第6章 方程求根

张利军
zlj@nju.edu.cn
https://ai.nju.edu.cn/zlj

目录

- 根的搜索
- 迭代法
- Newton法
- 弦截法与抛物线法
- 代数方程求根

引言

- 许多数学物理问题可归结为解方程$f(x) = 0$
  - $f(x)$可以是代数多项式，或超越函数
  - 超越函数，指变量之间的关系不能用有限次加、减、乘、除、乘方、开方运算表示的函数
- 方程$f(x) = 0$的解x^*称为它的根，或称为$f(x)$的零点
- 设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，且$f(a)f(b) < 0$，根据连续函数的性质，可知$f(x) = 0$在区间(a, b)内一定有实根
  - $[a, b]$为$f(x) = 0$的有根区间

逐步搜索法

- 假定$f(a) < 0, f(b) > 0$
- 从有根区间$[a, b]$的左端点$x_0 = a$出发，按预定步长h（例如取$h = \frac{b-a}{N}, N$为正整数）一步步向右跨
  - 每跨一步，进行一次根的搜索，即检查节点$x_k = a + kh$上的函数值$f(x_k)$的符号
  - 一旦发现节点x_k与端点a的函数值异号，即$f(x_k) > 0$，则可确定一个缩小了的有根区间$[x_{k-1}, x_k]$，其宽度为h
  - 若$f(x_k) = 0$，则x_k即为所求的根

例6.1

- 考察方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$。注意到$f(0) < 0, f(2) > 0$，知$f(x)$在区间$(0,2)$内至少有一个实根
  - 设从$x = 0$出发，取$h = 0.5$为步长向右进行根的搜索，列表格记录各个节点上函数值的符号，发现在区间$(1.0, 1.5)$内必有一根

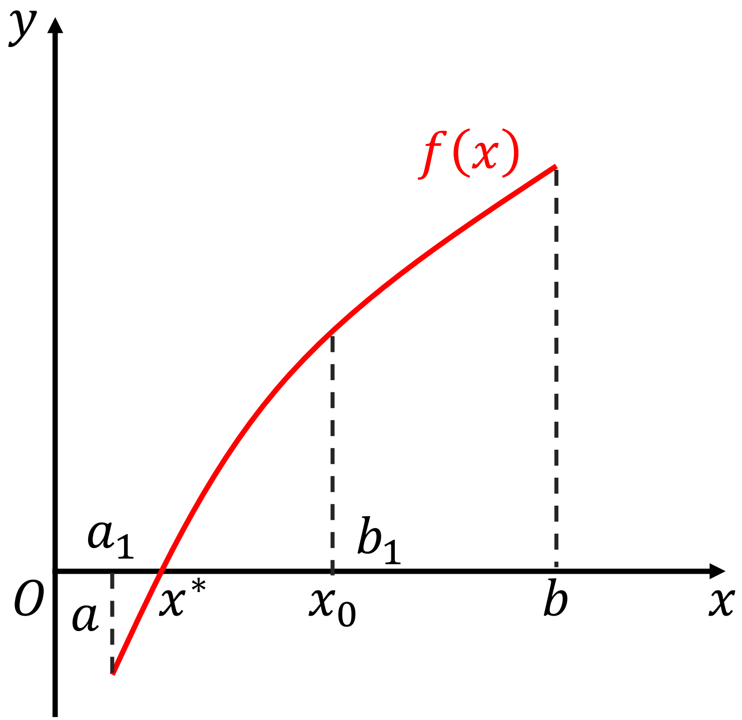
x	0	0.5	1.0	1.5
$f(x)$的符号	$-$	$-$	$-$	$+$

讨论

- 步长h的选择是个关键
  - 只要步长h取得足够小，利用这种方法可以得到具有任意精度的近似根
  - 不过当h缩小时，所要搜索的步数相应增多，从而使计算量增大
  - 因此，如果精度要求比较高，单用这种逐步搜索方法是不合算的
- 下面的二分法可以看作逐步搜索方法的一种改进

二分法

- 考察有根区间$[a,b]$，取中点$x_0=\frac{(a+b)}{2}$将它分为两半，然后检查$f(x_0)$与$f(a)$是否同号
  - 若同号，则说明所求根x^*在x_0右侧，这时令$a_1=x_0, b_1=b$；
  - 否则，x^*在x_0的左侧，这时令$a_1=a, b_1=x_0$
  - 新有根区间$[a_1,b_1]$的长度仅为$[a,b]$的一半



二分法（续）

- 对压缩了的有根区间$[a_1, b_1]$施行同样的手续
  - 即用中点$x_1 = (a_1 + b_1)/2$将区间$[a_1, b_1]$再分半
  - 然后通过根的搜索判定所求的根在x_1的哪一侧
  - 从而确定一个新的有根区间$[a_2, b_2]$，其长度是$[a_1, b_1]$的一半
- 如此反复二分，即可得出一系列有根区间

$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_k, b_k] \supseteq \cdots$$

  - 其中每个区间都是前一个区间的一半，$[a_k, b_k]$的长度$b_k - a_k = (b - a)/2^k$，在$k \to \infty$时趋于0
  - 若无限地做二分操作，这些区间将收缩于一点x^*，也即所求根

二分法（续）

- 每次二分后，设取有根区间$[a_k, b_k]$的中点 $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$作为根的近似值
  - 在二分过程中可以获得一个近似根的序列$x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots$，该序列必以根$x^*$为极限
  - 在实际计算时，不可能完成这个无限过程，其实也没有这种必要，因为数值分析的结果允许带有一定的误差
- 由于

$$|x^* - x_k| \le (b_k - a_k)/2 = (b-a)/2^{k+1} \qquad (6.1.1)$$

  - 只要二分次数足够多，k充分大，便有$|x^* - x_k| < \varepsilon$，这里$\varepsilon$为预定的精度

$$|x^* - x_k| \le \frac{b-a}{2^{k+1}} \qquad (6.1.1)$$

例6.2

- 求方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$在区间$(1.0, 1.5)$内的一个实根，要求精确到小数点后第二位
  - $a = 1.0, b = 1.5$，而$f(a) < 0, f(b) > 0$
  - 取(a, b)的中点$x_0 = 1.25$，将区间二等分
  - 由于$f(x_0) < 0$，也即$f(x_0)$与$f(a)$同号，故所求根x^*在x_0右侧，这时令$a_1 = x_0 = 1.25, b_1 = b = 1.5$，得到新的有根区间$[a_1, b_1]$
  - 如此反复二分下去，按误差估计式(6.1.1)，只需二分$k = 6$次，即可达到预定精度

$$|x^* - x_6| \le 0.005$$

例6.2（续）

- 二分法的计算结果

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$的符号
0	1.00	1.5	1.25	−
1	1.25		1.375	+
2		1.375	1.3125	−
3	1.3125		1.3438	+
4		1.3438	1.3281	+
5		1.3281	1.3203	−
6	1.3203		1.3242	−

二分法的计算步骤

1. 准备　计算$f(x)$在有根区间$[a,b]$端点处的值 $f(a), f(b)$
2. 二分　计算$f(x)$在区间中点$\frac{a+b}{2}$处的值 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
3. 判断
   - 若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$则$\frac{(a+b)}{2}$是根，计算结束
   - 若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$与$f(a)$异号，则根位于区间$\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$内，这时以$(a+b)/2$代替$b$

二分法的计算步骤（续）

- 若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$与$f(a)$同号，则根位于区间$\left(\frac{a+b}{2},b\right)$内，这时以$(a+b)/2$代替$a$

4. 反复执行二分和判断，直到区间$[a,b]$的长度缩小到误差允许范围内，此时区间中点$(a+b)/2$即可作为所求根

- 二分法的优点是算法简单，而且收敛性总能得到保证

目录

- 根的搜索
- 迭代法
- Newton法
- 弦截法与抛物线法
- 代数方程求根

迭代法

- 考察下列形式的方程：

$$x = \varphi(x) \tag{6.2.1}$$

  - 这种方程是隐式的，因而不能直接得出它的根

- 如果给出根的某个猜测值x_0，将它代入式(6.2.1)的右端，即可求得$x_1 = \varphi(x_0)$

- 然后，又可取x_1作为猜测值，进一步得到$x_2 = \varphi(x_1)$

迭代法（续）

- 如此反复迭代，如果按公式

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k = 0,1,\cdots \qquad (6.2.2)$$

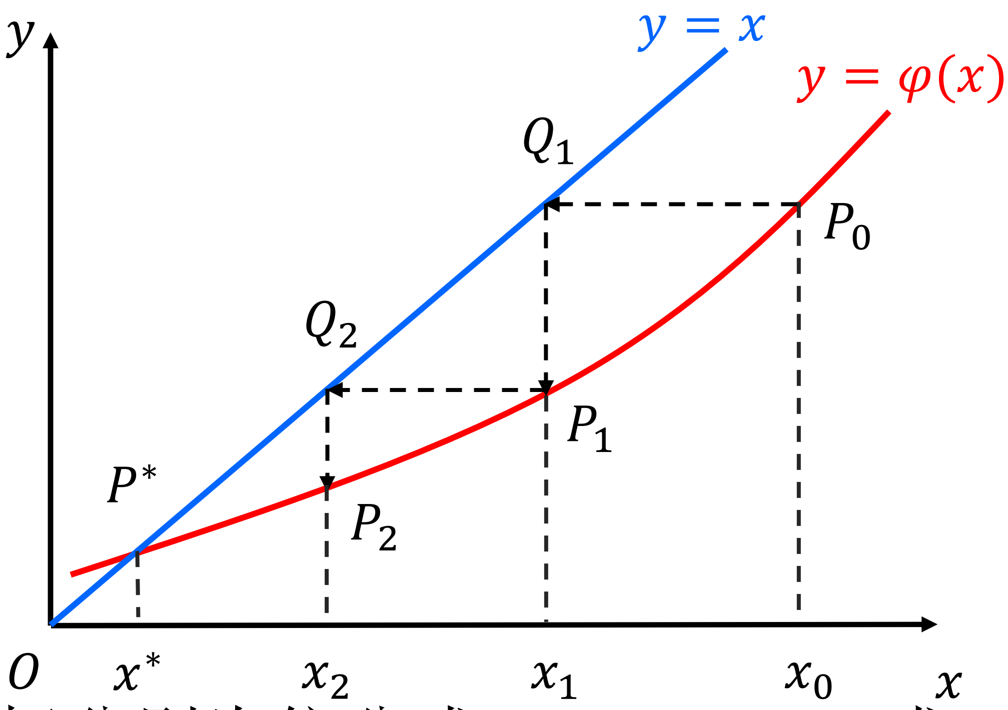
确定的数列$\{x_k\}$有极限$x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$，则称迭代过程式(6.2.2)收敛， 这时极限值$x^*$显然就是方程(6.2.1)的根

- 上述迭代法是一种逐次逼近法，基本思想是将隐式方程$x = \varphi(x)$归结为一组显式的计算公式(6.2.2)
  - 迭代过程是逐步显式化的过程

几何解释

如果点列$\{P_k\}$趋于点P^*，则x_k收敛到所求的根x^*

- 方程$x=\varphi(x)$的求根问题在O_{xy}平面上就是要确定曲线$y=\varphi(x)$与直线$y=x$的交点P^*
  - 从x_0确定P_0
  - 从P_0确定Q_1
  - 从Q_1确定P_1
  - 从P_1确定Q_2
  - 从Q_2确定P_2



  - $P_1,P_2,\cdots$其横坐标分别为依公式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$求得的迭代值$x_1,x_2,\cdots$

例6.3

- 求方程

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0 \qquad (6.2.3)$$

在$x_0 = 1.5$附近的根x^*

- 将方程(6.2.3)改写成$x = \sqrt[3]{x+1}$的形式，据此建立迭代公式

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k + 1}, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

- 记录各步迭代的结果，如下表所示

例6.3（续）

- 若仅取6位数字，那么x_7与x_8完全相同，这时可以认为x_7已经满足方程(6.2.3)，即为所求的跟

k	x_k	k	x_k
0	1.5	5	1.32476
1	1.35721	6	1.32473
2	1.33086	7	1.32472
3	1.32588	8	1.32472
4	1.32494		

发散的迭代

- 迭代法并不总能取得满意的效果
  - 按照方程(6.2.3)的另一等价形式：$x = x^3 - 1$，建立迭代公式
    $$x_{k+1} = x_k^3 - 1$$
  - 迭代初值仍取$x_0 = 1.5$，则有
    $$x_1 = 2.375, \qquad x_2 = 12.39$$
  - 继续迭代下去已经没有必要，因为结果显然会越来越大，不可能趋于某个极限
- 这种不收敛的迭代过程是发散的
  - 纵使进行了千百次迭代， 其结果也是毫无价值的

收敛条件

- 设方程$x=\varphi(x)$在区间(a,b)内有根x^*，则保证迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$收敛的条件为：存在定数$0<L<1$，使得对任意$x\in[a,b]$，有

$$|\varphi'(x)|\leq L \tag{6.2.4}$$

- 由微分中值定理

  $x_{k+1}-x^*=\varphi(x_k)-\varphi(x^*)=\varphi'(\xi)(x_k-x^*)$

  其中ξ是x^*与x_k之间某一点

- 当$x_k\in[a,b]$时，$\xi\in[a,b]$

收敛条件（续）

- 因此利用条件(6.2.4)可断定

$$|x_{k+1} - x^*| \le L|x_k - x^*|$$

- 据此反复递推，有

$$|x_k - x^*| \le L^k|x_0 - x^*|$$

  - ✓ 具体的值并不知道，因为x^*是未知的
- 故当$k \to \infty$时，迭代值x_k将收敛到所求根x^*

□ 在上述论证过程中，应当保证一切迭代值x_k落在区间(a, b)内

- 为此要求，对于任意$x \in [a, b]$，总有$\varphi(x) \in [a, b]$

收敛条件（续）

- **定理6.1** 假定函数$\varphi(x)$满足下列两项条件

  1. 对于任意$x \in [a, b]$，有
  $$a \le \varphi(x) \le b \qquad (6.2.5)$$
  2. 存在正数$L < 1$，使对于任意$x \in [a, b]$，有
  $$|\varphi'(x)| \le L < 1 \qquad (6.2.6)$$

  则迭代过程$x_{k+1} = \varphi(x_k)$对于任意初值$x_0 \in [a, b]$均收敛于方程$x = \varphi(x)$的根x^*。

  并且有如下误差估计式
  $$|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1 - L}|x_1 - x_0| \qquad (6.2.7)$$

定理6.1（证明）

$$|\varphi'(x)| \le L < 1 \quad (6.2.6)$$

- 根据(6.2.6)，有

$$|x_{k+1} - x_k| = |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \le L|x_k - x_{k-1}| \qquad (6.2.8)$$

- 据此反复递推，得

$$|x_{k+1} - x_k| \le L^k |x_1 - x_0|$$

- 于是对任意正整数p，有

$$|x_{k+p} - x_k| \le |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + |x_{k+p-1} - x_{k+p-2}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k|$$

$$\le \left(L^{k+p-1} + L^{k+p-2} + \cdots + L^k\right)|x_1 - x_0| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

- 在上式中令$p \to \infty$，注意到$\lim\limits_{p\to\infty} x_{k+p} = x^*$，即得式(6.2.7)

误差估计

- 在用迭代法进行实际计算时，必须按精度要求控制迭代次数

$$|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \qquad (6.2.7)$$

  - 误差估计式(6. 2. 7) 原则上可用来确定迭代次数，但它由于含有信息L而不便于实际应用

- 根据式(6.2.8)，

$$|x_{k+1} - x_k| = |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \le L|x_k - x_{k-1}| \qquad (6.2.8)$$

对于任意正整数p，有

$$\left|x_{k+p} - x_k\right| \le \left(L^{p-1} + L^{p-2} + \cdots + 1\right)|x_{k+1} - x_k| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$$

误差估计（续）

- 在上式中令$p \to \infty$，得

$$|x^* - x_k| \leq \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$$

- 由此可见，只要相邻两次计算结果的偏差$|x_{k+1} - x_k|$足够小，即可保证近似值x_k有足够的精度
  - 因此，可以通过检查$|x_{k+1} - x_k|$来判断迭代过程是否应终止

计算步骤

1. 准备　提供迭代初始值x_0

2. 迭代　计算迭代值$x_1 = \varphi(x_0)$

3. 控制　检查$|x_1 - x_0|$
   - 若$|x_1 - x_0| > \varepsilon$（$\varepsilon$为预先指定的精度），则以$x_1$替换$x_0$，继续步骤2的迭代
   - 当$|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$时，终止计算，取$x_1$为所求结果

局部收敛性

- 在实际应用迭代法时，通常在所求的根x^*的邻近进行考察，而研究所谓局部收敛性

- **定义6.1** 若存在x^*的某个邻域R: $|x-x^*|\leq\delta$，使迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$对于任意初值$x_0\in R$均收敛，则称迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$在根x^*邻近具有局部收敛性

- **定理6.2** 设x^*为方程$x=\varphi(x)$的根，$\varphi'(x)$在x^*的邻近连续且$|\varphi'(x^*)|<1$，则迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$在x^*邻近具有局部收敛性

定理6.2（证明）

1. 由连续函数的性质，存在x^*的某个邻域 $R: |x - x^*| \le \delta$，使对于任意$x \in R$成立

$$|\varphi'(x)| \le L < 1$$

2. 对任意$x \in R$，总有$\varphi(x) \in R$，这是因为

$$|\varphi(x) - x^*| = |\varphi(x) - \varphi(x^*)| \le L|x - x^*| \le |x - x^*|$$

- 依据定理6.1，可断定迭代过程$x_{k+1} = \varphi(x_k)$对于任意初值$x_0 \in R$均收敛

例6.4

- 求方程$x = e^{-x}$在$x = 0.5$附近的一个根，要求精度$\varepsilon = 10^{-5}$
  - 过$x = 0.5$以$h = 0.1$为步长搜索一次，可发现所求根在区间$(0.5, 0.6)$以内
  - 由于在根的附近，$|(e^{-x})'| \approx 0.6$，该值小于1，因此迭代公式$x_{k+1} = e^{-x_k}$对于初值$x_0 = 0.5$是收敛的
  - 按照$x_{k+1} = e^{-x_k}$迭代，记录结果

例6.4（续）

- 比较相邻的两次迭代值，迭代18次得所求根0.56714

k	x_k	k	x_k	k	x_k
0	0.5	7	0.5684380	14	0.5671188
1	0.6065306	8	0.5664094	15	0.5671571
2	0.5452392	9	0.5675596	16	0.5671354
3	0.5797031	10	0.5669072	17	0.5671477
4	0.5600646	11	0.5672772	18	0.5671407
5	0.5711721	12	0.5670763		
6	0.5648629	13	0.5671863		

迭代过程的加速

- 对于收敛的迭代过程，只要迭代足够多次，就可以使结果达到任意的精度

- 但有时迭代过程收敛缓慢，从而使计算量变得很大

- 因此迭代过程的加速是个重要的课题

迭代公式的加工

- 设x_0是根x^*的某个预测值，用迭代公式校正一次，得$x_1 = \varphi(x_0)$
- 由微分中值定理得

$$x_1 - x^* = \varphi(x_0) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x_0 - x^*)$$

其中ξ介于x^*与x_0之间

- 假定$\varphi'(x)$改变不大，近似地取某近似值L，则由

$$x_1 - x^* \approx L(x_0 - x^*)$$

$$\Rightarrow x^* \approx \frac{1}{1-L}x_1 - \frac{L}{1-L}x_0 \qquad (6.2.9)$$

迭代公式的加工（续）

- 可以期望，按上式右侧求得的

$$x_2 = \frac{1}{1-L}x_1 - \frac{L}{1-L}x_0 = x_1 + \frac{L}{1-L}(x_1 - x_0)$$

是比x_1更好的近似值

- 将每得到一次改进值算作一步，并用$\bar{x}_k$和x_k分别表示第k步的校正值和改进值，则加速迭代计算方案可表述为：

1. 校正：

$$\bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k)$$

2. 改进：

$$x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + \frac{L}{1-L}(\bar{x}_{k+1} - x_k) \qquad (6.2.10)$$

例6.5

- 求解方程$x = e^{-x}$
  - 由于在$x_0 = 0.5$附近，有$(e^{-x})' \approx -0.6$，故上述计算公式的具体形式是

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \mathrm{e}^{-x_k} \\ x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \dfrac{0.6}{1.6}(\bar{x}_{k+1} - x_k) \end{cases}$$

  - 下表展示了计算结果

k	$\bar{x}_k$	x_k
0		0.5
1	0.60653	0.56658
2	0.56746	0.56713
3	0.56715	0.56714

例6.5（续）

- 例6.4迭代18次得到精度10^{-5}的结果$x = 0.56714$

$$x_{k+1} = e^{-x_k}$$

- 例6.5中只需迭代3次即可得出相同结果，可见加速效果显著

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \mathrm{e}^{-x_k} \\ x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \dfrac{0.6}{1.6}(\bar{x}_{k+1} - x_k) \end{cases}$$

Aitken（埃特金）方法

- 上述加速方案有个缺点，由于其中含有导数$\varphi'(x)$的有关信息L，实际使用不便

- 仍设已知x^*的某个猜测值为x_0，将校正值$x_1=\varphi(x_0)$再校正一次，又得$x_2=\varphi(x_1)$
  - 显然
    $$x_1 - x^* \approx L(x_0 - x^*)$$
    $$x_2 - x^* \approx L(x_1 - x^*)$$
  - 可得
    $$\frac{x_1 - x^*}{x_2 - x^*} \approx \frac{x_0 - x^*}{x_1 - x^*}$$

Aitken方法（续）

- 由此推知

$$x^* \approx \frac{x_0x_2 - x_1^2}{x_0 - 2x_1 + x_2} = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_0 - 2x_1 + x_2}$$

- 这样构造出的改进公式确实不再含有关于导数的信息，但是它需要用两次迭代值进行加工

□ 如果将得到改进值作为一步，则计算公式如下

1. 校正： $\tilde{x}_{k+1} = \varphi(x_k)$
2. 再校正： $\bar{x}_{k+1} = \varphi(\tilde{x}_{k+1})$
3. 改进： $x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \dfrac{(\bar{x}_{k+1} - \tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1} - 2\tilde{x}_{k+1} + x_k}$

例6.6

- 用Aitken方法求解方程(6.2.3)：$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$
  - 前面曾经指出，求解该方程的下述迭代公式是发散的：

$$x_{k+1} = x_k^3 - 1 \tag{6.2.12}$$

  - 现以该公式为基础，形成Aitken算法，即

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k^3 - 1, \qquad \bar{x}_{k+1} = \tilde{x}_{k+1}^3 - 1$$

$$x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \frac{(\bar{x}_{k+1} - \tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1} - 2\tilde{x}_{k+1} + x_k}$$

例6.6（续）

- 仍取$x_0 = 1.5$，计算结果如下表所示

k	$\tilde{x}_k$	$\bar{x}_k$	x_k
0			1.5
1	2.37500	12.3965	1.41629
2	1.84092	5.23888	1.35565
3	1.49140	2.31728	1.32895
4	1.34710	1.44435	1.32480
5	1.32518	1.32714	1.32472

- 可以看到，将发散的迭代公式(6.2.12)通过Aitken方法处理后，竟获得了相当好的收敛性

目录

- 根的搜索
- 迭代法
- Newton法
- 弦截法与抛物线法
- 代数方程求根

Newton公式

- 对于方程$f(x)=0$，为要应用迭代法，必须先将它改写成$x=\varphi(x)$的形式，即需要针对所给的函数$f(x)$构造合适的迭代函数$\varphi(x)$
  - $\varphi(x)$可以有很多种
  - 例如，令$\varphi(x)=x+f(x)$，这时相应的迭代公式是
$$x_{k+1}=x_k+f(x_k) \tag{6.3.1}$$
  - 一般来说，这种迭代公式不一定收敛，或者收敛的速度缓慢

Newton公式（续）

- 运用加速技巧， $\bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k)$

$$x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + \frac{L}{1-L}(\bar{x}_{k+1} - x_k) \qquad (6.2.10)$$

- 对于迭代过程(6.3.1)，其加速公式为

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = x_k + f(x_k) \\ x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + \dfrac{L}{1-L}(\bar{x}_{k+1} - x_k) \end{cases}$$

  - 记$M = L - 1$，上面两个式子可以合并写成

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{M}$$

Newton公式（续）

- 这种迭代公式通常称为简化的Newton公式，其相应的迭代函数是

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{M} \tag{6.3.2}$$

  - 需要计算$M = L - 1$

- 注意到L是$\varphi'(x)$的估计值
  - $\varphi(x) = x + f(x)$，因此$\varphi'(x) = 1 + f'(x)$
  - 意味着，$M = L - 1$实际上是$f'(x)$的估计值

Newton公式（续）

- 如果用$f'(x)$代替式(6.3.2)中的M，则得如下迭代函数：

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- 其相应的迭代公式为Newton公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{6.3.3}$$

牛顿法与线性化

- 对于方程$f(x) = 0$，如果$f(x)$是线性函数，则对它求根是容易的

- Newton法实际上是一种线性化方法，其基本思想是将非线性方程$f(x) = 0$逐步归结为某种线性方程来求解
  - 设已知方程$f(x) = 0$有近似根x_k，将函数$f(x)$在点x_k展开，有

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

牛顿法与线性化（续）

- 于是方程$f(x)=0$可以近似表示为

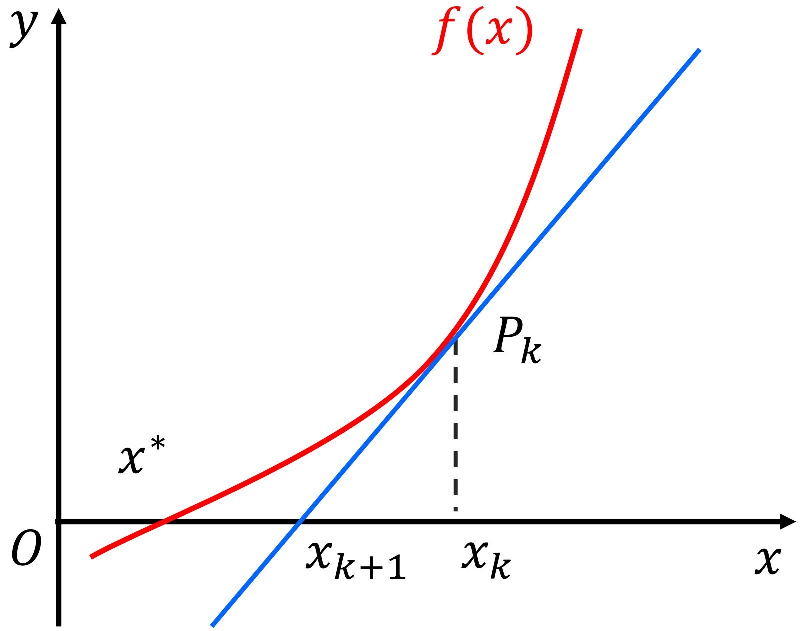
$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0 \tag{6.3.4}$$

- (6.3.4)是个线性方程，记其根为x_{k+1}，则x_{k+1}的计算公式就是Newton公式(6.3.3)

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{6.3.3}$$

Newton法的几何解释

- 方程$f(x)=0$的根x^*可解释为曲线$y=f(x)$与x轴的交点的横坐标
  - 过曲线$y=f(x)$上横坐标为x_k的点P_k引切线，注意到切线方程为
    $$y=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$
  - 将该切线与x轴的交点的横坐标x_{k+1}作为x^*的新的近似值
  - x_{k+1}满足式(6.3.4)
  - Newton法又称**切线法**



收敛速度

- 对于一种迭代过程，为了保证它是有效的，需要肯定它的收敛性，同时考察它的收敛速度，指在接近收敛的过程中迭代误差的下降速度
- 定义**6.2** 设迭代过程$x_{k+1} = \varphi(x_k)$收敛于方程$x = \varphi(x)$的根x^*，若迭代误差$e_k = x_k - x^*$在$k \to \infty$时成立下列渐进关系式

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p} \to C \quad （C \neq 0\text{为常数}）$$

则称该迭代过程是p阶收敛的

  - $p = 1$时称为线性收敛，$p > 1$时称为超线性收敛，$p = 2$时称为平方收敛

收敛性定理

- 定理**6.3** 对于迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$，若$\varphi^{(p)}(x)$在所求根x^*的邻近连续，并且

$$\begin{cases}\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0\\ \varphi^{(p)}(x^*)\neq 0\end{cases}\qquad(6.3.5)$$

  则该迭代过程在点x^*邻近是p阶收敛的

  - 由于$\varphi'(x^*)=0$，据定理6.2立即可以断定迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$具有局部收敛性
  - 再将$\varphi(x_k)$在根x^*处展开，利用条件(6.3.5)，则有

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\frac{\varphi^{(p)}(\zeta)}{p!}(x_k-x^*)^p$$

定理6.3（证明）

- 注意到

$$\varphi(x_k) = x_{k+1}, \qquad \varphi(x^*) = x^*$$

- 由上式得

$$x_{k+1} - x^* = \frac{\varphi^{(p)}(\zeta)}{p!}(x_k - x^*)^p$$

- 因此对于迭代误差， 有

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p} \to \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$$

这表明迭代过程$x_{k+1} = \varphi(x_k)$确实是p阶收敛的

Newton法的局部收敛性

- 由上述定理知，迭代过程的收敛速度依赖于迭代函数$\varphi(x)$的选取
  - 如果当$x \in [a,b]$时，$\varphi'(x) \neq 0$，则该迭代过程只可能是线性收敛的

- 对Newton公式(6.3.3)，其迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad \varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

  - 假定x^*是$f(x)$的一个单根，即$f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0$，则由上式知$\varphi'(x^*) = 0$，于是由定理6.3可知，Newton法在根$x^*$的邻近是平方收敛的

例6.7

□ 用Newton法解方程

$$xe^x - 1 = 0 \qquad (6.3.6)$$

- 此方程对应的Newton公式为 $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{1+x_k}$，取迭代初值$x_0 = 0.5$，迭代结果见下表

k	0	1	2	3
x_k	0.5	0.57102	0.56716	0.56714

- 所给方程 (6.3.6) 实际上是方程 $x = e^{-x}$ 的等价形式，比较例6.7与例6.5的计算结果可以看出Newton法的收敛速度是很快的

Newton法的计算步骤

1. 准备　选定初始近似值x_0，计算

$$f_0 = f(x_0), \quad f_0' = f'(x_0)$$

2. 迭代　按公式$x_1 = x_0 - \frac{f_0}{f_0'}$迭代一次，得到新的近似值$x_1$，计算

$$f_1 = f(x_1), \quad f_1' = f'(x_1)$$

3. 控制　若x_1满足$|\delta| < \varepsilon_1$或$|f_1| < \varepsilon_2$，则终止迭代，x_1即为所求根；否则转第4步

Newton法的计算步骤（续）

此处$\varepsilon_1, \varepsilon_2$是允许误差，且有

$$\delta = \begin{cases} |x_1 - x_0|, & |x_1| < C \\ \dfrac{|x_1 - x_0|}{|x_1|}, & |x_1| \geq C \end{cases}$$

其中C是取绝对误差或相对误差的控制常数，一般取$C = 1$

4. 修改　若迭代次数达到预定值N或$f_1' = 0$，则方法失败；否则以(x_1, f_1, f_1')代替 (x_0, f_0, f_0')转第2步继续迭代

Newton法的应用举例

- 对于给定正数a，应用Newton法解二次方程$x^2 - a = 0$，可导出开方值$\sqrt{a}$的计算程序

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right) \tag{6.3.7}$$

  - 下面证明这种迭代公式对于任意初始值$x_0 > 0$都是收敛的（并不局限在x^*的邻近）
  - 对式(6.3.7)配方，易知

$$x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_k}\left(x_k - \sqrt{a}\right)^2$$

$$x_{k+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2x_k}\left(x_k + \sqrt{a}\right)^2$$

Newton法的应用举例（续）

- 将以上两式相除，得

$$\frac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{x_{k+1}+\sqrt{a}}=\left(\frac{x_k-\sqrt{a}}{x_k+\sqrt{a}}\right)^2$$

- 据此反复递推，有

$$\frac{x_k-\sqrt{a}}{x_k+\sqrt{a}}=\left(\frac{x_0-\sqrt{a}}{x_0+\sqrt{a}}\right)^{2^k} \qquad (6.3.8)$$

- 记$q=\frac{x_0-\sqrt{a}}{x_0+\sqrt{a}}$，整理式(6.3.8)，得

$$x_k-\sqrt{a}=2\sqrt{a}\frac{q^{2^k}}{1-q^{2^k}}$$

- 对于任意$x_0>0$，总有$|q|<1$，故由上式推知，当$k\to\infty$时$x_k\to\sqrt{a}$，即迭代过程恒收敛

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right) \qquad (6.3.7)$$

例6.8

求$\sqrt{115}$

- 取初值$x_0=10$，对$a=115$按式(6.3.7)迭代3次，便得到精度为10^{-6}的结果，见下表

k	0	1	2	3	4
x_k	10	10.750000	10.723837	10.723805	10.723805

- 由于式(6.3.7)对于任意初值$x_0>0$均收敛，且收敛速度快，故可取确定的初值，如$x_0=1$，来编写通用的程序
- 用该通用程序求$\sqrt{115}$，也只需迭代7次，即可得到以上结果10.723805

举例

- 对于给定的正数a，对方程$\frac{1}{x}-a=0$应用Newton法，可导出求$\frac{1}{a}$而不用除法的计算程序，也即

$$x_{k+1}=x_k(2-ax_k)$$

  - 这个算法有实际意义，早期设计电子计算机时，为节省硬件设备，曾运用这种技术避开除法操作
  - 该算法在初值x_0满足$0<x_0<\frac{2}{a}$时收敛

举例（续）

- 由于

$$x_{k+1}-\frac{1}{a}=x_k(2-ax_k)-\frac{1}{a}=-a\left(x_k-\frac{1}{a}\right)^2$$

因此，对$r_k=1-ax_k$，有递推公式

$$r_{k+1}=r_k^2$$

- 据此反复递推，有

$$r_k=r_0^{2^k}$$

- 若初值满足$0<x_0<\frac{2}{a}$，则对$r_0=1-ax_0$有$|r_0|<1$。这时有$r_k\to 0$，因此迭代是收敛的

Newton法的收敛问题

- 一般来说，Newton法的收敛性依赖于初值x_0的选取
  - 若x_0偏离所求根x^*比较远，Newton法可能发散
- 用Newton法求方程

$$x^3 - x - 1 = 0 \tag{6.3.9}$$

在$x = 1.5$附近的一个根x^*

  - 设取迭代初值$x_0 = 1.5$，用Newton公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1} \tag{6.3.10}$$

计算得$x_1 = 1.34783, x_2 = 1.32520, x_3 = 1.32472$

Newton法的收敛问题（续）

- $x_0 = 1.5$时，迭代三次得到的结果x_3有六位有效数字

- 如果改用$x_0 = 0.6$作为迭代初值，依Newton公式(6.3.10)迭代一次，得

$$x_1 = 17.9$$

比$x_0 = 0.6$更偏离所求根$x^* = 1.32472$

□ 因此，需要对Newton法进行改进

Newton下山法

- 为防止迭代发散，对迭代过程再附加一项要求，即具有单调性

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)| \tag{6.3.11}$$

  - 满足该要求的算法称为下山法

- 将Newton法与下山法结合起来使用，即可在下山法保证函数值稳定下降的前提下，用Newton法加快收敛速度
  - 将Newton法的计算结果$\bar{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$与前一步的近似值$x_k$适当加权平均，得到新的改进值

Newton下山法（续）

$$x_{k+1} = \lambda \bar{x}_{k+1} + (1-\lambda)x_k \qquad (6.3.12)$$

- 其中λ $(0 < \lambda \leq 1)$称为下山因子。在挑选下山因子时，希望使单调性条件(6.3.11)成立

下山因子的选择是一个逐步探索的过程

- 设从$\lambda = 1$开始反复将λ减半进行试算，如果能定出值λ使单调性条件(6.3.11)成立，则称“下山成功”
- 与此相反，如果在上述过程中找不到使条件(6.3.11)成立的下山因子λ，则称“下山失败”，这时需另选初值x_0重算

目录

- 根的搜索
- 迭代法
- Newton法
- 弦截法与抛物线法
- 代数方程求根

研究动机

- 在用Newton公式(6.3.3)求x_{k+1}时，不但要求给出函数值$f(x_k)$，而且要求提供导数值$f'(x_k)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{6.3.3}$$

  - 当函数f比较复杂时，提供它的导数值往往是有困难的

- 弦截法与抛物线法
  - 设法利用迭代过程中的“老信息” $f(x_k)$, $f(x_{k-1}), \cdots, f(x_{k-r})$来回避导数值$f'(x_k)$的计算
  - 导出这类求根方法的基础是插值原理

弦截法与抛物线法

- 设$x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-r}$是$f(x) = 0$的一组近似根
  - 利用函数值$f(x_k), f(x_{k-1}), \cdots f(x_{k-r})$构造插值多项式$P_r(x)$
  - 适当选取$P_r(x) = 0$的一个根作为$f(x) = 0$的新近似根x_{k+1}

- 这就确定了一个迭代过程，记迭代函数为φ，则

$$x_{k+1} = \varphi(x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-r})$$

  - 下面具体考察$r = 1$（弦截法）和$r = 2$（抛物线法）两种情形

弦截法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (6.3.3)$$

- 设x_k, x_{k-1}是$f(x) = 0$的近似根，利用$f(x_k)$, $f(x_{k-1})$构造一次插值多项式$P_1(x)$，并用$P_1(x) = 0$的根作为$f(x) = 0$的新近似根x_{k+1}
  - 易得

$$P_1(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k) \quad (6.4.1)$$

  - 因此有

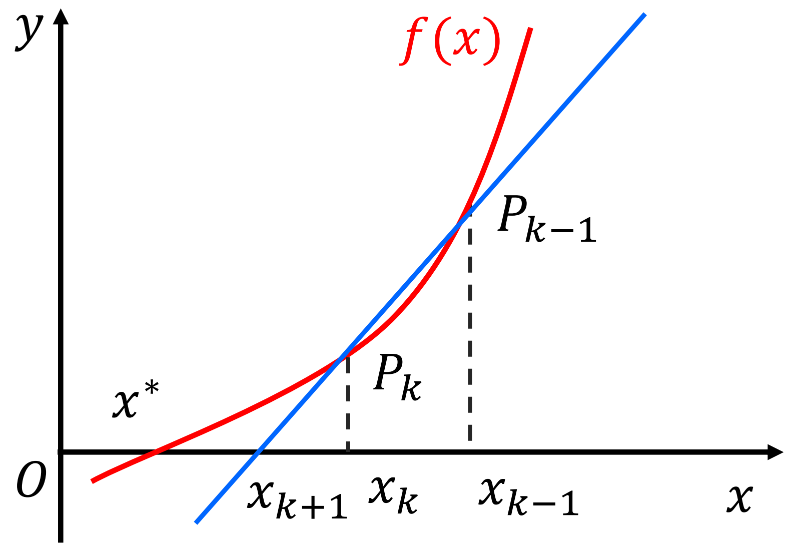
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}) \quad (6.4.2)$$

  - 导出的迭代公式(6.4.2)可看作Newton公式中的导数$f'(x_k)$用差商$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$取代的结果

弦截法的几何意义

- 曲线$y = f(x)$上横坐标为x_k, x_{k-1}的点分别记作P_k, P_{k-1}，则弦线P_kP_{k-1}的斜率等于差商值$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$，其方程是

$$f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k) = 0$$



  - x_{k+1}是弦线P_kP_{k-1}与x轴交点的横坐标
  - 因此，被称为弦截法

弦截法 v.s. Newton法

- 弦截法与Newton法都是线性化方法，但有本质区别

- Newton法计算x_{k+1}时只用到前一步的值x_k

- 弦截法在求x_{k+1}时要用到前面两步的结果x_k, x_{k-1}，因此使用这种方法必须先给出两个开始值x_0, x_1

例6.9

- 用弦截法解方程：$f(x) = xe^x - 1 = 0$
  - 设取$x_0 = 0.5, x_1 = 0.6$作为开始值，用弦截法求得的结果如下表所示

k	0	1	2	3	4
x_k	0.5	0.6	0.56532	0.56709	0.56714

  - 比较例6.7用Newton法的计算结果，可见弦截法的收敛速度也是相当快的

k	0	1	2	3
x_k	0.5	0.57102	0.56716	0.56714

弦截法的收敛性

- 弦截法具有超线性的收敛性

- 定理**6.4** 假设$f(x)$在根x^*的邻域Δ: $|x-x^*|\le\delta$内具有二阶连续导数，且对于任意$x\in\Delta$，有$f'(x)\ne 0$，又设初值$x_0,x_1\in\Delta$，那么当邻域Δ充分小时，弦截法(6.4.2)将按阶$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$收敛到根$x^*$

- Newton法在根x^*的邻近是平方收敛的

弦截法的计算步骤

1. 准备　选取初始近似值x_0, x_1，计算相应的函数值

$$f_0 = f(x_0), \qquad f_1 = f(x_1)$$

2. 迭代　按公式

$$x_2 = x_1 - f_1 / \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

迭代一次，得新的近似值x_2，计算$f_2 = f(x_2)$

3. 控制　如果x_2满足$|\delta| \le \varepsilon_1$或$|f_2| \le \varepsilon_2$，则认为过程收敛，终止迭代并输出$x_2$为所求根；否则执行步骤4

弦截法的计算步骤（续）

此处$\varepsilon_1, \varepsilon_2$是允许误差，且有

$$\delta = \begin{cases} |x_2 - x_1|, & |x_2| < C \\ \dfrac{|x_2 - x_1|}{|x_2|}, & |x_2| \geq C \end{cases}$$

其中C是预先指定的控制常数

4. 修改　若迭代次数达到预先指定的次数N，则认为过程不收敛，计算失败；否则以$(x_1, f_1), (x_2, f_2)$分别代替$(x_0, f_0), (x_1, f_1)$，继续进行第2步的迭代

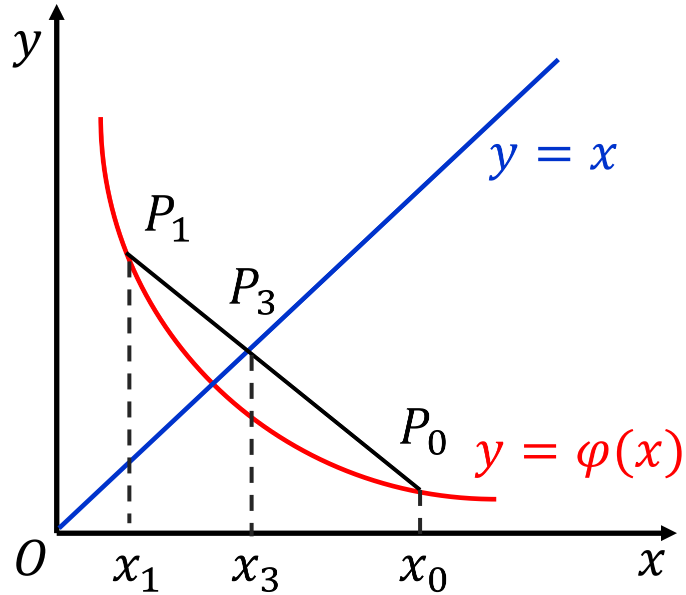
Aitken加速公式

- 用弦截法求解形如$x = \varphi(x)$的方程
  - 设x_0为方程$x = \varphi(x)$的一个近似根，依据迭代值$x_1 = \varphi(x_0)$， $x_2 = \varphi(x_1)$ 在曲线$y = \varphi(x)$上定出两点$P_0(x_0, x_1)$和$P_1(x_1, x_2)$
  - 引弦线P_0P_1，设与直线$y = x$交于一点P_3
  - 则点P_3的坐标x_3满足

$$x_3 = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}(x_3 - x_0)$$

  - 由此解出Aitken加速公式

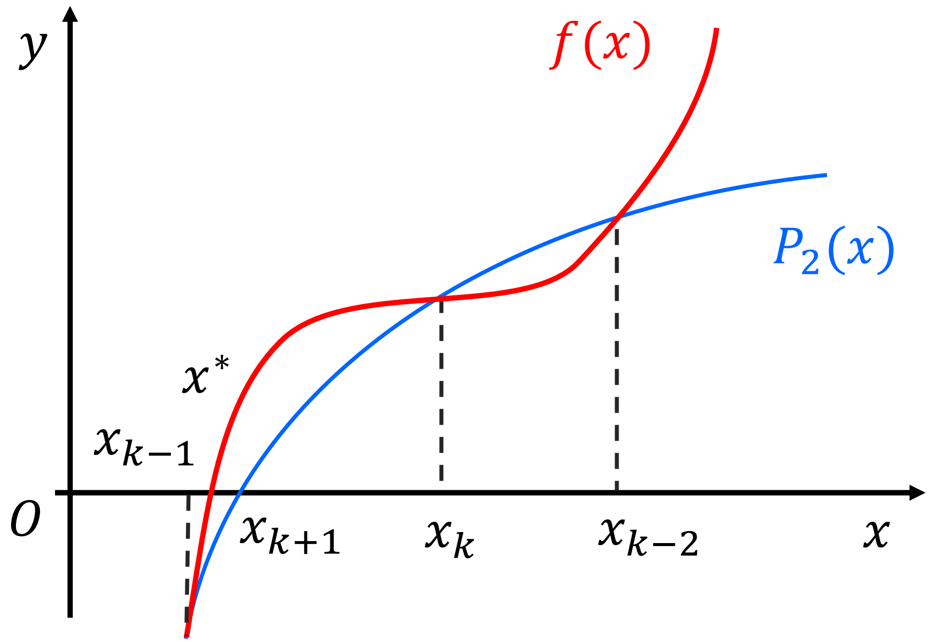
$$x_3 = \frac{x_0 x_2 - x_1^2}{x_0 - 2x_1 + x_2}$$



抛物线法

- 已知方程$f(x)=0$的三个近似根x_k, x_{k-1}, x_{k-2}，以这三点为节点构造二次插值多项式$P_2(x)$，并适当选取$P_2(x)$的一个零点x_{k+1}作为新的近似根，这样确定的迭代过程称为抛物线法

用抛物线$y=P_2(x)$与x轴的交点x_{k+1}作为所求根x^*的近似位置



抛物线法的计算公式

- 插值多项式

$$P_2(x) = f(x_k) + f[x_k, x_{k-1}](x - x_k) \\ + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x - x_k)(x - x_{k-1})$$

有两个零点

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}} \qquad (6.4.3)$$

- 其中

$$\omega = f[x_k, x_{k-1}] + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1})$$

抛物线法的计算公式（续）

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}} \quad (6.4.3)$$

- 为了从式(6.4.3)中确定一个值x_{k+1}，需要讨论根式前的正负号
  - 在x_k, x_{k-1}, x_{k-2}三个近似根中，自然假定以x_k更接近所求的根x^*，这时，为了保证精度，可以选式(6.4.3)中较接近x_k的一个值作为新的近似根x_{k+1}
  - 为此，只要令根式前的符号与ω的符号相同

例6.10

- 用抛物线法求解方程$f(x)=xe^x-1=0$
  - 设用表6.9中的前三个值$x_0=0.5, x_1=0.6, x_2=0.56532$作为开始值，计算得

$$
\begin{aligned}
&f(x_0)=-0.175639, && f(x_1)=-0.093271,\\
&f(x_2)=-0.005031, && f[x_1,x_0]=2.68910,\\
&f[x_2,x_1]=2.83373, && f[x_2,x_1,x_0]=2.21418,
\end{aligned}
$$

  - 故$\omega=f[x_2,x_1]+f[x_2,x_1,x_0](x_2-x_1)=2.75694$
  - 代入式(6.4.3)，求得

$$x_3=x_2-\frac{2f(x_2)}{\omega+\sqrt{\omega^2-4f(x_2)f[x_2,x_1,x_0]}}=0.56714$$

比弦截法收敛得更快

抛物线法的收敛速率

- 在一定条件下可以证明，对于抛物线法，迭代误差有下列渐近关系式：

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^{1.840}} \to \left|\frac{f'''(x^*)}{6f'(x^*)}\right|^{0.42}$$

  - 可见抛物线法也是超线性收敛的，收敛的阶为 $p = 1.840$，收敛速率比弦截法更接近Newton法

- 弦截法(6.4.2)将按阶$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$收敛到根$x^*$

抛物线法的计算步骤

1. 准备　选定初始近似值x_0, x_1, x_2，计算$f(x)$对应的函数值f_0, f_1, f_2，以及

$$\lambda_2 = \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}$$

2. 迭代　计算

$$\delta_2 = 1 + \lambda_2, \qquad a = f_0\lambda_2^2 - f_1\lambda_2\delta_2 + f_2\lambda_2,$$
$$b = f_0\lambda_2^2 - f_1\delta_2^2 + f_2(\lambda_2 + \delta_2), \qquad c = f_2\delta_2,$$
$$\lambda_3 = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

分母中的$\pm$号表示取分母的模较大的一个

抛物线法的计算步骤（续）

于是得新的近似值$x_3 = x_2 + \lambda_3(x_2 - x_1)$，再计算$f_3 = f(x_3)$

3. 控制　若x_3满足$|\delta| \le \varepsilon_1$或$|f_3| \le \varepsilon_2$（$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta$的意义与弦截法的计算步骤中的相同），则终止迭代，输出x_3为所求根；否则执行第4步

4. 修改　如果迭代次数达到预先设定的次数N，则认为过程不收敛，输出计算失效标志；否则以$(x_1, x_2, x_3, f_1, f_2, f_3, \lambda_3)$分别代替$(x_0, x_1, x_2, f_0, f_1, f_2, \lambda_2)$，转第2步继续迭代

目录

代数方程求根

- 如果$f(x)$是多项式，则$f(x) = 0$特别地称为代数方程
  - 前面介绍的求根方法原则上也适用于解代数方程
  - 由于多项式的特殊性，可以针对其特点提供更为有效的算法
- 多项式求值的秦九韶算法
  - 多项式求值、求导很方便
- 代数方程的Newton法
- 劈因子法

多项式求值的秦九韶算法

- 设给定多项式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

其中系数$a_i\ (0 \le i \le n)$均为实数

- 如何快速计算函数值$f(x_0)$及其各阶导数?
  - 用一次式$x - x_0$除$f(x)$，商记作$P(x)$，余数显然等于$f(x_0)$，即有

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)P(x) \tag{6.5.1}$$

  - 为了确定$P(x)$与$f(x_0)$，定义

$$P(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

多项式求值的秦九韶算法（续）

- 得到两种写法：

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) P(x)$$

$$= f(x_0) + (x - x_0)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2} x + b_{n-1})$$

- 比较两端同次幕的系数，得

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_i = b_i + x_0 b_{i-1}, \qquad 1 \le i \le n-1 \\ a_n = f(x_0) - x_0 b_{n-1} \end{cases}$$

多项式求值的秦九韶算法（续）

- 从而有

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_i = a_i + x_0 b_{i-1}, \qquad 1 \le i \le n \\ f(x_0) = b_n \end{cases} \qquad (6.5.2)$$

- 这里提供的一种计算函数值$f(x_0)$的有效算法称为秦九韶法
  - 外国文献中通常称这种算法为Horner算法，其实Horner的工作比秦九韶晚了五六个世纪
  - 这种算法的优点是计算量小，结构紧凑，容易编制计算程序
  - 在计算$f(x_0)$的同时，还得到了$P(x)$的系数

多项式求值的秦九韶算法（续）

- 继续讨论如何求解$f'(x_0)$？
  - 进一步考察$f(x)$的Taylor展开式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

  - 对比式(6.5.1)

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)P(x) \tag{6.5.1}$$

可知

$$P(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-1}$$

多项式求值的秦九韶算法（续）

- 由此可见，导数$f'(x_0)$又可看作$P(x)$用因式$x-x_0$相除得出的余数，即有

$$P(x)=f'(x_0)+(x-x_0)Q(x)$$

其中$Q(x)$是$n-2$次多项式

- 注意到$P(x)$的具体形式在计算$f(x_0)$时已经得到，因此可以针对上式重复使用秦九韶算法，即可得到$f'(x_0)$和$Q(x)$

- 定义 $Q(x)=c_0x^{n-2}+c_1x^{n-3}+\cdots+c_{n-3}x+c_{n-2}$

多项式求值的秦九韶算法（续）

- 再次利用(6.5.2)中的算法

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_i = a_i + x_0 b_{i-1}, \qquad 1 \le i \le n \\ f(x_0) = b_n \end{cases} \tag{6.5.2}$$

可得

$$\begin{cases} c_0 = b_0 \\ c_i = b_i + x_0 c_{i-1}, \qquad 1 \le i \le n-1 \\ f'(x_0) = c_{n-1} \end{cases} \tag{6.5.3}$$

- 继续这一过程，可以依次求出$f(x)$在点x_0处的各阶导数

代数方程的Newton法

- 再就多项式方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

考察Newton公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{6.5.4}$$

- 根据式(6.5.2)与式(6.5.3)，式(6.5.4)中的函数值$f(x_k)$和导数值$f'(x_k)$均可方便地求出

$$\begin{cases} b_0=a_0 \\ b_i=a_i+x_kb_{i-1}, \qquad 1\le i\le n \\ f(x_k)=b_n \end{cases} \tag{6.5.5}$$

代数方程的Newton法

- 再就多项式方程

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

考察Newton公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (6.5.4)$$

- 根据式(6.5.2)与式(6.5.3)，式(6.5.4)中的函数值$f(x_k)$和导数值$f'(x_k)$均可方便地求出

$$\begin{cases} c_0 = b_0 \\ c_i = b_i + x_k c_{i-1}, & 1 \le i \le n-1 \\ f'(x_k) = c_{n-1} \end{cases} \qquad (6.5.6)$$

劈因子法

- 如果能从多项式$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$中分离出一个二次因式

$$\omega^*(x) = x^2 + u^*x + v^*$$

就能获得它的一对共轭复根

- 劈因子法的基本思想：从某个近似的二次因子

$$\omega(x) = x^2 + ux + v$$

出发，用某种迭代过程使之逐步精确化

劈因子法（续）

- 用二次式$\omega(x)$除$f(x)$，商记作$P(x)$，它是个$n-2$次多项式，余式为一次式，记作r_0x+r_1

$$f(x)=\left(x^2+ux+v\right)P(x)+r_0x+r_1 \tag{6.5.7}$$

  - 显然r_0,r_1均为u,v的函数$\begin{cases} r_0=r_0(u,v) \\ r_1=r_1(u,v) \end{cases}$
- 劈因子法的目的是逐步修改u,v的值，使余数r_0,r_1变得很小
- 考察方程

$$\begin{cases} r_0(u,v)=0 \\ r_1(u,v)=0 \end{cases} \tag{6.5.8}$$

  - 这是关于u,v的非线性方程组

劈因子法（续）

- 设(6.5.8)有解(u^*, v^*)，将$r_0(u^*, v^*) = 0$, $r_1(u^*, v^*) = 0$的左端在(u, v)展开到一阶项，有

$$\begin{cases} r_0 + \dfrac{\partial r_0}{\partial u}(u^* - u) + \dfrac{\partial r_0}{\partial v}(v^* - v) \approx 0 \\ r_1 + \dfrac{\partial r_1}{\partial u}(u^* - u) + \dfrac{\partial r_1}{\partial v}(v^* - v) \approx 0 \end{cases}$$

- 用Newton法的处理思想，将非线性方程组(6.5.8)线性化，归结得到下列线性方程组

$$\begin{cases} r_0 + \dfrac{\partial r_0}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial r_0}{\partial v}\Delta v = 0 \\ r_1 + \dfrac{\partial r_1}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial r_1}{\partial v}\Delta v = 0 \end{cases} \qquad (6.5.9)$$

劈因子法（续）

- 从方程组(6.5.9)解出增量$\Delta u, \Delta v$，即可得到改进后的二次因式

$$\omega(x) = x^2 + (u + \Delta u)x + v + \Delta v$$

- 关键问题：如何得到方程组(6.5.9)的各个系数

$$\begin{cases} r_0 + \frac{\partial r_0}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial r_0}{\partial v}\Delta v = 0 \\ r_1 + \frac{\partial r_1}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial r_1}{\partial v}\Delta v = 0 \end{cases} \tag{6.5.9}$$

$$f(x) = \left(x^2 + ux + v\right)P(x) + r_0 x + r_1 \tag{6.5.7}$$

劈因子法（续）

1. 计算r_0和r_1：将

$$P(x) = b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \cdots + b_{n-3} x + b_{n-2}$$

代入式(6.5.7)

$$f(x) = \left(x^2 + ux + v\right)P(x) + r_0 x + r_1 \qquad (6.5.7)$$

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

- 比较各次幂的系数，易知

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 + ub_0 \\ a_i = b_i + ub_{i-1} + vb_{i-2}, \qquad 2 \le i \le n-2 \\ a_{n-1} = ub_{n-2} + vb_{n-3} + r_0 \\ a_n = vb_{n-2} + r_1 \end{cases}$$

劈因子法（续）

- 于是r_0, r_1的计算公式为

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 - ub_0 \\ b_i = a_i - ub_{i-1} - vb_{i-2}, & 2 \le i \le n \\ r_0 = b_{n-1} \\ r_1 = b_n + ub_{n-1} \end{cases} \qquad (6.5.10)$$

- 注意到，在计算r_0, r_1的同时，我们还得到了$P(x)$的系数

$$P(x) = b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \cdots + b_{n-3} x + b_{n-2}$$

劈因子法（续）

2. 计算$\frac{\partial r_0}{\partial v},\frac{\partial r_1}{\partial v}$：对式(6.5.7)关于$v$求导

$$f(x)=\left(x^2+ux+v\right)P(x)+r_0x+r_1 \qquad (6.5.7)$$

得

$$P(x)=-\left(x^2+ux+v\right)\frac{\partial P}{\partial v}+s_0x+s_1 \qquad (6.5.11)$$

$$s_0=-\frac{\partial r_0}{\partial v},\qquad s_1=-\frac{\partial r_1}{\partial v} \qquad (6.5.12)$$

- 由(6.5.11)可知，用x^2+ux+v除$P(x)$，作为余式可得s_0x+s_1
- 由于$P(x)$是$n-2$次多项式，这里商$\frac{\partial P}{\partial v}$是$n-4$次多项式

劈因子法（续）

$$P(x) = -\left(x^2 + ux + v\right)\frac{\partial P}{\partial v} + s_0 x + s_1 \qquad (6.5.11)$$

- 记 $\dfrac{\partial P}{\partial v} = c_0 x^{n-4} + c_1 x^{n-5} + \cdots + c_{n-5} x + c_{n-4}$
- 注意到，$P(x)$已经在第一步计算得到，因此可以继续模仿(6.5.10)的计算过程，来计算s_0和s_1

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 - ub_0 \\ b_i = a_i - ub_{i-1} - vb_{i-2}, \qquad 2 \le i \le n \\ r_0 = b_{n-1} \\ r_1 = b_n + ub_{n-1} \end{cases} \qquad (6.5.10)$$

劈因子法（续）

- 得到

$$\begin{cases} c_0 = b_0 \\ c_1 = b_1 - ub_0 \\ c_i = b_i - uc_{i-1} - vc_{i-2}, \qquad 2 \leq i \leq n-2 \\ s_0 = c_{n-3} \\ s_1 = c_{n-2} + uc_{n-3} \end{cases}$$

- 根据

$$s_0 = -\frac{\partial r_0}{\partial v}, \qquad s_1 = -\frac{\partial r_1}{\partial v} \qquad (6.5.12)$$

可知

$$\frac{\partial r_0}{\partial v} = -s_0, \qquad \frac{\partial r_1}{\partial v} = -s_1$$

$$P(x) = -(x^2+ux+v)\frac{\partial P}{\partial v} + s_0 x + s_1 \quad (6.5.11)$$

劈因子法（续）

3. 计算$\frac{\partial r_0}{\partial u}$, $\frac{\partial r_1}{\partial u}$：对式(6.5.7)关于$u$求导

$$f(x) = (x^2+ux+v)P(x) + r_0 x + r_1 \qquad (6.5.7)$$

得

$$xP(x) = -(x^2+ux+v)\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial r_0}{\partial u}x - \frac{\partial r_1}{\partial u}$$

- 另外，由式(6.5.11)有

$$\begin{aligned} xP(x) &= -(x^2+ux+v)x\frac{\partial P}{\partial v} + (s_0 x + s_1)x \\ &= -(x^2+ux+v)\left(x\frac{\partial P}{\partial v} - s_0\right) - (us_0 - s_1)x - vs_0 \end{aligned}$$

劈因子法（续）

- 对比

$$xP(x) = -(x^2+ux+v)\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial r_0}{\partial u}x - \frac{\partial r_1}{\partial u}$$

$$xP(x) = -(x^2+ux+v)\left(x\frac{\partial P}{\partial v} - s_0\right) - (us_0 - s_1)x - vs_0$$

可得

$$\frac{\partial r_0}{\partial u} = us_0 - s_1, \qquad \frac{\partial r_1}{\partial u} = vs_0$$

总结

- 根的搜索
  - 逐步搜索法、二分法、二分法的收敛性
- 迭代法
  - 收敛条件、误差估计、局部收敛性
  - 迭代公式的加工、Aitken方法
- Newton法
  - Newton公式、几何解释
  - 局部收敛性、Newton下山法

课程主页查看作业！

总结

- 弦截法与抛物线法
  - 弦截法、几何意义、收敛性
  - 抛物线法、几何意义、收敛性

- 代数方程求根
  - 多项式求值的秦九韶算法
  - 代数方程的Newton法
  - 劈因子法