数字图像处理

傅立叶变换性质

傅立叶变换

- 一、数字图像处理和傅立叶变换
- 二、傅立叶变换性质
- 三、线性系统和傅立叶变换

1 数字图像处理和傅立叶变换

- 1）频谱的图像显示

谱图象：就是把$|F(u,v)|$作为亮度显示出来。

人的视觉可分辨灰度有限：

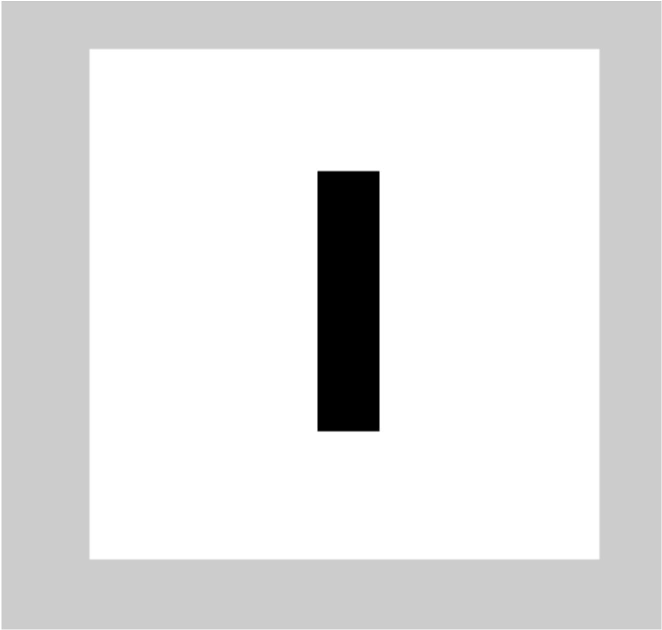
$$D(u,v)=\log\left(1+|F(u,v)|\right)$$

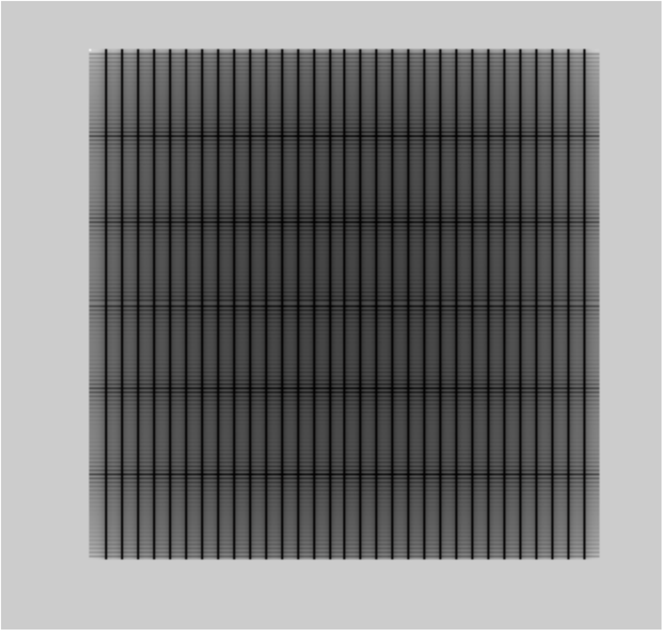
实用公式常用K系数调整：

$$D(u,v)=\log\left(1+K|F(u,v)|\right)$$

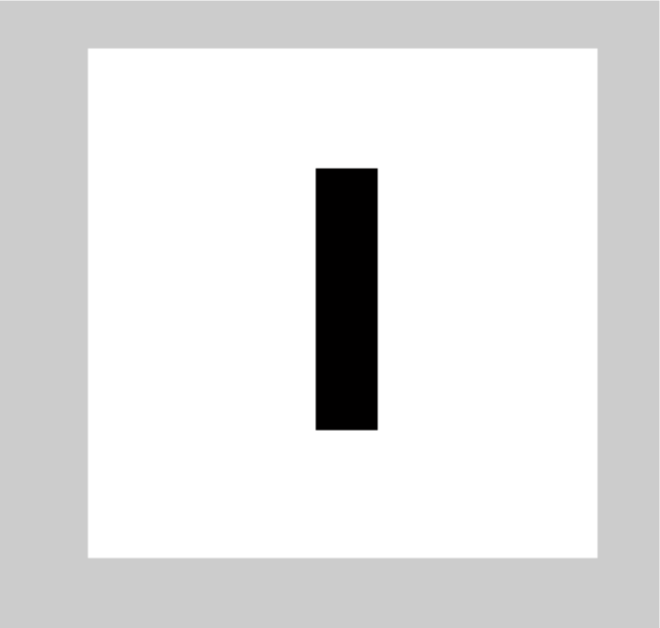
- 谱图像加深对图像的视觉理解，如一幅遥感图像受正弦网纹的干扰，从谱图像中可看出干扰的空间频率并有效去除。

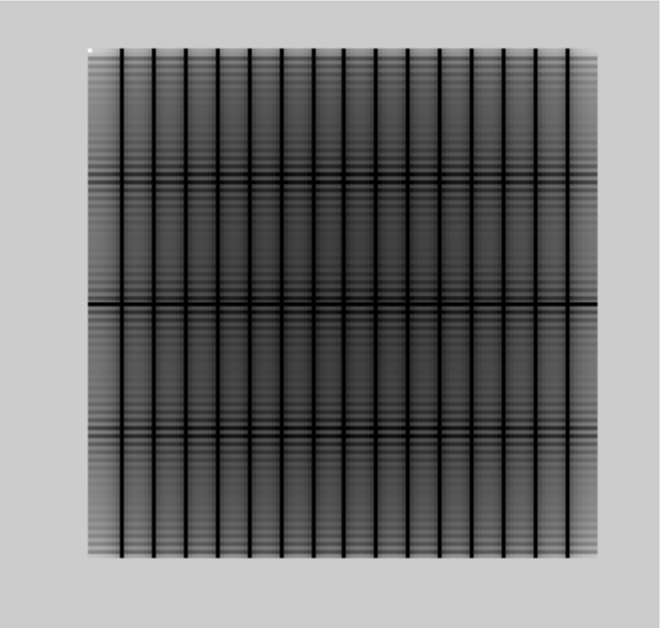
1 数字图像处理和傅立叶变换





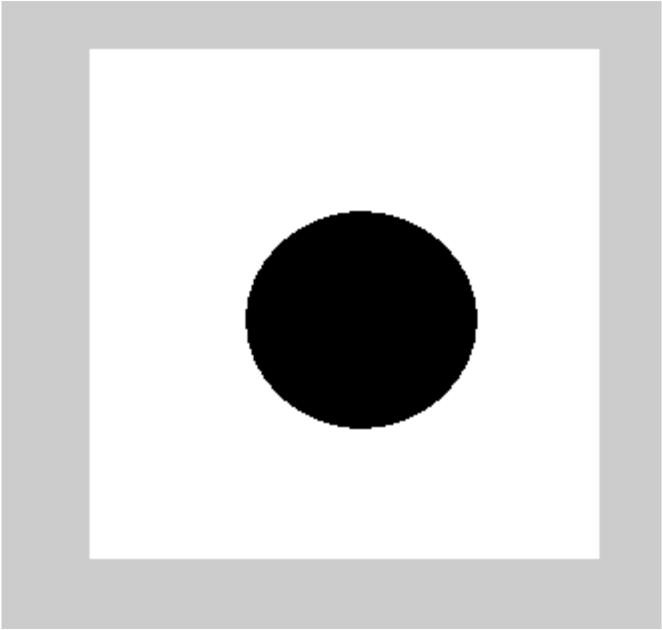
1 数字图像处理和傅立叶变换

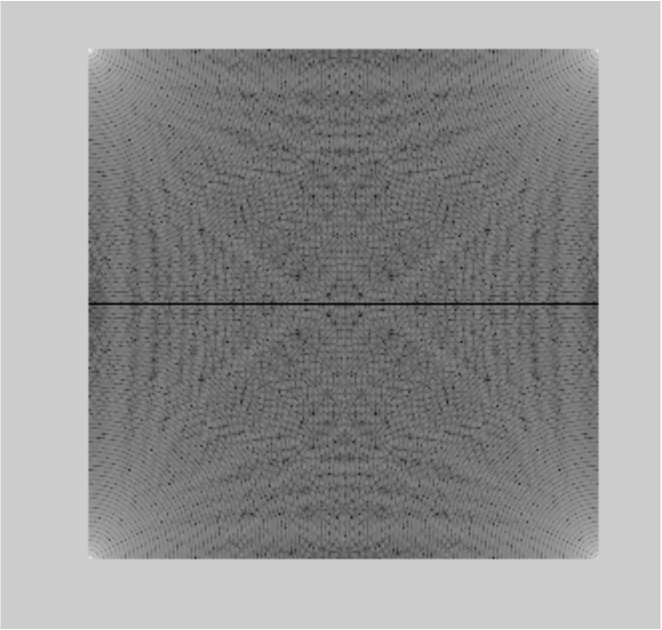




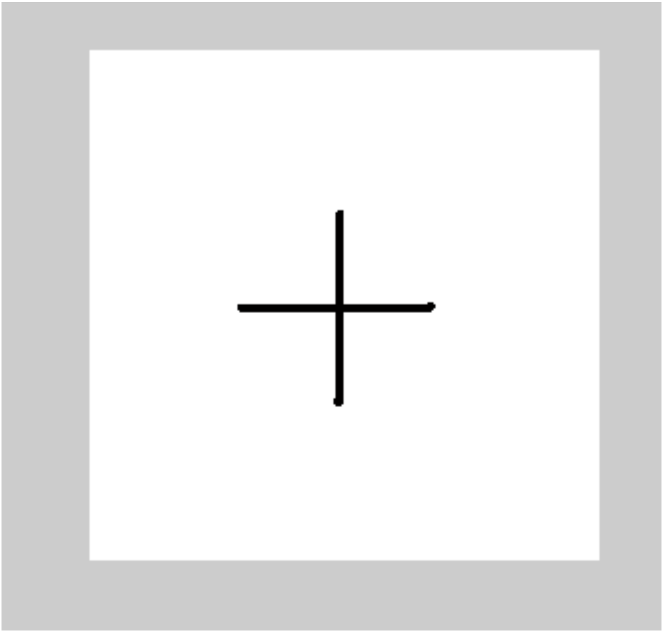
采样数减少一半

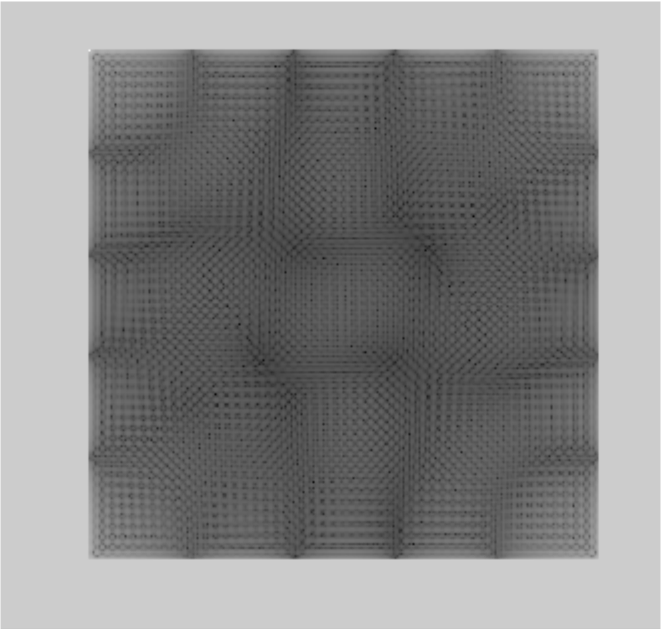
1 数字图像处理和傅立叶变换



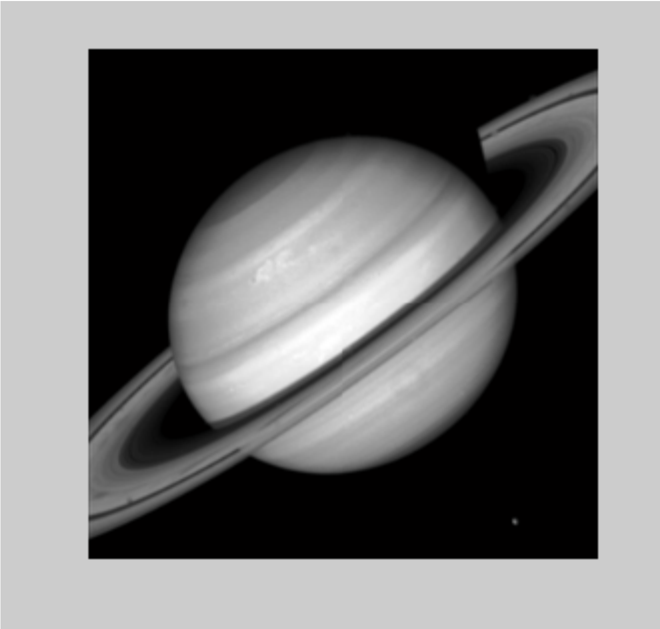


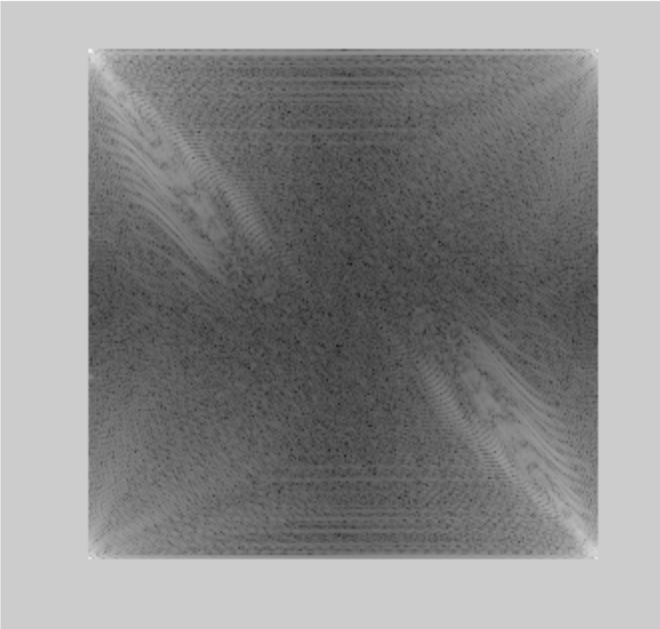
1 数字图像处理和傅立叶变换





1 数字图像处理和傅立叶变换





1 数字图像处理和傅立叶变换

- **2）频谱的频域移中**

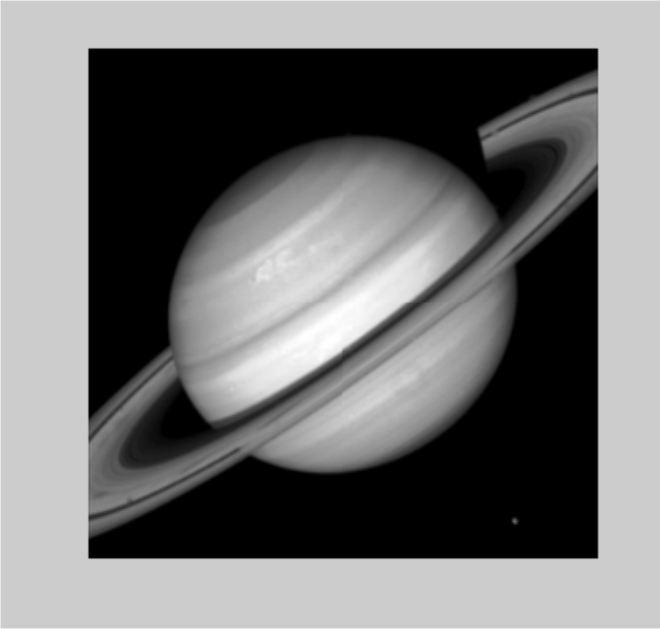
傅立叶变换以零点为中心，导致谱图象最亮点在图象的左上角。

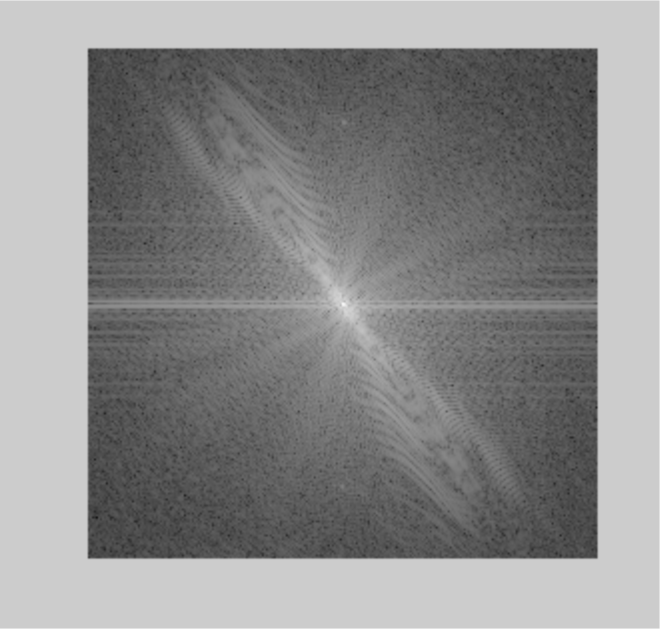
为符合正常习惯，将$F(u,v)$的原零点从左上角移到显示屏的中心。

$$\because F(u-u_0, v-v_0) = e^{-j2\pi(u_0/N + v_0/N)} F(u,v)$$

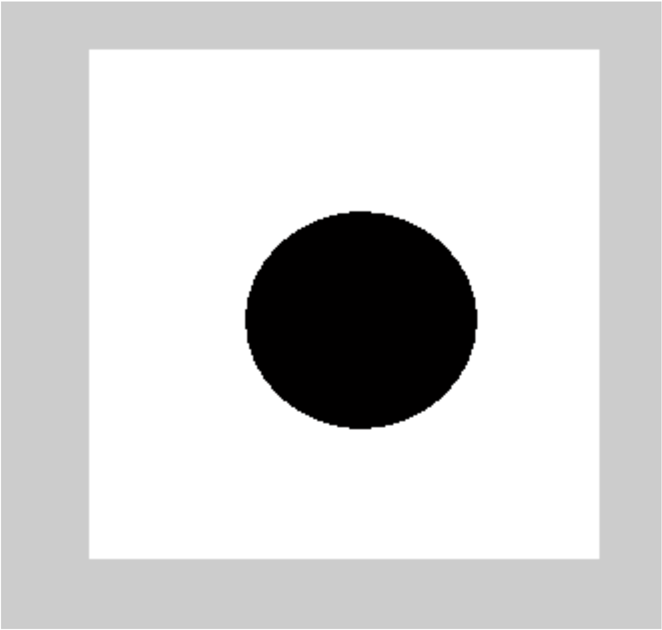
$$\therefore F\left(u-\frac{N}{2}, v-\frac{N}{2}\right) = F(u)$$

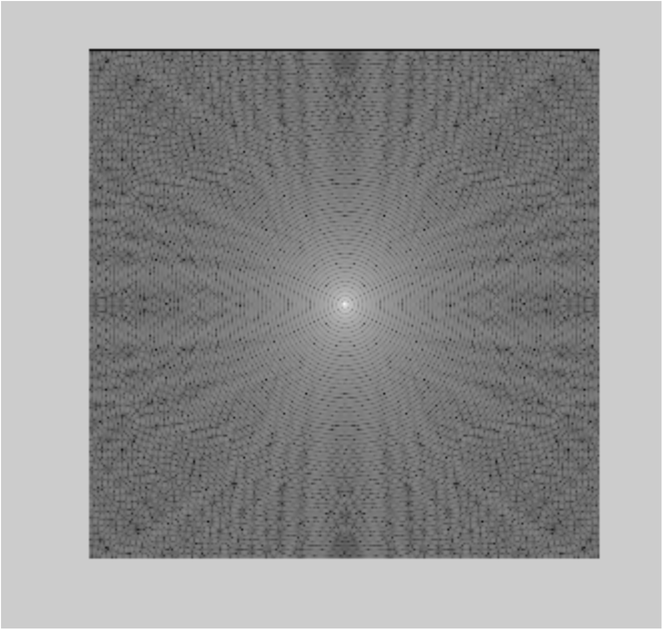
1 数字图像处理和傅立叶变换





1 数字图像处理和傅立叶变换





5 傅立叶变换性质

- 1）加法定理
  - 时域或空域内的相加对应于频域内的相加。

设有两个傅立叶变换对

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi ut}dt \quad G(u)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ut}dt$$

若$r(t)=f(t)+g(t)$

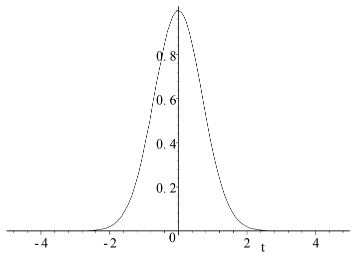
则$R(u)=\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)+g(t)]e^{-j2\pi ut}dt$

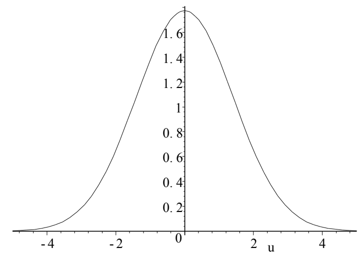
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi ut}dt+\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ut}dt$$

$$=F(u)+G(u)$$

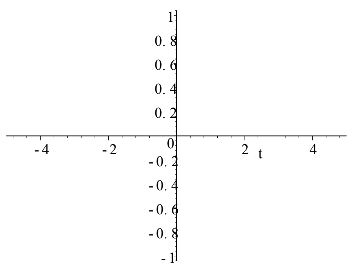
2 傅立叶变换性质

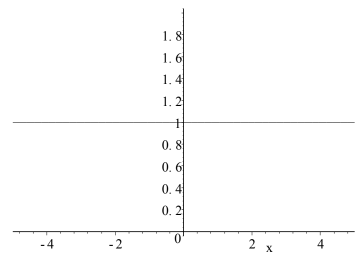
高斯函数



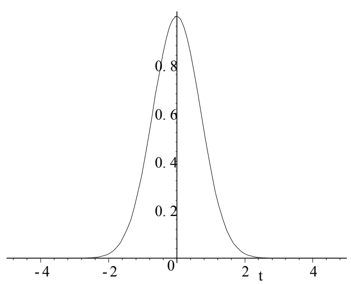


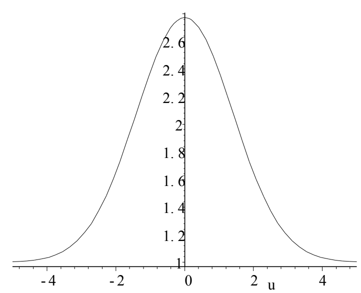
冲激函数





和





原点为[0,1]

2 傅立叶变换性质

- 2）位移定理
  - 函数位移不改变傅立叶变换的幅值。

$$F(v)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-j2\pi vt}dt$$

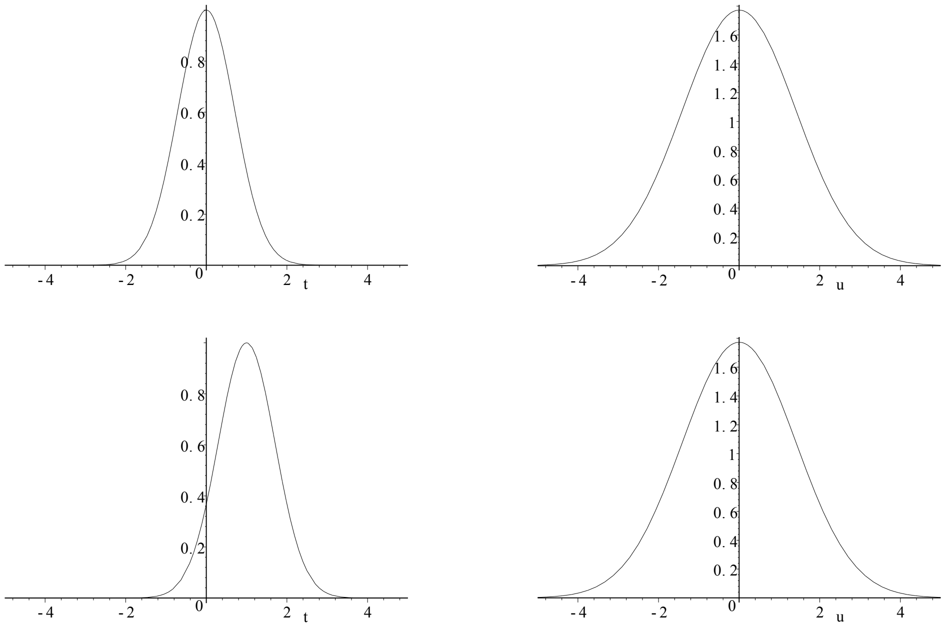
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-j2\pi v(t-a)}e^{-j2\pi va}dt$$

$$=e^{-j2\pi va}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-j2\pi v(t-a)}dt$$

$$=e^{-j2\pi va}F'(v)$$

其中，$F'(v)$为$f(t)$的傅立叶变换

2 傅立叶变换性质



2 傅立叶变换性质

- 3）卷积定理
  - 时域（或空域）中的卷积等价于频域的乘积。

$$F\left(f(t)*g(t)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(t-x)dxe^{-j2\pi ut}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\int_{-\infty}^{\infty}g(t-x)e^{-j2\pi ut}dtdx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j2\pi ux}G(u)dx$$

$$=F(u)G(u)$$

因为任何函数冲激函数的卷积保持不变，

因此可证明冲激函数的傅立叶变换是单位1

2 傅立叶变换性质

- 3）快速卷积
  - 原理：由线性系统理论，若**C=A*B**，等式两边同时做傅立叶变换得

$$F(C)=F(A)\bullet F(B)$$

则有

$$C=F^{-1}\left[F(A)\bullet F(B)\right]$$

2 傅立叶变换性质

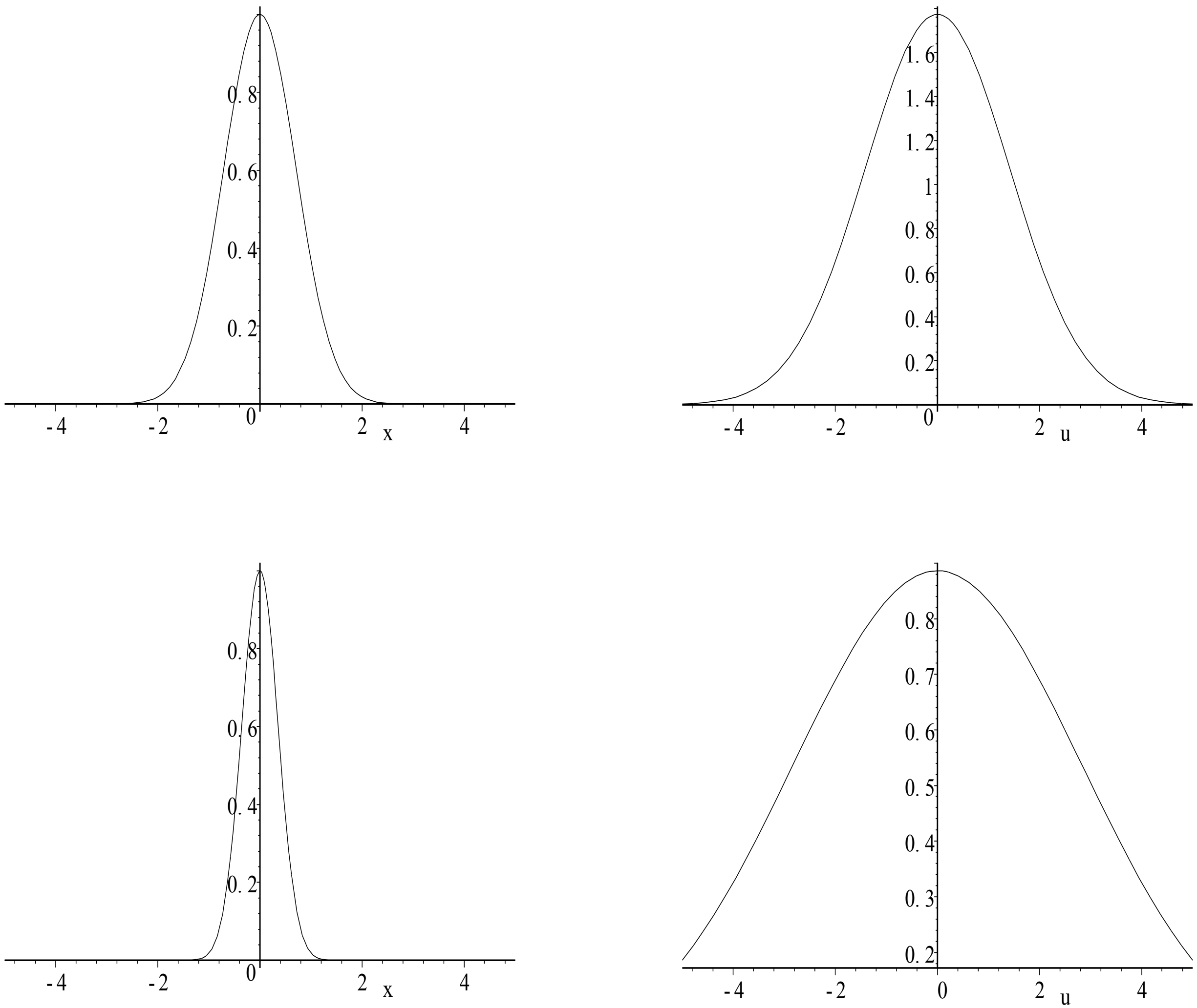
- 4）相似性定理
  - 描述函数自变量尺度变化对其傅立叶变换的作用。

$$F\left(f\left(at\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(at\right)e^{-j2\pi ut}dt$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(at\right)e^{-j2\pi ut}adt=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(r\right)e^{-j2\pi ur/a}dr$$

$$=\frac{1}{a}F\left(\frac{u}{a}\right)$$

2 傅立叶变换性质



0.8
0.6
0.4
0.2
-4
-2
0
2
x
4
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-4
-2
0
2
u
4
0.8
0.6
0.4
0.2
-4
-2
0
2
x
4
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
-4
-2
0
2
u
4

2 傅立叶变换性质

- **5）其他常用性质**
  - **（1）线性**

    傅立叶变换是一种线性算子

    $$\mathrm{F}\left\{af_1(x,y)+bf_2(x,y)\right\}=aF_1(x,y)+bF_2(x,y)$$

  - **（2）可分离性**

$$F(u,y)=N\left[\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi ux/N}\right]$$

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}F(u,y)e^{-j2\pi uy/N}$$

$$=\frac{1}{N^2}\sum_{y=0}^{N-1}\sum_{x=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi ux/N}e^{-j2\pi uy/N}$$

2 傅立叶变换性质

- （3）周期性和共轭对称性

$$F(u,v) = F(u+aN, v+bN)$$

$$f(x,y) = f(x+aN, y+bN)$$

$$F(u,v) = F^*(-u,-v)$$

$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$

2 傅立叶变换性质

- （4）旋转不变性

引入极坐标

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \varpi\cos\phi \\ v = \varpi\sin\phi \end{cases}$$

$$f(r,\theta) = F(\varpi,\phi)$$

$$f(r,\theta+\theta_0) = F(\varpi,\phi+\phi_0)$$

2 傅立叶变换性质

- （5）平均值

二维离散函数平均值定义如下：$\bar{f}(x,y)=\dfrac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$

将$u=v=0$代入二维傅立叶定义$F(0,0)=\dfrac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$

因此$\bar{f}(x,y)=F(0,0)$

2 傅立叶变换性质

- （6）微分性质

时域上的微分$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)$,

对应频域$(j2\pi u)^m(j2\pi v)^n F(u,v)$。

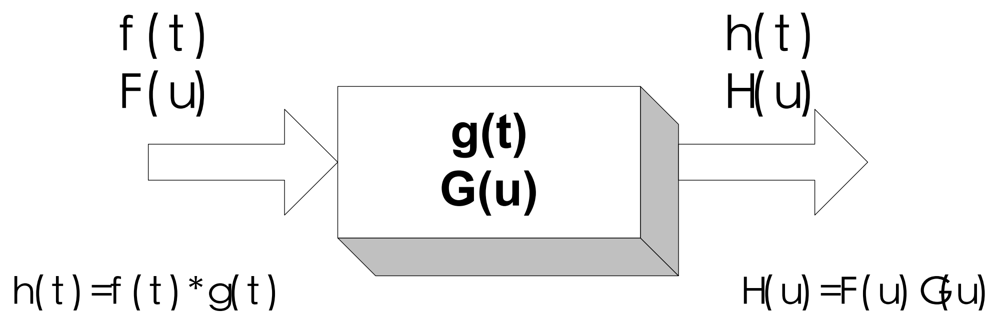
拉普拉斯$\nabla^2 f(x,y)$

对应频域$-4\pi^2(u^2+v^2)F(u,v)$

- 等于傅立叶谱乘以u^2+v^2项，相当于传递函数随频率平方增加的线性系统。

3 线性系统和傅立叶变换

- 1）线性系统术语



f(t)=输入信号　　F(u)=输入信号的谱
g(t)=冲激响应　　G(u)=传递函数
h(t)=输出信号　　H(u)=输出信号的谱

3 线性系统和傅立叶变换

- 2）线性系统辨识
  - 定义：确定系统的冲激响应及传递函数；
  - 方法：输入已知的f(x)，测量输出h(t)，然后通过数字积分计算g(t)。

$$\because H(u) = F(u) \cdot G(u)$$

$$\therefore G(u) = H(u) / F(u)$$

$$\therefore g(t) = F^{-1}\left(\frac{H(u)}{F(u)}\right) = F^{-1}\left(\frac{F(h(t))}{F(f(t))}\right)$$

3 线性系统和傅立叶变换

- 例：

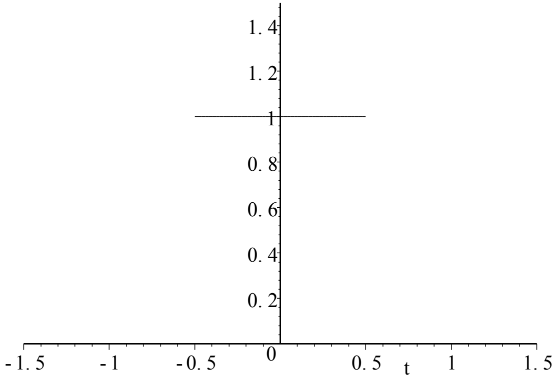
输入为$f(t)=\Pi(t)$,输出为$h(t)=\Lambda(t)$

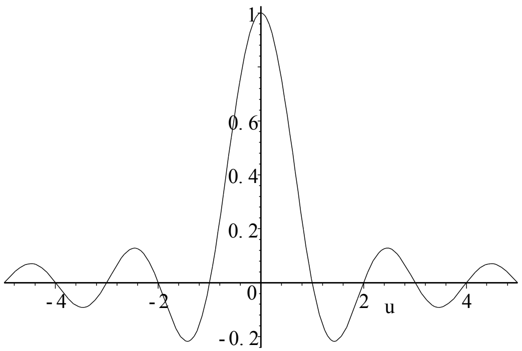
$$g(t)=F^{-1}\left\{\frac{\dfrac{\sin^2(\pi u)}{(\pi u)^2}}{\dfrac{\sin(\pi u)}{(\pi u)}}\right\}=F^{-1}\left\{\frac{\sin(\pi u)}{(\pi u)}\right\}$$

$$=\Pi(t)$$

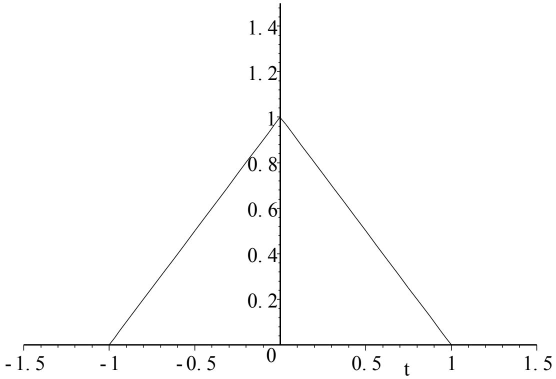
3 线性系统和傅立叶变换

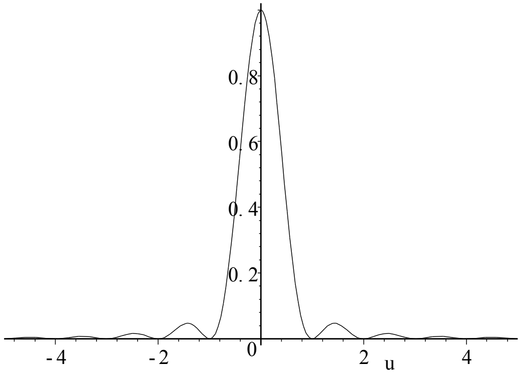
输入





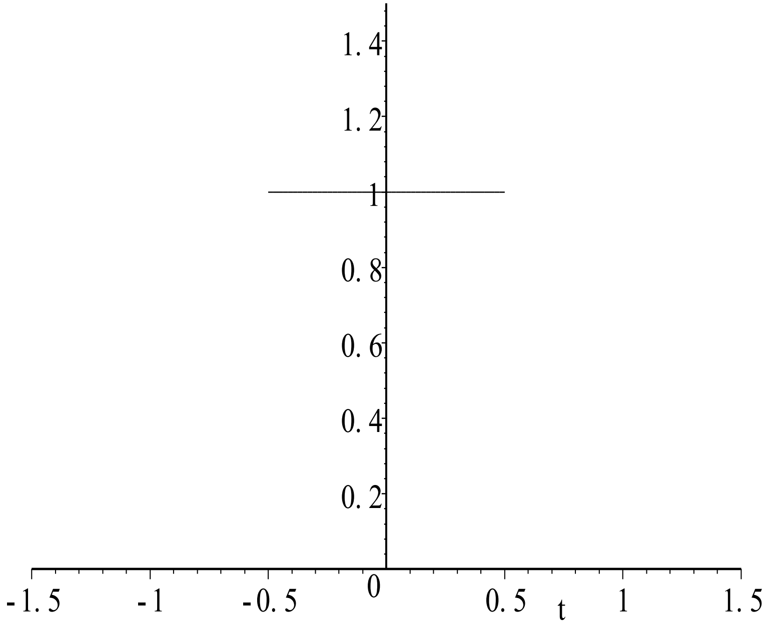
输出

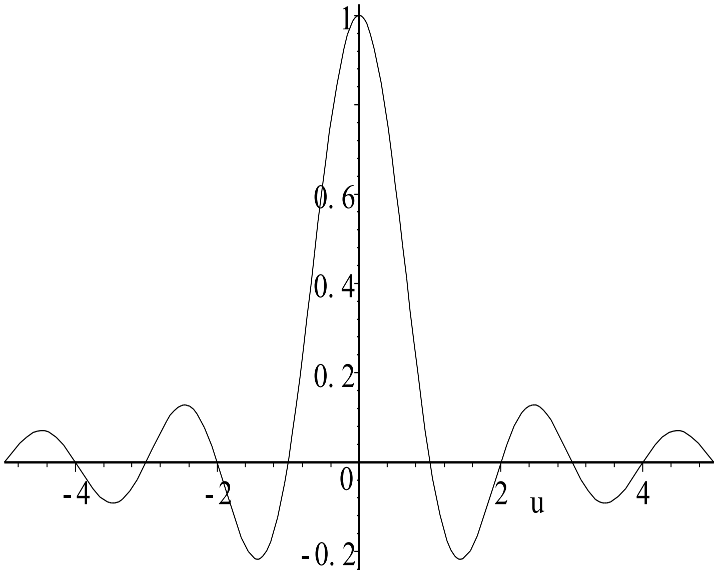




3 线性系统和傅立叶变换

传递函数





3 线性系统和傅立叶变换

- 例

$$f(t)=u(t)-\frac{1}{2}=\begin{cases}-1/2, t<0\\0, t=0\\+1/2, t>0\end{cases} \qquad F(u)=-j/(2\pi u)$$

$$h(t)=\begin{cases}-1/2, t<-1\\t, -1\le t\le 1\\+1/2, t>1\end{cases} \qquad H(u)=-j\frac{\sin(\pi u)}{2(\pi u)^2}$$

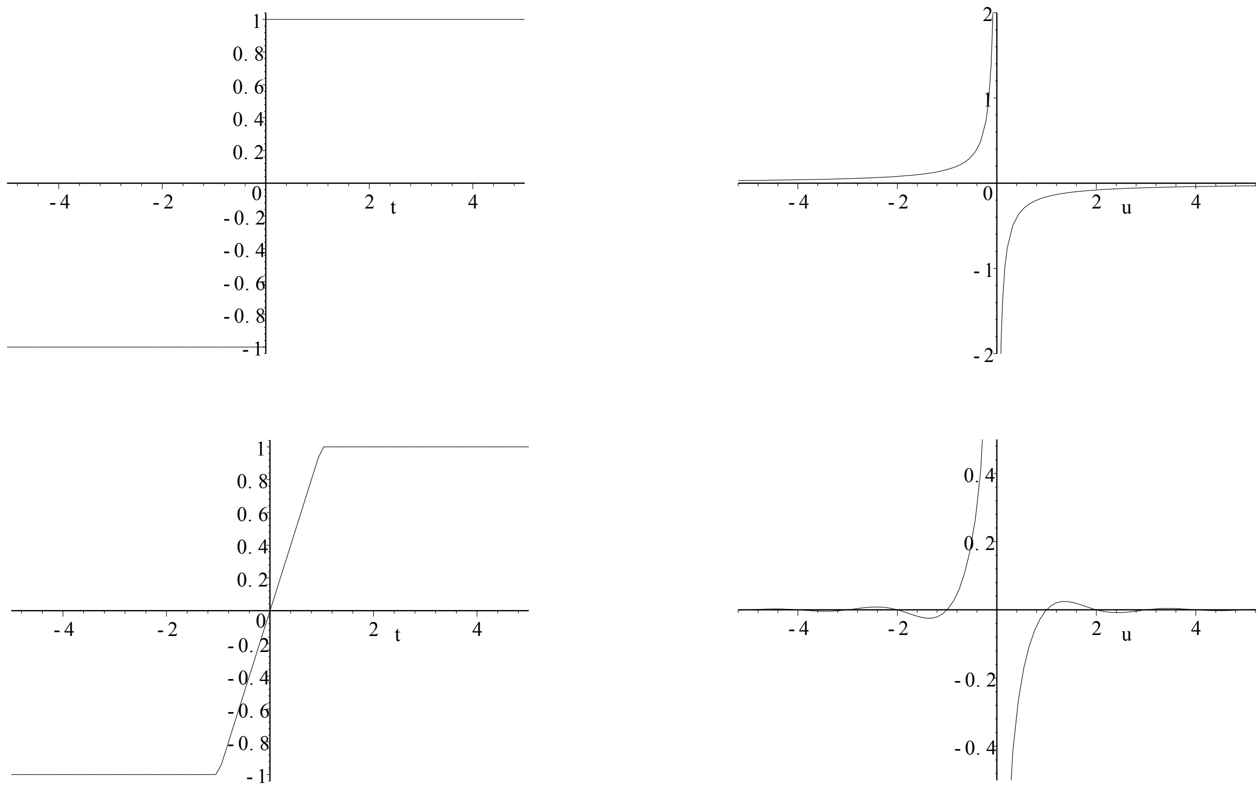
$$\therefore G(u)=\frac{H(u)}{F(u)}=\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$$

$$\therefore g(t)=\Pi(t)$$

3 线性系统和傅立叶变换

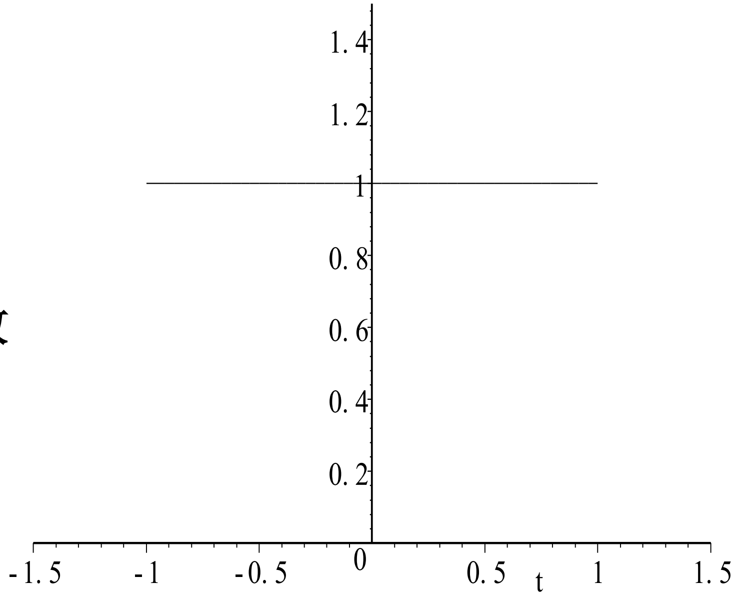
输入

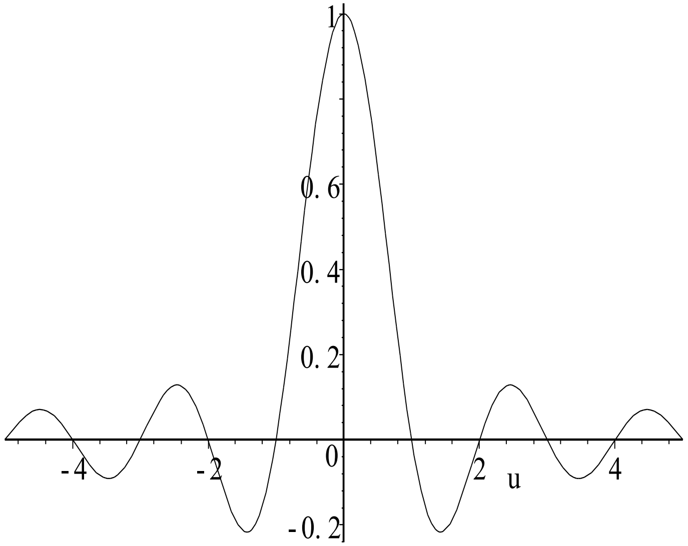
输出



3 线性系统和傅立叶变换

传递函数





7 数字图像处理和傅立叶变换

- 4）图像匹配
  - 模板匹配是检测图像中某一目标的一种简单滤波方法。
  - 步骤：
    - 以目标图像做模板在图像上滑动；
    - 同时做相关运算；
    - 对运算结果取适当的阈值，找出目标的位置。

要点总结

- 证明空域中的卷积与频域中乘积的等价性

- 掌握系统辨识的方法。