

第2章 插值法

张利军

zlj@nju.edu.cn

<https://ai.nju.edu.cn/zlj>





目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值



引言

- 许多实际问题都要用函数 $y = f(x)$ 来表示某种内在规律的数量关系
 - 部分函数是通过实验或观测得到，只能给出函数在一系列点 x_i 的函数值 $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$)
 - 有些函数虽有解析式，但由于计算复杂，通常也造一张函数表，如三角函数表、对数表等
- 为了研究函数变化规律，往往需要求不在表上的函数值
 - 构造一个既能反映函数 $f(x)$ 特性、又便于计算的简单函数 $P(x)$ ，用 $P(x)$ 近似 $f(x)$
 - $P(x_i) = f(x_i)$ ，对于 $i = 0, 1, \dots, n$ 成立

现代机械工业

- 给出零件外形曲线的某些型值点 (x_i, y_i) ($i = 0, 1, \dots, n$)
- 加工时计算零件外形曲线其他点的函数值，即求插值函数的问题





插值法定义

□ **定义2.1** 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 且已知在点 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ 上的值 $y_0, y_1, \dots, y_n$, 若存在一简单函数 $P(x)$, 使得

$$P(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (2.1.1)$$

成立, 就称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数, 点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 称为插值节点, 包含插值节点的区间 $[a, b]$ 称为插值区间, 求 $P(x)$ 的方法称为插值法。

若 $P(x)$ 是次数不超过 n 的代数多项式, 即

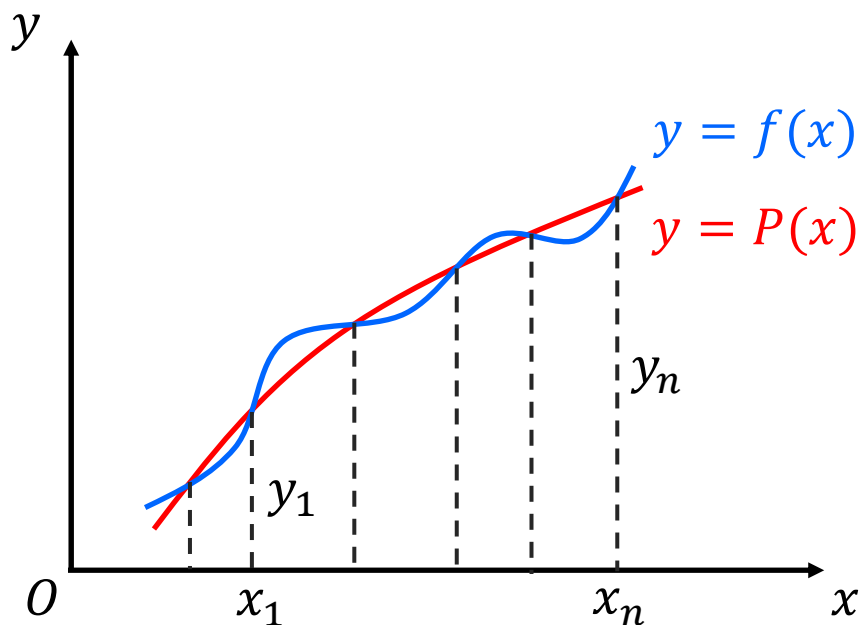
$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad (2.1.2)$$

其中 a_i 为实数, 就称 $P(x)$ 为插值多项式, 相应的插值法称为多项式插值; 若为 $P(x)$ 分段的多项式, 就称之为分段插值; 若为 $P(x)$ 三角多项式, 就称之为三角插值。



插值法的图形表示

- 插值法就是求曲线 $y = P(x)$ ，使其通过给定的 $n + 1$ 个点 (x_i, y_i) ， $i = 0, 1, \dots, n$ ，并用它近似已知曲线 $y = f(x)$





发展历史

- 早在一千多年前，我国科学家在研究历法中就应用了线性插值与二次插值
- 基本理论和结果却是在微积分产生以后才逐步完善的，其应用也日益增多
- 计算机广泛使用以后，由于航空、造船、精密机械加工等实际问题的需要，插值法得到进一步发展



本章内容

□ 如何求出插值函数

- 多项式插值
- 分段插值函数
- 样条插值函数

□ 理论分析

- 插值函数 $P(x)$ 的存在唯一性
- 收敛性
- 误差估计



目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值



插值多项式的存在唯一性

- 设 $P(x)$ 是形如式(2.1.2)的插值多项式, H_n 代表所有次数不超过 n 的多项式集合, $P(x) \in H_n$

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad (2.1.2)$$

- 由 $P(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$), 得到

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n = y_1, \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}, \quad (2.2.1)$$

- 关于 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 的 $n+1$ 元线性方程组

- 插值多项式的唯一性 $\Leftrightarrow$ 方程组解的唯一性



插值多项式唯一

□ 方程组(2.2.1)的系数行列式为

$$V_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \quad (2.2.2)$$

■ 称为Vandermonde（范德蒙）行列式

□ 利用行列式性质可得

$$V_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j)$$

■ $i \neq j$ 时 $x_i \neq x_j$ ，上式所有因子 $x_i - x_j \neq 0$

□ 定理**2.1** 满足式(2.1.1)的插值多项式唯一



线性插值

□ $P(x)$ 可以通过求解方程组(2.2.1)得到

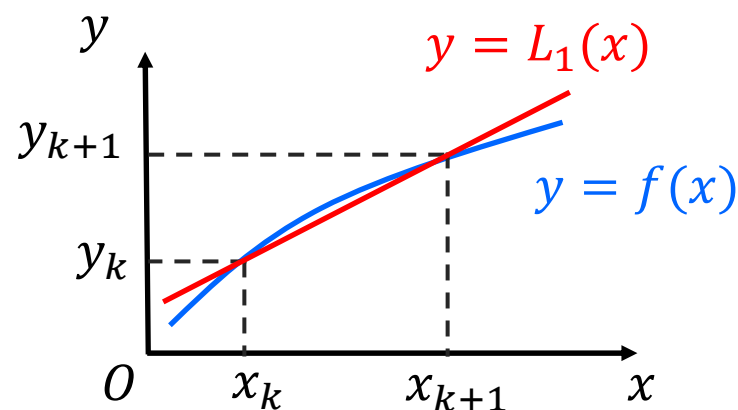
■ 不仅计算复杂，而且难以得到的简单表达式

□ 两点之间插值 ($n = 1$)

■ 已知区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 的端点处的函数值 $y_k = f(x_k)$,
 $y_{k+1} = f(x_{k+1})$, 要求线性插值多项式 $L_1(x)$

$$L_1(x_k) = y_k, \quad L_1(x_{k+1}) = y_{k+1}$$

$y = L_1(x)$ 就是通过
 (x_k, y_k) 和 (x_{k+1}, y_{k+1})
的直线





线性插值解析式

□ 点斜式

$$L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k) \quad (2.2.3)$$

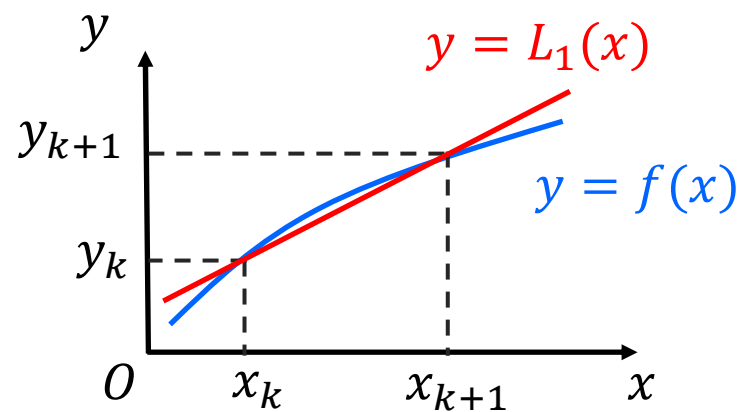
□ 两点式

$$L_1(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1} \quad (2.2.4)$$

■ $L_1(x)$ 是由两个线性函数的线性组合得到的

$$l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, \quad l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$$L_1(x) = y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x) \quad (2.2.5)$$





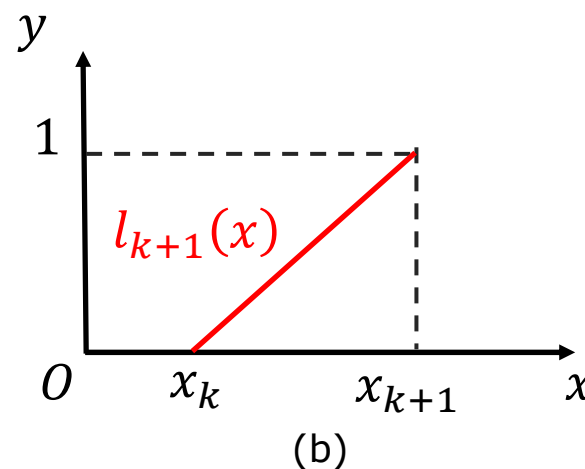
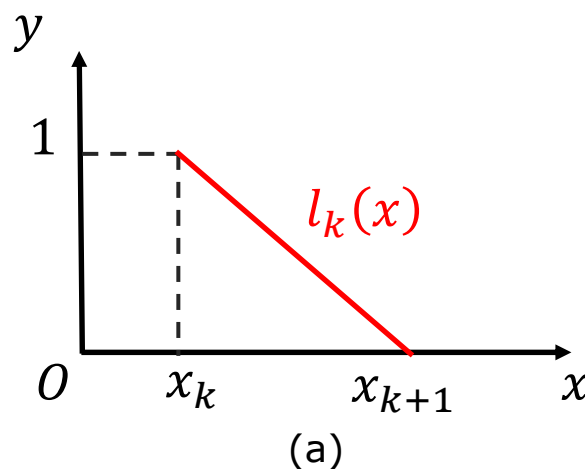
一次插值基函数

□ $l_k(x)$ 及 $l_{k+1}(x)$ 也是线性插值多项式，并且满足

$$l_k(x_k) = 1, \quad l_k(x_{k+1}) = 0$$

$$l_{k+1}(x_k) = 0, \quad l_{k+1}(x_{k+1}) = 1$$

被称为一次插值基函数或线性插值基函数





抛物插值

□ 三个点之间插值 ($n = 2$)

- 插值节点 x_{k-1}, x_k, x_{k+1} , 求二次插值多项式 $L_2(x)$

$$L_2(x_j) = y_j \quad (j = k - 1, k, k + 1)$$

- $y = L_2(x)$ 是通过三点 (x_{k-1}, y_{k-1}) , (x_k, y_k) , (x_{k+1}, y_{k+1}) 的抛物线

- 为了求出 $L_2(x)$ 的表达式, 可采用基函数方法

$$\begin{cases} l_{k-1}(x_{k-1}) = 1, \quad l_{k-1}(x_j) = 0 & (j = k, k + 1) \\ l_k(x_k) = 1, \quad l_k(x_j) = 0 & (j = k - 1, k + 1) \\ l_{k+1}(x_{k+1}) = 1, \quad l_{k+1}(x_j) = 0 & (j = k - 1, k) \end{cases} \quad (2.2.6)$$

- ✓ 基函数 $l_{k-1}(x)$, $l_k(x)$ 及 $l_{k+1}(x)$ 是二次函数



二次插值基函数

□ $l_{k-1}(x)$ 有两个零点 x_k, x_{k+1} , 可表示为

$$l_{k-1}(x) = A(x - x_k)(x - x_{k+1})$$

■ A 为待定系数, 可由条件 $l_{k-1}(x_{k-1}) = 1$ 求出

$$A = \frac{1}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})}$$

■ 因此

$$l_{k-1}(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})}$$

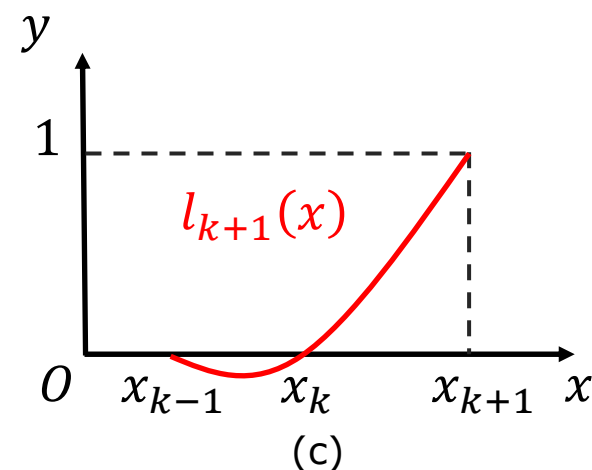
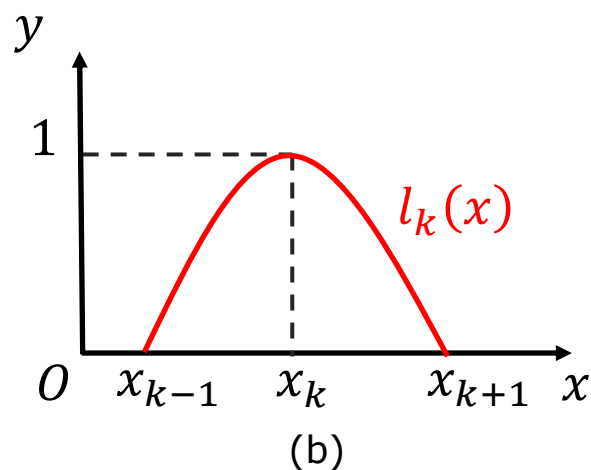
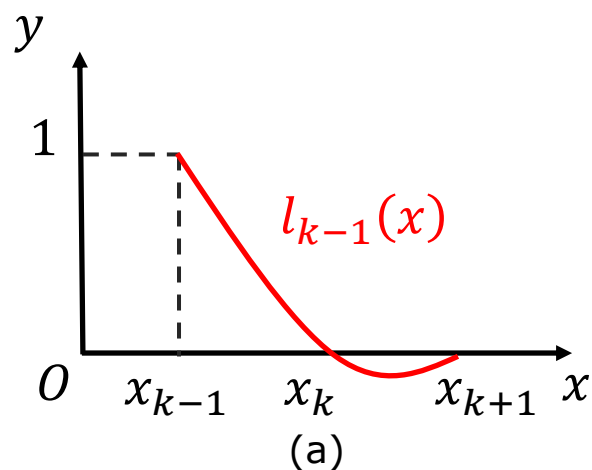
□ 同理可得

$$l_k(x) = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})} \quad l_{k+1}(x) = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)}$$



二次插值基函数（续）

□ 函数 $l_{k-1}(x)$, $l_k(x)$ 及 $l_{k+1}(x)$ 称为二次插值基函数或抛物插值基函数





抛物插值表达式

□ 利用二次插值基函数 $l_{k-1}(x)$, $l_k(x)$ 及 $l_{k+1}(x)$

$$L_2(x) = y_{k-1}l_{k-1}(x) + y_k l_k(x) + y_{k+1}l_{k+1}(x) \quad (2.2.7)$$

■ 显然满足

$$L_2(x_j) = y_j \quad (j = k-1, k, k+1)$$

□ 具体形式

$$\begin{aligned} L_2(x) = & y_{k-1} \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})} + y_k \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})} \\ & + y_{k+1} \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)} \end{aligned}$$



Lagrange插值多项式

- 讨论通过 $n + 1$ 个节点 $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ 的 n 次插值多项式 $L_n(x)$ ，假定其满足

$$L_n(x_j) = y_j \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (2.2.8)$$

- 定义**2.2** 若 n 次多项式 $l_j(x)$ ($j = 0, 1, \dots, n$)在 $n + 1$ 个节点 $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ 上满足

$$l_j(x_k) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (j, k = 0, 1, \dots, n) \quad (2.2.9)$$

就称这 $n + 1$ 个 n 次多项式 $l_j(x)$ ($j = 0, 1, \dots, n$)为节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 上的 n 次插值基函数



Lagrange插值多项式（续）

□ 仿照之前的推导， n 次插值基函数

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

□ Lagrange插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x), \quad (2.2.11)$$

■ 由 $l_k(x)$ 的定义可知

$$L_n(x_j) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x_j) = y_j \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$



Lagrange插值多项式（续）

□ 若引入记号

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \quad (2.2.12)$$

■ 容易求得

$$\omega'_{n+1}(x_k) = (x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)$$

■ 式(2.2.11)可改写成

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k) \omega'_{n+1}(x_k)} \quad (2.2.13)$$

□ n 次插值多项式 $L_n(x)$ 通常是次数为 n 的多项式，特殊情况次数可能小于 n

■ 三点共线，则 $y = L_2(x)$ 就是一条直线



插值余项 $L_n(x_j) = y_j \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (2.2.8)$

□ 用 $L_n(x)$ 近似 $f(x)$ ，截断误差也称插值余项

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

□ 定理**2.2** 设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在，节点 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ ， $L_n(x)$ 是满足条件式(2.2.8)的插值多项式，则对于任何 $x \in [a, b]$ ，插值余项

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad (2.2.14)$$

■ 这里 $\xi \in (a, b)$ 且依赖于 x



定理2.2（证明）

□ $R_n(x)$ 在节点 x_k ($k = 0, 1, \dots, n$)上为零，即

$$R_n(x) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

□ 因此可以写成如下形式

$$R_n(x) = K(x)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) = K(x)\omega_{n+1}(x)$$

■ $K(x)$ 是与 x 有关的待定函数

□ 把 x 看成 $[a, b]$ 上的一个固定点，定义函数

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)(t - x_0)(t - x_1) \cdots (t - x_n)$$

■ $\varphi(t)$ 在点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 及 x 处均为零

■ $\varphi(t)$ 在 $[a, b]$ 上有 $n + 2$ 个零点



定理2.2（证明）

□ **Rolle**定理 如果函数 $f(x)$ 满足如下条件:

1. $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
2. $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导;
3. $f(x)$ 在区间端点的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$,

那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ ($a < \xi < b$), 使得函数 $f(x)$ 在该点的导数等于零, 即 $f'(\xi) = 0$

□ 基于该定理, $\varphi'(t)$ 在 $\varphi(t)$ 的两个零点间至少有一个零点, 故 $\varphi'(t)$ 在 $[a, b]$ 上至少有 $n + 1$ 个零点

□ 对 $\varphi'(t)$ 再应用**Rolle**定理, 可知 $\varphi''(t)$ 在 $[a, b]$ 上至少有 n 个零点



定理2.2（证明）

□ 依此类推， $\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a, b) 上至少有1个零点，记为 $\xi \in (a, b)$ ，使 $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)(t - x_0)(t - x_1) \cdots (t - x_n)$$

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!K(x) = 0$$

□ 得到

$$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

□ 因此

$$R_n(x) = K(x)\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

■ $\xi \in (a, b)$ 且依赖于 x



讨论

- 余项表达式只有在 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能应用, ξ 在 (a, b) 内的具体位置通常未知
- 如果已知 $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$, 那么

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)| \quad (2.2.16)$$

- $n = 1$, 线性插值余项为

$$R_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi) \omega_2(x) = \frac{1}{2} f''(\xi) (x - x_0)(x - x_1), \quad \xi \in [x_0, x_1]$$

- $n = 2$, 抛物插值余项为

$$R_2(x) = \frac{1}{6} f'''(\xi) (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \quad \xi \in [x_0, x_2]$$



例2.1

$$L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k) \quad (2.2.3)$$

□ 已知 $\sin 0.32 = 0.314567$, $\sin 0.34 = 0.333487$, $\sin 0.36 = 0.352274$, 用线性插值及抛物插值求 $\sin 0.3367$, 并估计截断误差

■ 取 $x_0 = 0.32$, $x_1 = 0.34$, $x_2 = 0.36$, $y_0 = 0.314567$, $y_1 = 0.333487$, $y_2 = 0.352274$

■ 用线性插值计算, 取 $x_0 = 0.32$ 及 $x_1 = 0.34$, 由式 (2.2.3) 得

$$\begin{aligned} \sin 0.3367 &\approx L_1(0.3367) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (0.3367 - x_0) \\ &= 0.314567 + \frac{0.01892}{0.02} \times 0.0167 = 0.330365 \end{aligned}$$



例2.1 (续)

- 上式的截断误差可由线性插值余项得到

$$|R_1(x)| \leq \frac{M_2}{2} |(x - x_0)(x - x_1)|$$

其中

$$M_2 = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |f''(x)| = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |\sin x| = \sin x_1 \leq 0.3335$$

$$f(x) = \sin x, f''(x) = -\sin x$$

于是

$$\begin{aligned} |R_1(0.3367)| &= |\sin 0.3367 - L_1(0.3367)| \\ &\leq \frac{0.3335}{2} \times 0.0167 \times 0.0033 \leq 0.92 \times 10^{-5} \end{aligned}$$



一般来说，外推比
内插效果差

例2.1（续）

■ 还用线性插值，但取 $x_1 = 0.34$ 及 $x_2 = 0.36$

$$\sin 0.3367 \approx \tilde{L}_1(0.3367) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (0.3367 - x_1)$$
$$= 0.333487 + \frac{0.018787}{0.02} \times (-0.0033) = 0.330387$$

■ 截断误差为 $|\tilde{R}_1(x)| = \frac{M_2}{2} |(x - x_1)(x - x_2)|$,

其中 $M_2 = \max_{x_0 \leq x \leq x_2} |f''(x)| \leq 0.3523$

因此 $|\tilde{R}_1(0.3367)| = |\sin 0.3367 - \tilde{L}_1(0.3367)|$

$$\leq \frac{0.3523}{2} \times 0.0033 \times 0.0233 \leq 1.36 \times 10^{-5}$$



例2.1 (续)

$$L_2(x) = y_{k-1}l_{k-1}(x) + y_k l_k(x) + y_{k+1}l_{k+1}(x) \quad (2.2.7)$$

■ 用抛物插值计算 $\sin 0.3367$ ，由式(2.2.7)得

$$\begin{aligned} \sin 0.3367 &\approx y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ &\quad + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= L_2(0.3367) \\ &= 0.314567 \times \frac{0.7689 \times 10^{-4}}{0.0008} + 0.333487 \times \frac{3.89 \times 10^{-4}}{0.0004} \\ &\quad + 0.352274 \times \frac{-0.5511 \times 10^{-4}}{0.0008} \\ &= 0.330374 \end{aligned}$$

✓ 这个结果与六位有效数字的正弦函数表完全一样



例2.1（续）

- 上式的截断误差可由抛物插值余项得到

$$|R_2(x)| \leq \frac{M_3}{6} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|$$

$$\text{其中 } M_3 = \max_{x_0 \leq x \leq x_2} |f'''(x)| = \cos x_0 \leq 0.828$$

$$\text{于是有 } |R_2(0.3367)| = |\sin 0.3367 - L_2(0.3367)|$$

$$\leq \frac{0.828}{6} \times 0.0167 \times 0.0033 \times 0.0233$$

$$\leq 0.178 \times 10^{-7}$$

高次插值通常优于低次插值



目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值



Lagrange插值的缺点

□ Lagrange插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x), \quad (2.2.11)$$

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

- 简单直观、容易实现
- 无法增量计算：如增加插值节点，那么原来算出的数据均不能利用，必须重新计算

□ 逐次线性插值

- 增量式计算，重用之前的结果

$$L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k) \quad (2.2.3)$$



例2.1 (续)

□ 用抛物插值计算 $\sin 0.3367$

$$\begin{aligned} L_2(0.3367) &= 0.314567 \times \frac{0.7689 \times 10^{-4}}{0.0008} + 0.333487 \times \frac{3.89 \times 10^{-4}}{0.0004} \\ &\quad + 0.352274 \times \frac{-0.5511 \times 10^{-4}}{0.0008} = 0.330374 \end{aligned}$$

□ 由 $L_1(0.3367)$ 和 $\tilde{L}_1(0.3367)$ 按照类似线性插值的方法计算

$$\begin{aligned} L_2(0.3367) &= L_1(0.3367) + \frac{\tilde{L}_1(0.3367) - L_1(0.3367)}{0.36 - 0.32} \times (0.3367 - 0.32) \\ &= 0.330365 + \frac{0.000022}{0.04} \times 0.0167 = 0.330374 \end{aligned}$$



Aitken (艾特肯) 逐次线性插值公式

- 令 $I_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x)$ 表示函数 $f(x)$ 关于节点 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ 的 $n - 1$ 次插值多项式
 - $i_1, i_2, \dots, i_n$ 均为非负整数
- $I_{i_k}(x)$ 是零次多项式, 记 $I_{i_k}(x) = f(x_{i_k})$
- 两个 k 次插值多项式可通过线性插值得到 $k + 1$ 次插值多项式

$$I_{0,1,\dots,k,l}(x) = I_{0,1,\dots,k}(x) + \frac{I_{0,1,\dots,k-1,l}(x) - I_{0,1,\dots,k}(x)}{x_l - x_k} (x - x_k) \quad (2.3.1)$$

- $I_{0,1,\dots,k}(x)$ 和 $I_{0,1,\dots,k-1,l}(x)$ 有 1 个下标不同



Aitken逐次线性插值公式（续）

□ (2.3.1)是关于节点 $x_0, \dots, x_k, x_l$ 的插值多项式

$$I_{0,1,\dots,k,l}(x) = I_{0,1,\dots,k}(x) + \frac{I_{0,1,\dots,k-1,l}(x) - I_{0,1,\dots,k}(x)}{x_l - x_k} (x - x_k) \quad (2.3.1)$$

■ 对于 $i = 0, 1, \dots, k - 1$,

$$I_{0,1,\dots,k-1,l}(x_i) - I_{0,1,\dots,k}(x_i) = 0$$

$$\Rightarrow I_{0,1,\dots,k,l}(x_i) = I_{0,1,\dots,k}(x_i) = f(x_i)$$

■ 当 $x = x_k$ 时, $x - x_k = 0$, 因此

$$I_{0,1,\dots,k,l}(x_k) = I_{0,1,\dots,k}(x_k) = f(x_k)$$



Aitken逐次线性插值公式（续）

□ (2.3.1)是关于节点 $x_0, \dots, x_k, x_l$ 的插值多项式

$$I_{0,1,\dots,k,l}(x) = I_{0,1,\dots,k}(x) + \frac{I_{0,1,\dots,k-1,l}(x) - I_{0,1,\dots,k}(x)}{x_l - x_k} (x - x_k) \quad (2.3.1)$$

■ 当 $x = x_l$ 时,

$$\begin{aligned} I_{0,1,\dots,k,l}(x_l) &= I_{0,1,\dots,k}(x_l) + \frac{f(x_l) - I_{0,1,\dots,k}(x_l)}{x_l - x_k} (x_l - x_k) \\ &= f(x_l) \end{aligned}$$

□ 当 $k = 0$ 时为线性插值；当 $k = 1$ 时

$$I_{0,1,l}(x) = I_{0,1}(x) + \frac{I_{0,l}(x) - I_{0,1}(x)}{x_l - x_1} (x - x_1)$$



计算过程

□ 由 $k = 0$ 到 $k = n - 1$ 逐次求得所需的插值多项式

x_0	$f(x_0) = I_0$				
x_1	$f(x_1) = I_1$	$I_{0,1}$			
x_2	$f(x_2) = I_2$	$I_{0,2}$	$I_{0,1,2}$		
x_3	$f(x_3) = I_3$	$I_{0,3}$	$I_{0,1,3}$	$I_{0,1,2,3}$	
x_4	$f(x_4) = I_4$	$I_{0,4}$	$I_{0,1,4}$	$I_{0,1,2,4}$	$I_{0,1,2,3,4}$

- 每增加一个节点就计算一行
- 斜线上是1次到4次插值多项式的值
- 如精度不满足要求，再增加节点，前面计算有效



Neville（内维尔）算法

□ Aitken逐次线性插值公式

$$I_{0,1,\dots,k,l}(x) = I_{0,1,\dots,k}(x) + \frac{I_{0,1,\dots,k-1,l}(x) - I_{0,1,\dots,k}(x)}{x_l - x_k} (x - x_k) \quad (2.3.1)$$

■ 由 $I_{0,1,\dots,k}(x)$ 和 $I_{0,1,\dots,k-1,l}(x)$ 组合得到

□ 等价形式

$$I_{0,1,\dots,k+1}(x) = I_{0,1,\dots,k}(x) + \frac{I_{1,2,\dots,k+1}(x) - I_{0,1,\dots,k}(x)}{x_{k+1} - x_0} (x - x_0) \quad (2.3.2)$$

■ 由 $I_{0,1,\dots,k}(x)$ 和 $I_{1,2,\dots,k+1}(x)$ 组合得到，下标连续

■ 与2.3节开始的例子一致



计算过程

□ 由 $k = 0$ 到 $k = n - 1$ 逐次求得所需的插值多项式

x_0	$f(x_0) = I_0$				
x_1	$f(x_1) = I_1$	$I_{0,1}$			
x_2	$f(x_2) = I_2$	$I_{1,2}$	$I_{0,1,2}$		
x_3	$f(x_3) = I_3$	$I_{2,3}$	$I_{1,2,3}$	$I_{0,1,2,3}$	
x_4	$f(x_4) = I_4$	$I_{3,4}$	$I_{2,3,4}$	$I_{1,2,3,4}$	$I_{0,1,2,3,4}$

- 每增加一个节点就计算一行
- 斜线上是1次到4次插值多项式的值
- 如精度不满足要求，再增加节点，前面计算有效



例2.2

□ 已知 $f(x) = \operatorname{sh} x$ 的值在下表左端，用Aitken插值求 $\operatorname{sh} 0.23$ 的近似值

x_i	$f(x_i)$	插值结果
0.00	0.0000	
0.20	0.20134	
0.30	0.30452	
0.50	0.52110	
0.60	0.63665	



例2.2 (续)

$$\blacksquare I_{0,1} = I_0 + \frac{I_1 - I_0}{x_1 - x_0} (0.23 - x_0) = 0.231541$$

$$\blacksquare I_{0,2} = I_0 + \frac{I_2 - I_0}{x_2 - x_0} (0.23 - x_0) = 0.233465$$

$$I_{0,1,2} = I_{0,1} + \frac{I_{0,2} - I_{0,1}}{x_2 - x_1} (0.23 - x_1) = 0.232118$$

$$\blacksquare I_{0,3} = I_0 + \frac{I_3 - I_0}{x_3 - x_0} (0.23 - x_0) = 0.239706$$

$$I_{0,1,3} = I_{0,1} + \frac{I_{0,3} - I_{0,1}}{x_3 - x_1} (0.23 - x_1) = 0.232358$$

$$I_{0,1,2,3} = I_{0,1,2} + \frac{I_{0,1,3} - I_{0,1,2}}{x_3 - x_2} (0.23 - x_2) = 0.232034$$



例2.2（续）

□ 已知 $f(x) = \operatorname{sh} x$ 的值在下表左端，用Aitken插值求 $\operatorname{sh} 0.23$ 的近似值

x_i	$f(x_i)$	插值结果
0.00	0.0000	
0.20	0.20134	0.231541
0.30	0.30452	0.233465 0.232118
0.50	0.52110	0.239706 0.232358 0.232034
0.60	0.63665	



例2.2 (续)

$$\blacksquare I_{0,4} = I_0 + \frac{I_4 - I_0}{x_4 - x_0} (0.23 - x_0) = 0.244049$$

$$I_{0,1,4} = I_{0,1} + \frac{I_{0,4} - I_{0,1}}{x_4 - x_1} (0.23 - x_1) = 0.232479$$

$$I_{0,1,2,4} = I_{0,1,2} + \frac{I_{0,1,4} - I_{0,1,2}}{x_4 - x_2} (0.23 - x_2) =$$

0.232024

$$I_{0,1,2,3,4} = I_{0,1,2,3} + \frac{I_{0,1,2,4} - I_{0,1,2,3}}{x_4 - x_3} (0.23 - x_3) =$$

0.232024



例2.2（续）

□ 已知 $f(x) = \operatorname{sh} x$ 的值在下表左端，用Aitken插值求 $\operatorname{sh} 0.23$ 的近似值

x_i	$f(x_i)$	插值结果			
0.00	0.0000				
0.20	0.20134	0.231541			
0.30	0.30452	0.233465	0.232118		
0.50	0.52110	0.239706	0.232358	0.232034	
0.60	0.63665	0.244049	0.232479	0.232024	0.232024

■ 3次插值的两个结果相同，故可不用计算4次插值



目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值



基于两点式方程的插值多项式

□ 直线两点式方程

$$L_1(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1} \quad (2.2.4)$$

□ Lagrange插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x), \quad (2.2.11)$$

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

■ 是对直线两点式方程的推广



基于点斜式方程的插值多项式

□ 直线点斜式方程

$$P_1(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

□ 推广到 $n + 1$ 个节点 $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (2.4.1)$$

■ $a_0, a_1, \dots, a_n$ 为待定系数

■ 由插值条件 $P_n(x_j) = f_j$ ($j = 0, 1, \dots, n$) 确定



基于点斜式方程的插值多项式（续）

- 当 $x = x_0$ 时, $P_n(x_0) = a_0 = f_0$
- 当 $x = x_1$ 时, $P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_1$,
推得

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

- 当 $x = x_2$ 时, $P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2$, 推得

$$a_2 = \frac{\frac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

- 依此类推, 可以得到 $a_0, a_1, \dots, a_n$



差商

□ 定义2.3 称

$$f[x_0, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$$

为函数 $f(x)$ 关于点 x_0, x_k 的一阶差商，称

$$f[x_0, x_1, x_k] = \frac{f[x_0, x_k] - f[x_0, x_1]}{x_k - x_1}$$

为函数 $f(x)$ 关于点 x_0, x_1, x_k 的二阶差商。
一般地，称

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} \quad (2.4.2)$$

为函数 $f(x)$ 的 k 阶差商



对比Aitken算法

□ 函数 $f(x)$ 的 k 阶差商

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} \quad (2.4.2)$$

□ Aitken逐次线性插值公式

$$I_{0,1,\dots,k,l}(x) = I_{0,1,\dots,k}(x) + \frac{I_{0,1,\dots,k-1,l}(x) - I_{0,1,\dots,k}(x)}{x_l - x_k} (x - x_k) \quad (2.3.1)$$

$$I_{0,1,\dots,k}(x) = I_{0,1,\dots,k-1}(x) + \frac{I_{0,1,\dots,k-2,k}(x) - I_{0,1,\dots,k-1}(x)}{x_k - x_{k-1}} (x - x_{k-1})$$

□ 都基于点斜式方程，有相似性



差商的性质

- ① k 阶差商可表示为函数值 $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_k)$ 的线性组合

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_k)} \quad (2.4.3)$$

- 可用数学归纳法证明
- 表明差商与节点排列顺序无关, 称为差商的对称性

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_k] &= f[x_1, x_0, x_2, \dots, x_k] = \cdots \\ &= f[x_1, x_2, \dots, x_k, x_0] \end{aligned}$$



差商的性质（续）

② 由性质①及(2.4.2)

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} \quad (2.4.2)$$

■ 上式与Aitken算法类似

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad (2.4.4)$$

■ 上式与Neville算法类似

$$I_{0,1,\dots,k+1}(x) = I_{0,1,\dots,k}(x) + \frac{I_{1,2,\dots,k+1}(x) - I_{0,1,\dots,k}(x)}{x_{k+1} - x_0} (x - x_0) \quad (2.3.2)$$



差商的性质（续）

- ③ 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在 n 阶导数，且节点 $x_0, x_1, \dots, x_k \in [a, b]$ ，则 n 阶差商与导数关系为

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a, b] \quad (2.4.5)$$

- 可直接用Rolle定理证明
- 利用定理**2.2**、公式(2.4.7)
 - ✓ 用 $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ 预测 x_n 的误差



差商计算

□ 差商计算可列差商表

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	<u>$f(x_0)$</u>				
x_1	$f(x_1)$	<u>$f[x_0, x_1]$</u>			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	<u>$f[x_0, x_1, x_2]$</u>		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	<u>$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$</u>	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	<u>$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$</u>
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



Newton插值公式

□ 一阶差商
$$f[x_0, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$$

■ 把 x 看成 $[a, b]$ 上一点, 可得

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$$

□ 二阶差商
$$f[x_0, x_1, x_k] = \frac{f[x_0, x_k] - f[x_0, x_1]}{x_k - x_1}$$

■ 可得

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$

□ 以此类推
$$\vdots$$

$$f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n] + f[x, x_0, \dots, x_n](x - x_n)$$



Newton插值公式（续）

□ 将后一式代入前一式，可得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &\quad + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) + f[x, x_0, \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x) \\ &= N_n(x) + R_n(x) \end{aligned}$$

■ 其中

$$\begin{aligned} N_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &\quad + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x, x_0, \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x) \quad (2.4.7)$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \quad (2.2.12)$$



Newton插值公式（续）

□ 式(2.4.6)确定的多项式 $N_n(x)$ 显然满足插值条件，且次数不超过 n

■ 根据 $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ ，知

$$R_n(x_i) = f[x, x_0, \dots, x_n] \omega_{n+1}(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

■ 根据 $N_n(x) = f(x) - R_n(x)$ ，知

$$N_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

□ $N_n(x)$ 就是形如(2.4.1)的多项式

$$\begin{aligned} P_n(x) = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ & + a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

$$a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k], \quad k = 0, 1, \dots, n$$



Newton插值公式（续）

□ $N_n(x)$ 被称为Newton差商插值多项式

- 系数 a_k 就是差商表中加横线的各阶差商
- 比Lagrange插值节省计算量，便于程序设计

□ 插值余项

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x, x_0, \dots, x_n] \omega_{n+1}(x) \quad (2.4.7)$$

□ 插值多项式唯一，因此(2.4.7)等价(2.2.14)

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad (2.2.14)$$



Newton插值公式（续）

□ 事实上

$$\left. \begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a, b] & (2.4.5) \\ R_n(x) = f(x) - N_n(x) &= f[x, x_0, \dots, x_n] \omega_{n+1}(x) & (2.4.7) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad (2.2.14)$$

□ 式(2.4.7)更具有一般性

■ f 由离散点给出或 f 不存在时的情形均适用



例2.3

□ 给出 $f(x)$ 的函数表，求4次Newton插值多项式，并由此计算 $f(0.596)$ 的近似值

x_k	$f(x_k)$
0.40	<u>0.41075</u>
0.55	0.57815
0.65	0.69675
0.80	0.88811
0.90	1.02652
1.05	1.25382



例2.3（续）

■ 首先根据给定函数表计算差商表

■ 一阶差商

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0.57815 - 0.41075}{0.55 - 0.40} = 1.11600$$

$$f[x_1, x_2] = 1.18600, \quad f[x_2, x_3] = 1.27573$$

$$f[x_3, x_4] = 1.38410, \quad f[x_4, x_5] = 1.51533$$

■ 二阶差商

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = 0.28000$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = 0.35893, \quad f[x_2, x_3, x_4] = 0.43348$$

$$f[x_3, x_4, x_5] = 0.52493$$



例2.3（续）

■ 首先根据给定函数表计算差商表

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商
0.40	<u>0.41075</u>		
0.55	0.57815	<u>1.11600</u>	
0.65	0.69675	1.18600	<u>0.28000</u>
0.80	0.88811	1.27573	0.35893
0.90	1.02652	1.38410	0.43348
1.05	1.25382	1.51533	0.52493



例2.3（续）

■ 三阶差商

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = 0.19733$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = 0.21300, \quad f[x_2, x_3, x_4, x_5] = 0.22863$$

■ 四阶差商

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0} = 0.03134$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = 0.03126$$

■ 五阶差商

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] - f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_0} \\ &= -0.00012 \end{aligned}$$



例2.3（续）

■ 最终差商表为

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商	五阶差商
0.40	<u>0.41075</u>					
0.55	0.57815	<u>1.11600</u>				
0.65	0.69675	1.18600	<u>0.28000</u>			
0.80	0.88811	1.27573	0.35893	<u>0.19733</u>		
0.90	1.02652	1.38410	0.43348	0.21300	<u>0.03134</u>	
1.05	1.25382	1.51533	0.52493	0.22863	0.03126	<u>-0.00012</u>



例2.3（续）

- 四阶差商接近常数，故取4次插值多项式 $N_4(x)$ 作为近似即可，根据式(2.4.6)

$$\begin{aligned} N_4(x) = & 0.41075 + 1.116(x - 0.4) + 0.28(x - 0.4)(x - 0.55) \\ & + 0.19733(x - 0.4)(x - 0.55)(x - 0.65) \\ & + 0.03134(x - 0.4)(x - 0.55)(x - 0.65)(x - 0.8) \end{aligned}$$

- 因此 $f(0.596) \approx N_4(0.596) = 0.63195$

- 根据式(2.4.7)，截断误差

$$|R_4(x)| = f[x, x_0, \dots, x_4] \omega_5(x), \quad x = 0.596$$

$$\approx |f[x_0, x_1, \dots, x_5] \omega_5(0.596)| \leq 3.63 \times 10^{-9}$$



目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值



等距节点情形

□ 等距节点的情形

- 插值公式可进一步简化

□ 设定

- 假设函数 $y = f(x)$ 在等距节点

$$x_k = x_0 + kh \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

上的值 $f_k = f(x_k)$ 为已知

- 这里 h 为常数, 称为步长



差分

□ 定义2.4 偏差

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k \quad (2.5.1)$$

$$\nabla f_k = f_k - f_{k-1} \quad (2.5.2)$$

$$\delta f_k = f(x_k + h/2) - f(x_k - h/2) = f_{k+\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2}} \quad (2.5.3)$$

分别称为 $f(x)$ 在 x_k 处以 h 为步长的向前差分、向后差分及中心差分。符号 Δ , ∇ , δ 分别称为向前差分算子、向后差分算子及中心差分算子。

□ 一阶差分



$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k \quad (2.5.1)$$

差分（续）

□ 利用一阶差分可定义二阶差分

$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$$

□ 一般地，可定义 m 阶差分

$$\Delta^m f_k = \Delta^{m-1} f_{k+1} - \Delta^{m-1} f_k, \quad \nabla^m f_k = \nabla^{m-1} f_k - \nabla^{m-1} f_{k-1}$$

□ 一阶中心差分

■ 前面定义用到的 $f_{k+1/2}$ 和 $f_{k-1/2}$ 不在函数表中

■ 新形式 $\delta f_{k+\frac{1}{2}} = f_{k+1} - f_k$, $\delta f_{k-\frac{1}{2}} = f_k - f_{k-1}$

□ 二阶中心差分

$$\delta^2 f_k = \delta f_{k+\frac{1}{2}} - \delta f_{k-\frac{1}{2}}$$



不变算子和移位算子

□ 不变算子 I 和移位算子 E ，定义如下

$$If_k = f_k, \quad Ef_k = f_{k+1}$$

□ 因此

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k = Ef_k - If_k = (E - I)f_k$$

■ 可得

$$\Delta = E - I$$

■ 同理

$$\nabla = I - E^{-1}, \quad \delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$$



基本性质

□ 性质1 各阶差分均可用函数值表示

$$\Delta^n f_k = (E - I)^n f_k = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} E^{n-j} f_k = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f_{n+k-j} \quad (2.5.4)$$

$$\nabla^n f_k = (I - E^{-1})^n f_k = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} E^{j-n} f_k = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_{k+j-n} \quad (2.5.5)$$

■ 其中 $\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}$ 为二项式展开系数

□ 性质2 函数值也可用各阶差分表示, 例如,
可用向前差分表示 f_{n+k}

$$f_{n+k} = E^n f_k = (I + \Delta)^n f_k = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \Delta^j f_k \quad (2.5.6)$$



基本性质（续）

□ 性质3 差商与差分有如下关系

■ 向前差分
$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h}$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} = \frac{\frac{\Delta f_{k+1}}{h} - \frac{\Delta f_k}{h}}{2h} = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 f_k$$

一般地

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \Delta^m f_k \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5.7)$$

■ 向后差分

$$f[x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m}] = \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \nabla^m f_k \quad (2.5.8)$$



基本性质（续）

□ 性质3 差商与差分有如下关系

■ 结合式(2.5.7)及式(2.4.5)

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \Delta^m f_k \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5.7)$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a, b] \quad (2.4.5)$$

可得差分与导数的关系

$$\Delta^n f_k = h^n f^{(n)}(\xi) \quad (2.5.9)$$

✓ 其中 $\xi \in (x_k, x_{k+n})$



差分表

□ 计算差分可列差分表，下表是向前差分表

x_k	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\vdots$
f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\vdots$	
f_3	Δf_3	$\vdots$		
f_4	$\vdots$			
$\vdots$				



Newton前插公式

□ Newton插值公式

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (2.4.6)$$

■ 用差分代替差商

□ 设有节点 $x_k = x_0 + kh$ ($k = 0, 1, \dots, n$)

■ 要计算 x_0 附近点 x 的函数值 $f(x)$, 令 $x = x_0 + th$, $0 \leq t \leq 1$, 得到

$$\omega_{k+1}(x) = \prod_{j=0}^k (x - x_j) = t(t-1) \cdots (t-k) h^{k+1}$$



Newton前插公式（续）

■ 将上式和(2.5.7)代入(2.4.6)

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \Delta^m f_k \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5.7)$$

■ Newton前插公式

$$\begin{aligned} & N_n(x_0 + th) \\ &= f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n f_0 \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

■ 插值余项由式(2.2.14)得到

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad (2.2.14)$$

$$R_n(x) = \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_n) \quad (2.5.11)$$



Newton后插公式

□ 设有节点 $x_k = x_0 + kh$ ($k = 0, 1, \dots, n$)

■ 要计算在 x_n 附近点 x 的函数值 $f(x)$, 此时将插值点按 $x_n, x_{n-1}, \dots, x_0$ 的次序排列

$$N_n(x) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_n, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ + \dots + f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0](x - x_n) \cdots (x - x_1)$$

■ 作变换 $x = x_n + th$ ($-1 \leq t \leq 0$), 利用式(2.5.8)

$$f[x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m}] = \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \nabla^m f_k \quad (2.5.8)$$



Newton后插公式（续）

■ Newton后插公式

$$\begin{aligned} N_n(x_n + th) = f_n + t\nabla f_n + \frac{t(t+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \cdots \\ + \frac{t(t+1) \cdots (t+n-1)}{n!} \nabla^n f_n \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

■ 余项

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x_n + th) = \frac{t(t+1) \cdots (t+n) h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

✓ 其中 $\xi \in (x_0, x_n)$



说明

- 利用Newton前插公式(2.5.10)计算函数值 $f(x)$ 时, 由于 x 在 x_0 附近, 其系数就是 $f(x)$ 在 x_0 的各阶向前差分

$$N_n(x_0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \quad (2.5.10)$$

- 利用Newton后插公式(2.5.12)计算函数值 $f(x)$ 时, 由于 x 在 x_n 附近, 其系数就是 $f(x)$ 在 x_n 的各阶向后差分

$$N_n(x_n + th) = f_n + t\nabla f_n + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \cdots + \frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n f_n \quad (2.5.12)$$



等距节点插值公式的应用

- 等距节点插值公式有不少实际应用，例如，很多工程设计计算都需要查各种函数表，用计算机计算时就必须解决计算机查表问题
 - 如果把整个函数表存入内存，往往占用单元太多
 - 如果用一个解析表达式近似该函数，又可能达不到精度要求
 - 因此，采用存放大间隔函数表，并用插值公式计算函数近似值，是一种可行的方案



例2.4

- 在微电机设计计算中需要查磁化曲线表，下面给出的表是磁密 B 每间隔500高斯磁路每厘米长所需安匝数 at 的值，下面要解决 B 从4000至11000区间的查表问题
 - 为了分析使用几阶插值公式合适，应先列出差分表
 - 从差分表中看到三阶差分近似于0，因此计算时只需用二阶差分
 - ✓ 也就是使用3个点实现插值，即 $n = 2$



例2.4 磁化曲线表

k	B_k	$at_k = f(B_k)$	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$
0	4 000	1.38	0.10	0	0.01
1	4 500	1.48	0.10	0.01	0
2	5 000	1.58	0.11	0.01	0
3	5 500	1.69	0.12	0.01	0.02
4	6 000	1.81	0.13	0.03	-0.01
5	6 500	1.94	0.16	0.02	0.02
6	7 000	2.10	0.18	0.04	0
7	7 500	2.28	0.22	0.04	0
8	8 000	2.50	0.26	0.04	0.01
9	8 500	2.76	0.30	0.05	0.02
10	9 000	3.06	0.35	0.07	0.01
11	9 500	3.41	0.42	0.08	0.02
12	10 000	3.83	0.50	0.10	
13	10 500	4.33	0.60		
14	11 000	4.93			



例2.4（续）

- 当 $4000 \leq B \leq 10500$ ，使用Newton前插公式
- 例如，求 $f(5200)$ 时取 $B_0 = 5000$ ， $f_0 = 1.58$ ， $\Delta f_0 = 0.11$ ， $\Delta^2 f_0 = 0.01$ ， $h = 500$ ， $B = 5200$ ， $t = 0.4$ ，于是由式(2.5.10)，取 $n = 2$ ，可得

$$N_n(x_0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 \quad (2.5.10)$$

$$f(5200) \approx 1.58 + 0.4 \times 0.11 + \frac{0.4 \times (-0.6)}{2} \times 0.01 \approx 1.62$$

- 当 $10500 < B \leq 11000$ ，使用Newton后插公式
- ✓ 前插缺少信息



目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值



Hermite (埃尔米特) 插值多项式

□ Hermite插值多项式

- 不少实际问题不仅要求在节点上函数值相等，而且还要求导数值相等，甚至高阶导数值也相等

□ 讨论函数值与导数值个数相等的情况

- 设在节点 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ 上, $y_j = f(x_j)$, $m_j = f'(x_j)$ ($j = 0, 1, \dots, n$), 要求插值多项式 $H(x)$ 满足条件

$$H(x_j) = y_j, \quad H'(x_j) = m_j \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (2.6.1)$$

- 这里给出的 $2n + 2$ 个条件, 可唯一确定一个次数不超过 $2n + 1$ 的多项式



求解思路

□ 插值多项式

$$H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1}$$

1. 根据条件(2.6.1)来确定 $2n + 2$ 个系数

■ 理论可行，但非常复杂

2. 采用求Lagrange插值多项式的基函数方法

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x), \quad (2.2.11)$$

■ n 次插值基函数

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$



Hermite插值多项式

□ $2n + 2$ 个插值基函数: $\alpha_j(x)$ 和 $\beta_j(x)$

■ 每个基函数都是 $2n + 1$ 次多项式, 且满足

$$\begin{cases} \alpha_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} & \alpha_j'(x_k) = 0 \quad (j, k = 0, 1, \dots, n) \\ \beta_j(x_k) = 0, & \beta_j'(x_k) = \delta_{jk} \end{cases} \quad (2.6.2)$$

□ Hermite插值多项式

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n [y_j \alpha_j(x) + m_j \beta_j(x)] \quad (2.6.3)$$

■ 由条件(2.6.2), 显然有

$$H_{2n+1}(x_k) = y_k, \quad H_{2n+1}'(x_k) = m_k \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$



构造基函数

□ 令 $\alpha_j(x) = (ax + b)l_j^2(x)$

■ $l_j(x)$ 为Lagrange插值基函数

$$l_j(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}$$

□ 由条件(2.6.2)可得

$$\alpha_j(x_j) = (ax_j + b)l_j^2(x_j) = 1$$

$$\alpha_j'(x_j) = l_j(x_j)[al_j(x_j) + 2(ax_j + b)l_j'(x_j)] = 0$$

■ 利用条件 $l_j(x_j) = 1$, $l_j(x_k) = 0$ ($k \neq j$)

■ 在其他 x_k ($k \neq j$) 满足(2.6.2)的要求



构造基函数（续）

■ 整理得到
$$\begin{cases} ax_j + b = 1 \\ a + 2l'_j(x_j) = 0 \end{cases}$$

■ 解得 $a = -2l'_j(x_j)$, $b = 1 + 2x_jl'_j(x_j)$

■ 下面求 $l'_j(x_j)$, 对 $l_j(x)$ 两边求对数, 可得

$$\log l_j(x) = \sum_{k=0, k \neq j}^n [\log(x - x_k) - \log(x_j - x_k)]$$

■ 再对两边求导, 可得

$$\frac{l'_j(x)}{l_j(x)} = \sum_{k=0, k \neq j}^n \frac{1}{x - x_k} \Rightarrow l'_j(x_j) = \sum_{k=0, k \neq j}^n \frac{1}{x_j - x_k}$$



构造基函数（续）

■ 得到 a, b 的表达式，进而可得

$$\alpha_j(x) = \left[1 - 2(x - x_j) \sum_{k=0, k \neq j}^n \frac{1}{x_j - x_k} \right] l_j^2(x) \quad (2.6.4)$$

□ 同理可得

$$\beta_j(x) = (x - x_j) l_j^2(x) \quad (2.6.5)$$

□ 可计算Hermite插值多项式

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n [y_j \alpha_j(x) + m_j \beta_j(x)] \quad (2.6.3)$$



唯一性

□ 满足条件(2.6.1)的插值多项式是唯一的，采用反证法

■ 假设 $H_{2n+1}(x)$ 及 $\bar{H}_{2n+1}(x)$ 均满足(2.6.1)

■ 定义函数

$$\varphi(x) = H_{2n+1}(x) - \bar{H}_{2n+1}(x)$$

■ 该函数在每个节点 x_k 上均有二重根，即 $\varphi(x)$ 有 $2n + 2$ 重根

■ $\varphi(x)$ 是不高于 $2n + 1$ 次的多项式，故 $\varphi(x) \equiv 0$

✓ 可以查阅Fundamental theorem of algebra



插值余项

- 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内的 $2n + 2$ 阶导数存在，则其插值余项满足

$$R(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x) \quad (2.6.6)$$

- 其中 $\xi \in (a, b)$ 且与 x 有关

□ 证明

- 可仿照例2.5，与Lagrange插值余项类似



两点三次插值多项式

□ 重要特例是 $n = 1$ 的情况

□ 取节点 x_k 和 x_{k+1} ，插值多项式 $H_3(x)$ 满足

$$\begin{cases} H_3(x_k) = y_k, & H_3(x_{k+1}) = y_{k+1} \\ H'_3(x_k) = m_k, & H'_3(x_{k+1}) = m_{k+1} \end{cases} \quad (2.6.7)$$

□ 基函数 $\alpha_k(x), \beta_k(x), \alpha_{k+1}(x), \beta_{k+1}(x)$ 应满足

$$\alpha_k(x_k) = 1, \alpha_k(x_{k+1}) = 0, \alpha'_k(x_k) = \alpha'_k(x_{k+1}) = 0$$

$$\alpha_{k+1}(x_k) = 0, \alpha_{k+1}(x_{k+1}) = 1, \alpha'_{k+1}(x_k) = \alpha'_{k+1}(x_{k+1}) = 0$$

$$\beta_k(x_k) = \beta_k(x_{k+1}) = 0, \beta'_k(x_k) = 1, \beta'_k(x_{k+1}) = 0$$

$$\beta_{k+1}(x_k) = \beta_{k+1}(x_{k+1}) = 0, \beta'_{k+1}(x_k) = 0, \beta'_{k+1}(x_{k+1}) = 1$$



两点三次插值多项式（续）

□ 根据式(2.6.4)及式(2.6.5)，可得

$$\begin{cases} \alpha_k(x) = \left(1 + 2 \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right) \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \\ \alpha_{k+1}(x) = \left(1 + 2 \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \end{cases}$$

(2.6.8)

$$\begin{cases} \beta_k(x) = (x - x_k) \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \\ \beta_{k+1}(x) = (x - x_{k+1}) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \end{cases}$$

(2.6.9)

□ 满足条件(2.6.7)的插值多项式为

$$\begin{aligned} & H_3(x) \\ &= y_k \alpha_k(x) + y_{k+1} \alpha_{k+1}(x) + m_k \beta_k(x) + m_{k+1} \beta_{k+1}(x) \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

□ 余项 $R_3(x) = f(x) - H_3(x)$ ，由式(2.6.6)可得

$$R_3(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) (x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2$$



例2.5

□ 求满足 $P(x_j) = f(x_j) (j = 0, 1, 2)$ 及 $P'(x_1) = f'(x_1)$ 的插值多项式及其余项表达式

- 给定条件可确定次数不超过3的插值多项式
- 该多项式通过点 $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ 及 $(x_2, f(x_2))$, 故可写成

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

- ✓ 类似于Newton差商插值多项式(2.4.6)的形式
- ✓ A 为待定常数



例2.5 (续)

■ 利用条件 $P'(x_1) = f'(x_1)$, 可得

$$\begin{aligned} P'(x_1) &= f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](x_1 - x_0) + A(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \\ &= f'(x_1) \end{aligned}$$

■ 因此

$$A = \frac{f'(x_1) - f[x_0, x_1] - (x_1 - x_0)f[x_0, x_1, x_2]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

■ 下面计算余项 $R(x) = f(x) - P(x)$, 假设

$$R(x) = f(x) - P(x) = K(x)(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)$$

✓ $K(x)$ 为待定函数

✓ 容易验证 $R(x)$ 满足 $R(x_j) = 0$ ($j = 0, 1, 2$), 并且
 $R'(x_1) = P'(x_1) - f'(x_1) = 0$



例2.5（续）

- 构造函数

$$\varphi(t) = f(t) - P(t) - K(x)(t - x_0)(t - x_1)^2(t - x_2)$$

- 显然 $\varphi(x_j) = 0 (j = 0, 1, 2)$, $\varphi'(x_1) = 0$, $\varphi(x) = 0$

- 因此 $\varphi(t)$ 在 (a, b) 有5个零点（重根算2个）

- 反复运用Rolle定理可得 $\varphi^{(4)}(t)$ 在 (a, b) 至少有1个零点 ξ , 故 $\varphi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - 4!K(x) = 0$

- 于是 $K(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$, 得到余项表达式

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)}{4!}$$

✓ 其中 ξ 位于 x_0, x_1, x_2 和 x 所界定的范围内



目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值



多项式插值的问题

□ 根据区间 $[a, b]$ 上给出的节点构造插值多项式 $L_n(x)$ 近似 $f(x)$ 时，次数 n 越高逼近程度越好？

■ **✗**，对于任意的插值节点，当 $n \rightarrow \infty$ ， $L_n(x)$ 未必收敛

□ 20世纪初Runge（龙格）给出了不收敛例子

■ 函数 $f(x) = 1/(1 + x^2)$ ，在 $[-5, 5]$ 上各阶导数均存在

■ 在 $[-5, 5]$ 上取 $n + 1$ 个等距节点 $x_k = -5 + 10 \frac{k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$)，构造Lagrange插值多项式

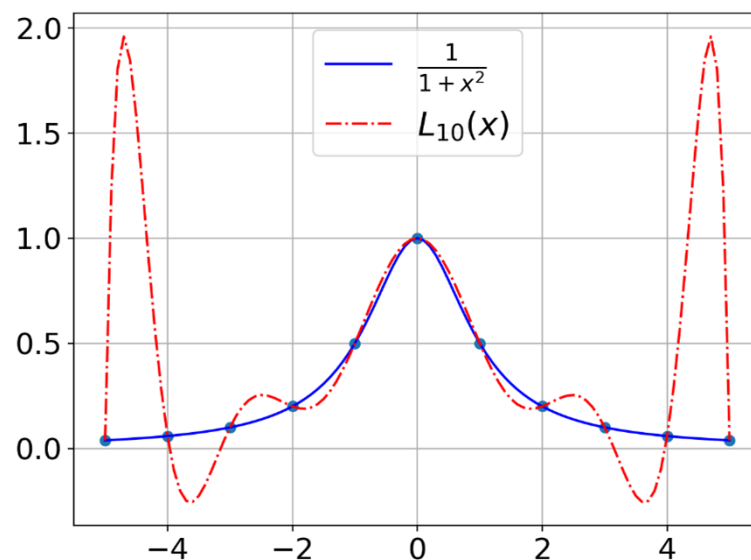
$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{1 + x_j^2} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_j)\omega'_{n+1}(x_j)}$$

■ 当 $n \rightarrow \infty$ 时只在 $|x| \leq 3.63$ 内收敛，而在该区间外发散



Runge现象

□ 取 $n = 10$ ，画出 $y = L_{10}(x)$ 及 $y = 1/(1 + x^2)$ 在 $[-5, 5]$ 上的图形



- 可以看出在 $x = \pm 5$ 附近两个函数的差距较大，说明高次插值的效果并不好
- 如果把 $y = 1/(1 + x^2)$ 在节点 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ 处用折线连起来逼近效果更好，这正是下面要讨论的分段低次插值的出发点



分段线性插值

- 将插值点用折线段连接起来逼近 $f(x)$
- 已知节点 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 上的函数值 $f_0, f_1, \dots, f_n$, 记

$$h_k = x_{k+1} - x_k, \quad h = \max_k h_k$$

称 $I_h(x)$ 为分段线性插值函数, 如果满足

1. $I_h(x) \in C[a, b]$; ($C[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 上连续的函数集合)
2. $I_h(x_k) = f_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$);
3. $I_h(x_k)$ 在每个区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是线性函数。



分段线性插值（续）

□ 由定义， $I_h(x)$ 在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上可表示为

$$I_h(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} f_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f_{k+1} \quad (x_k \leq x \leq x_{k+1}) \quad (2.7.1)$$

□ 用插值基函数表示

$$I_h(x) = \sum_{j=0}^n f_j l_j(x) \quad (2.7.2)$$

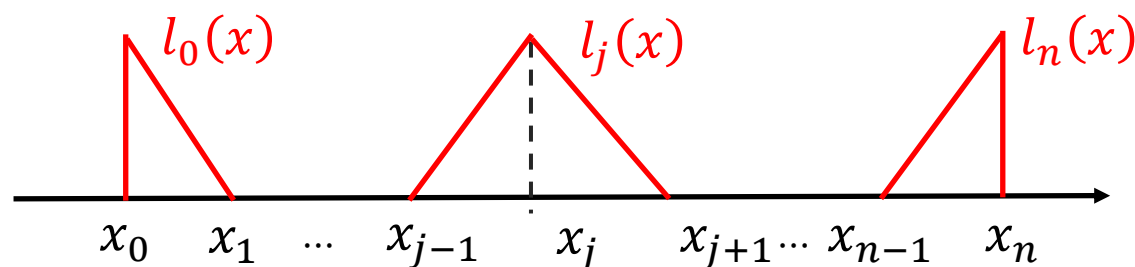
■ $l_j(x)$ 满足条件 $l_j(x_k) = \delta_{jk}$ ($j, k = 0, 1, \dots, n$), 为

$$l_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \quad (j = 0 \text{ 略去}) \\ \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \quad (j = n \text{ 略去}) \\ 0, & x \in [a, b], x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \end{cases} \quad (2.7.3)$$



分段线性插值（续）

- 分段线性插值基函数 $l_j(x)$ 只在 x_j 附近不为零，其他地方均为零，该性质称为局部非零性质



- 当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 时

$$1 = \sum_{j=0}^n l_j(x) = l_k(x) + l_{k+1}(x), \quad f(x) = [l_k(x) + l_{k+1}(x)]f(x)$$

- 此时，根据局部非零性质

$$I_h(x) = f_k l_k(x) + f_{k+1} l_{k+1}(x)$$



收敛性

□ $\omega(h)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的连续模

■ 对任意两点 $x', x'' \in [a, b]$, 只要 $|x' - x''| \leq h$, 有

$$|f(x') - f(x'')| \leq \omega(h)$$

■ 当 $f(x) \in C[a, b]$ 时, 有 $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0$

□ 现证明 $\lim_{h \rightarrow 0} I_h(x) = f(x)$, 考虑 $x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$\begin{aligned} |f(x) - I_h(x)| &= |[l_k(x) + l_{k+1}(x)]f(x) - f_k l_k(x) - f_{k+1} l_{k+1}(x)| \\ &\leq l_k(x)|f(x) - f_k| + l_{k+1}(x)|f(x) - f_{k+1}| \\ &\leq [l_k(x) + l_{k+1}(x)]\omega(h_k) = \omega(h_k) \leq \omega(h) \end{aligned}$$



收敛性（续）

□ 当 $x \in [a, b]$ 时，有

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - I_h(x)| \leq \omega(h)$$

□ 只要 $f(x) \in C[a, b]$ ，就有 $\lim_{h \rightarrow 0} I_h(x) = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致成立

■ $I_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$

分段线性插值函数能够收敛到 $f(x)$



分段三次Hermite插值

- 分段线性插值函数 $I_h(x)$ 的导数是间断的
 - 函数连续，但不光滑

- 在节点 x_k ($k = 0, 1, \dots, n$)上除函数值 f_k 外还给出导数值 $f'_k = m_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$), 就可构造一个导数连续的分段插值函数 $I_h(x)$, 满足:
 1. $I_h(x) \in C^1[a, b]$; ($C^1[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 上一阶导数连续的函数集合);
 2. $I_h(x_k) = f_k, I'_h(x_k) = f'_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$);
 3. $I_h(x_k)$ 在每个区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式。



分段三次Hermite插值（续）

- 根据两点三次Hermite插值多项式(2.6.10)可知, $I_h(x)$ 在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的表达式为

$$\begin{aligned} I_h(x) = & \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) f_k + \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right) f_{k+1} \\ & + \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right)^2 (x - x_k) f'_k + \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right)^2 (x - x_{k+1}) f'_{k+1} \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

- 在整个区间 $[a, b]$ 上定义一组分段三次插值基函数 $\alpha_j(x)$ 及 $\beta_j(x)$ ($j = 0, 1, \dots, n$)

$$I_h(x) = \sum_{j=0}^n [f_j \alpha_j(x) + f'_j \beta_j(x)] \quad (2.7.6)$$



分段三次Hermite插值（续）

□ $\alpha_j(x), \beta_j(x)$ 依式(2.6.8)和式(2.6.9)

$$\begin{cases} \alpha_k(x) = \left(1 + 2 \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right) \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \\ \alpha_{k+1}(x) = \left(1 + 2 \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \end{cases} \quad (2.6.8)$$

$$\begin{cases} \beta_k(x) = (x - x_k) \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \\ \beta_{k+1}(x) = (x - x_{k+1}) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \end{cases} \quad (2.6.9)$$

$$H_3(x) = y_k \alpha_k(x) + y_{k+1} \alpha_{k+1}(x) + m_k \beta_k(x) + m_{k+1} \beta_{k+1}(x) \quad (2.6.10)$$



分段三次Hermite插值（续）

□ $\alpha_j(x), \beta_j(x)$ 依式(2.6.8)和式(2.6.9)可表示为

$$\alpha_j(x) = \begin{cases} \left(\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x - x_j}{x_{j-1} - x_j}\right) & x_{j-1} \leq x \leq x_j \text{ (} j = 0 \text{ 略去)} \\ \left(\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}\right) & x_j \leq x \leq x_{j+1} \text{ (} j = n \text{ 略去)} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2.7.7)$$

$$\beta_j(x) = \begin{cases} \left(\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\right)^2 (x - x_j) & x_{j-1} \leq x \leq x_j \text{ (} j = 0 \text{ 略去)} \\ \left(\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}\right)^2 (x - x_j) & x_j \leq x \leq x_{j+1} \text{ (} j = n \text{ 略去)} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2.7.8)$$



收敛性

$$I_h(x) = \sum_{j=0}^n [f_j \alpha_j(x) + f'_j \beta_j(x)] \quad (2.7.6)$$

□ 由于 $\alpha_j(x)$, $\beta_j(x)$ 的局部非零性质

■ 当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 时, 只有 $\alpha_k(x)$, $\alpha_{k+1}(x)$, $\beta_k(x)$, $\beta_{k+1}(x)$ 不为零, 于是(2.7.6)可表示为

$$I_h(x) = f_k \alpha_k(x) + f_{k+1} \alpha_{k+1}(x) + f'_k \beta_k(x) + f'_{k+1} \beta_{k+1}(x) \\ (x_k \leq x \leq x_{k+1}) \quad (2.7.9)$$

□ 根据式(2.7.7)中 $\alpha_j(x)$ 的定义, 可知

$$0 \leq \alpha_j(x) \leq 1, \quad (2.7.10)$$

■ 根据定义, 很显然 $\alpha_j(x)$ 非负

■ 定义
$$g(x) = \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) = \left(\frac{x - x_{k+1}}{h_k} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{x - x_k}{h_k} \right)$$



收敛性（续）

- 令 $g'(x) = 0$ ，可得 $x = (2x_k + x_{k+1} - h_k)/3$
- 将其代入 $g(x)$ ，可得最大值为1
- 其他情况可以类似分析

□ 根据式(2.7.8)中 $\beta_j(x)$ 的定义，当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ ，可知

$$\begin{cases} |\beta_k(x)| \leq \frac{4}{27} h_k \\ |\beta_{k+1}(x)| \leq \frac{4}{27} h_k \end{cases} \quad (2.7.11)$$

- 考虑 $\beta_k(x)$
$$g(x) = \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right)^2 (x - x_k) = \left(\frac{x - x_{k+1}}{h_k} \right)^2 (x - x_k)$$



收敛性（续）

- 令 $g'(x) = 0$ ，可得 $x = (2x_k + x_{k+1})/3$
- 将其代入 $g(x)$ ，可得最大值为 $\frac{4}{27}h_k$
- 其他情况可以类似分析

□ 当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ ，存在以下关系

$$\begin{aligned} & \alpha_k(x) + \alpha_{k+1}(x) \\ &= \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) + \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right) \\ &= \dots = \frac{(x_k - x_{k+1})^2}{h_k^2} = 1 \end{aligned} \tag{2.7.12}$$



收敛性（续）

□ 由式(2.7.9)~ (2.7.12), 当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 可得

$$\begin{aligned} & |f(x) - I_h(x)| \\ &= |[\alpha_k(x) + \alpha_{k+1}(x)]f(x) - [f_k\alpha_k(x) + f_{k+1}\alpha_{k+1}(x) + f'_k\beta_k(x) + f'_{k+1}\beta_{k+1}(x)]| \\ &\leq \alpha_k(x)|f(x) - f_k| + \alpha_{k+1}(x)|f(x) - f_{k+1}| + \frac{4}{27}h_k[|f'_k| + |f'_{k+1}|] \\ &\leq [\alpha_k(x) + \alpha_{k+1}(x)]\omega(h) + \frac{8h}{27} \max\{|f'_k|, |f'_{k+1}|\} \end{aligned}$$

□ 对于 $x \in [a, b]$, 可得

$$|f(x) - I_h(x)| \leq \omega(h) + \frac{8h}{27} \max_{0 \leq k \leq n} |f'_k| \quad (2.7.13)$$

■ 当 $f(x) \in C[a, b]$, $\lim_{h \rightarrow 0} I_h(x) = f(x)$, 即算法收敛



目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值

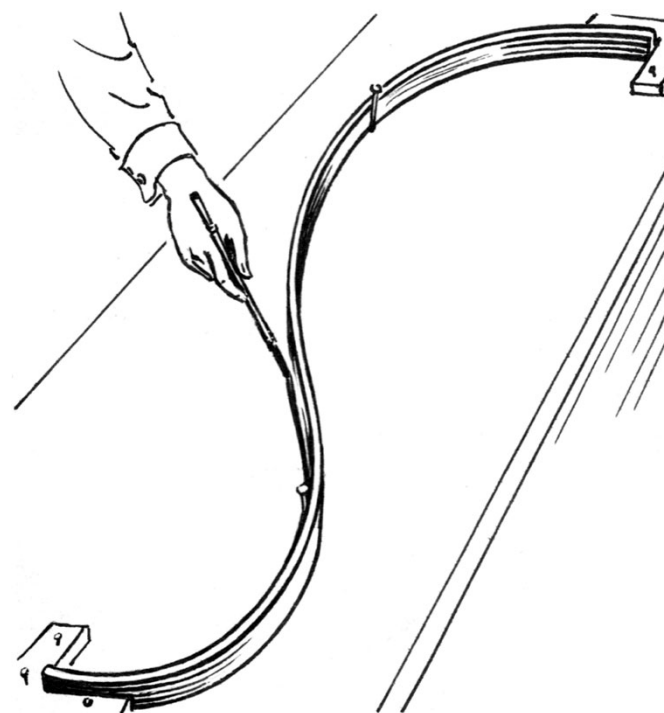
样条曲线

□ 分段低次插值函数一致收敛，但光滑性较差

■ 对于像高速飞机的机翼、船体放样等的型值线，往往要求有二阶光滑度

□ 早期工程师制图时，把富有弹性的细长木条（样条）用压铁固定在样点上，在其他地方让它自由弯曲，然后画下长条的曲线，称为样条曲线

■ 分段三次曲线并接而成，在连接点上二阶导数连续





三次样条函数

□ 定义**2.5** 若函数 $S(x) \in C^2[a, b]$, 且在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上是三次多项式, 其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是给定节点, 则称 $S(x)$ 是节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 上的**三次样条函数**。

若在节点 x_j 上给定函数值 $y_j = f(x_j)$ ($j = 0, 1, \dots, n$), 且

$$S(x_j) = y_j \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (2.8.1)$$

成立, 则称 $S(x)$ 是**三次插值样条函数**。



三次样条函数的条件

□ 由于 $S(x)$ 在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上是三次多项式，所以要确定4个系数；一共有 n 个小区间，故要确定 $4n$ 个参数

□ $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶导数连续，故在节点 x_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$)处要满足连续性条件

$$S(x_j - 0) = S(x_j + 0), \quad S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0)$$

$$S''(x_j - 0) = S''(x_j + 0) \quad (2.8.2)$$

共有 $3n - 3$ 个条件

□ $S(x)$ 满足插值条件(2.8.1)，共 $4n - 2$ 个条件，此外还需要2个条件才能确定 $S(x)$



边界条件

□ 在区间端点 $a = x_0$, $b = x_n$ 各加一个条件

1. 已知两端的一阶导数值, 即

$$\begin{cases} S'(x_0) = f'_0 \\ S'(x_n) = f'_n \end{cases} \quad (2.8.3)$$

2. 两端的二阶导数已知, 即

$$\begin{cases} S''(x_0) = f''_0 \\ S''(x_n) = f''_n \end{cases} \quad (2.8.4)$$

自然边界条件

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \quad (2.8.4)'$$



边界条件（续）

3. 当 $f(x)$ 是以 $x_n - x_0$ 为周期的周期函数时，则要求 $S(x)$ 也是周期函数，此时边界条件为

$$\begin{cases} S(x_0 + 0) = S(x_n - 0) \\ S'(x_0 + 0) = S'(x_n - 0) \\ S''(x_0 + 0) = S''(x_n - 0) \end{cases} \quad (2.8.5)$$

此时式(2.8.1)中 $y_0 = y_n$ ，这样的 $S(x)$ 称为**周期样条函数**

✓ 注意，此时还是2个条件



三转角方程

$$I_h(x) = \sum_{j=0}^n [f_j \alpha_j(x) + f'_j \beta_j(x)] \quad (2.7.6)$$

□ 假定 $S'(x)$ 在节点 x_j 处的值为 $S'(x_j) = m_j$

■ m_j ($j = 0, 1, \dots, n$)的数值未知

□ 结合式(2.8.1)，由分段三次Hermite插值式(2.7.6)可得

$$S(x) = \sum_{j=0}^n [y_j \alpha_j(x) + m_j \beta_j(x)] \quad (2.8.6)$$

■ 其中 $\alpha_j(x)$ 和 $\beta_j(x)$ 是插值基函数，分别由式(2.7.7)和式(2.7.8)表示

■ 式(2.8.6)中 $S(x)$ 和 $S'(x)$ 在整个区间 $[a, b]$ 上连续，且满足式(2.8.1)

$$S''(x_j - 0) = S''(x_j + 0) \quad (2.8.2)$$



三转角方程（续）

□ 为了进一步确定(2.8.6)中的 m_j ($j = 0, 1, \dots, n$), 可利用式(2.8.2)及某种边界条件

■ 考虑 $S(x)$ 在 $[x_j, x_{j+1}]$ 上的表达式

$$\begin{aligned} S(x) = & \frac{(x - x_{j+1})^2 [h_j + 2(x - x_j)]}{h_j^3} y_j + \frac{(x - x_j)^2 [h_j + 2(x_{j+1} - x)]}{h_j^3} y_{j+1} \\ & + \frac{(x - x_{j+1})^2 (x - x_j)}{h_j^2} m_j + \frac{(x - x_j)^2 (x - x_{j+1})}{h_j^2} m_{j+1} \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

✓ 其中 $h_j = x_{j+1} - x_j$

■ 对 $S(x)$ 求二阶导, 可得

$$S''(x) = \frac{6x - 2x_j - 4x_{j+1}}{h_j^2} m_j + \frac{6x - 4x_j - 2x_{j+1}}{h_j^2} m_{j+1} + \frac{6(x_j + x_{j+1} - 2x)}{h_j^3} (y_{j+1} - y_j)$$



三转角方程（续）

■ 于是
$$S''(x_j + 0) = -\frac{4}{h_j}m_j - \frac{2}{h_j}m_{j+1} + \frac{6}{h_j^2}(y_{j+1} - y_j)$$

■ 同理，可得 $S''(x)$ 在区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上的表达式

$$S''(x) = \frac{6x - 2x_{j-1} - 4x_j}{h_{j-1}^2}m_{j-1} + \frac{6x - 4x_{j-1} - 2x_j}{h_{j-1}^2}m_j + \frac{6(x_{j-1} + x_j - 2x)}{h_{j-1}^2}(y_j - y_{j-1})$$

■ 于是
$$S''(x_j - 0) = \frac{2}{h_{j-1}}m_{j-1} + \frac{4}{h_{j-1}}m_j - \frac{6}{h_{j-1}^2}(y_j - y_{j-1})$$

■ 由条件 $S''(x_j - 0) = S''(x_j + 0) (j = 1, 2, \dots, n - 1)$

$$\frac{1}{h_{j-1}}m_{j-1} + 2\left(\frac{1}{h_{j-1}} + \frac{1}{h_j}\right)m_j + \frac{1}{h_j}m_{j+1} = 3\left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_j^2} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}^2}\right)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n - 1) \quad (2.8.8)$$



三转角方程（续）

- 用 $\frac{1}{h_{j-1}} + \frac{1}{h_j}$ 除全式，并注意 $y_i = f_i$, $\frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} = f[x_j, x_{j+1}]$, (2.8.8) 可化简为

$$\lambda_j m_{j-1} + 2m_j + \mu_j m_{j+1} = g_j \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.8.9)$$

其中

$$\lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j}, \quad \mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.8.10)$$

$$g_j = 3(\lambda_j f[x_{j-1}, x_j] + \mu_j f[x_j, x_{j+1}]) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.8.11)$$

- (2.8.9) 是关于 $n+1$ 个未知数 $m_0, m_1, \dots, m_n$ 的 $n-1$ 个方程
 - ✓ 还需要利用边界条件



三转角方程（续）

□ 选择边界条件(2.8.3), 即 $m_0 = f'_0$, $m_n = f'_n$

■ 方程(2.8.9)为只含 $m_1, \dots, m_{n-1}$ 的 $n-1$ 个方程, 写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 f'_0 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} f'_n \end{bmatrix} \quad (2.8.12)$$



三转角方程（续）

□ 选择边界条件(2.8.4)，则

$$\begin{cases} S''(x_0) = f_0'' \\ S''(x_n) = f_n'' \end{cases} \quad (2.8.4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1] - \frac{h_0}{2} f_0'' = g_0 \\ m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n] + \frac{h_{n-1}}{2} f_n'' = g_n \end{cases} \quad (2.8.13)$$

□ 选择边界条件(2.8.4)', 则

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \quad (2.8.4)'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1] = g_0 \\ m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n] = g_n \end{cases} \quad (2.8.13)'$$



三转角方程（续）

■ 式(2.8.9)与式(2.8.13)或式(2.8.13)'合并后用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \quad (2.8.14)$$

✓ 包含 $n + 1$ 个变量 $m_0, m_1, \dots, m_n$ 的 $n + 1$ 个方程



三转角方程（续）

□ 边界条件为周期性条件式(2.8.5)，则

$$m_0 = m_n$$

$$\frac{1}{h_0}m_1 + \frac{1}{h_{n-1}}m_{n-1} + 2\left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_{n-1}}\right)m_n = \frac{3}{h_0}f[x_0, x_1] + \frac{3}{h_{n-1}}f[x_{n-1}, x_n]$$

■ 化简为 $\mu_n m_1 + \lambda_n m_{n-1} + 2m_n = g_n$

$$\mu_n = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \quad \lambda_n = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \quad g_n = 3(\mu_n f[x_0, x_1] + \lambda_n f[x_{n-1}, x_n])$$

■ 与式(2.8.9)合并后用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & \cdots & 0 & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \quad (2.8.15)$$



讨论

- 这里得到的方程组(2.8.12)、(2.8.14)及式(2.8.15)中，每个方程都联系三个 m_j ， m_j 在力学上解释为细梁在 x_j 截面处的转角，故称之为**三转角方程**
- 这些方程系数矩阵对角元素均为2，非对角元素 $\mu_j + \lambda_j = 1$ ，故系数矩阵具有**强对角优势**，方程组(2.8.12)、(2.8.14)及(2.8.15)都有唯一解，可用追赶法求解，从而得到 $S(x)$



三弯矩方程

- 三次样条插值函数 $S(x)$ 有多种表达方式，有时用二阶导数 $S''(x_j) = M_j$ ($j = 0, 1, \dots, n$) 更方便
- M_j 在力学上解释为细梁在 x_j 截面处的弯矩，并且与两个相邻的弯矩有关，故称为**三弯矩方程**
- 由于 $S(x)$ 在区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上是三次多项式，故 $S''(x)$ 在区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上是线性函数，可写成

$$S''(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_j} \quad (2.8.16)$$

- 对 $S''(x)$ 积分两次并利用 $S(x_j) = y_j$ 及 $S(x_{j+1}) = y_{j+1}$ ，可确定积分常数，得到



三弯矩方程（续）

$$S(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x_{j+1} - x}{h_j} \\ + \left(y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_j}{h_j} \quad (j = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.8.17)$$

■ 对 $S(x)$ 求导，得

$$S'(x) \\ = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_j} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{M_{j+1} - M_j}{6} h_j \quad (2.8.18)$$

■ 由此可得

$$S'(x_j + 0) = -\frac{h_j}{3} M_j - \frac{h_j}{6} M_{j+1} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j}$$

$$\lambda_j m_{j-1} + 2m_j + \mu_j m_{j+1} = g_j \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.8.9)$$



三弯矩方程（续）

- 类似地，可求出 $S(x)$ 在区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上的表达式，从而得到

$$S'(x_j - 0) = \frac{h_{j-1}}{6} M_{j-1} + \frac{h_{j-1}}{3} M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}}$$

- 利用 $S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0)$ ，可得

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.8.19)$$

其中

$$\lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j}, \quad \mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.8.10)$$

$$d_j = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.8.20)$$



三弯矩方程（续）

□ 方程(2.8.19)和方程(2.8.9)完全类似，只要加上式(2.8.3)~(2.8.5)的任一种边界条件，就可得到关于三弯矩 M_j 的方程组

■ 若边界条件为式(2.8.3)，则端点方程为

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f'_0), \quad M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_{n-1}}(f'_n - f[x_{n-1}, x_n])$$

■ 若边界条件为式(2.8.4)，则端点方程为

$$M_0 = f''_0, \quad M_n = f''_n$$

□ 同样通过追赶法，可求出三弯矩方程的解 $M_j (j = 0, 1, \dots, n)$ ，代入式(2.8.17)得到 $S(x)$



计算步骤

- 样条函数，特别是三次样条在实际中有广泛的应用，在计算机上也容易实现
- 下面以方程(2.8.12)为例，说明在计算机上求 $S(x)$ 的算法步骤

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 f'_0 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} f'_n \end{bmatrix} \quad (2.8.12)$$



计算步骤（续）

□ 以方程(2.8.12)求解 $S(x)$ 的算法步骤

1. 输入初始数据 $x_j, y_j (j = 0, 1, \dots, n)$ 及 f'_0, f'_n 和 n
2. j 从0到 $n - 1$ 计算 $h_j = x_{j+1} - x_j$ 及 $f[x_j, x_{j+1}]$
3. j 从1到 $n - 1$ 由式(2.8.10)及式(2.8.11)计算 λ_j, μ_j, g_j

$$\lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j}, \quad \mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n - 1) \quad (2.8.10)$$

$$g_j = 3(\lambda_j f[x_{j-1}, x_j] + \mu_j f[x_j, x_{j+1}]) \quad (j = 1, 2, \dots, n - 1) \quad (2.8.11)$$



计算步骤（续）

□ 以方程(2.8.12)求解 $S(x)$ 的算法步骤

1. 输入初始数据 $x_j, y_j (j = 0, 1, \dots, n)$ 及 f'_0, f'_n 和 n
2. j 从0到 $n - 1$ 计算 $h_j = x_{j+1} - x_j$ 及 $f[x_j, x_{j+1}]$
3. j 从1到 $n - 1$ 由式(2.8.10)及式(2.8.11)计算 λ_j, μ_j, g_j
4. 用追赶法（公式见7.4.3节）解方程(2.8.12), 求出 $m_j (j = 1, 2, \dots, n - 1)$
5. 计算 $S(x)$ 的系数或计算 $S(x)$ 在若干点上的值, 并打印结果

示例

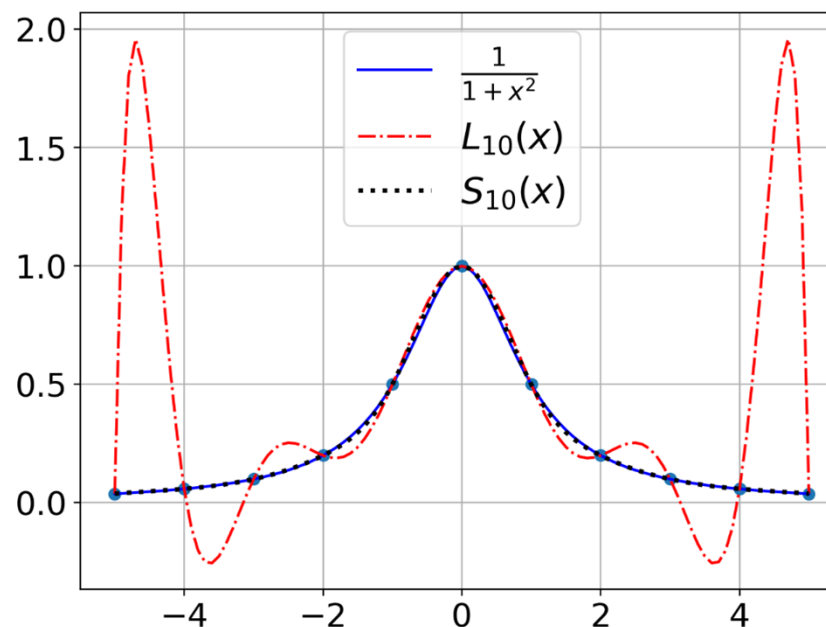
□ 例：给定函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-5,5]$, 节点 $x_k = -5 + k$ ($k = 0, 1, \dots, 10$), 用三次样条插值求 $S_{10}(x)$

■ 取 $S_{10}(x_k) = f(x_k)$ ($k = 0, 1, \dots, 10$), 边界条件

$$S'_{10}(-5) = f'(-5), \quad S'_{10}(5) = f'(5)$$

■ 利用上述步骤编制的程序计算 $S_{10}(x)$, 并与 $f(x)$ 及 Lagrange 插值 $L_{10}(x)$ 比较

■ $S_{10}(x)$ 能很好地逼近 $f(x)$, 不会出现 $L_{10}(x)$ 的 Runge 现象





收敛性

□ 为了证明三次样条插值的收敛性，需要用到向量和矩阵范数有关的结论

■ 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$ 为 $n \times n$ 矩阵， $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 n 维向量，定义 $\mathbf{x}$ 及 $\mathbf{A}$ 的范数为

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|,$$

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{\infty}}{\|\mathbf{x}\|_{\infty}} \quad (2.8.21)$$

■ 对于函数 $f(x) \in C[a, b]$ ，也定义 f 的范数为

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$



收敛性（续）

□ 为了证明三次样条插值的收敛性，需要用到向量和矩阵范数有关的结论

■ 引理 若 $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$ 具有强对角占优，即

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.8.22)$$

则 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在，且

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_{\infty} \leq \left\{ \min \left(|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) \right\}^{-1} \quad (2.8.23)$$



收敛性（续）

□ 以自然边界条件(2.8.4)'的三次样条插值函数 $S(x)$ 为例，讨论其收敛性

■ 此时方程式为(2.8.14)，可写成

$$A\mathbf{m} = \mathbf{g} \quad (2.8.24)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & \mu_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_0 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

■ 由于 $\mu_i + \lambda_i = 1$ ，且 $a_{ii} = 2$ ，故由引理得

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq 1 \quad (2.8.25)$$



收敛性（续）

□ **定理2.3** 若 $f(x) \in C[a, b]$, $S(x)$ 是以 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为节点, 满足条件式(2.8.1)及式(2.8.4)'的三次样条插值函数, 令

$$h_j = x_{j+1} - x_j, \quad h = \max_{0 \leq j \leq n-1} h_j, \quad \delta = \min_{0 \leq j \leq n-1} h_j$$

设 $h/\delta < \infty$, 则 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$

■ 注意到 $S(x)$ 可用式(2.8.6)表示

$$S(x) = \sum_{j=0}^n [y_j \alpha_j(x) + m_j \beta_j(x)] \quad (2.8.6)$$

■ 这是一个分段三次Hermite插值多项式, 于是可以重用2.7.3节中证明的收敛性分析结果



$$|f(x) - I_h(x)| \leq \omega(h) + \frac{8h}{27} \max_{0 \leq k \leq n} |f'_k| \quad (2.7.13)$$

收敛性（续）

■ 基于式(2.7.13)，可得

$$\|f(x) - S(x)\|_\infty \leq \omega(h) + \frac{8}{27} h \|\mathbf{m}\|_\infty \quad (2.8.26)$$

■ 根据 $\mathbf{A}\mathbf{m} = \mathbf{g}$ (2.8.24)

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \leq 1 \quad (2.8.25)$$

■ 可得

$$\|\mathbf{m}\|_\infty = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \|\mathbf{g}\|_\infty \leq \|\mathbf{g}\|_\infty \quad (2.8.27)$$

■ 根据

$$g_j = 3(\lambda_j f[x_{j-1}, x_j] + \mu_j f[x_j, x_{j+1}]) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.8.11)$$

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1] = g_0 \\ m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n] = g_n \end{cases} \quad (2.8.13)'$$



收敛性（续）

$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \leq \frac{\omega(h)}{\delta}$$

■ 可得

$$\|g\|_{\infty} \leq 3 \max_{0 \leq j \leq n-1} |f[x_j, x_{j+1}]| \leq \frac{3}{\delta} \omega(h) \quad (2.8.28)$$

■ 将(2.8.27)和(2.8.28)代入(2.8.26)，可得

$$\|f(x) - S(x)\|_{\infty} \leq \left(1 + \frac{8h}{9\delta}\right) \omega(h)$$

■ 由于 $f(x) \in C[a, b]$ ，当 $h \rightarrow 0$ 时， $\|f(x) - S(x)\|_{\infty} \rightarrow 0$ ，故 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$

□ 其他边界条件的三次样条插值函数收敛性证明与此类似



总结

□ Lagrange插值

- 插值多项式的唯一性、 n 次插值基函数、差值余项

□ 逐次线性插值

- Atiken逐次线性插值公式、Neville算法

□ 差商与Newton插值公式

- 差商的定义和性质、Newton差商插值多项式

□ 差分与等距节点插值公式

- 差分的定义和性质、Newton前（后）插公式



课程主页查看作业!

总结（续）

□ Hermite插值

- Hermite插值多项式、Hermite插值基函数、两点三次Hermite插值多项式

□ 分段低次插值

- Runge现象、分段线性插值、分段三次Hermite插值、收敛性分析

□ 三次样条插值

- 三次样条函数、三转角方程、三弯矩方程、收敛性分析