可分离性

- 先对 $f(x, y)$ 按行进行傅里叶变换得到 $F(x, v)$ ，再对 $F(x, v)$ 按列进行傅里叶变换，便可得到 $f(x, y)$ 的傅里叶变换结果。



基本性质

- 频率位移及空间位移

$$\text{频率位移: } f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

$$\text{空间位移: } f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$$

这一性质表明, 当用 $e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}$ 乘以 $f(x, y)$, 求乘积的傅里叶变换, 可以使空间频率域 u, v 平面坐标系的原点从 $(0,0)$ 平移到 (u_0, v_0) 的位置; 同样, 当用 $e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$ 乘以 $F(u, v)$, 并求此乘积的离散傅里叶反变换, 可以使空间 x, y 平面坐标系原点从 $(0,0)$ 平移到 (x_0, y_0) 的位置

频率位移及空间位移

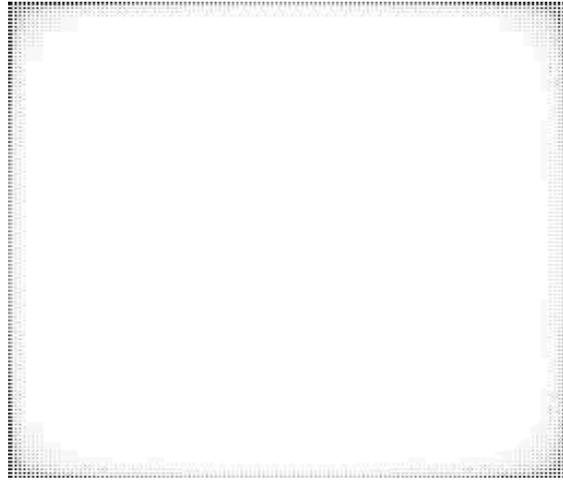
在数字图像处理中，为了清楚地分析图像傅里叶谱的分布情况，经常需要把空间频率平面坐标系的原点移到 $(M/2, N/2)$ 的位置，即令 $u_0 = M/2$ $v_0 = N/2$ ，则

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right)$$

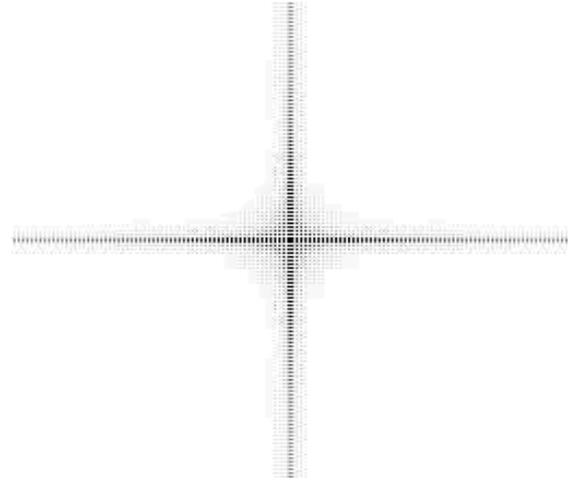
上式表明：如果需要将图像频谱的原点从起始点 $(0,0)$ 移到图像的中心点 $(M/2, N/2)$ ，只要 $f(x, y)$ 乘上 $(-1)^{x+y}$ 因子进行傅里叶变换即可实现



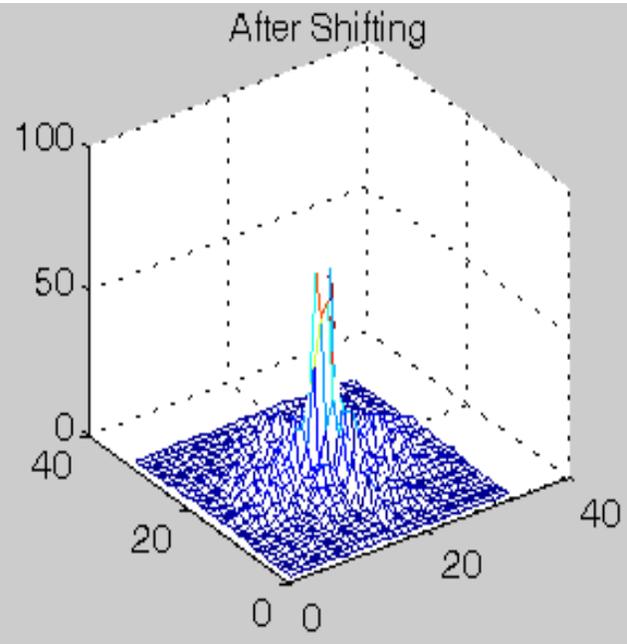
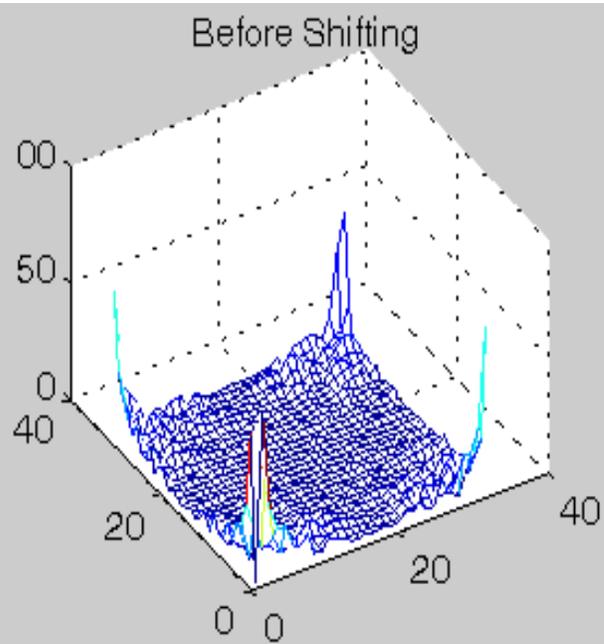
(a)



(b)



(c)



基本性质

- 旋转性质

令

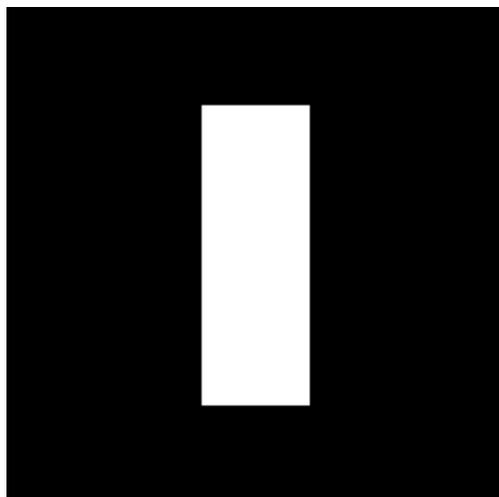
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} u = w \cos \varphi \\ v = w \sin \varphi \end{cases}$$

则 $f(x, y)$ 和 $F(u, v)$ 分别变为 $f(r, \theta)$ 和 $F(w, \varphi)$ ，在极坐标系中，存在以下变换对：

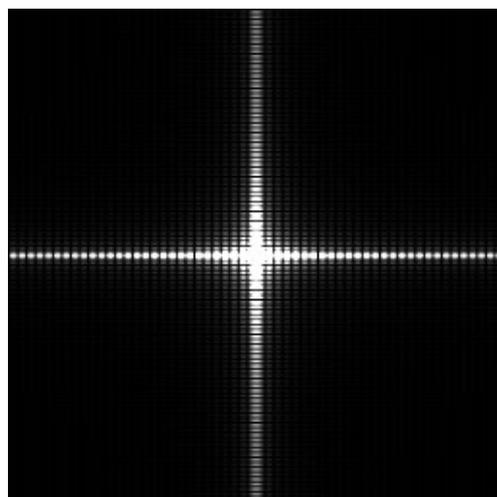
$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(w, \varphi + \theta_0)$$

上式表明，如果 $f(x, y)$ 在空间域中旋转 θ_0 角度，则相应的傅里叶变换 $F(u, v)$ 在频率域中旋转同样的角度，反之亦然

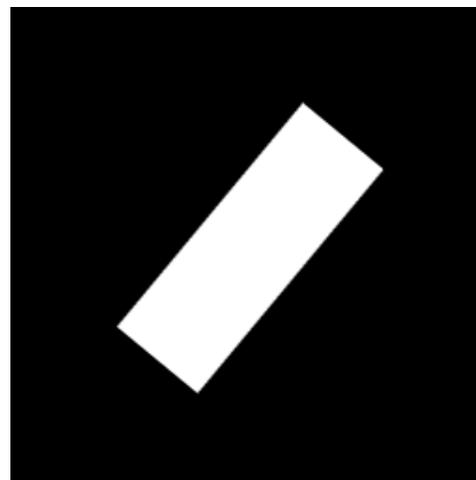
基本性质



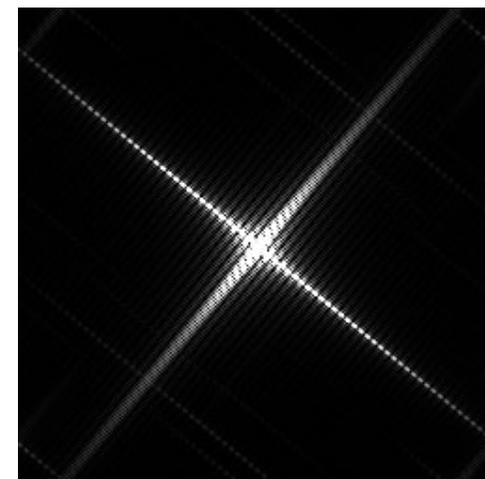
(a) 原图像



(b) 原图像的傅里叶频谱



(c) 旋转后的图像



(d) 旋转后图像的傅里叶频谱

基本性质

- 平均值

二维离散函数 $f(x, y)$ 的平均值定义为:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

可知

$$F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

对比以上两式, 可得

$$\bar{f}(x, y) = F(0,0)$$

这说明 $f(x, y)$ 的平均值等于其傅里叶变换 $F(u, v)$ 在频率原点的值 $F(0,0)$ 。

平均值

- 例题

已知图像矩阵为：

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

请验证图像的平均值与图像的离散傅里叶变换之间的关系

平均值

例题解答

例题

已知图像矩阵为：

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

请验证图像的平均值与图像的离散傅里叶变换之间的关系。

应用离散傅里叶变换公式：

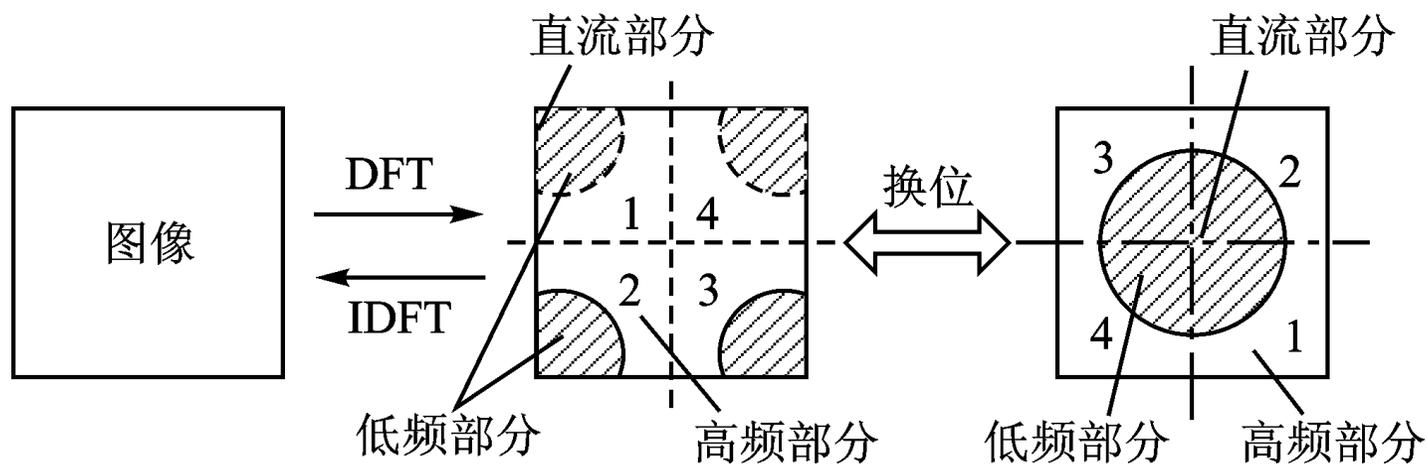
$$F(0,0) = \frac{1}{4 \times 4} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 f(i, j) = \frac{1}{4}$$

而图像的平均值 \bar{f} 则为：

$$\bar{f} = \frac{1}{16} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 f(i, j) = \frac{1}{4}$$

数字图像傅里叶变换的频谱分布

- 数字图像的二维离散傅里叶变换所得结果的频率成分如下图所示，



二维傅里叶变换的频谱分布

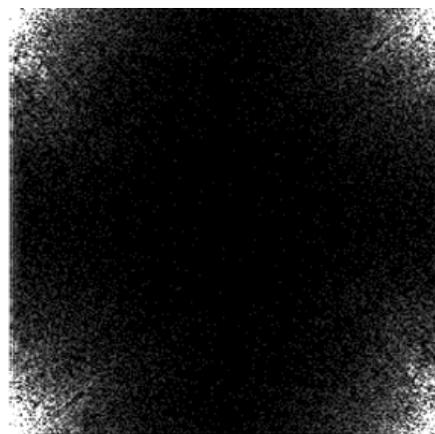
为了便于观察谱的分布，使直流成分出现在窗口的中央，可采用图示的换位方法，根据傅里叶频率位移的性质，只需要用 $f(x, y)$ 乘上 $(-1)^{x+y}$ 因子进行傅里叶变换即可实现，变换后的坐标原点移动到了窗口中心，围绕坐标中心的是低频，向外是高频。

数字图像傅里叶变换的频谱分布

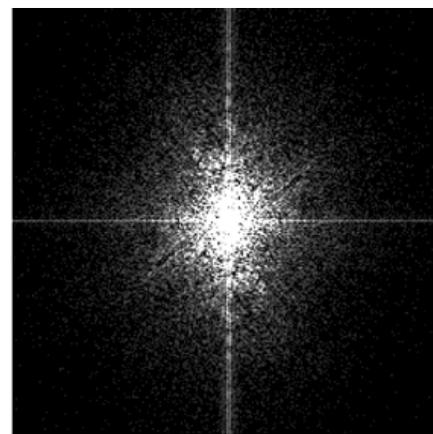
- 右图给出了二维离散傅里叶变换的频率位移特性示例
- 围绕坐标中心的是低频，向外是高频，频谱由中心向周边放射，而且各行各列的谱对中心点是共轭对称的
- 利用这个特性，如果在数据存储和传输时，仅存储和传输它们中的一部分，进行逆变换恢复原图像前，按照对称性补充另一部分数据，就可达到数据压缩的目的



(a) 原图像



(b) 傅里叶谱



(c) 原点移到中心的谱

数字图像傅里叶变换的统计分布

- 傅里叶变换后的零频分量 $F(0,0)$ ，也称作直流分量，根据公式

$$F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

它反映了原始图像的平均亮度

- 图像灰度变化缓慢的区域，对应它变换后的低频分量部分；图像灰度呈阶跃变化的区域，对应变换后的高频分量部分。除颗粒噪音外，图像细节的边缘、轮廓处都是灰度变化突变区域，它们都具有变换后的高频分量特征

频率域滤波

■ 频率域的基本性质

每个 $F(u, v)$ 项包含了被指数项修正的 $f(x, y)$ 所有值:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

■ 直观上将傅里叶变换和**图像中的亮度**变化联系起来并不困难

- 直流分量 $F(0,0)$ 对应一幅图像的平均灰度;
- 低频部分对应图像缓慢变化的分量;
- 高频部分对应图像边缘和灰度级突变的部分。

频率域滤波

频率域中滤波步骤:

1. 用 $(-1)^{x+y}$ 乘以输入图像来进行中心变化:

$$\mathfrak{F}[f(x, y)(-1)^{x+y}] = F(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2})$$

2. 由(1)计算图像的DFT, 即 $F(u, v)$;

3. 用滤波函数 $H(u, v)$ 乘以 $F(u, v)$:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

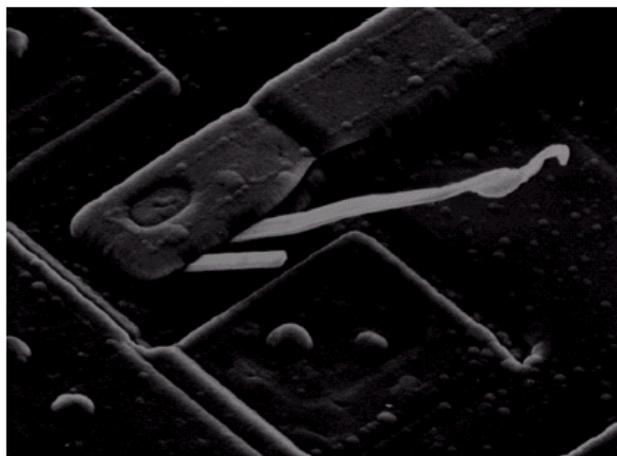
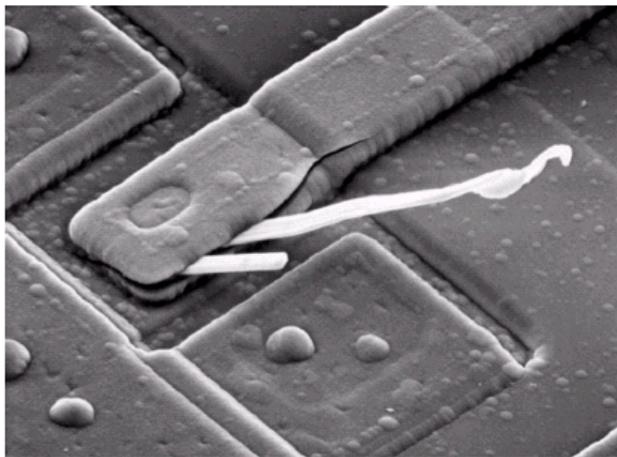
4. 计算(3)中结果的反DFT。

5. 得到(4)中结果的实部。

6. 用 $(-1)^{x+y}$ 乘以(5)中的结果。

$H(u, v)$ 称为滤波器: 抑制某些频率, 其他频率不受影响

频率域滤波



- $F(0,0)$ 置零，其它频率成分不变，滤波后图像均值为零；
- 注意：平均灰度为零，图像中必然会出现负值，而显示无法处理负值。标准显示方式将所有负值当作0处理，其他值在此基础上按比例增加。
- 整体平均灰度级降低；
- 产生边缘突出伴随结果；
- 可以识别由特定的局部化频域成分引起的空间图像效果时非常有用。

一些基本的滤波器及其性质

- 低通滤波器

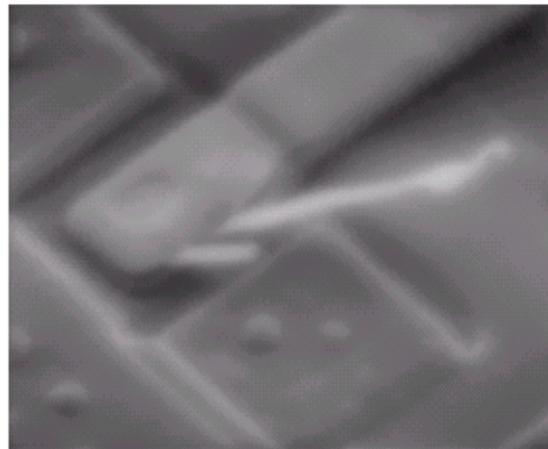
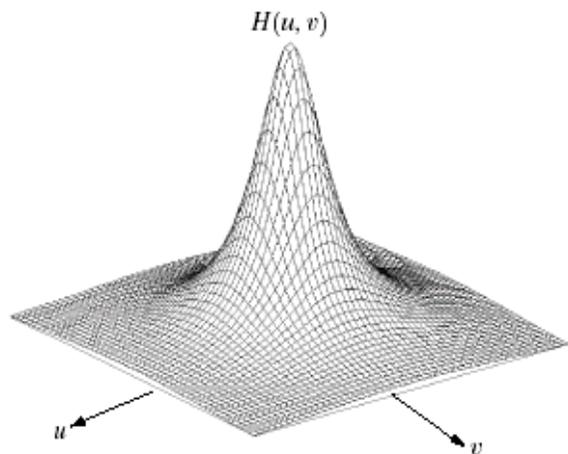
- 使低频通过，高频衰减
- 低频主要决定图像在平滑区域中总体灰度级的显示
- 比原始图像少一些尖锐的细节部分

- 高通滤波器

- 使高频通过，低频衰减
- 高频决定图像细节部分，如边缘和噪声
- 在平滑区域中减少灰度级变化，突出过渡（如边缘）
- 灰度级的细节部分，使图像更加锐化。

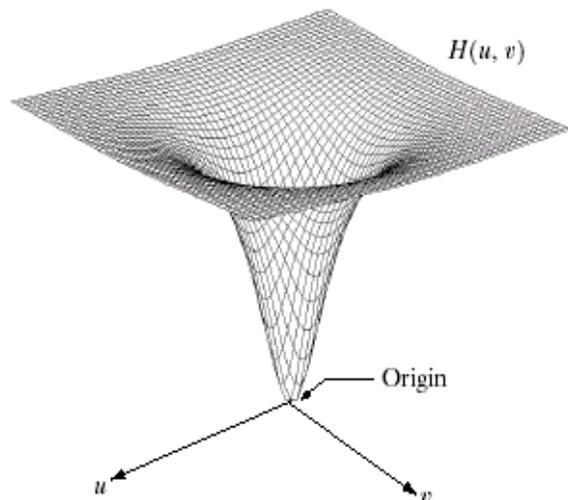
一些基本的滤波器及其性质

低通滤波器



图像被模糊

高通滤波器



锐化 $F(0,0) = 0$,
几乎没有平滑细节

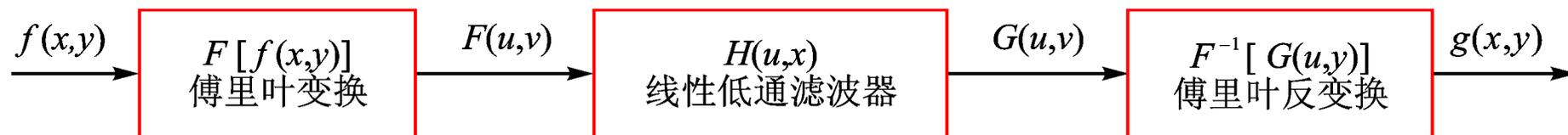
频域低通滤波

- 在分析一幅图像信号的频率特性时
 - 直流分量表示了图像的平均灰度；
 - 大面积的背景区域和缓慢变化部分则代表图像的低频分量；
 - 而它的边缘、细节、跳跃部分以及颗粒噪声都代表图像的高频分量。
- 因此，在频域中对图像采用滤波器函数**衰减高频信息，使低频信息畅通无阻**的过程称为低通滤波。

频域低通滤波

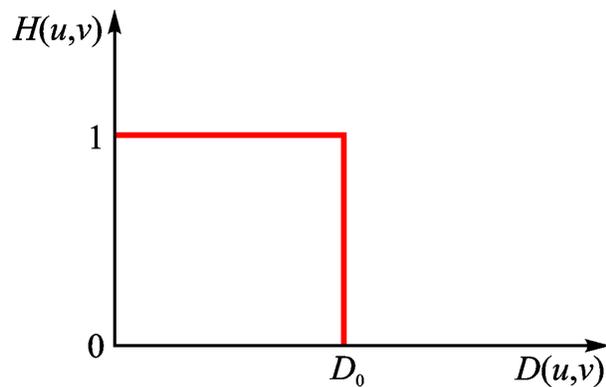
- 频域实现线性低通滤波器输出的表达式为

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

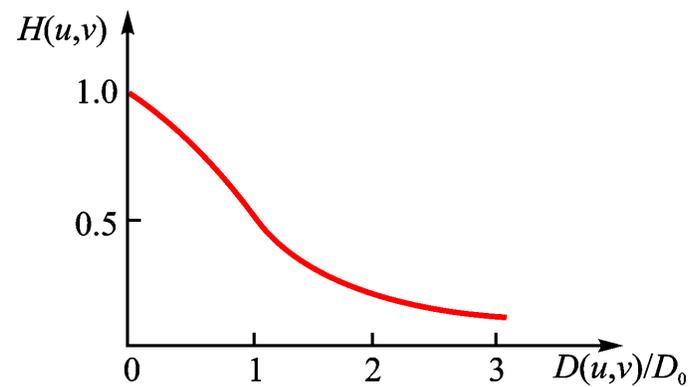


图像频域低通滤波流程框图

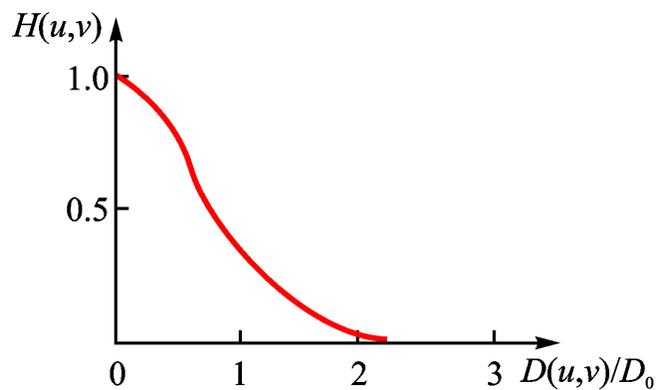
频域低通滤波



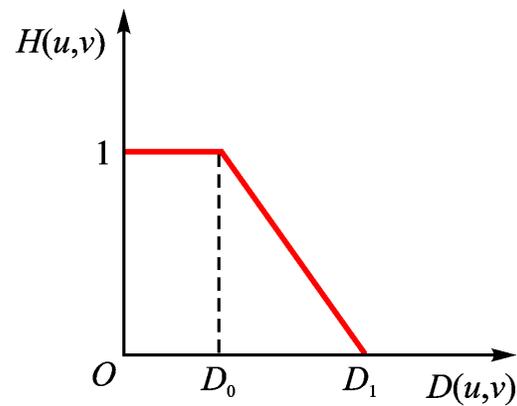
(a) 理想低通滤波器特性曲线



(b) 巴特沃斯低通滤波器特性曲线



(c) 指数型低通滤波器特性曲线



(d) 梯形低通滤波器特性曲线

四种频域低通滤波器传递函数 $H(u,v)$ 的剖面图

理想低通滤波器

- 理想的二维低通滤波器的传递函数由下式表示：

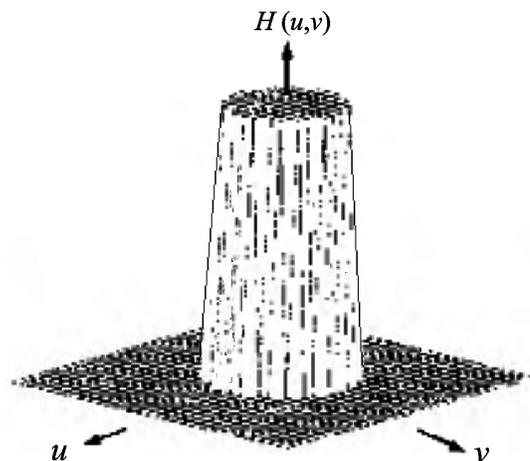
$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

式中 D_0 是一个规定的非负的量，叫做理想低通滤波器的截止频率。 $D(u, v)$ 是从频率域的原点到 (u, v) 点的距离，即：

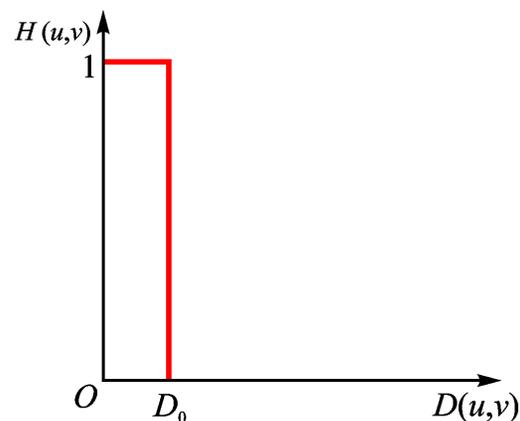
$$D(u, v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$

理想低通滤波器

- $H(u, v)$ 对 u, v 来说是一幅三维图形。 $H(u, v)$ 特性如下图:



(a) $H(u, v)$ 的透视图



(b) $H(u, v)$ 的剖面图

- 理想低通滤波器，是指以截频 D_0 为半径的圆内的所有频率都能无损地通过，而在截频之外的频率分量完全被衰减。
- 理想低通滤波器可以用计算机模拟实现，但却不能用电子元器件来实现。

图像功率

- 通过基于截止频率的函数对LPF性能比较。
- 标示截止频率位置的方法是：计算截止频率以内的图像功率占图像总功率值 P_T 的百分比。

图像功率

- 图像总功率值 P_T 是频域全部点 (u, v) 的功率谱成份之和

$$P_T = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u, v)$$

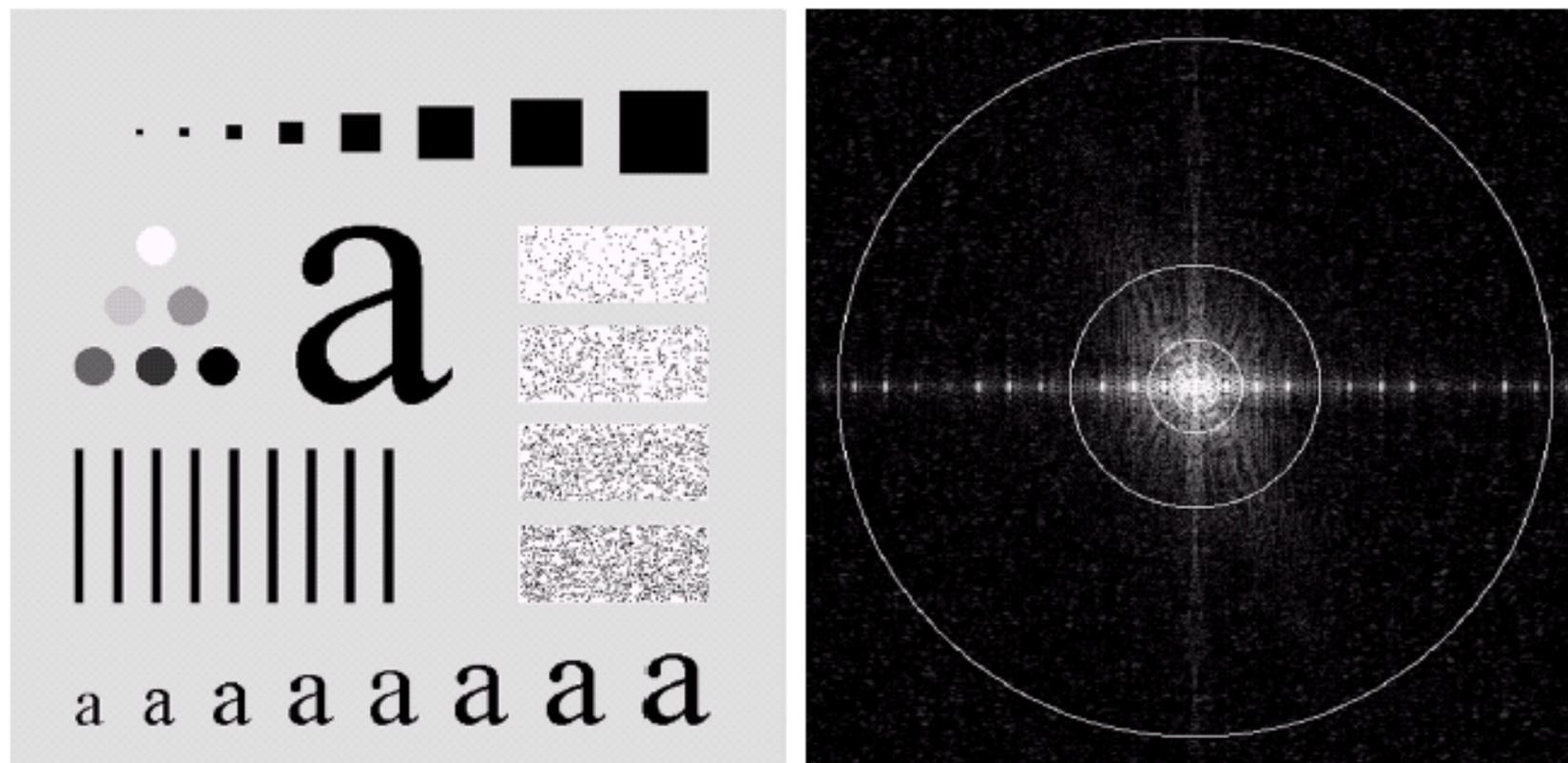
其中 $P(u, v)$ 是傅立叶变换功率谱:

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

通过的功率为原点在频率矩形的中心、半径为 r 的圆

包含 $\alpha\%$ 的功率

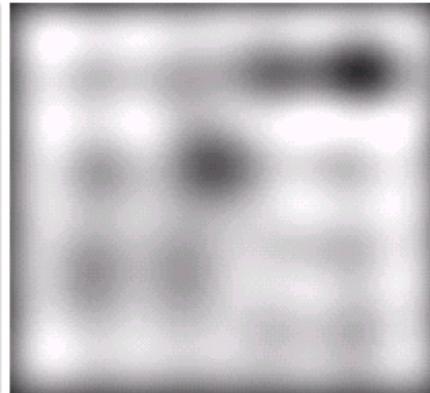
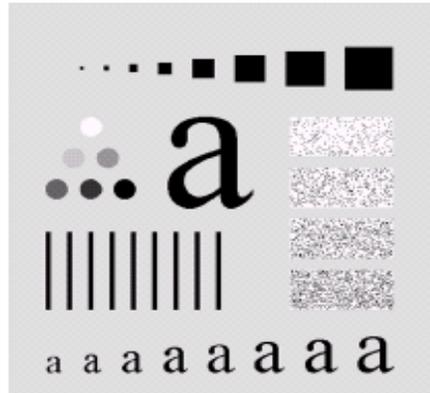
理想低通滤波器



a b

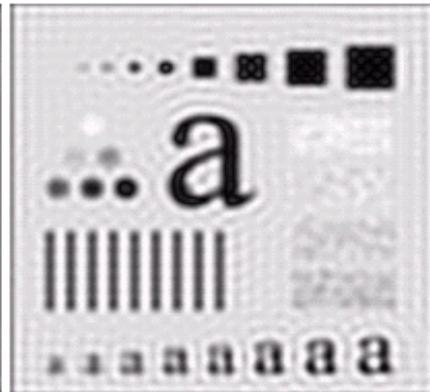
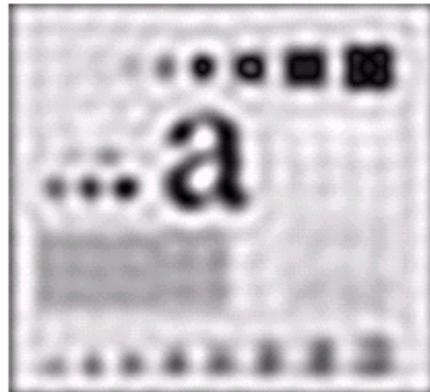
FIGURE 4.11 (a) An image of size 500×500 pixels and (b) its Fourier spectrum. The superimposed circles have radii values of 5, 15, 30, 80, and 230, which enclose 92.0, 94.6, 96.4, 98.0, and 99.5% of the image power, respectively.

理想低通滤波器



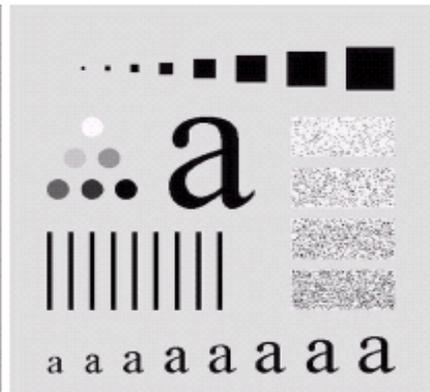
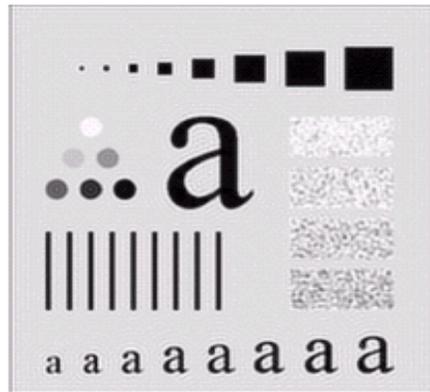
$D_0 = 5, \alpha = 92\%$
消除所有图像细节，
只剩大物体的“斑点”。
细节在滤除的8%功率中

$D_0 = 15,$
 $\alpha = 94.6\%$
严重的振铃现象



$D_0 = 30,$
 $\alpha = 96.4\%$
标准低通振铃现象

$D_0 = 80,$
 $\alpha = 98\%$

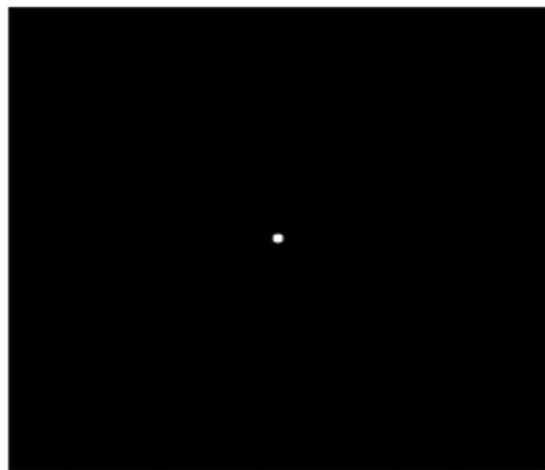


$D_0 = 230,$
 $\alpha = 99.5\%$

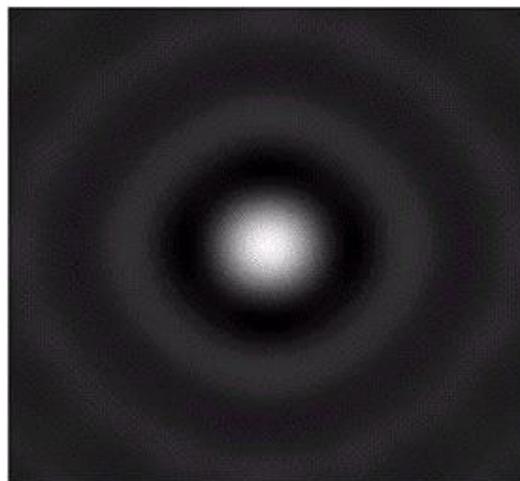
理想低通滤波器

如 $r = 5$ 的ILPF, 空间滤波器单位脉冲响应 $h(x, y)$

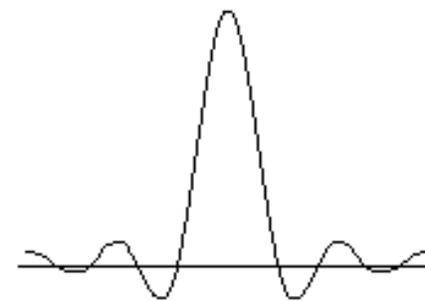
- 使用关于中心对称的函数可以显著简化 $H(u, v)$, 这要求 $F(u, v)$ 也被中心化。
 - 可以通过乘以 $(-1)^{u+v}$ 来实现中心化;
 - 反傅里叶变换IDFT 的实部乘以 $(-1)^{x+y}$ 得到 $h(x, y)$



$r = 5$ 的频域ILPF的 $H(u, v)$



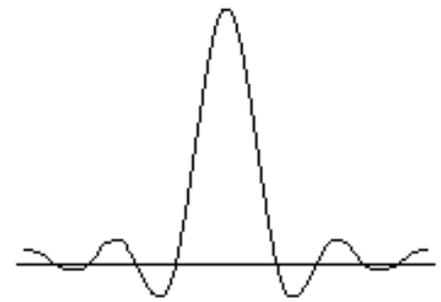
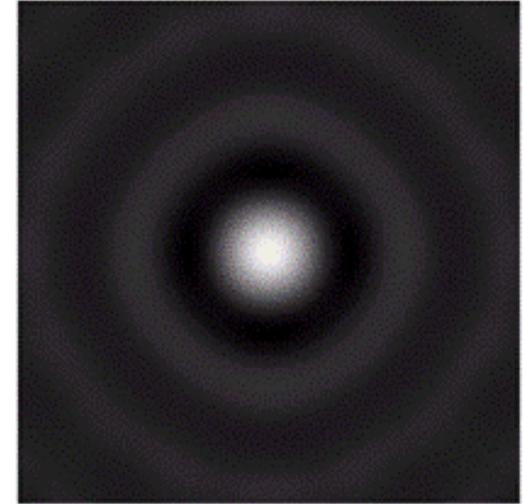
$h(x, y)$



中心水平扫描线的
灰度级剖面线

理想低通滤波器

- 空间域单位脉冲响应 $h(x, y)$ 两个主要特性
 - 原点处有一个主要的中心成份，其主要决定模糊；
 - 中心成份周围集中、呈周期性的成份，其主要决定理想滤波器振铃现象。
- $h(x, y)$ 中同心振铃的半径与 D_0 成反比；
 - 小的 D_0 在 $h(x, y)$ 中产生稍微宽的振铃，并且在 $g(x, y)$ 产生模糊；
 - 大的 D_0 产生更多(增加数目) 细微的振铃和较少的模糊。

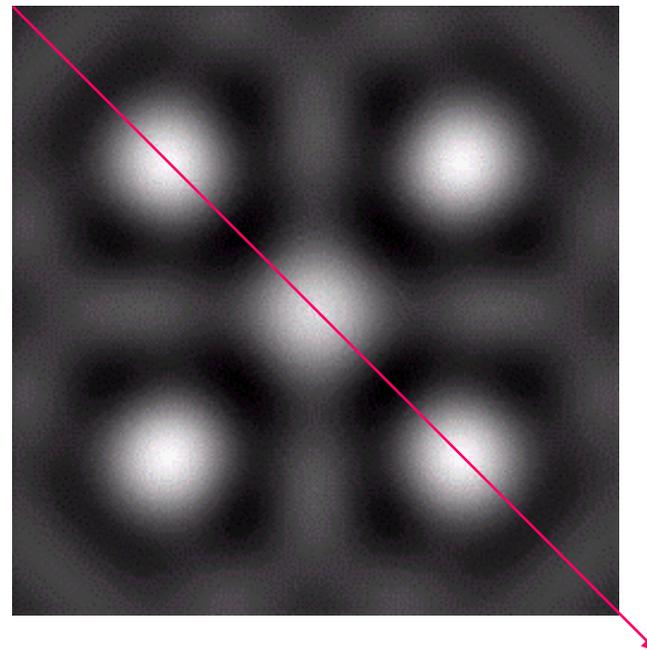
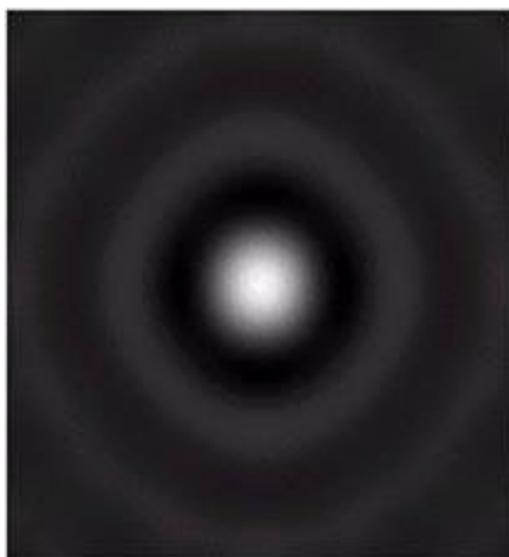


理想低通滤波器

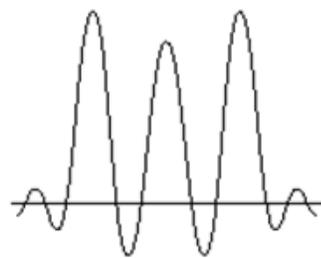


原始图像 $f(x, y)$ 黑色背景下五个明亮的像素组成，明亮的点可以近似为冲激。

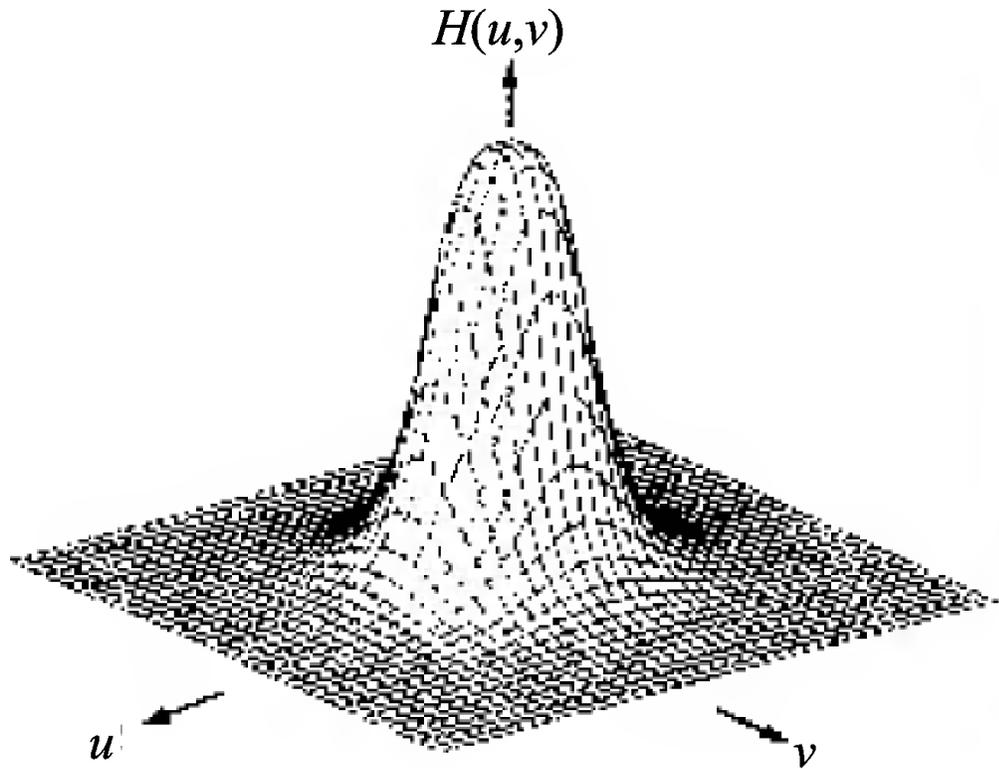
*



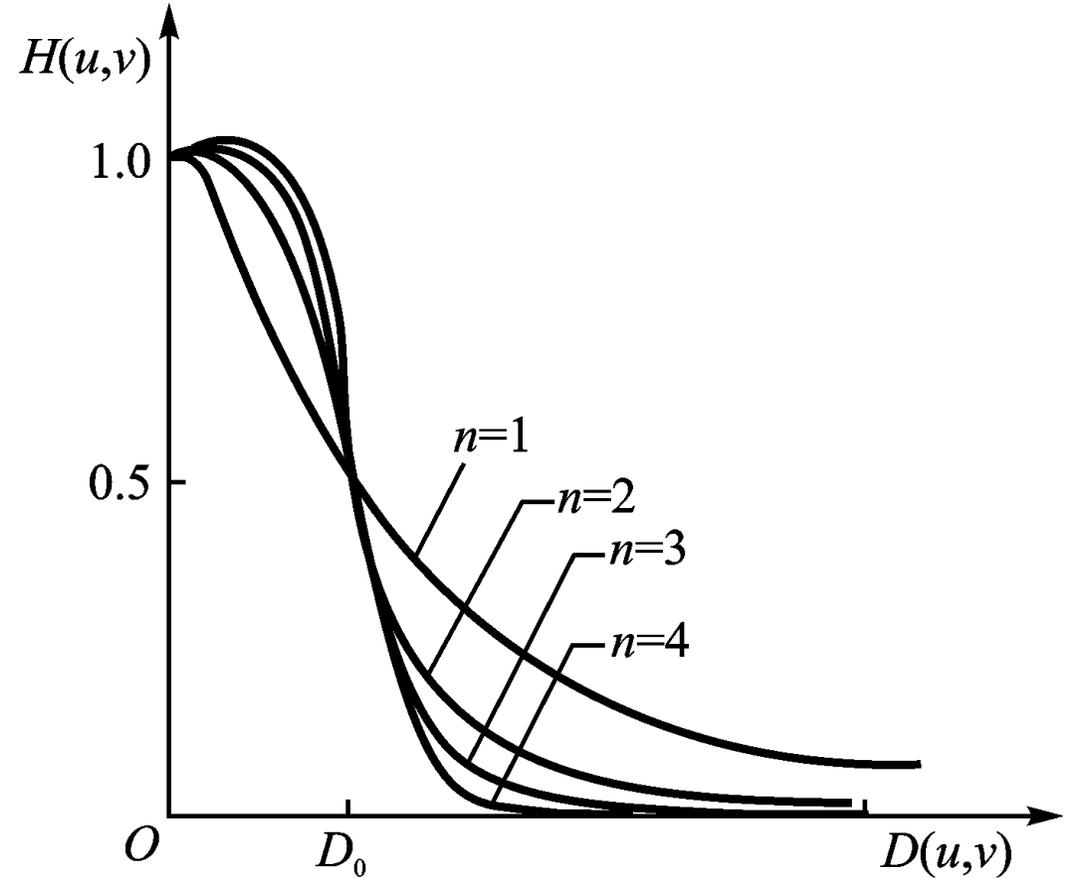
结果图像 $g(x, y)$ 原始亮点通过卷积而发生模糊，振铃现象在此种情况下非常严重，以至于相互之间的干扰而发生畸变。



Butterworth低通滤波器



(a) $H(u,v)$ 的透视图



(b) $H(u,v)$ 的剖面图

Butterworth低通滤波器

- 一个 n 阶Butterworth低通滤波器的传递函数由下式表示：

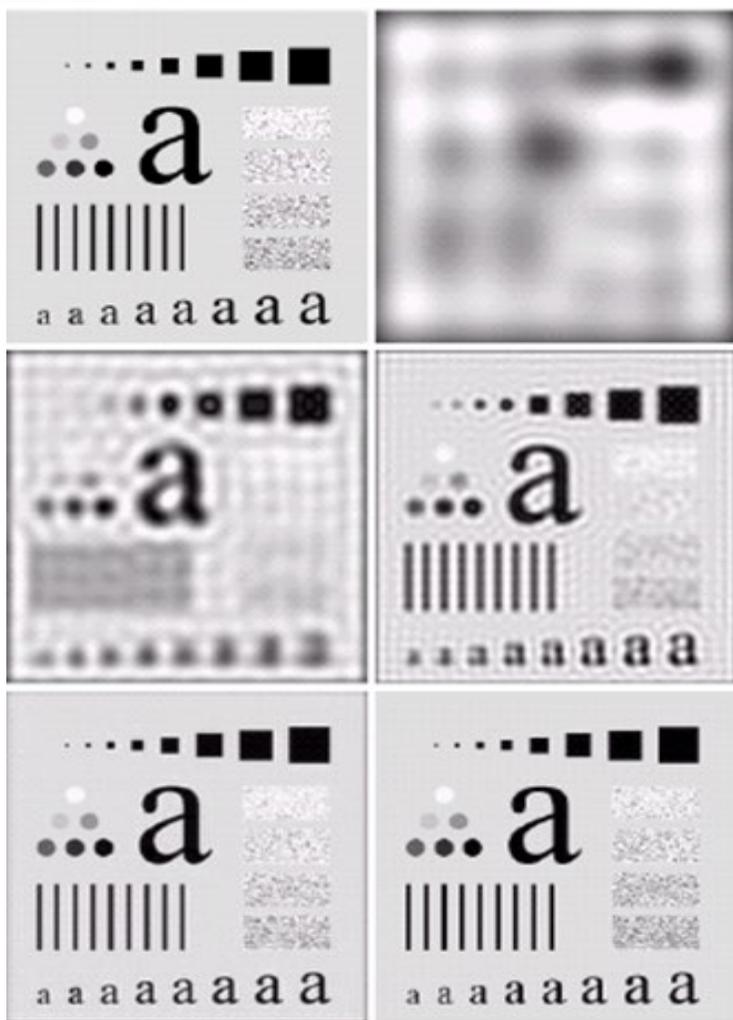
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$

式中 D_0 为截止频率， $D(u, v)$ 的值由下式决定：

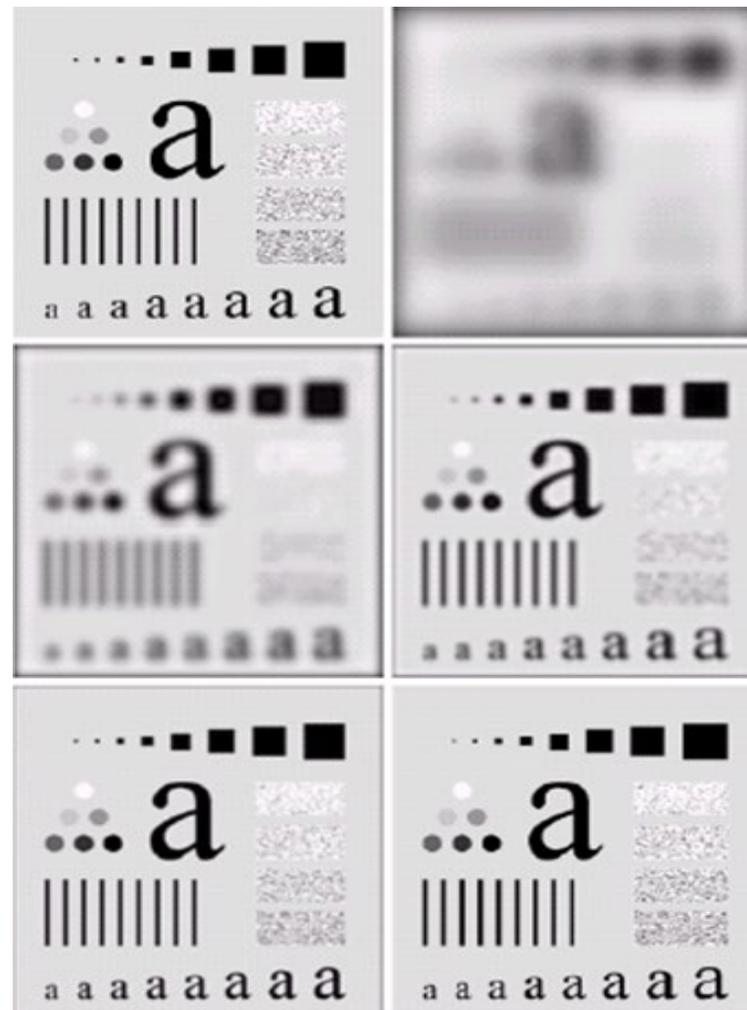
$$D(u, v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$

- Butterworth低通滤波器又称最大平坦滤波器。它与理想低通滤波器不同，**它的通带与阻带之间没有明显的不连续性。**
- 也就是说，在通带和阻带之间有一个平滑的过渡带。通常把 $H(u, v)$ 下降到某一值的那一点定为截止频率 D_0 。

Butterworth低通滤波器



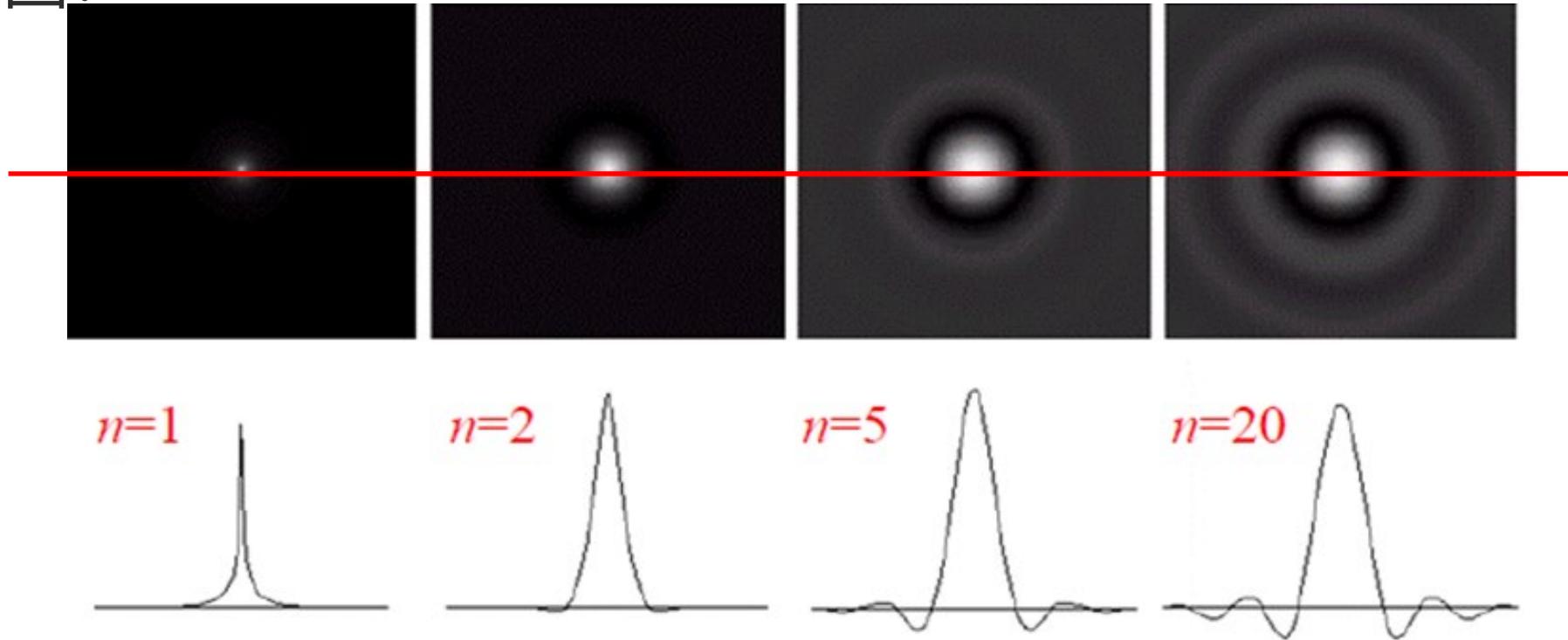
理想低通滤波器的结果



2阶Butterworth低通滤波的结果

Butterworth低通滤波器

- 不同阶数、相同截止频率(都为5个像素)的BLPF 空间域 $h(x, y)$ 图像表示和剖面图:



二阶BPLF显示了轻微的振铃和较小的负值，但远没有ILPF明显，是较好的折中选择。

Butterworth低通滤波器的特性

- 一阶的Butterworth滤波器没有振铃.
- 二阶的Butterworth滤波器有很微小的振铃,但阶数增大时振铃便成为一个重要因素.
- 当阶数 n 充分大时, Butterworth滤波器就变成理想低通滤波器.

高斯低通滤波器

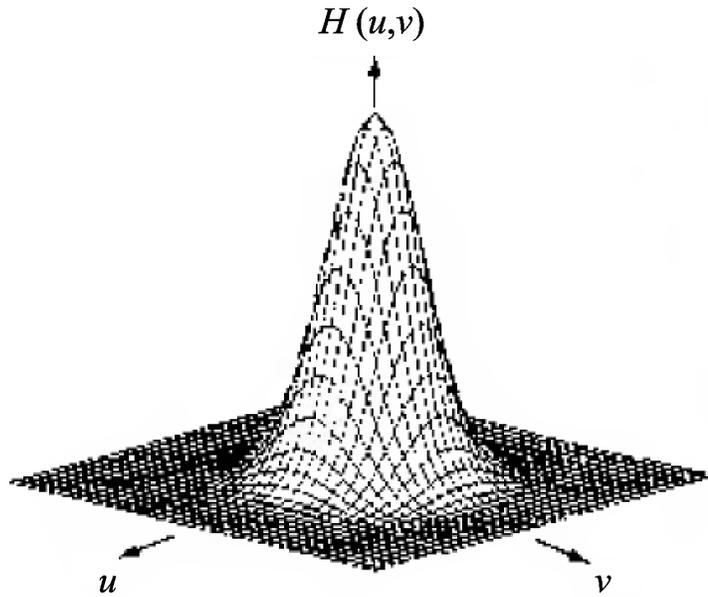
- 在图像处理中常用的另一种平滑滤波器是指数低通滤波器。它的传递函数如下式表示：

$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{D(u, v)}{D_0}\right]^n}$$

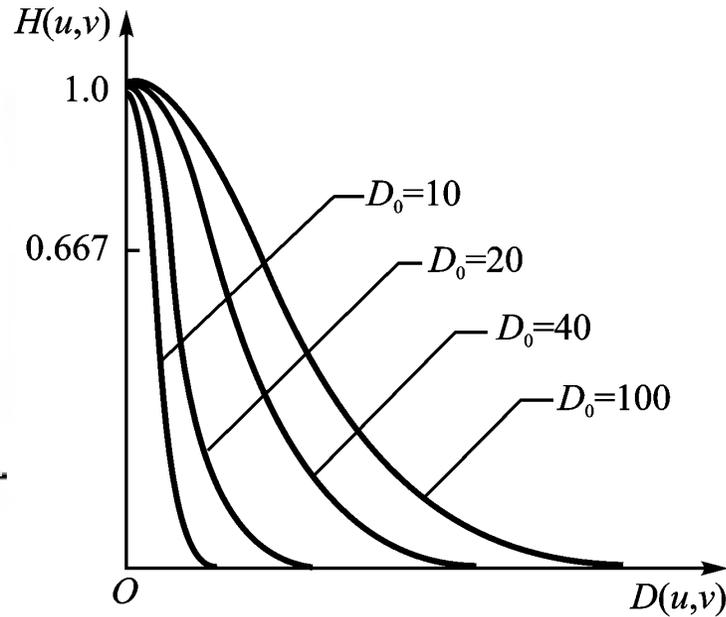
式中 n 是决定衰减率的系数。从式中可见，如果 $D(u, v) = D_0$ ，则 $H(u, v) = 1/e$ 。

高斯低通滤波器

- 由于指数低通滤波器有更快的衰减率，所以，经指数低通滤波的图像比Butterworth低通滤波器处理的图像稍模糊一些。
- 由于指数低通滤波器的传递函数有较平滑的过渡带，所以图像中没有振铃现象。



(a) $H(u,v)$ 的透视图



(b) $H(u,v)$ 的剖面图

高斯低通滤波器

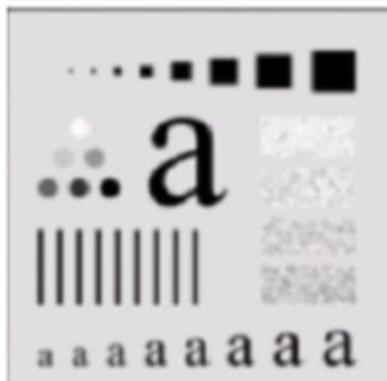
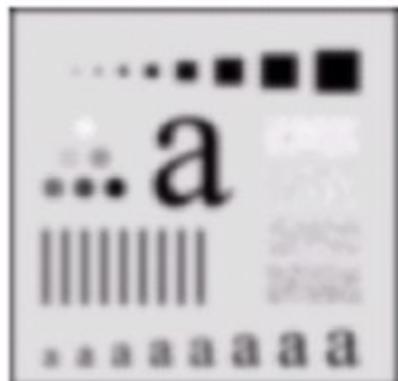
原始图像



2阶高斯滤波器

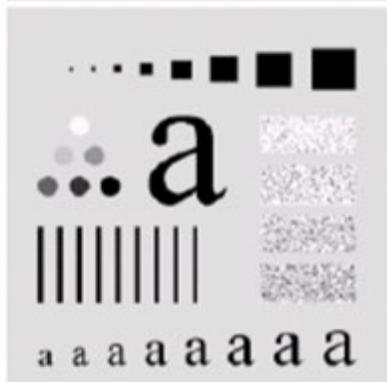
$D_0 = 5 \text{ pix}$

$D_0 = 15 \text{ pix}$



$D_0 = 30 \text{ pix}$

$D_0 = 80 \text{ pix}$



$D_0 = 230 \text{ pix}$

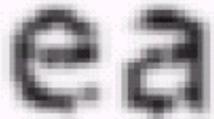
低通滤波器的应用示例

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

A small box containing the characters 'e' and 'a' from the text above. The characters are highly pixelated and distorted, with the 'e' appearing as a blocky shape and the 'a' as a jagged, broken form.

444×508像素的低分辨率文本样本，例如扫描、传真、复印、历史记录等，放大后可以看到形状失真和字符断裂。

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

A small box containing the characters 'e' and 'a' from the text above. The characters are significantly smoother and more recognizable than in the previous image, with the 'e' and 'a' appearing as clear, rounded shapes.

人眼视觉填充识别这些字符没有问题，但机器识别系统阅读断裂字符将很困难。用GLPF (D0=80) 滤波模糊后，很好地修复了断开的字符。

低通滤波器的应用示例

印刷出版——“美容”处理，平滑、柔和的外观。



原始图像
(放大的眼部细纹)

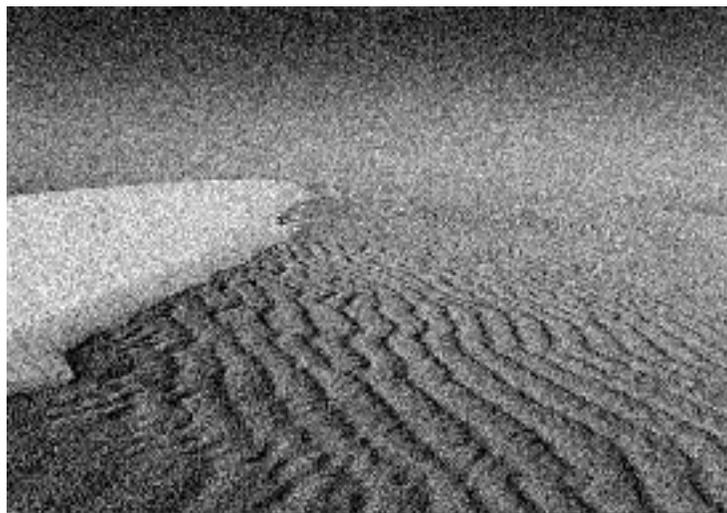
用 $D_0 = 100$ 的GLPF滤波的结果(细纹减少了)

用 $D_0 = 80$ 的
GLPF滤波的结果

低通滤波的缺陷

- 用低通滤波器进行平滑处理可以使噪声伪轮廓等寄生效应减低到不显眼的程度。
- 由于低通滤波器对噪声等寄生成份滤除的同时，**对有用高频成份也滤除**。因此，这种去噪声的美化处理是**以牺牲清晰度为代价而换取的**。

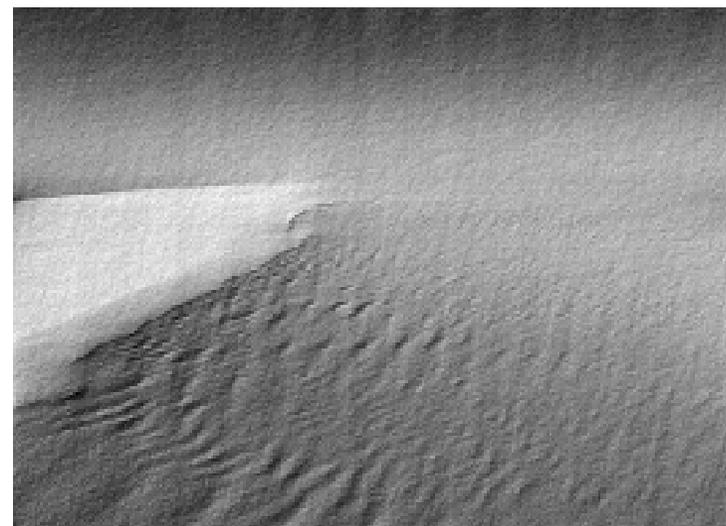
频域低通滤波



(a) 高斯噪声后的图像



(b) 巴特沃斯低通滤波后的图像

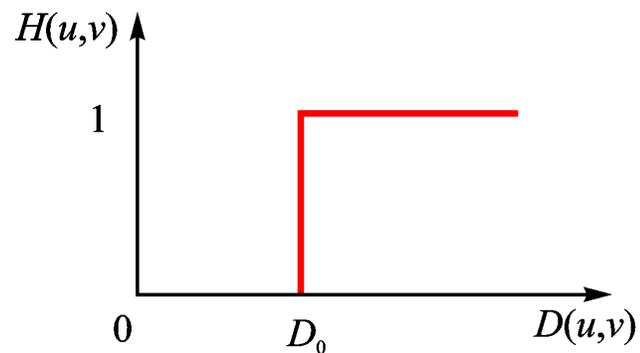


(c) 指数低通滤波后的图像

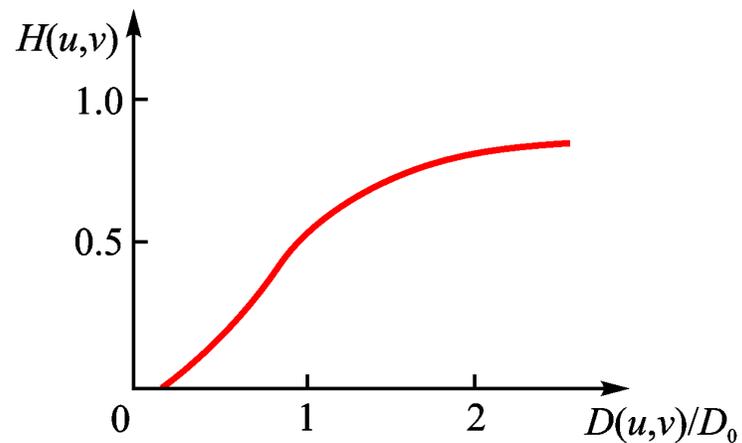
频域高通滤波

- 由于图像中的边缘、线条等细节部分与图像频谱中的高频分量相对应，在频域中用高通滤波器处理，能够使图像的边缘或线条变得清晰，图像得到锐化。
- 高通滤波器衰减傅立叶变换中的低频分量，通过傅立叶变换中的高频信息。
- 采用高通滤波的方法让高频分量顺利通过，使低频分量受到抑制，就可以增强高频的成分。

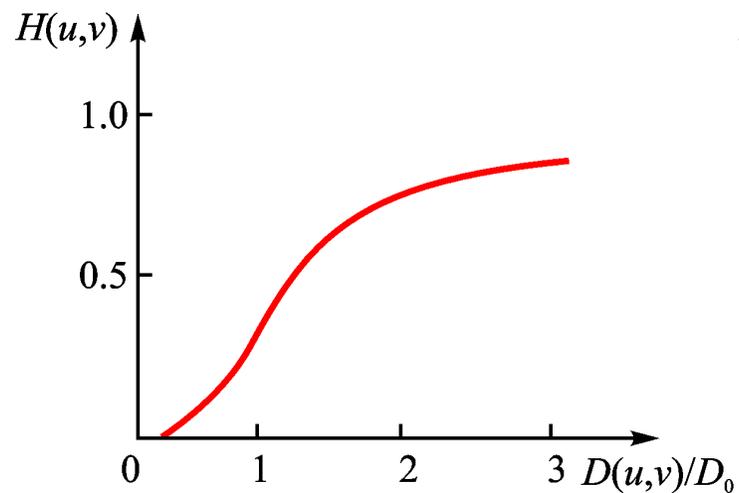
频域高通滤波



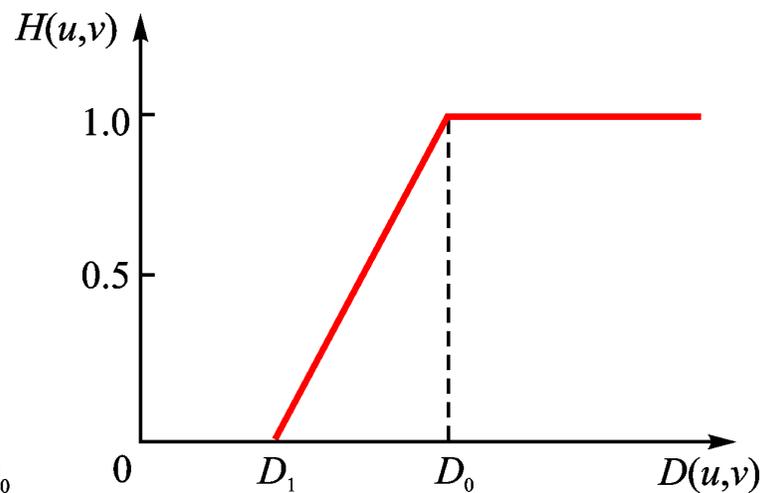
(a) 理想高通滤波器特性曲线



(b) 巴特沃斯高通滤波器特性曲线



(c) 指数型高通滤波器特性曲线



(d) 梯型高通滤波器特性曲线

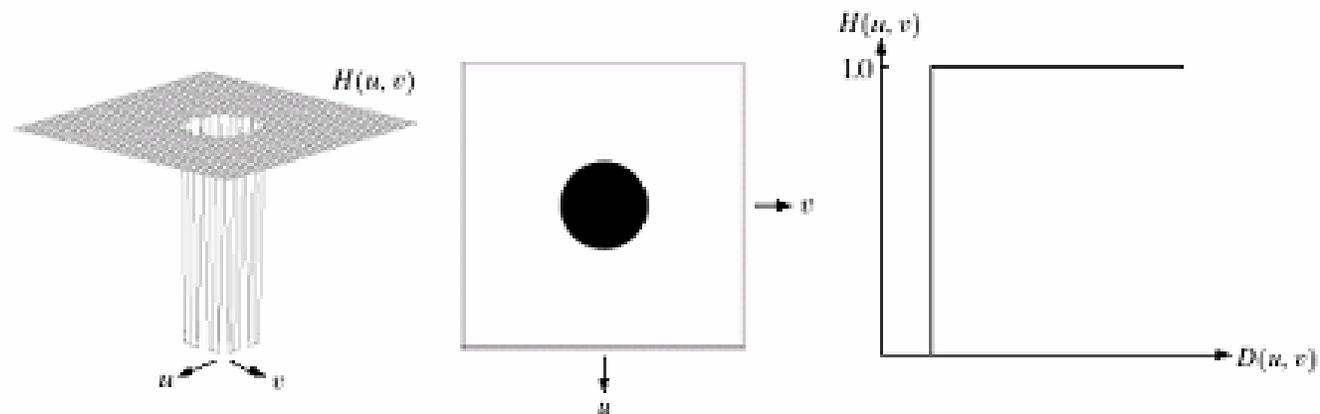
四种频域高通滤波器传递函数 $H(u, v)$ 的剖面图

理想高通滤波器

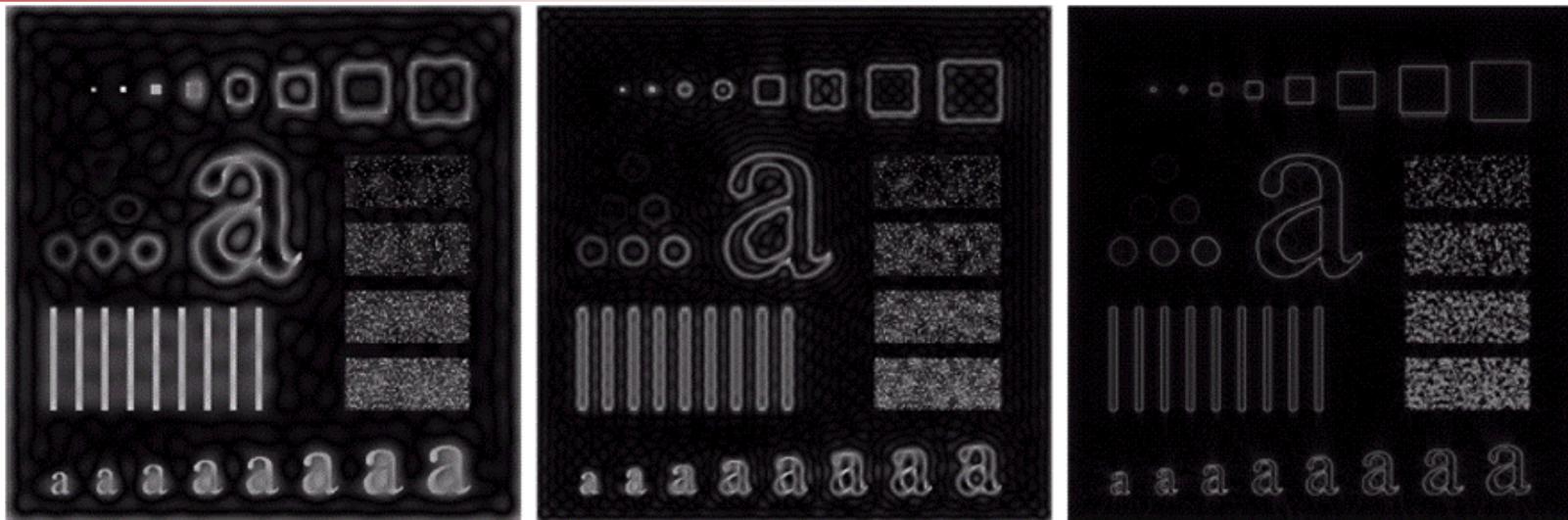
- 滤波器转移函数:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

透视图和剖面图:



理想高通滤波器滤波效果



(a) $D_0 = 15$

(b) $D_0 = 30$

(c) $D_0 = 80$

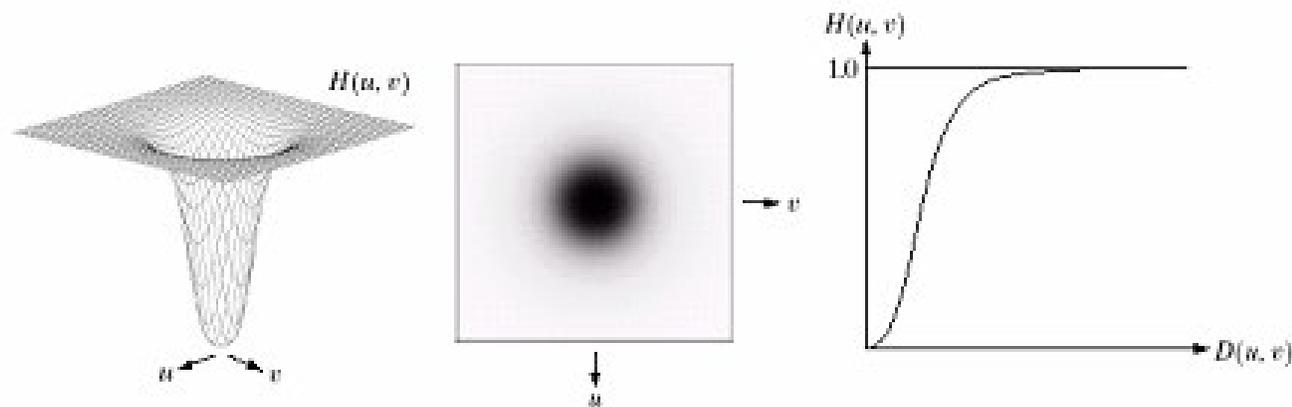
- (a)图振铃现象十分严重，以致产生失真，物体的边界也被加粗了(字母a)，顶部三个圆的边缘不清晰，微小的物体和线条显现出几乎纯粹的白色。
- (b)图情况有所改善，开始看到对微小物体的过滤，对应的空间滤波器比左图小，但是边缘失真仍然很明显。
- (c)图的高通滤波图像边缘更加清晰，失真更小，而且细小的物体也能得到正确地过滤

巴特沃斯高通滤波器

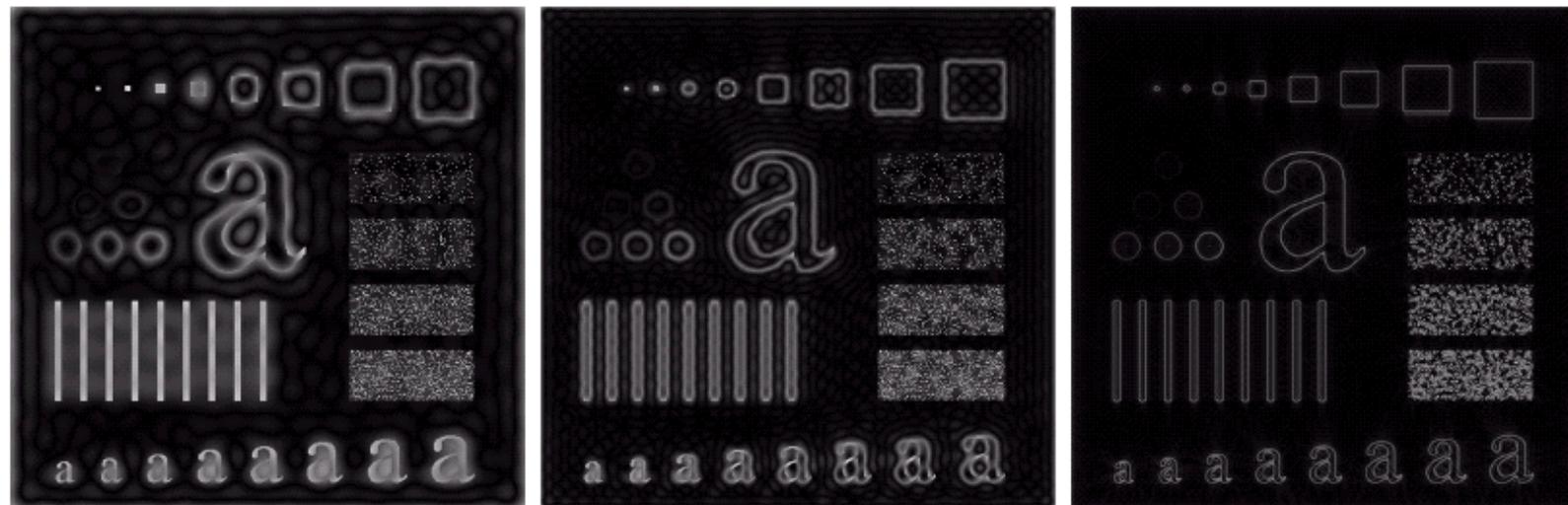
- n 阶高通具有 D_0 截止频率的Butterworth高通滤波器滤波函数定义如下：

$$H(u, v) = 1 / [1 + (D_0 / D(u, v))^{2n}]$$

透视图和剖面图：



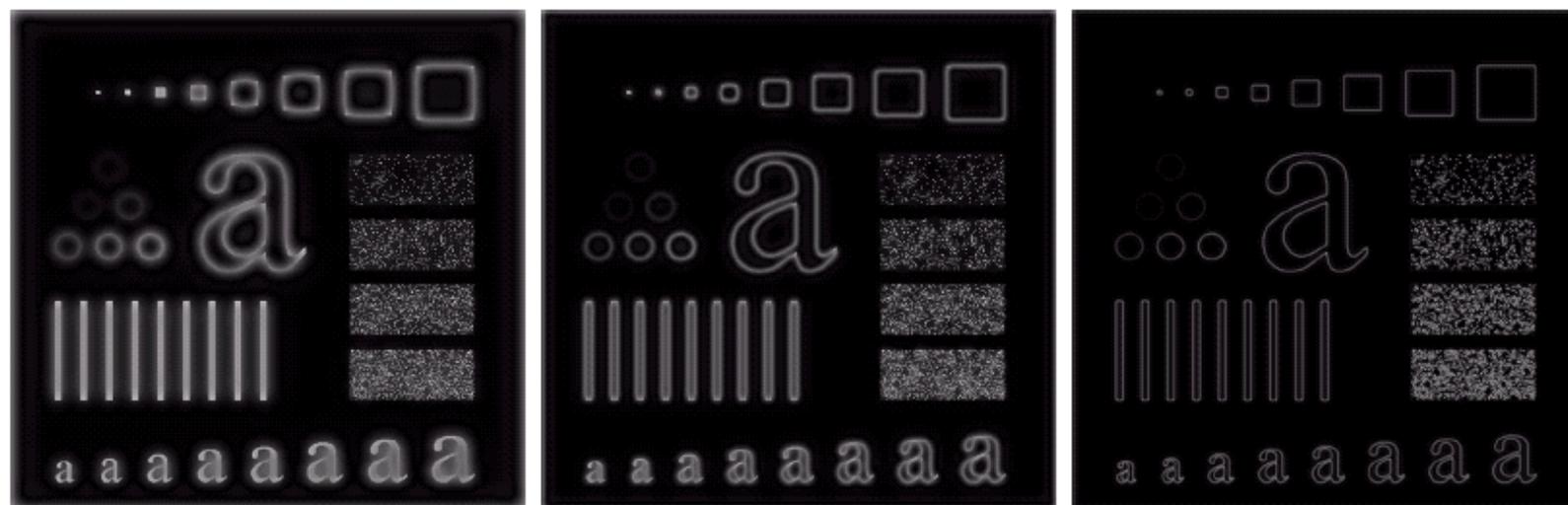
巴特沃斯高通滤波器



(a) $D_0 = 15$

(b) $D_0 = 30$

(c) $D_0 = 80$



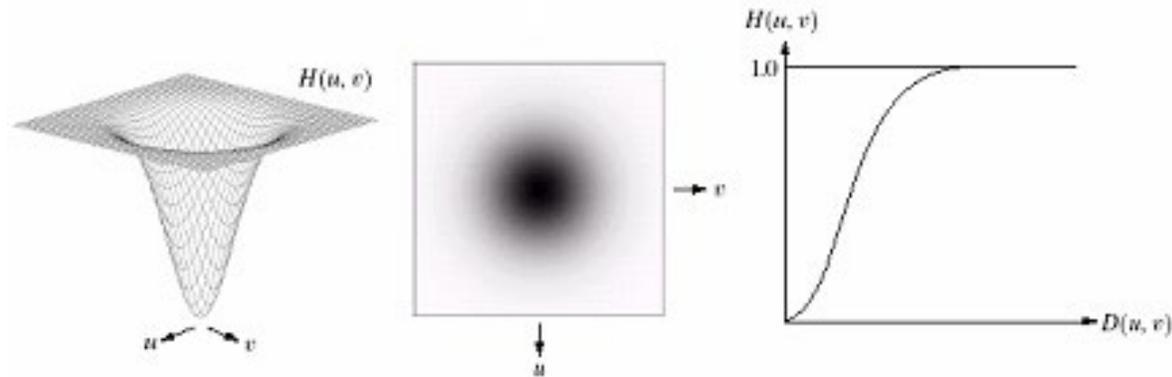
2阶Butterworth滤波器比理想滤波器的平滑效果更好

高斯型高通滤波器

- 具有截止频率为 D_0 的指数高通滤波函数的转移函数定义为：

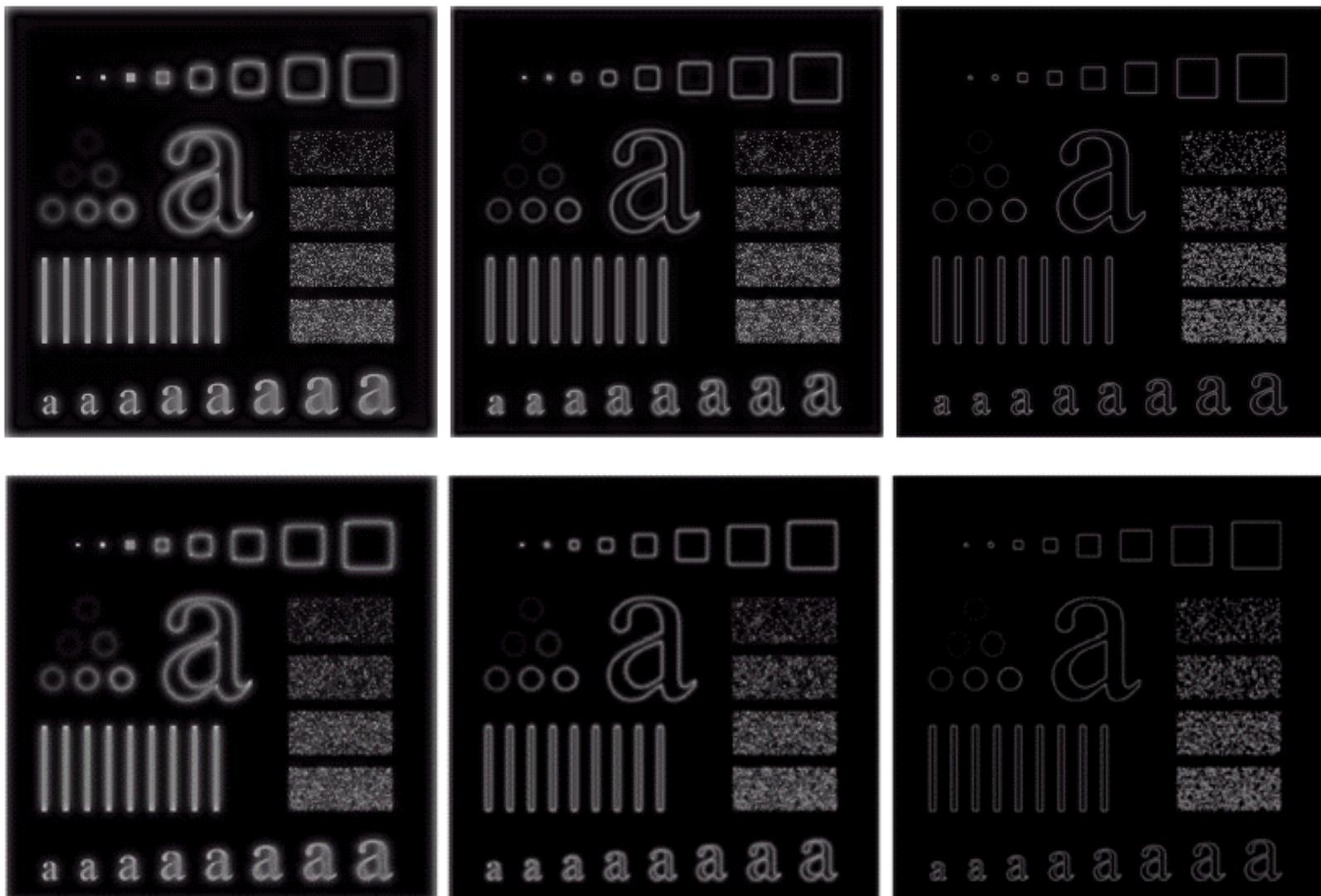
$$H(u, v) = \exp[-(D_0 / D(u, v))^n]$$

透视图和剖面图：



- GHPF比前两种滤波器更平滑，即使对微小物体和细线用GHPF过滤也是较清晰的。高斯高通滤波器的傅里叶反变换也是高斯的，因此没有振铃现象。

高斯型高通滤波器

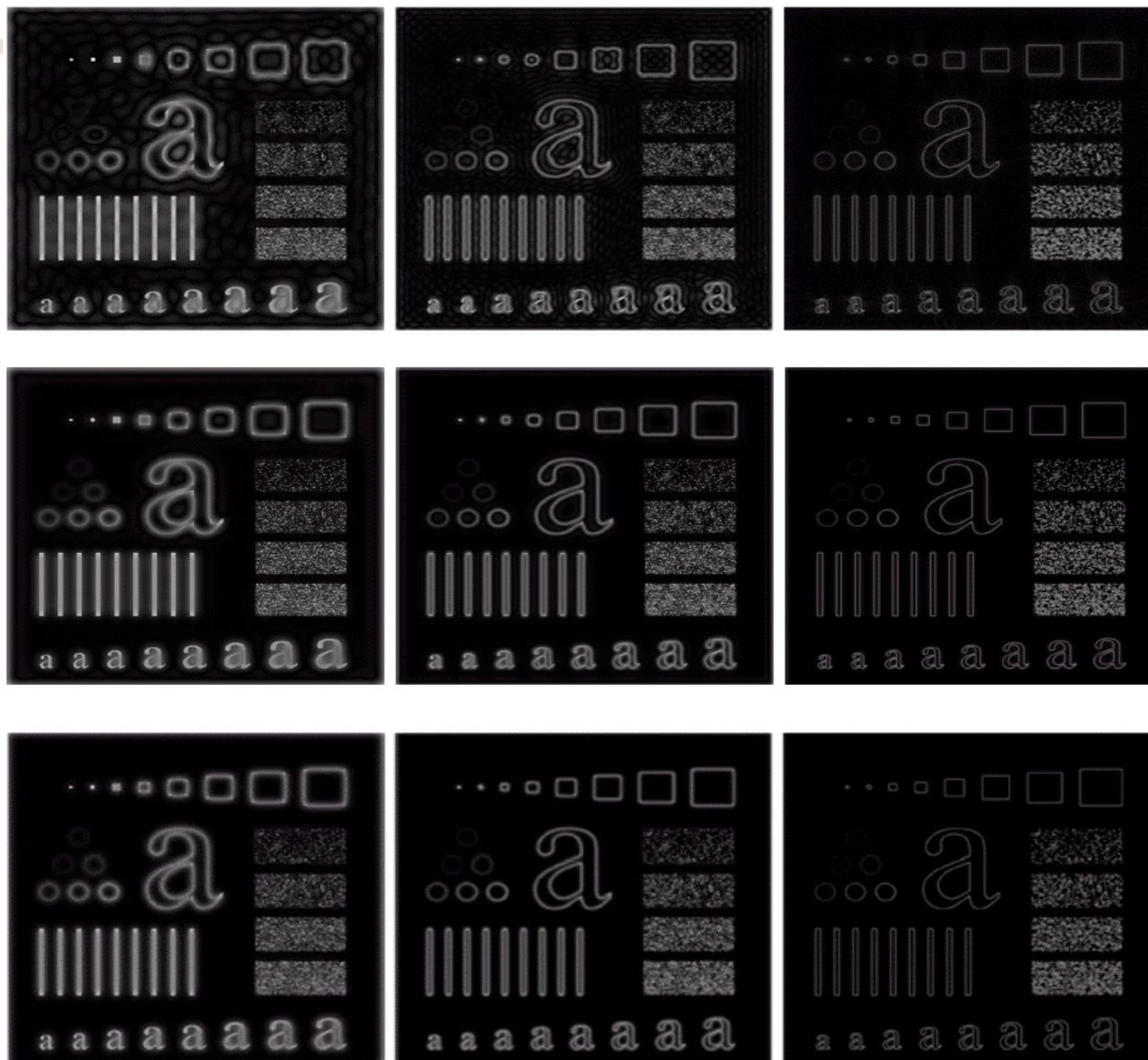


GHPF滤波器比2阶Butterworth滤波器的效果要好

三种高通滤波器效果比较

效果：

GHPF > 2阶BHPF > 1HPF

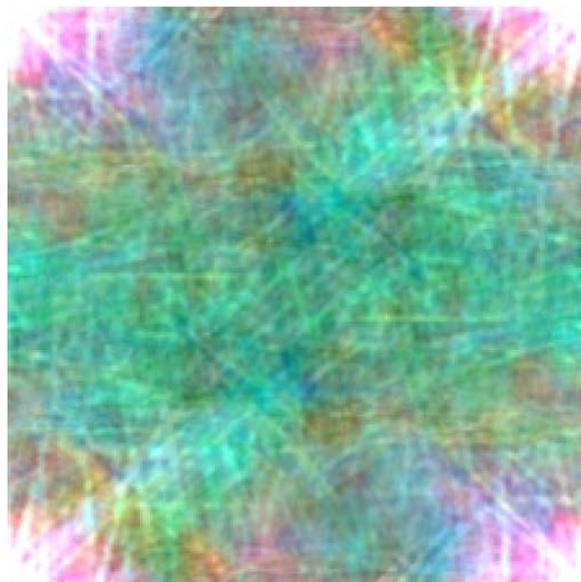


频域的数据增广

- 图像的频域表示



原始图像



幅度谱
(相位置为常数)



相位谱
(幅度置为常数)

利用频域做数据增广

- 通过二维图像的傅里叶变换，能够实现空域和频域的互换

$$\mathcal{F}(x)(u, v) = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{w=0}^{W-1} x(h, w) e^{-j2\pi\left(\frac{h}{H}u + \frac{w}{W}v\right)}$$

- 幅度

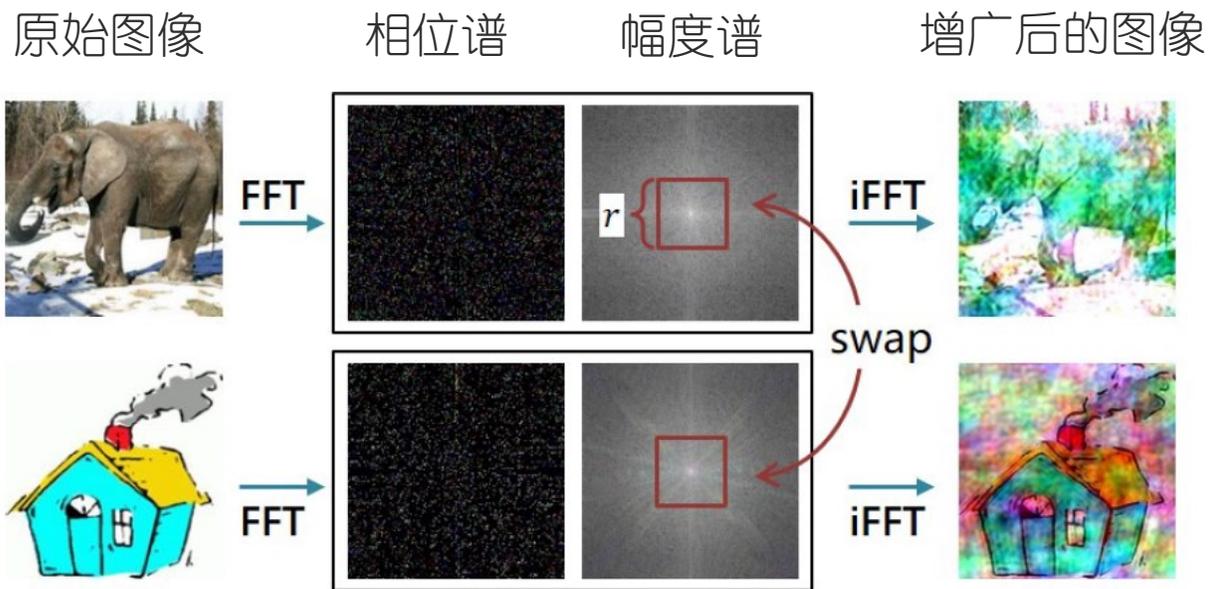
$$\mathcal{A}(x)(u, v) = \left[R^2(x)(u, v) + I^2(x)(u, v) \right]^{1/2}$$

- 相位

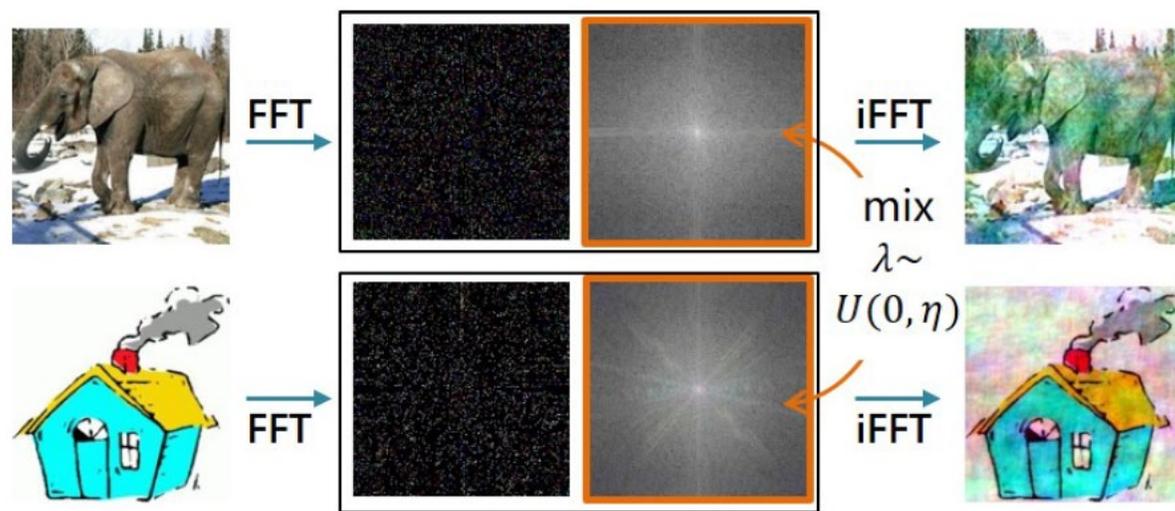
$$\mathcal{P}(x)(u, v) = \arctan \left[\frac{I(x)(u, v)}{R(x)(u, v)} \right]$$

利用频域做数据增广

- 在频域上实现对图像的增广



两幅图像的幅度谱互换



两幅图像的幅度谱混合