数字图像处理

灰度直方图与点运算

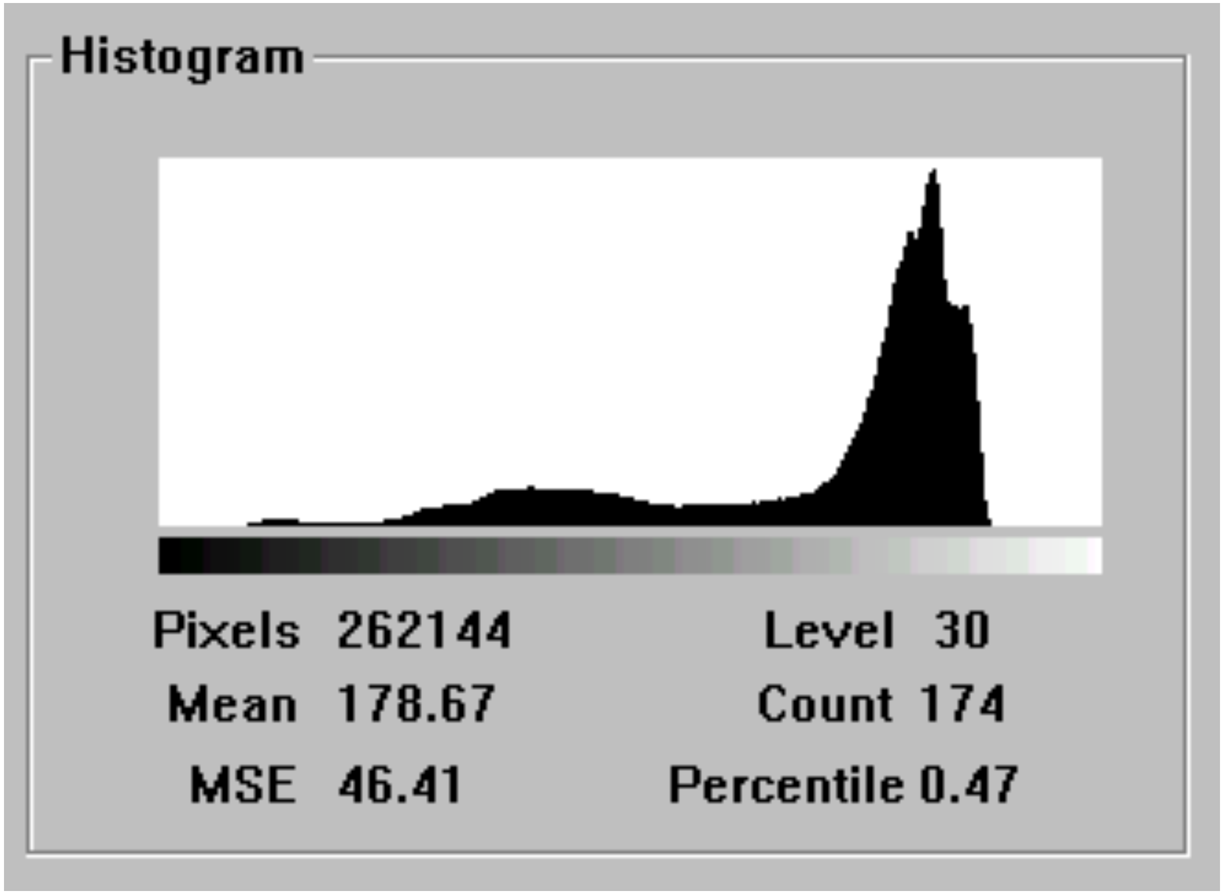
1 灰度直方图

- 1）定义
  - 灰度直方图（**histogram**）是灰度级的函数，描述的是图像中每种灰度级像素的个数，反映图像中每种灰度出现的频率。横坐标是灰度级，纵坐标是灰度级出现的频率。
  - 图像及其灰度直方图的例

  （**512**像素***512**像素）

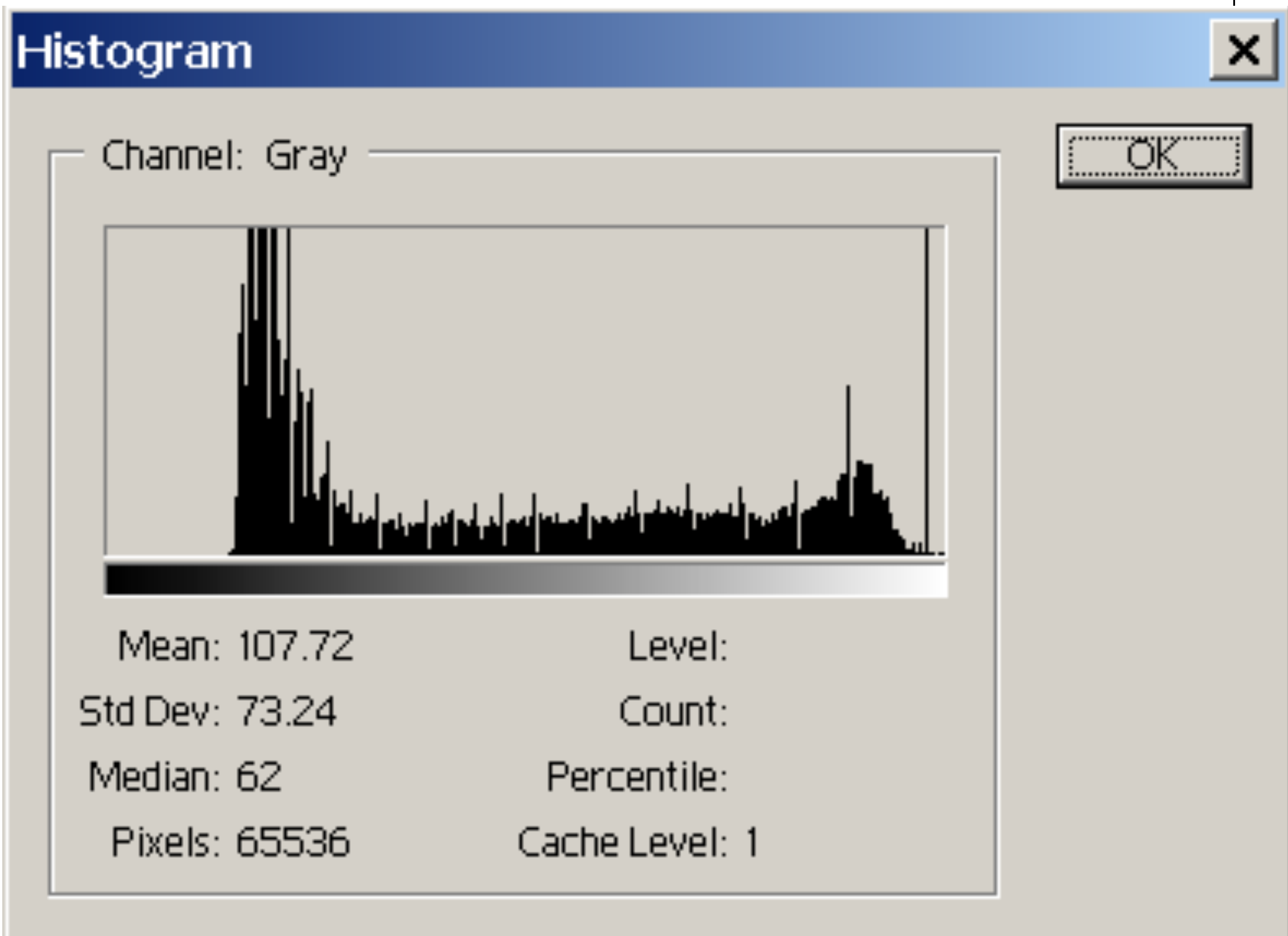
1 灰度直方图

1 灰度直方图


Histogram
Pixels 262144
Mean 178.67
MSE 46.41
Level 30
Count 174
Percentile 0.47

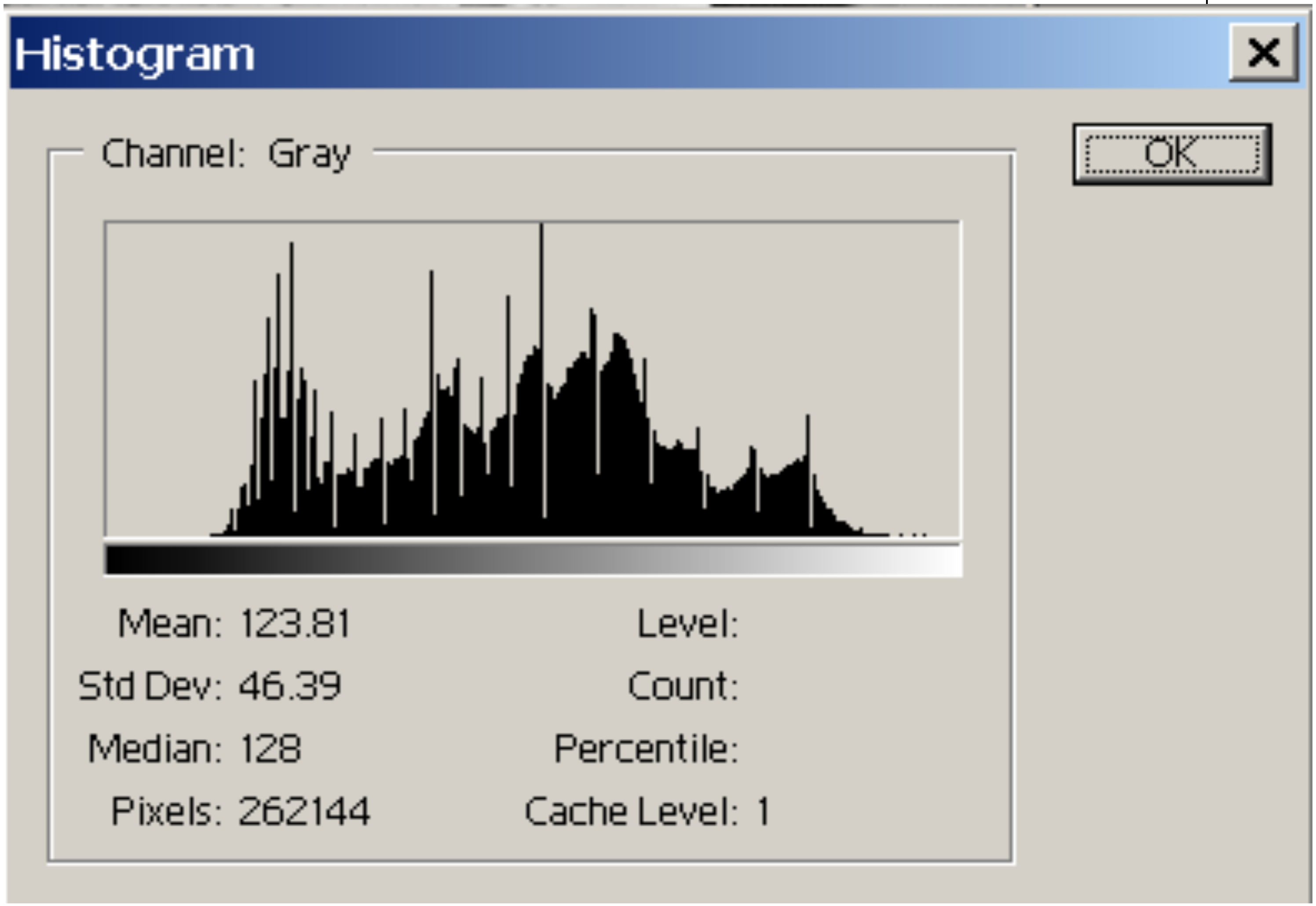
1 灰度直方图

1 灰度直方图


Histogram
Channel: Gray
OK
Mean: 107.72
Std Dev: 73.24
Median: 62
Pixels: 65536
Level:
Count:
Percentile:
Cache Level: 1

1 灰度直方图

1 灰度直方图



Histogram
OK
Channel: Gray
Mean: 123.81
Std Dev: 46.39
Median: 128
Pixels: 262144
Level:
Count:
Percentile:
Cache Level: 1

1 灰度直方图

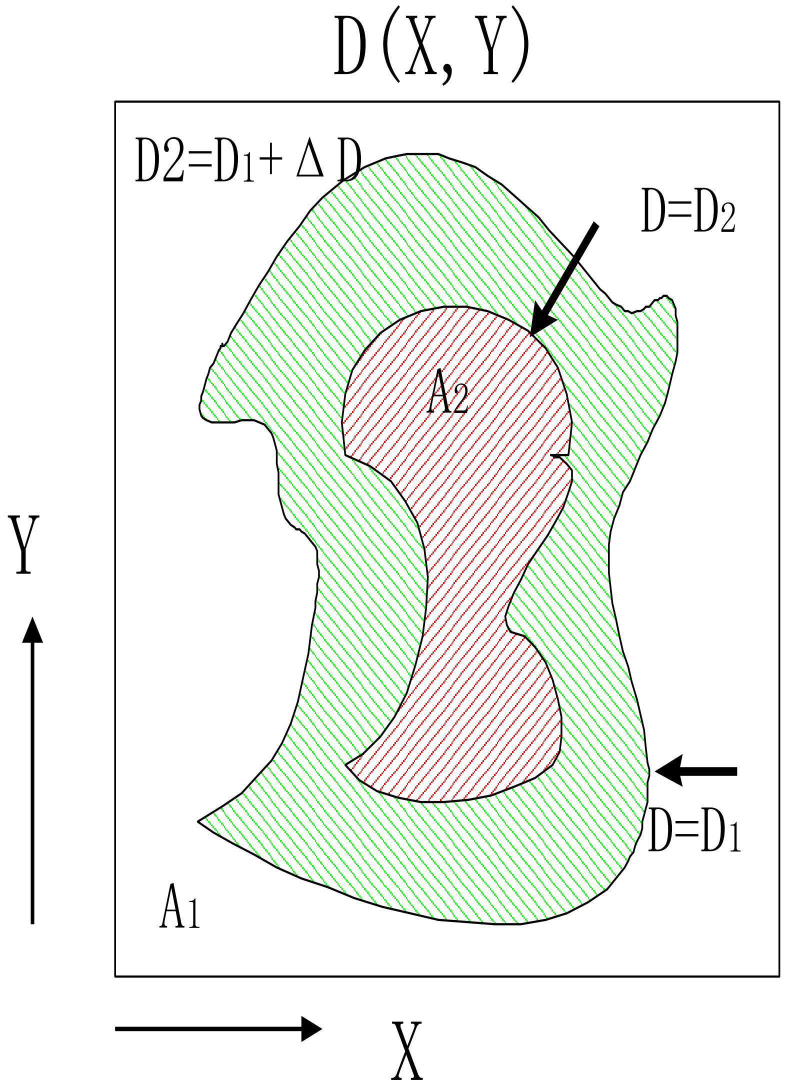
- 2）定义
  - 对于连续图像，平滑地从中心的高灰度级变化到边缘的低灰度级。其直方图可定义为：

$$H(D)=\lim_{\Delta D\to 0}\frac{A(D)-A(D+\Delta D)}{D-(D+\Delta D)}=\lim_{\Delta D\to 0}\frac{A(D)-A(D+\Delta D)}{-\Delta D}=-\frac{d}{dD}A(D)$$

  - 其中A(D)为阈值面积函数：为一幅连续图像中被具有灰度级D的所有轮廓线所包围的面积。
  - 对于离散函数，固定ΔD为1，则

    H（D）=A（D）- A（D+1）
  - 一幅连续图像的直方图定义的示意图。

1 灰度直方图



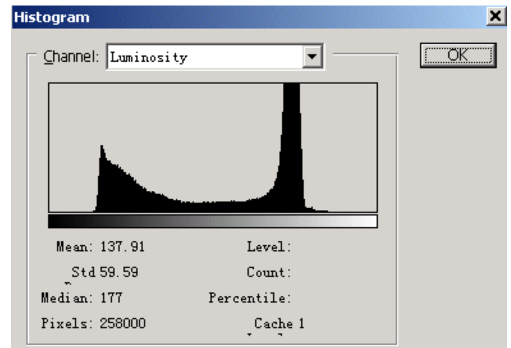
1 灰度直方图

- 3）二维直方图
  - 什么是二维直方图
  - 红蓝直方图
  - 其他二维直方图
    - 灰度-区域均值
    - 灰度-区域形状
    - 灰度-梯度

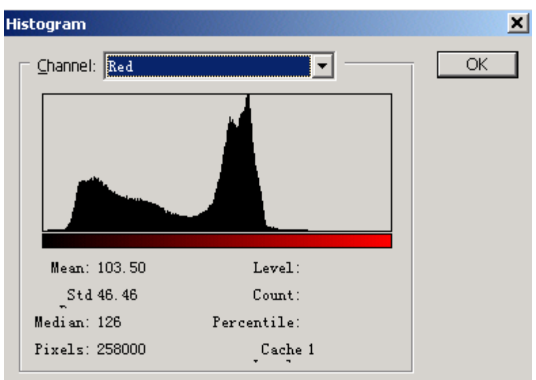
1 灰度直方图

- **4）高维直方图**
  - 色彩直方图
    - 是高维直方图的特例，它统计色彩的出现频率，即色彩的概率分布信息。
    - 通常这需要一定的量化过程，将色彩分成若干互不重叠的种类。
    - 一般不直接在**RGB**色彩空间中统计，而是在将亮度分离出来后，对代表色彩部分的信息进行统计，如在**HSI**空间的**HS**子空间、**YUV**空间的**UV**子空间，以及其它反映人类视觉特点的彩色空间表示中进行。
  - 其他高维直方图

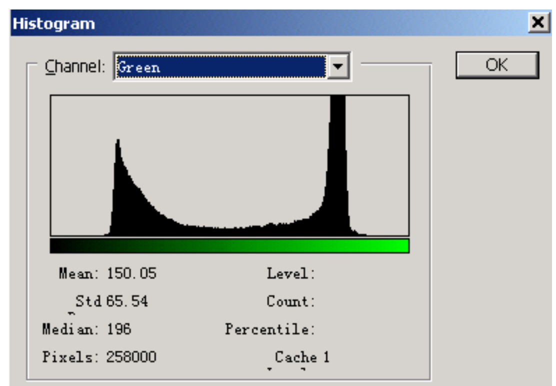
1 灰度直方图



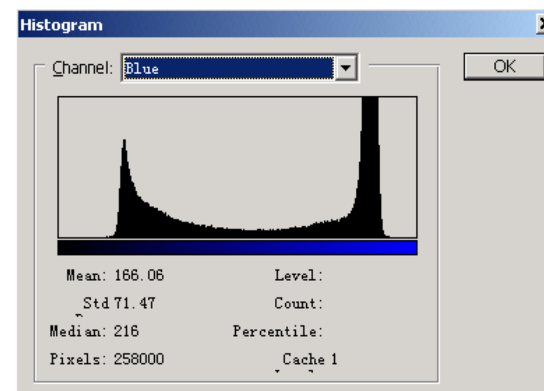
Histogram
Channel: Luminosity
OK
Mean: 137.91
Std 59.59
Median: 177
Pixels: 258000
Level:
Count:
Percentile:
Cache 1



Histogram
Channel: Red
OK
Mean: 103.50
Std 46.46
Median: 126
Pixels: 258000
Level:
Count:
Percentile:
Cache 1



Histogram
Channel: Green
OK
Mean: 150.05
Std 65.54
Median: 196
Pixels: 258000
Level:
Count:
Percentile:
Cache 1



Histogram
Channel: Blue
OK
Mean: 166.06
Std 71.47
Median: 216
Pixels: 258000
Level:
Count:
Percentile:
Cache 1

2 直方图的计算和性质

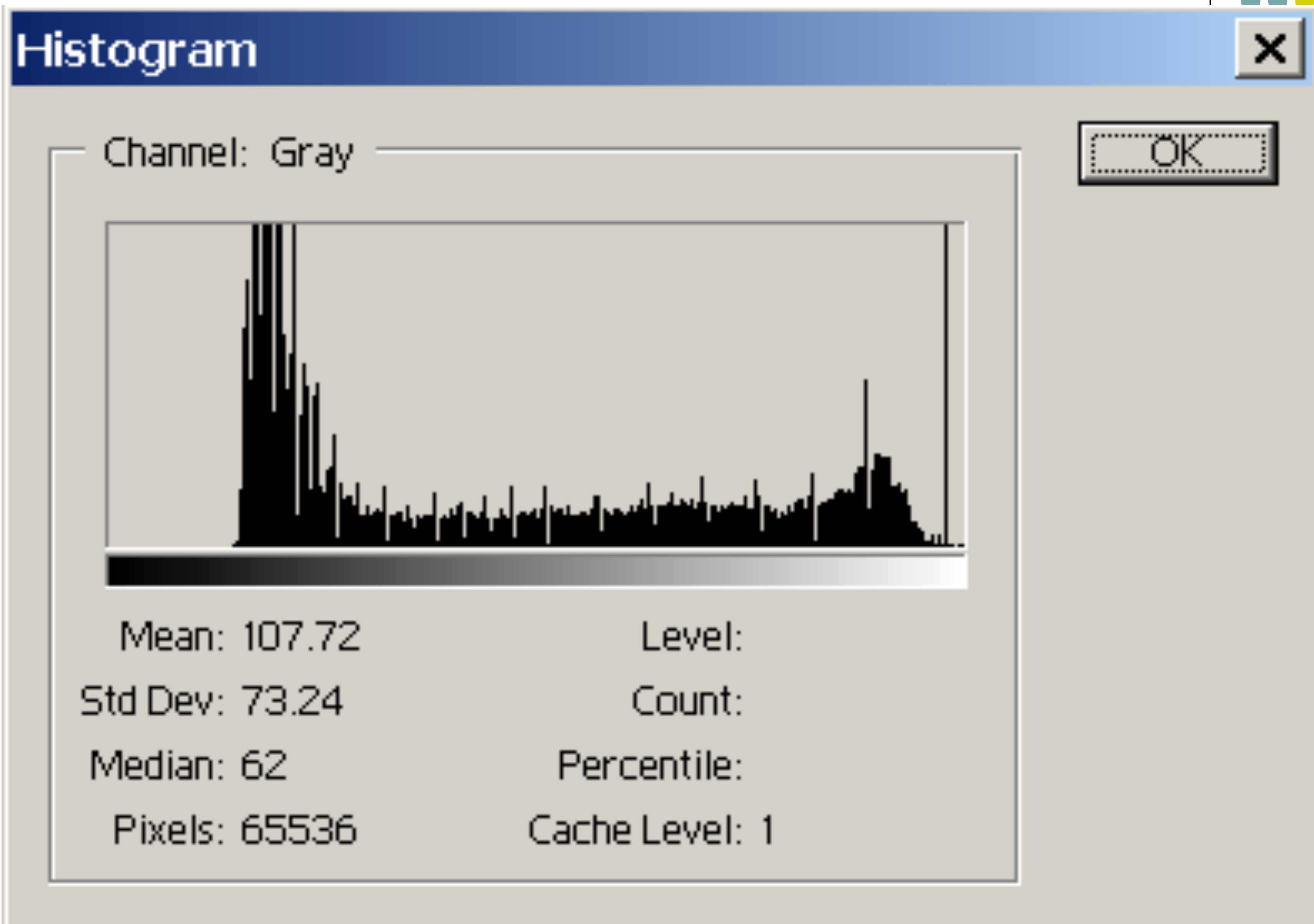
- 1）计算
  - 依据定义，若图像具有*L*（通常*L*=256,即8位灰度级）级灰度，则大小为*M*x*N*的灰度图像*f*(x,y)的灰度直方图hist[0…*L*-1]可用如下计算获得：

1. 初始化 hist[*k*]=0; *k*=0,…,*L*-1
2. 统计 hist[*f*(x,y)]++; *x*=*0*,…,*M*-1, *y* =0,…,*N*-1
3. 归一化 hist[*f*(x,y)]/*M***N*

2 直方图的计算和性质

- 2）直方图的性质
  - ①不表示图像的空间信息；
  - ②任一特定图像都有唯一直方图，但反之并不成立；

2 直方图的计算和性质


Histogram
OK
Channel: Gray
Mean: 107.72
Std Dev: 73.24
Median: 62
Pixels: 65536
Level:
Count:
Percentile:
Cache Level: 1

2 直方图的计算和性质

- ③归一化灰度直方图和面积函数可得到图像的概率密度函数PDF和累积分布函数CDF。

因为$H(D) = -\frac{d}{dD}A(D)$

替换D，并等式两端从D到∞进行积分

$\int_D^\infty H(p)dp = -[A(p)]_D^\infty$

因为$A(\infty) = 0$

所以$\int_D^\infty H(p)dp = A(D)$

若令$D = 0$，则$\int_0^\infty H(p)dp = A(0) =$ 图象的面积

对于离散图象，$\sum_{D=0}^{255} H(D) = NL \times NS$

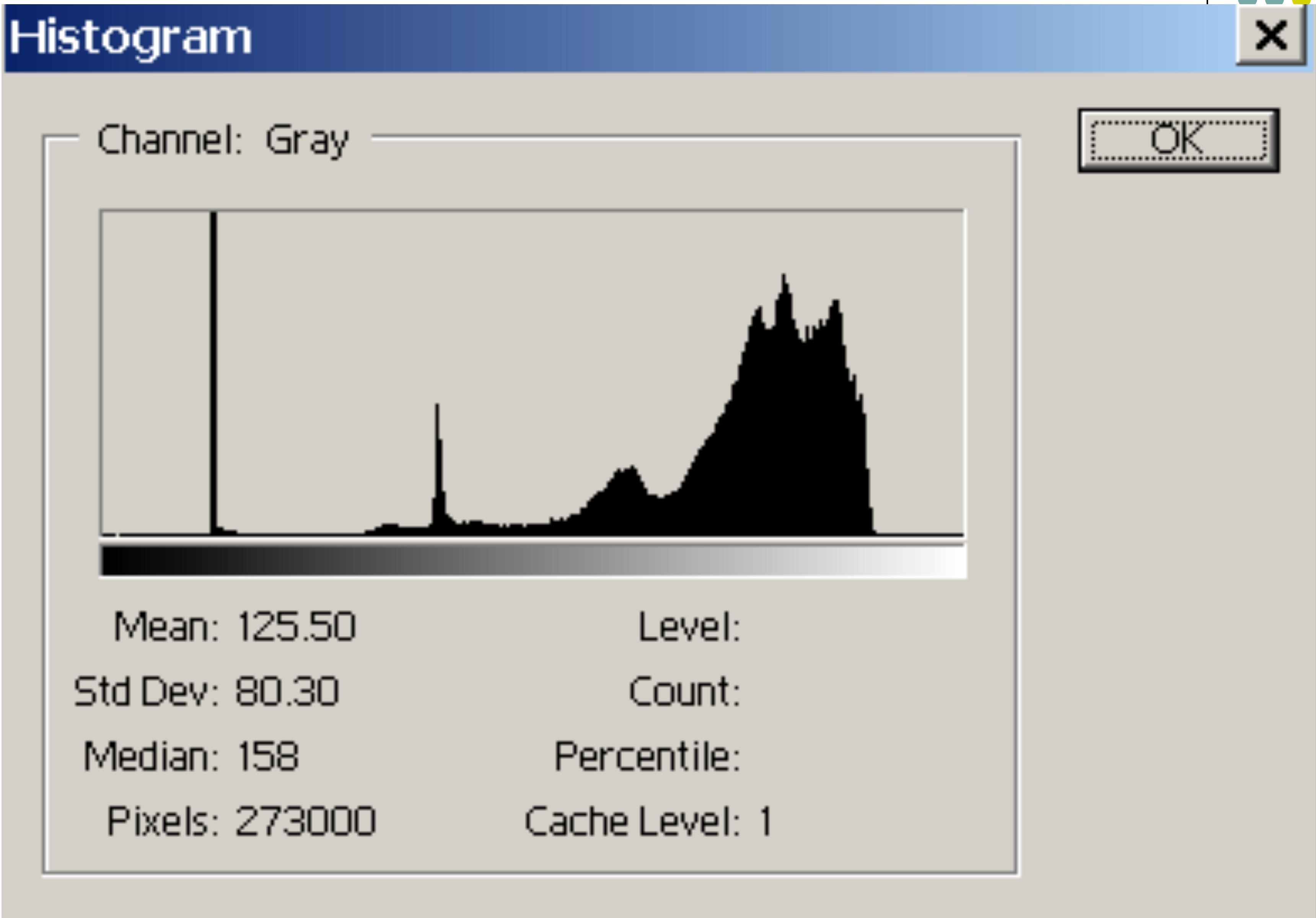
2 直方图的计算和性质

- ④若一幅图像包含一个灰度均匀一致，且背景与物体对比度很强，假设物体的边界由灰度级D_1定义的轮廓线，则

$$\int_{D_1}^{\infty} H(D)dD = \text{物体的面积}$$

- 500像素*546像素=
- 最左侧直方
度级为33

2 直方图的计算和性质



Histogram
OK
Channel: Gray
Mean: 125.50
Std Dev: 80.30
Median: 158
Pixels: 273000
Level:
Count:
Percentile:
Cache Level: 1

2 直方图的计算和性质

- 从灰度**54**到**255**级

$$\int_{54}^{255} H(D)dD = 163001$$

- 约占图像总面积的**60%**

2 直方图的计算和性质

- ⑤直方图的可相加性

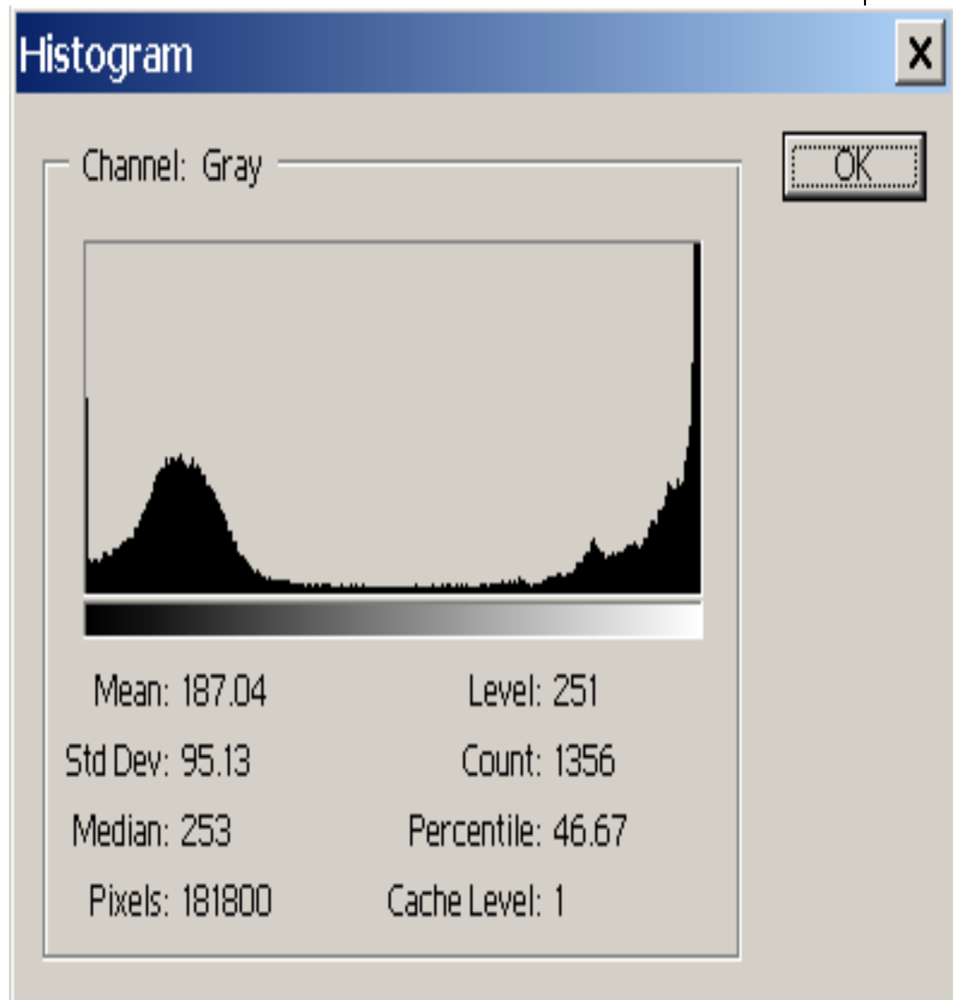
例如一副图像由若干个不相交的区域构成，则整幅图像的直方图是这若干个区域直方图之和。

3 直方图的用途

- 1）数字化参数
  - <u>一般一幅数字图像应该利用全部或几乎全部可能的灰度级</u>;
  - 对直方图做快速检查。

- 2）边界阈值选择
  - <u>使用轮廓线确定简单物体的边界的方法，称为阈值化</u>;
  - 对物体与背景有较强对比的景物的分割特别有用;
  - 例　　双峰直方图

3 直方图的用途


Histogram
X
Channel: Gray
OK
Mean: 187.04
Std Dev: 95.13
Median: 253
Pixels: 181800
Level: 251
Count: 1356
Percentile: 46.67
Cache Level: 1

3 直方图的用途

- 显然如果阈值对应于直方图的谷，阈值从T增加到T+ ΔT，只会导致面积略微变化。因此可以把阈值的选择误差对面积测量的影响降到最低。
- 上例中当灰度级从115变化到144时，像素为1850，占图像总面积的1%。因此把阈值选取为130，此时树叶的面积约占总面积28.87%。

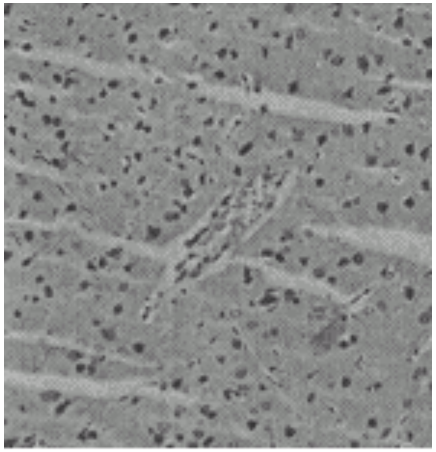
3 直方图的用途

- 3）综合光密度
  - （1）综合光密度IOD，反映了图像面积和密度的组合；

$$IOD = \int_0^a \int_0^b D(x,y)dxdy$$

x是图象横坐标，$MAX(x) = a$;

y是图象纵坐标，$MAX(y) = b$;



I/R损伤早期脑组织

3 直方图的用途

- （2）对于数字图像，有

$$IOD = \sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=1}^{NS} D(i,j)$$

$$IOD = \sum_{k=0}^{255} kN_k$$

$$IOD = \sum_{k=0}^{255} kH(k)$$

$$IOD = \int_0^{\infty} DH(D)dD$$

第2种计算方式

3 直方图的用途

- （3）所以

$$\int_0^a\int_0^b D(x,y)dxdy = \int_0^\infty DH(D)dD$$

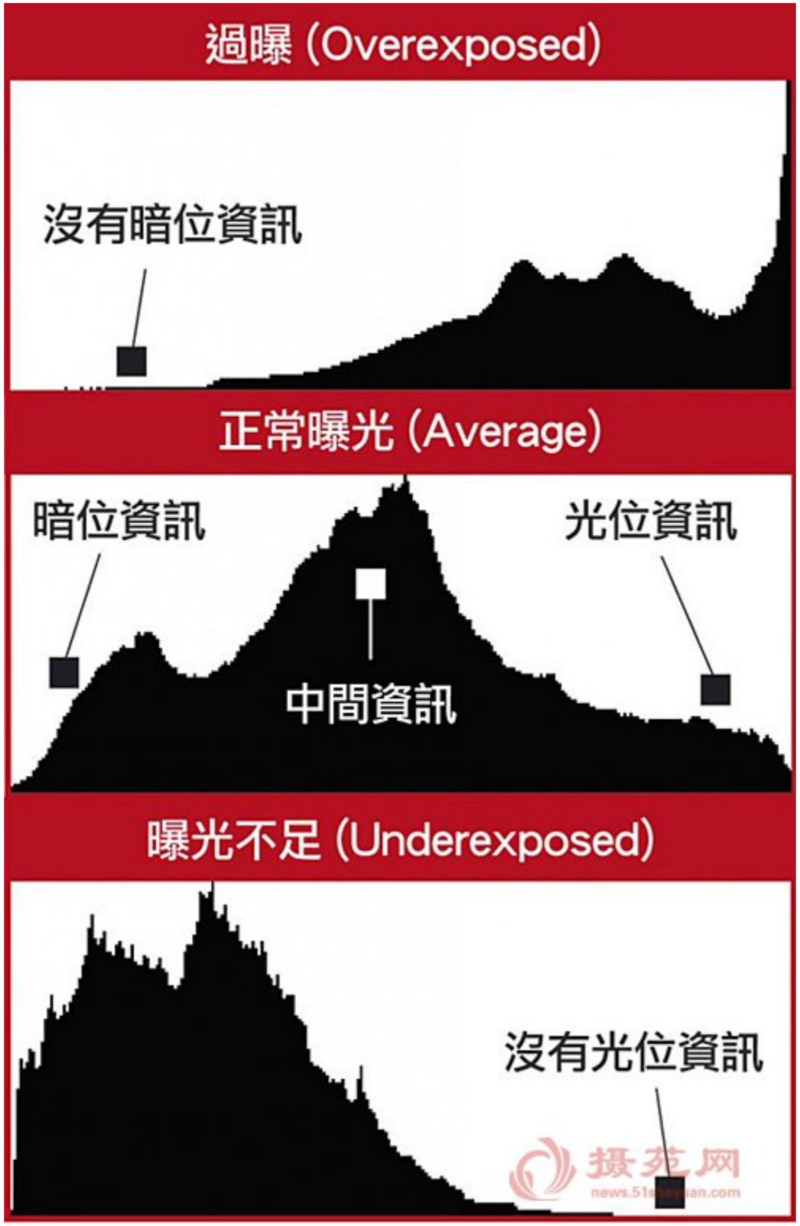
将阈值灰度级为T的边界勾划出来，则

$$IOD(T) = \int_T^\infty DH(D)dD$$

- （4）阈值面积为T的物体，其内部灰度级的平均（mean）值

$$MGL = IOD(T)\Big/A(T) = \int_T^\infty DH(D)dD\Big/\int_T^\infty H(D)dD$$

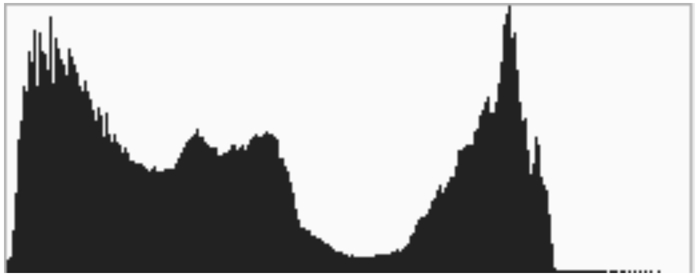
3 直方图的用途

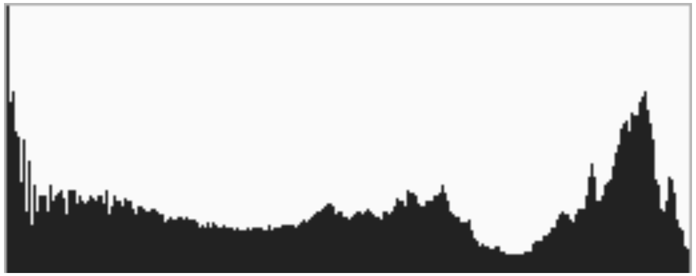

過曝 (Overexposed)
沒有暗位資訊
正常曝光 (Average)
暗位資訊
光位資訊
中間資訊
曝光不足 (Underexposed)
沒有光位資訊

3 直方图的用途

3 直方图的用途

3 直方图的用途

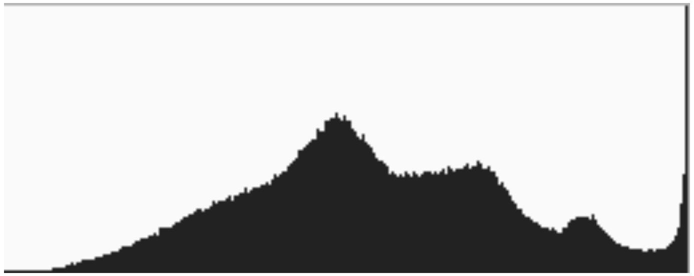


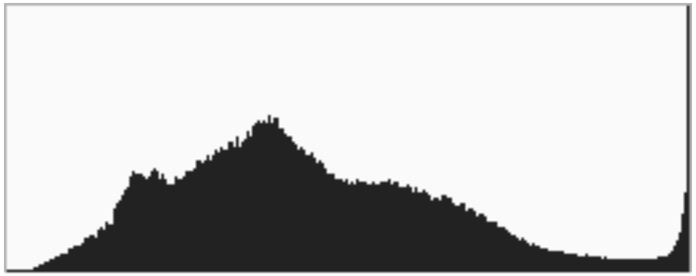


3 直方图的用途

3 直方图的用途

3 直方图的用途





3 直方图的用途


1/125 4.0 -2
100-1576
CF
Av
ISO1250
AWB
3, 0, 0, 0
L 6.11MB
sRGB
4/12
2012/03/10 10:


107分
6M FINE
P
1
ISO80
SAF

4 点运算

- 1）点运算（point operation）定义
  - 对于一幅输入图像，将产生一幅输出图像，输出图像的每个像素点的灰度值由输入像素点决定。点运算由灰度变换函数（gray-scale transformation，GST）确定。

$$B(x,y)=f\left[A\left(x,y\right)\right]$$

  - **Notice**：
  - （1）与局部（邻域）运算的差别，输入像素-输出像素一一对应；
  - （2）与几何运算的差别，不改变图像的空间关系；
  - （3）又称为对比度增强，对比度拉伸或灰度变换。

4 点运算

- **2）点运算的种类**
  - **（1）线性点运算**

GST函数$f(D)$为线性，即

$$D_B = f(D_A) = \alpha D_A + b$$

显然，

$*$若$a = 1, b = 0$,图象像素不发生变化；

$*$若$a = 1, b \neq 0$,图象所有灰度值上移或下移；

$*$若$a > 1$，输出图象对比度增强；

$*$若$0 < a < 1$,输出图象对比度减小；

$*$若$a < 0$,暗区域变亮，亮区域变暗，图象求补。

4 点运算

lenna.bmp

$$D_B = D_A + 50$$

$$D_B = 1.5 \times D_A$$

$$D_B = 0.8 \times D_A$$

$$D_B = -1 \times D_A + 255$$

4 点运算

- （2）非线性点运算

以非线性灰度变换函数为例，如

$$* f(D) = D + C \times D \times (D_m - D)$$

将增加中间范围像素的灰度级，而只使暗像素和亮像素作较小改变。

$$* f(D) = \frac{D_m}{2}\left\{1 + \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}\alpha)} \sin\left[\alpha\pi\left(\frac{D}{D_m} - \frac{1}{2}\right)\right]\right\}$$

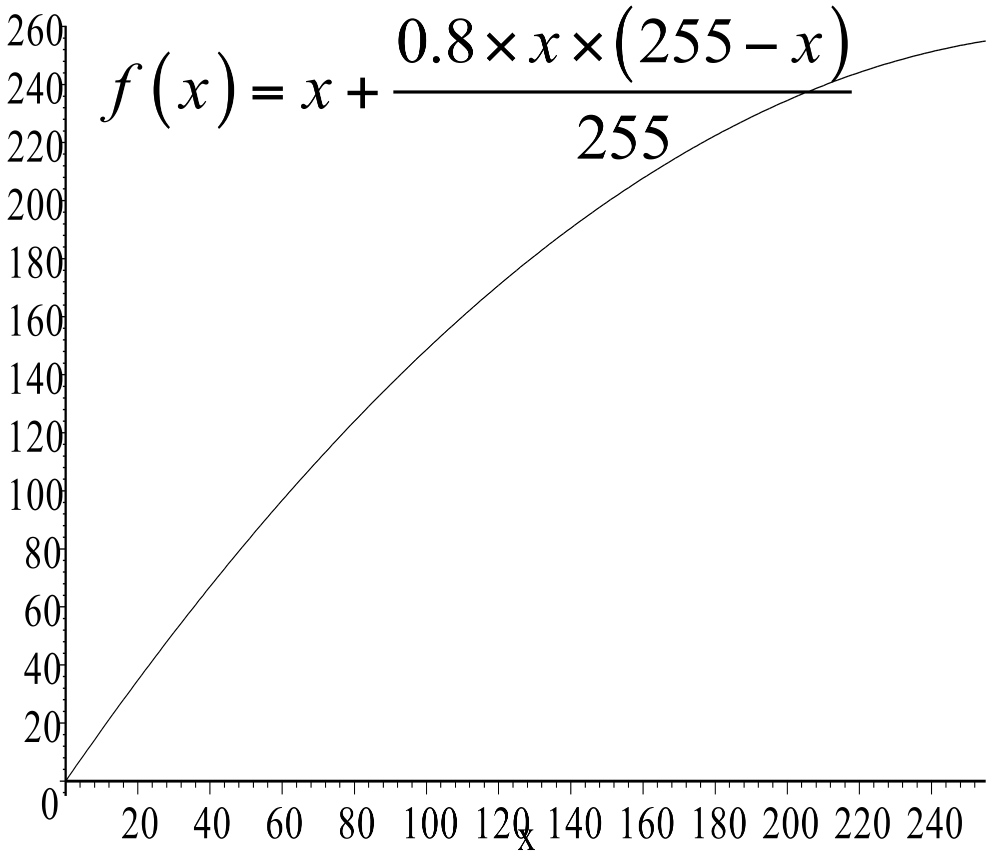
效果同上。

$$* f(D) = \frac{D_m}{2}\left\{1 + \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}\alpha)} \tan\left[\alpha\pi\left(\frac{D}{D_m} - \frac{1}{2}\right)\right]\right\}$$

效果与上相反。

常用对数函数、幂次函数和分段线性函数

4 点运算



$$f(x) = x + \frac{0.8 \times x \times (255 - x)}{255}$$
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240
x

4 点运算

lenna.bmp

$$f\left(x\right)=x+\frac{0.8\times x\times\left(255-x\right)}{255}$$

4 点运算

- 3）应用
  - （1）光度学标定（photometric calibration）

    希望数字图像的灰度能够真实反映图像的物理特性。如
    - 去掉非线性；
    - 变换灰度的单位。
  - （2）对比度增强（contrast enhancement）或对比度扩展（contrast stretching）

    将感兴趣特征的对比度扩展使之占据可显示灰度级的更大部分。

4 点运算

- （3）显示标定（display calibration）

显示设备不能线性地将灰度值转换为光强度。因此点运算和显示非线性组合，以保持显示图像时的线性关系。

- （4）轮廓线确定

用点运算的方法进行阈值化。

- （5）裁剪

每次点运算的最后一步，都将负值置为0；而将正值约束在灰度级最大值Dm。

5 点运算和直方图

- 1）为什么讨论两者关系?
  - 为使输出灰度产生特定形式的输出直方图，而逆向寻求点运算函数的过程。
- 2）输出直方图

$$D_B = f(D_A)$$

$$D_A = f^{-1}(D_B)$$

  - 分两步完成:
  - （1）分子为输入直方图，但自变量从D_A替换为D_B。
  - （2）分母为灰度变换函数的导数，如果出现D_A也替换为D_B。

对变换函数f的要求是单值且单调递增，值空间在[0，255]。

5 点运算和直方图

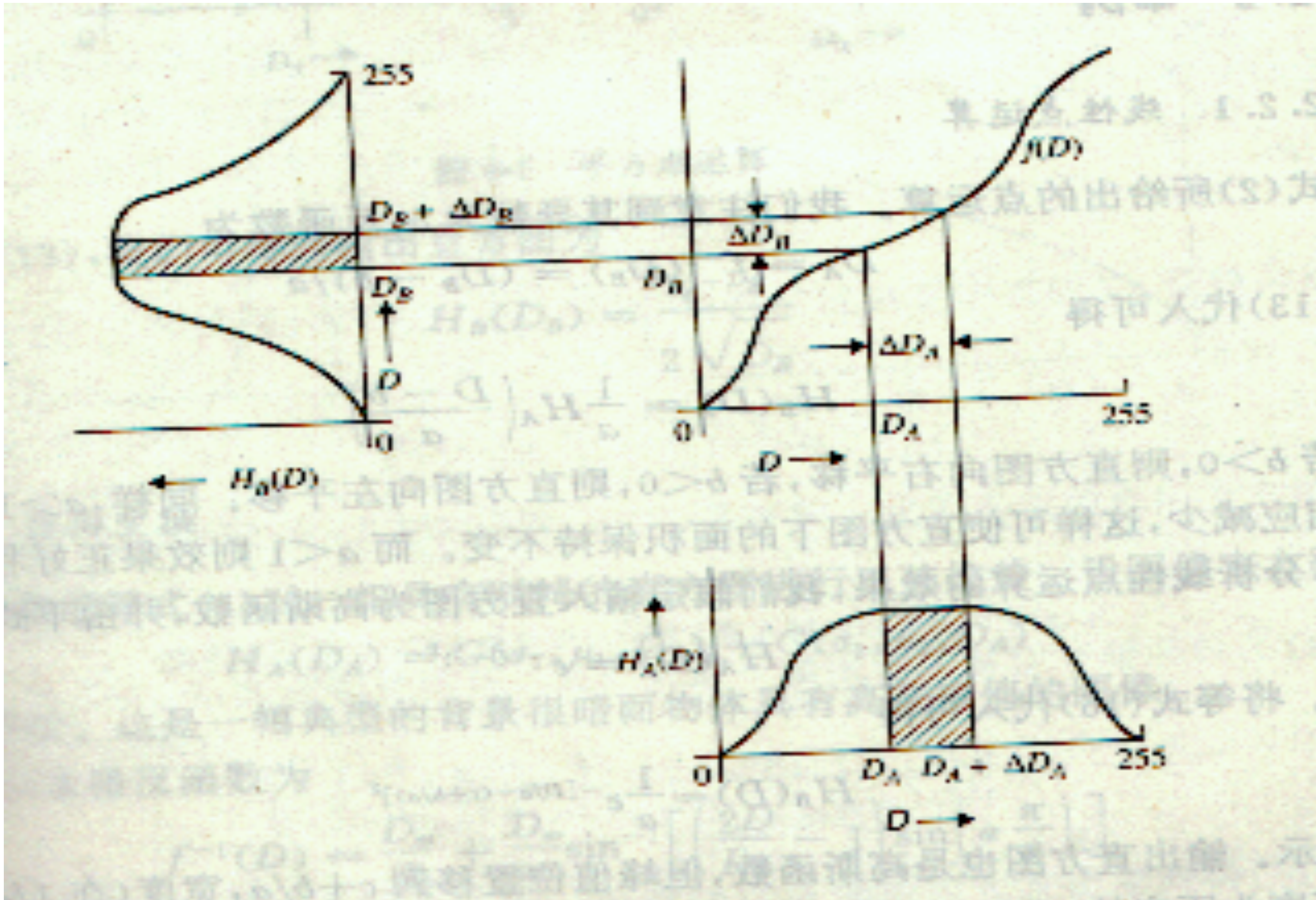


图 6-3　点运算对直方图的影响

5 点运算和直方图

Step1

$$\int_{D_B}^{D_B+\Delta D_B} H_B(D)dD = \int_{D_A}^{D_A+\Delta D_A} H_A(D)dD$$

$$H_B(D_B)\Delta D_B = H_A(D_A)\Delta D_A$$

$$H_B(D_B) = \frac{H_A(D_A)}{\Delta D_B / \Delta D_A}$$

Step2

$$H_B(D_B) = \frac{H_A(D_A)}{dD_B / dD_A} = \frac{H_A(D_A)}{\left(d / dD_A \right) f(D_A)}$$

将D_A换成D_B，得

$$H_B(D) = \frac{H_A\left[f^{-1}(D)\right]}{f'\left[f^{-1}(D)\right]} \quad 其中 f' = \frac{df}{dD}$$

5 点运算和直方图

- **3）举例**
  - （1）线性点运算性质：

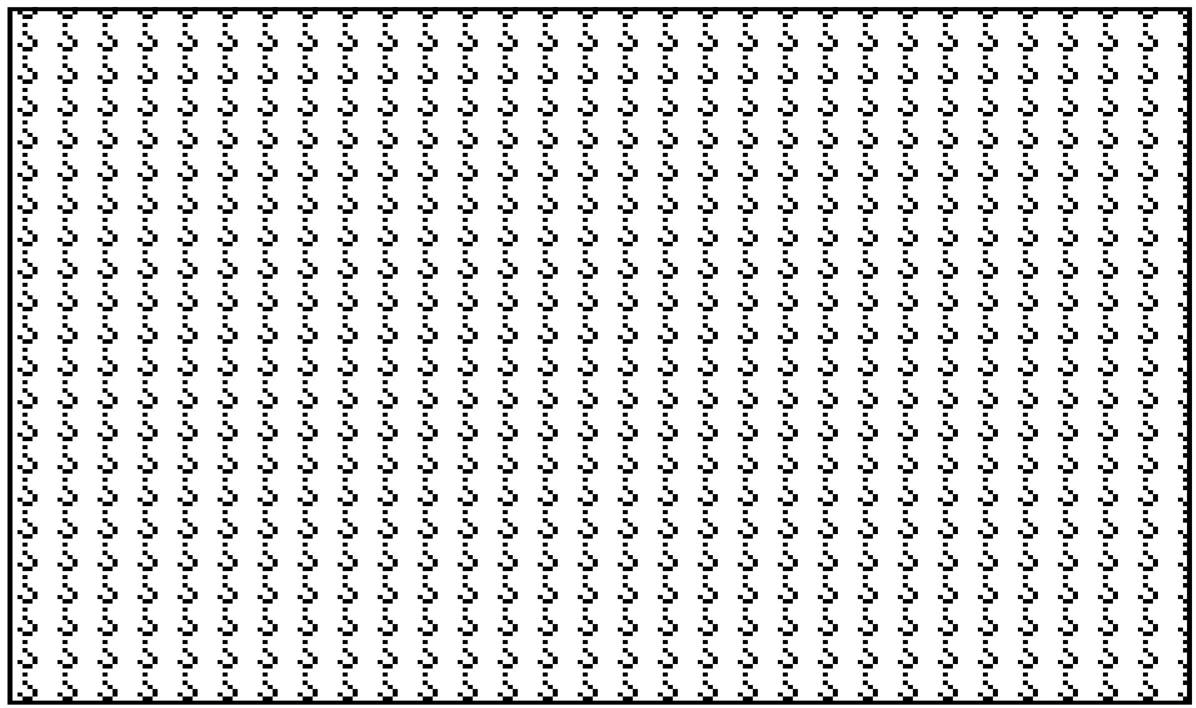
$$D_A = f^{-1}(D_B) = {(D_B - b)}/{a}$$

$$H_B(D) = \frac{1}{a} H_A\left(\frac{D-b}{a}\right)$$

  - *b>0，直方图向右平移，图像变亮；
  - *b<0，直方图向左平移，图像变暗；
  - *a>1，直方图对比度加大。
  - 例子1：lena

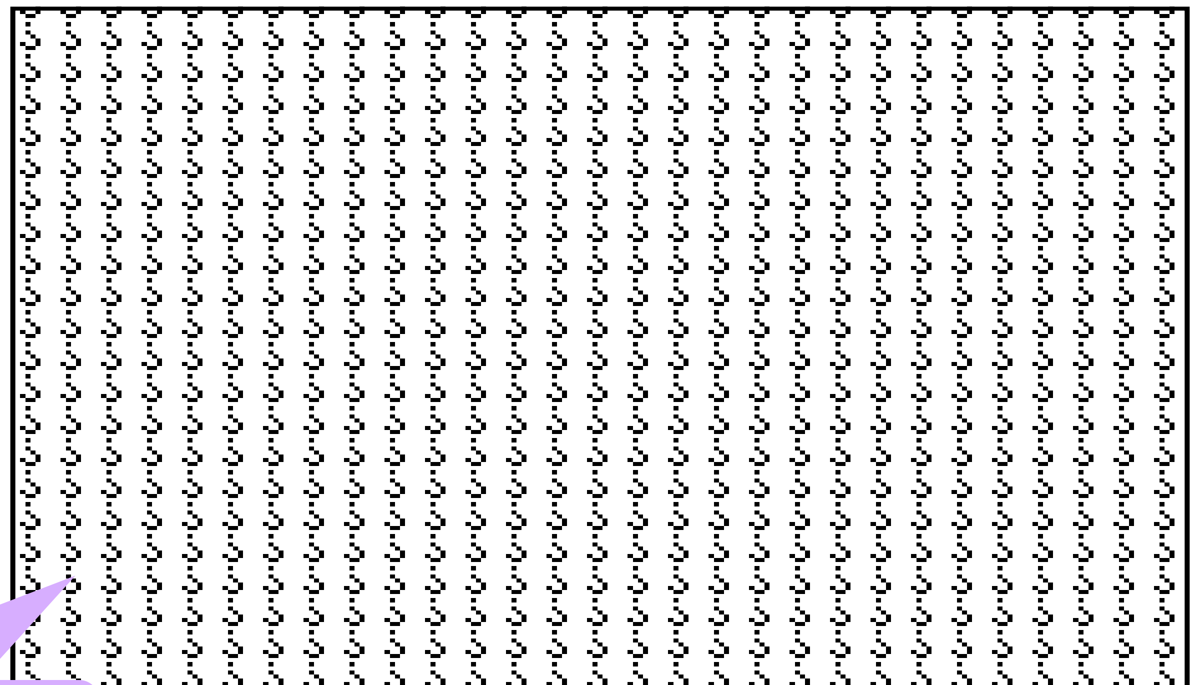
$$D_B = 1.2 \times D_A + 50$$

5 点运算和直方图



5 点运算和直方图

$$D_B = 1.2 \times D_A + 50$$



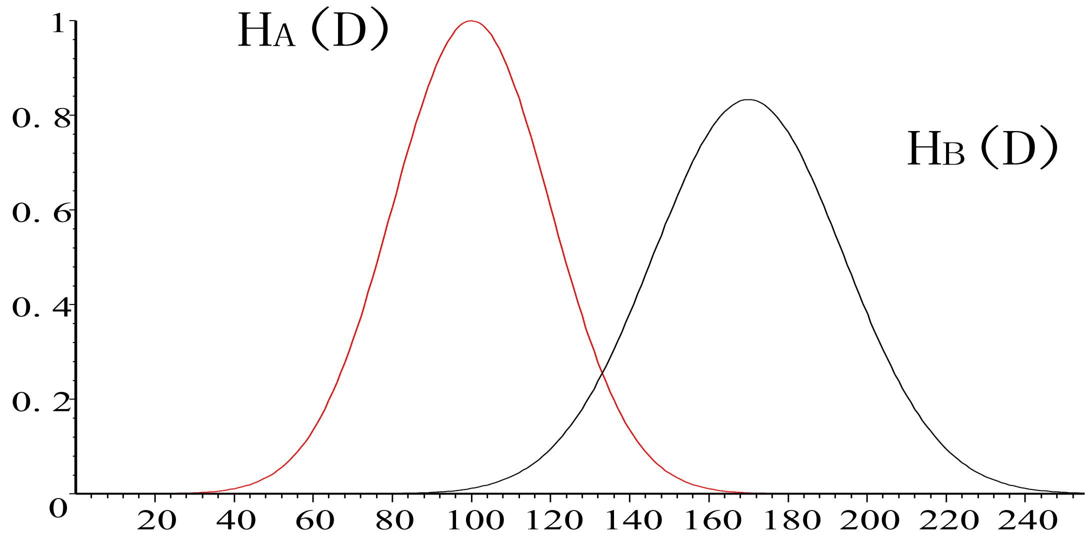
213≈1.2*138+50

5 点运算和直方图

- **例子2：假定原直方图为高斯函数**

$$H_A(D) = e^{-(D-100)^2 / 800}$$

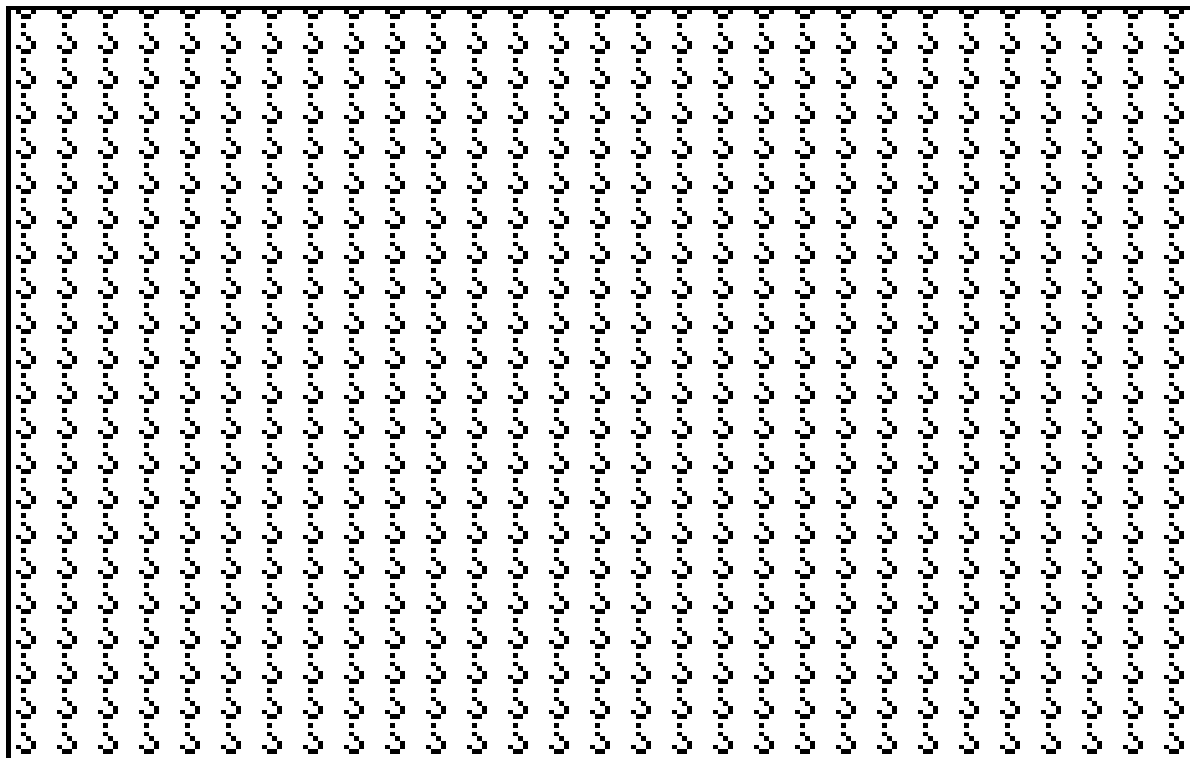
$$H_B(D) = \frac{1}{1.2} e^{-\left(\frac{D}{1.2}-100-\frac{50}{1.2}\right)^2 / 800}$$



5 点运算和直方图

- （2） 二阶点运算

$$D_B = f\left(D_A\right) = 255 \times \left(D_A / 255\right)^2 = D_A^2 / 255$$

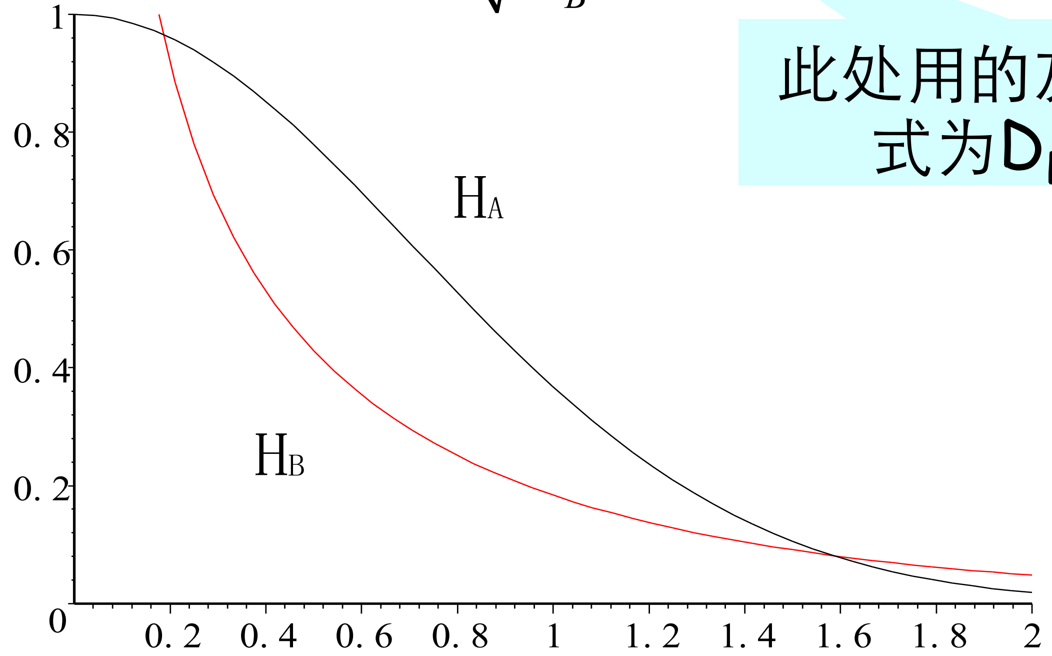


5 点运算和直方图

- **例子3：假定原直方图为高斯函数**

$$H_A(D_A) = e^{-D_A^2}$$

$$H_B(D_B) = \frac{e^{-D_B}}{2\sqrt{D_B}}$$



此处用的灰度变换公式为$D_B=D_A$^2

5 点运算和直方图

- （3）其它情形
- *若灰度变换函数存在0斜率，则输出直方图将产生尖峰；
- *若灰度变换函数存在斜率无穷大，则输出直方图将部分区域扩展为一定宽度；
- *若灰度变换函数不存在反函数，可以将输入直方图划为几段，然后输出直方图为几部分之和。
- （4）分段线性变换

6 直方图均衡化

- 1）目的
  - 使一输入图像转换为在每一灰度级上都有相同的像素点数（即输出的直方图是平的）。
  - 进一步的作用在于图像比较和分割。
- 2）研究思路：通过直方图变换公式

$$H_B(D)=\frac{H_A\left[f^{-1}(D)\right]}{f'\left[f^{-1}(D)\right]}$$

- 3）步骤
- 4）离散情况
- 5）例子

6 直方图均衡化

$$step1: \frac{A_0}{D_m} = \frac{H_A\left[f^{-1}(D)\right]}{f'\left[f^{-1}(D)\right]}$$

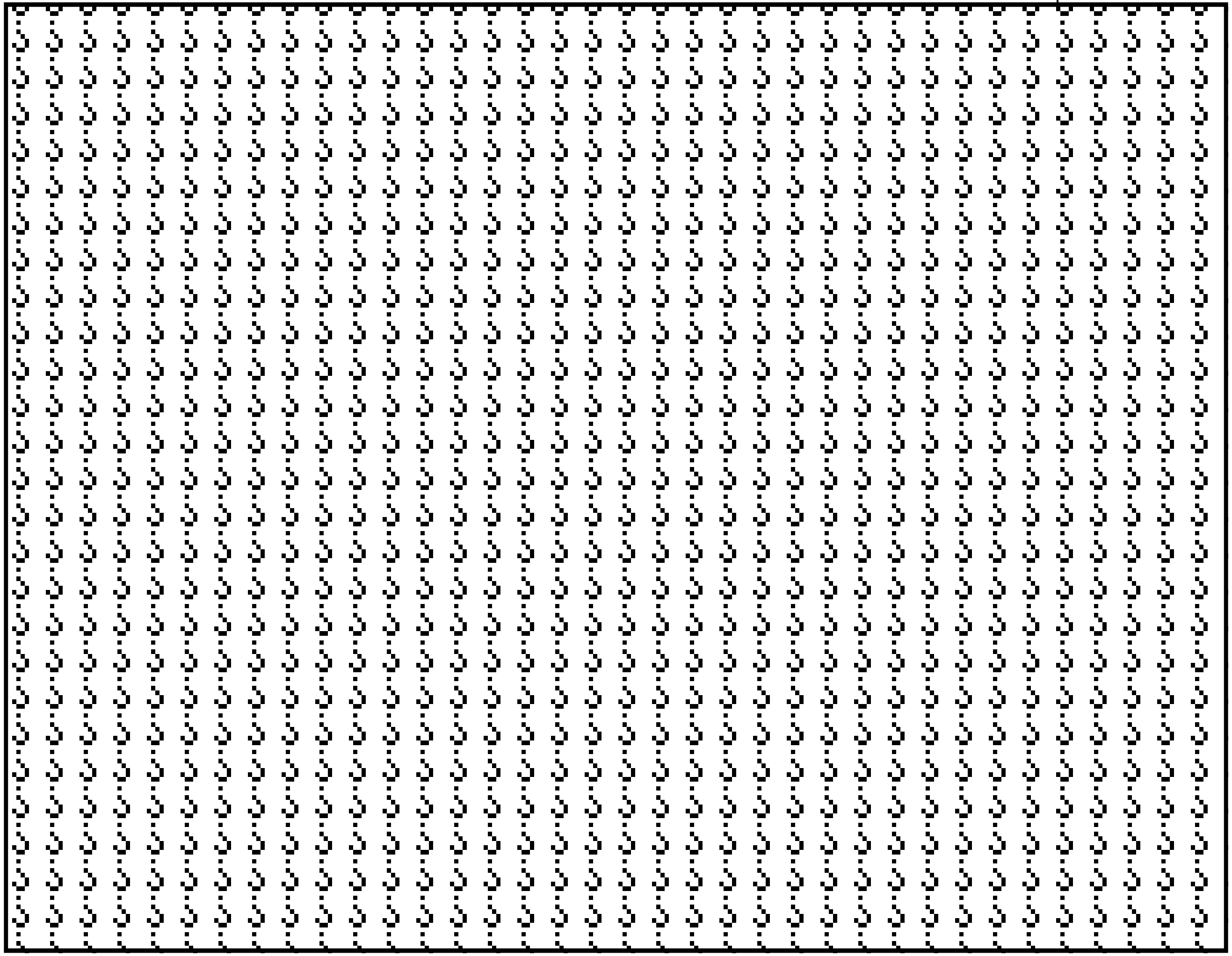
$$step2: f' = \frac{D_m}{A_0} H(D)$$

$$step3: f(D) = \frac{D_m}{A_0}\int_0^D H(u)du$$

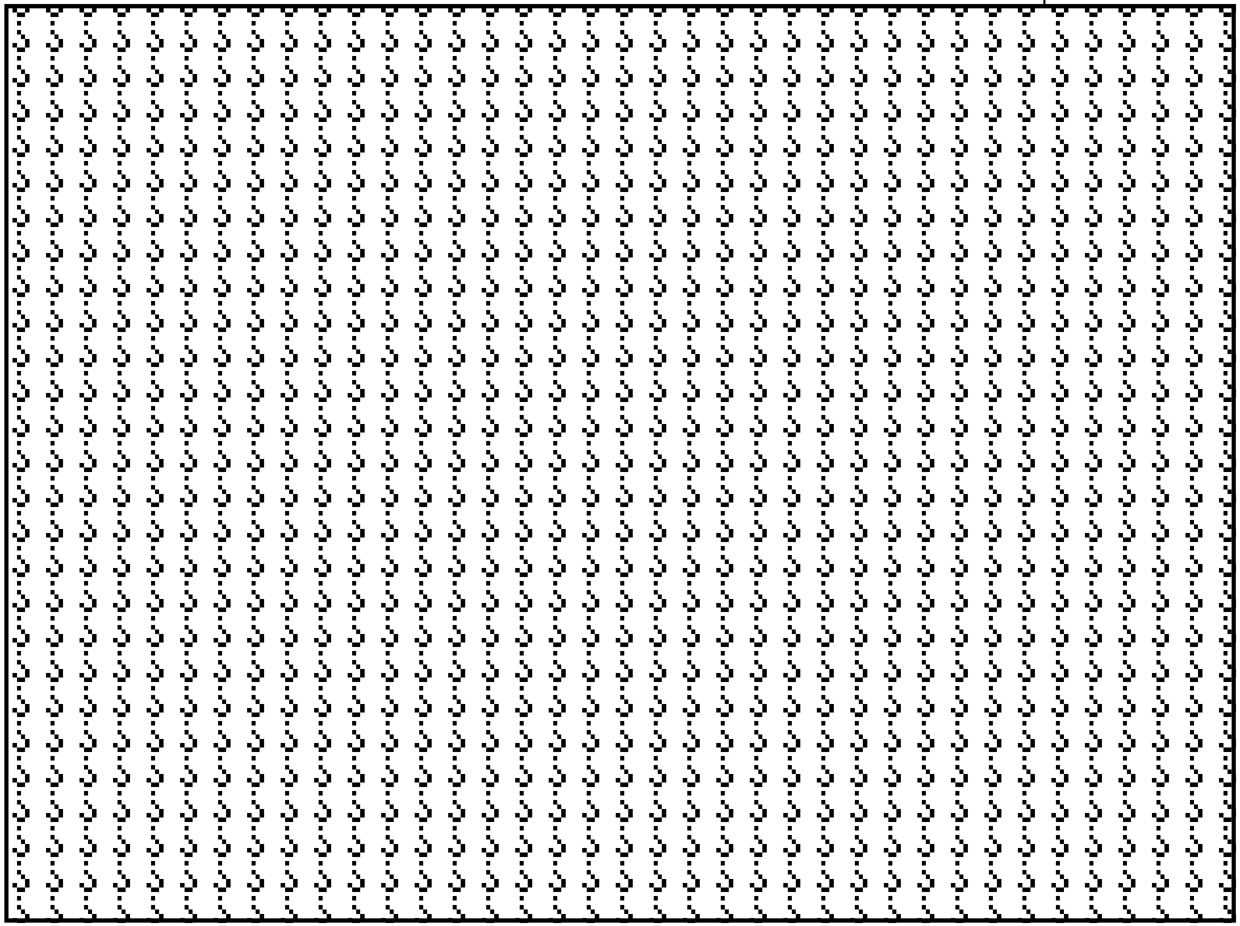
$$step4: \because CDF(D) = \frac{1}{A_0}\int_0^D H(u)du$$

$$step5: \therefore f(D) = D_m \times CDF(D)$$

6 直方图均衡化



6 直方图均衡化



7 直方图规定化

- 1）目的
  - 使处理的图像具有指定的直方图形状。
- 2）研究思路
- 3）步骤
- 4）离散情况
- 5）举例

7 直方图规定化

- 1）设输入图像为A(x,y);
- 2）输出图像B(x,y)有规定的直方图H_B;
- 3）输入图像和输出图像有共同的均衡化图像C(x,y);

$$\mathrm{Q}\ C(x,y)=D_m\times CDF_A\left[A(x,y)\right]$$

$$G(d):C(x,y)=D_m\times CDF_B\left[B(x,y)\right]=D_m\times\int_0^d H_B(u)du$$

$$f(d):B(x,y)=G^{-1}\left\{CDF_A\left[A(x,y)\right]\right\}$$

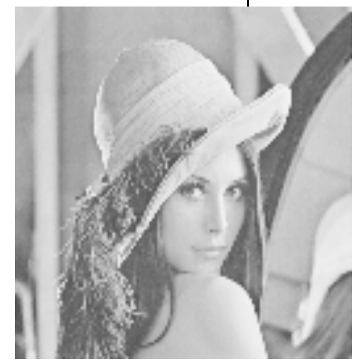
7 直方图匹配

- 1）目的
  - 通过转换比较两幅数字图像的直方图，判断两幅数字图像是否为同一物理景象。
- 2）研究思路
- 3）步骤
- 4）离散情况
- 5）举例

8 直方图匹配

A(x,y)

B(x,y)



C(x,y)

- 问题1：在给定A图像和C图像的情况下，如何选取灰度变换函数?
- 问题2：判断A图像和C图像是否为同一物理图像?（请思考）

8 直方图匹配

$$\text{step1}: \because B(x,y) = D_m CDF_A A(x,y)$$

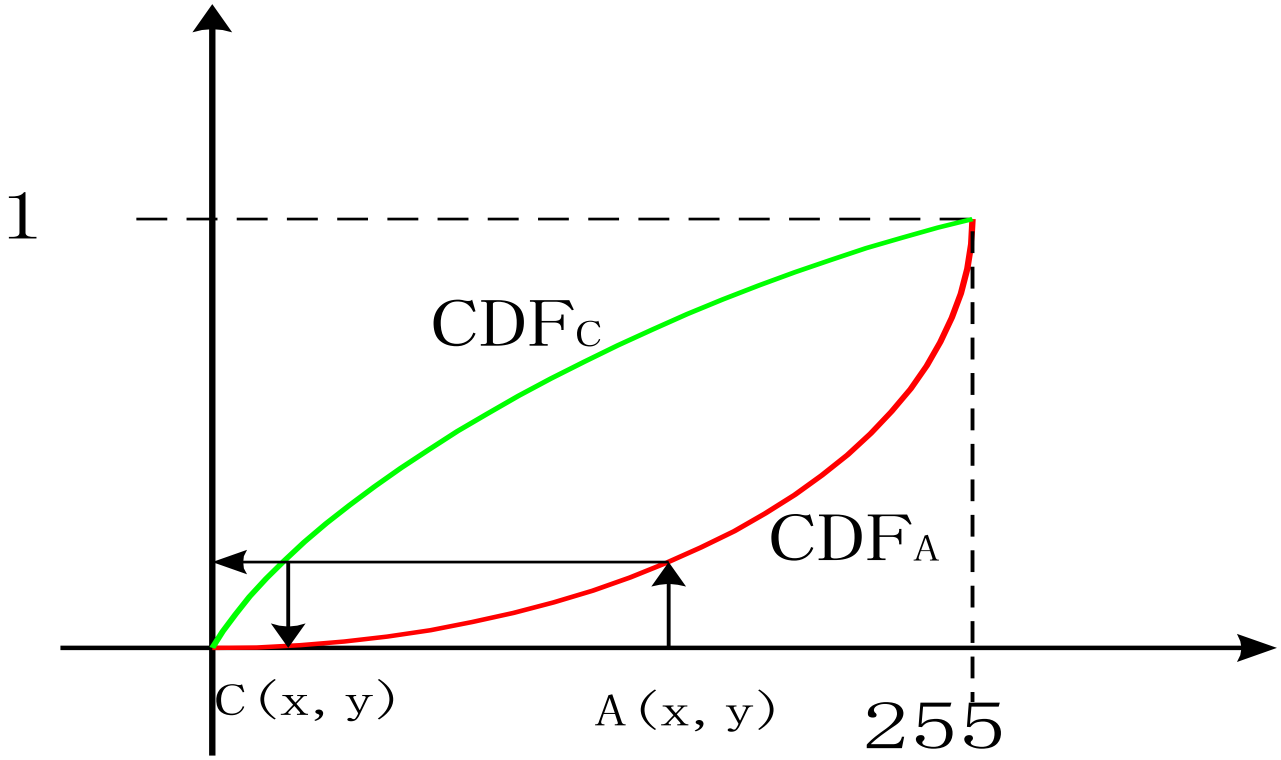
$$且 B(x,y) = D_m CDF_C C(x,y)$$

$$\text{step2}: \therefore D_m CDF_A A(x,y) = D_m CDF_C C(x,y)$$

$$\text{step3}: \therefore C(x,y) = CDF_C^{-1}\left[CDF_A\left(A(x,y)\right)\right]$$

8 直方图匹配

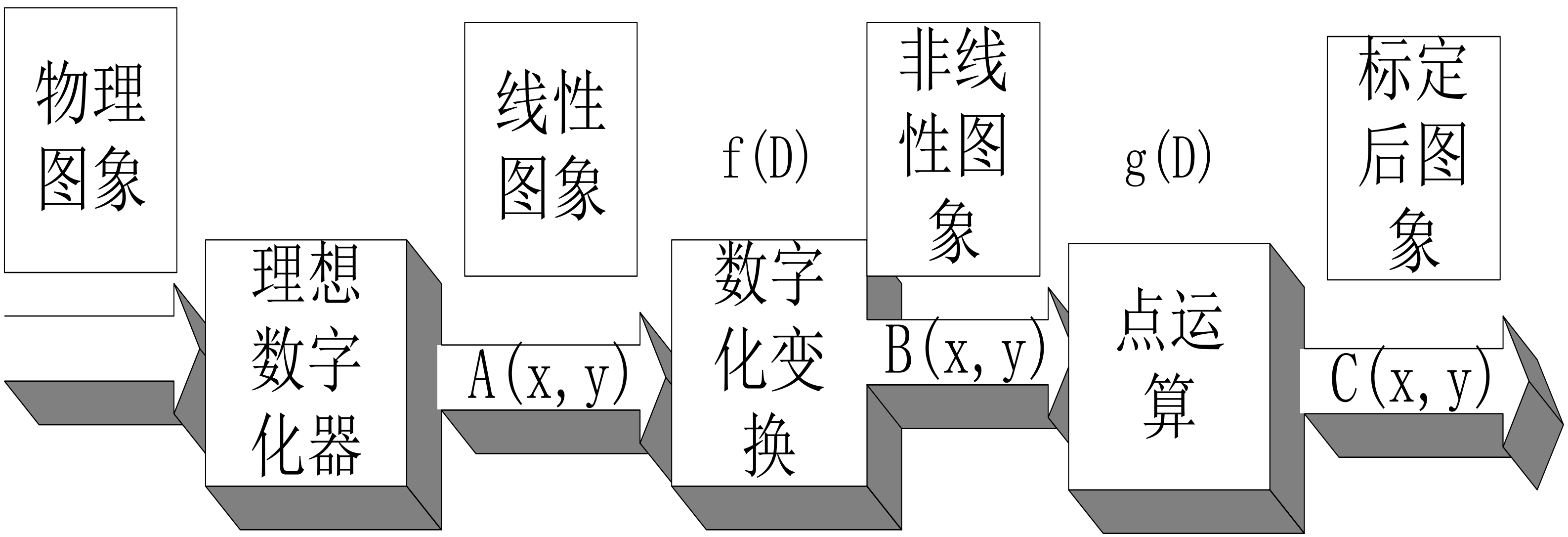
-



5 直方图匹配

```
%get cdf-1
for i=1:128
   for j=1:128
      for k=1:256
            if lenna_match_cdf(k)/(128*128)<lenna_equ(i,j) & lenna_match_cdf(k+1)/(128*128)>lenna_equ(i,j)
                  lenna_match(i,j)=k;
            break;
               end
            end
   end
end
```

6 光度学和显示校正



6 光度学和显示校正

$$C(x,y)=g\{f[A(x,y)]\}=A(x,y)$$

$$\text{若使}C(X,Y)=A(X,Y)$$

$$\text{则}g(D)=f^{-1}(D)$$

- 例子：

$$\text{若}\mathrm{D}_{\mathrm{B}}=f(D_A)=aD_A{}^2+b$$

$$\text{则}\mathrm{g}(\mathrm{D}_{\mathrm{B}})=\sqrt{\frac{D_B-b}{a}}$$

6 光度学和显示校正

- 光电转换特性

$$输出电压 = (输入光强)^{\gamma}$$

- Γ（gamma）校正
  - 摄象机：γ=0.5
  - 显示器： γ=2.5
- 人眼的生理特点
  - 电影： γ=1.5
  - 电视或计算机： γ=1.25

$进一步阅读：Gonzalez, p63-66.

思考题

- 理解什么是灰度直方图
- 能从灰度直方图判断照片是否曝光过度（过曝）和曝光不足（欠爆）
- 理解点运算和直方图之间的关系
- 理解直方图变换的原理（本PPT 45页）
- 了解直方图均衡化的过程