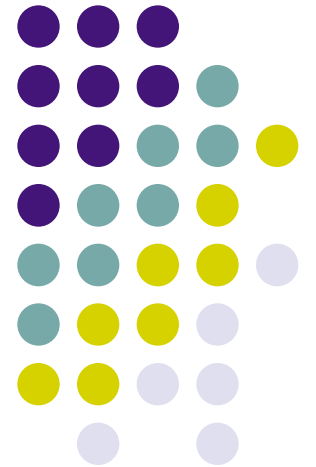
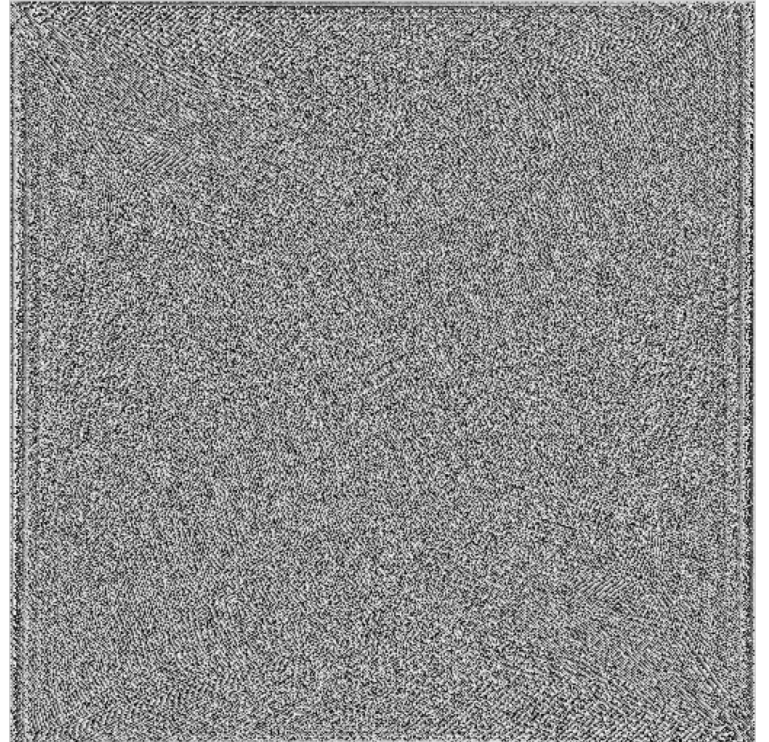
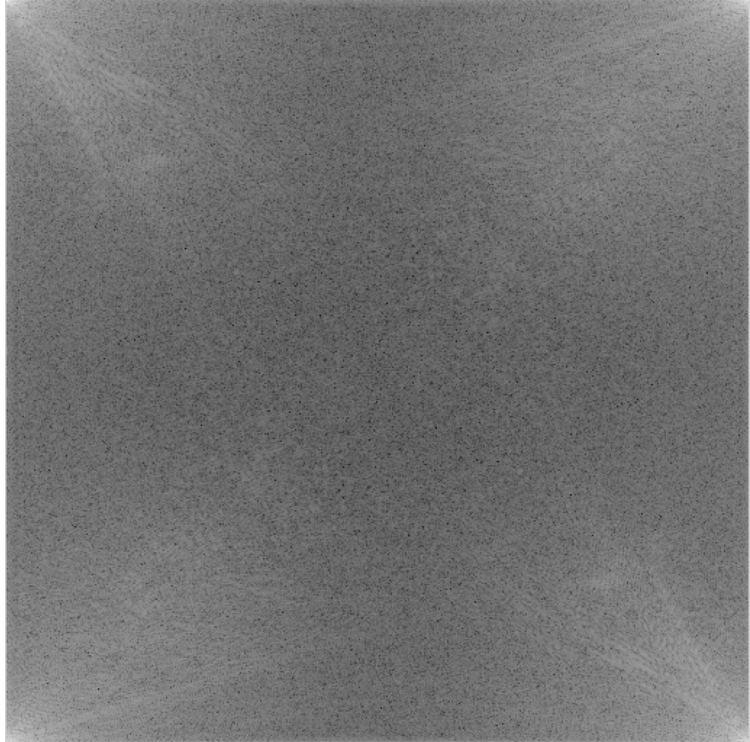
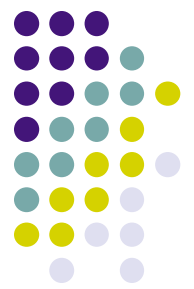


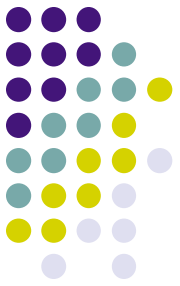
数字图像处理

频域基本操作





频域操作

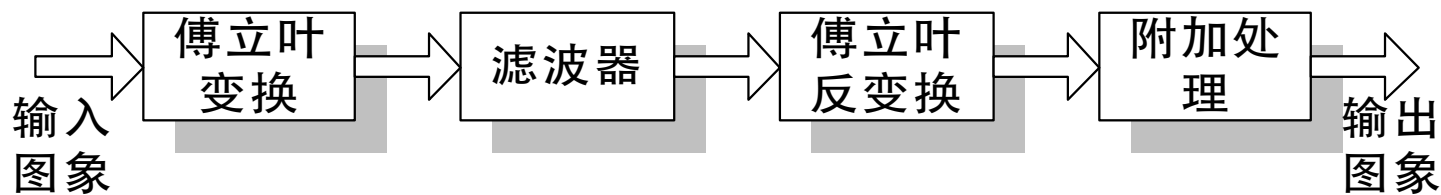


- 序言
- 一、低通滤波器法
- 二、高通滤波器法
- 三、带通和带阻滤波器法
- 四、同态滤波
- 五、维纳估计器
- 六、匹配检测器

图像处理中的滤波器设计



- 序言



1 低通滤波器法

- 1) 原理
- 2) 理想低通滤波器
- 3) 巴特沃思低通滤波器
- 4) 指数低通滤波器



1 低通滤波器法

- 1) 原理

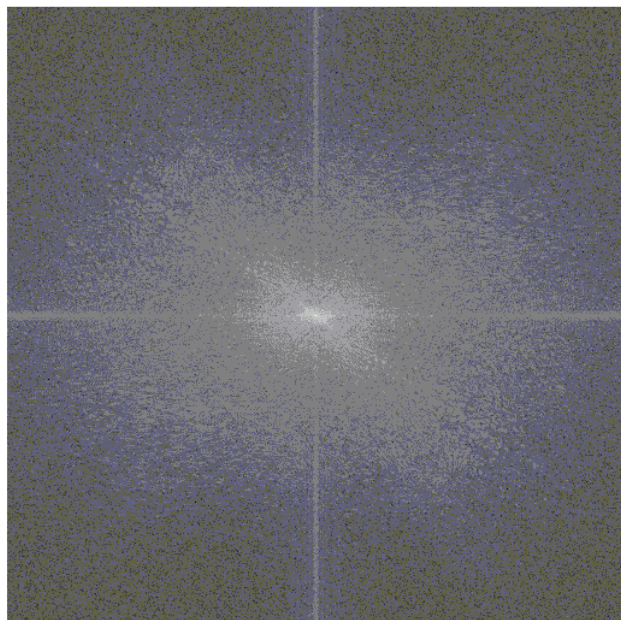


Lenna

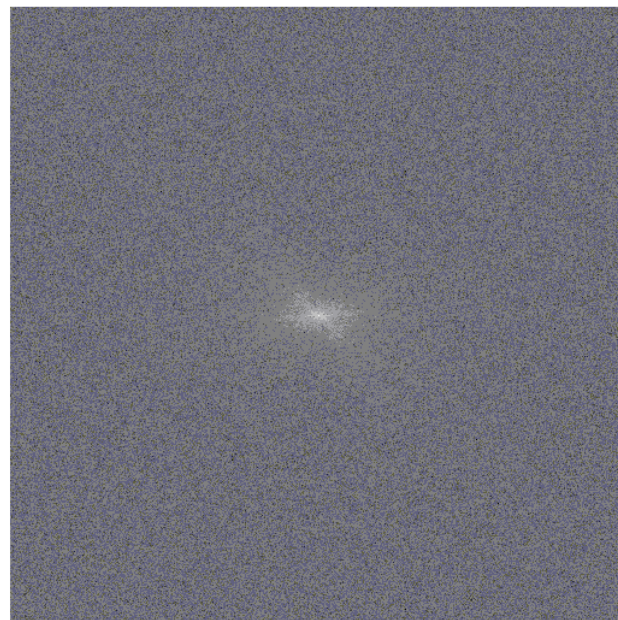


加入高斯噪声的Lenna

1 低通滤波器法



Lenna的谱图像



有高斯噪声Lenna的谱图像

1 低通滤波器法



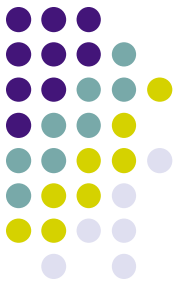
- 结论：图像的边缘和其他尖锐跳跃（如噪声）对傅立叶变换的高频分量有很大贡献；
- 方法：通过一个线性系统，频域上对一定范围高频分量进行衰减能够达到平滑化；
- 这种线性系统称为低通滤波器法。

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v)$$

$F(u, v)$ 是输入， $G(u, v)$ 是输出

$H(u, v)$ 是线性系统的传递函数

1 低通滤波器法



● 2) 理想低通滤波器 (ILPF)

- 定义：以 D_0 为半径的圆内所有频率分量无损的通过，圆外的所有频率分量完全衰减。

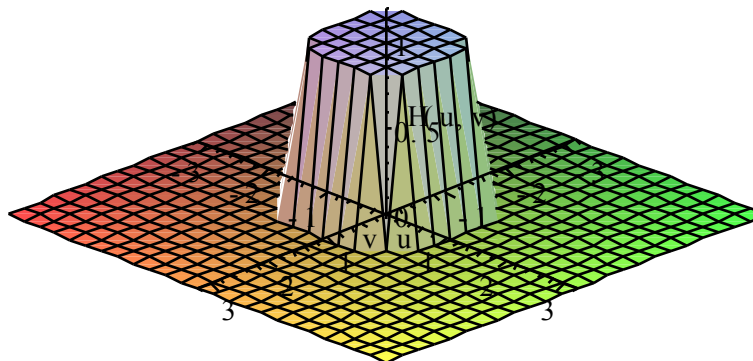
$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

其中 $D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$

- D_0 又称为截止频率。

注意 D_0 的物理意义

1 低通滤波器法



$$H(u, v)$$

1 低通滤波器法

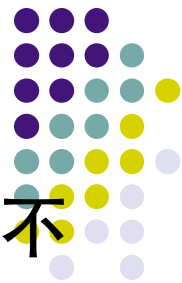


如何确定 D_0 ?

- 信号能量 E_T ：将 $u, v=0, 1, N-1$ 的每一点 (u, v) 的能量相加起来得到傅立叶信号能量 E_T 。

$$E_T = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} E(u, v) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} [R^2(u, v) + I^2(u, v)]$$

1 低通滤波器法



- 举例：观察有高斯噪声Lenna图像的傅立叶谱和不同半径下的谱图像的信号能量。



$$E_T = 1.5387 \times 10^{15}$$

$$E_5 = 1.3886 \times 10^{15}$$

$$E_5/E_T = 0.9025$$

$$E_10 = 1.4191 \times 10^{15}$$

$$E_10/E_T = 0.9223$$

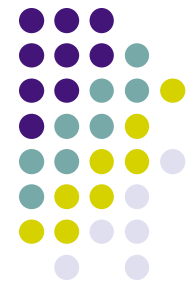
$$E_20 = 1.4346 \times 10^{15}$$

$$E_20/E_T = 0.9323$$

$$E_50 = 1.4483 \times 10^{15}$$

$$E_50/E_T = 0.9412$$

1 低通滤波器法

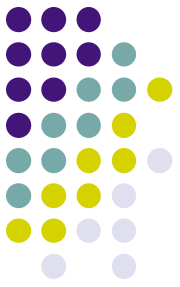


有高斯噪声的Lenna图像



$D_0=5$

1 低通滤波器法



$D_0=10$



$D_0=20$

1 低通滤波器法



$D_0=50$



有高斯噪声的原Lenna图像

1 低通滤波器法



- 问题：

- (1) 模糊

- 对于半径为5，包含了全部90%的能量。但严重的模糊表明了图片的大部分边缘信息包含在滤波器滤去的10%能量之中。随着滤波器半径增加，模糊的程度就减少。

- 模糊产生的原理：根据卷积定理

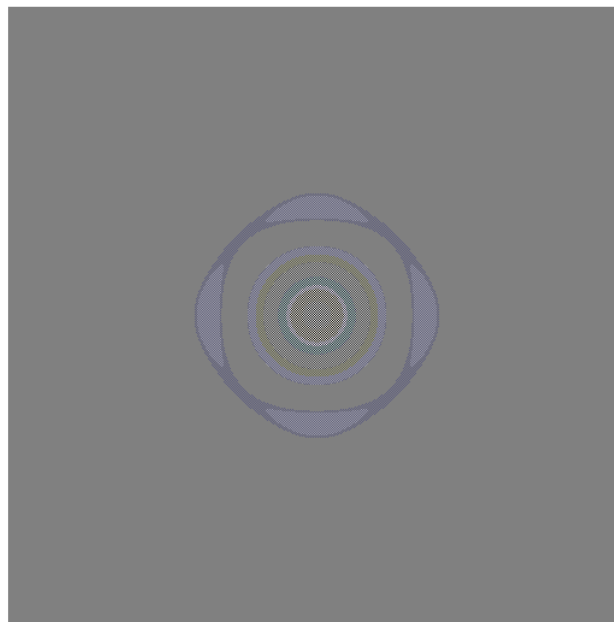
$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$$

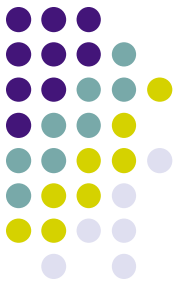
- ILPF的空域图像

1 低通滤波器法

- 频域上的滤波相当于空域上的卷积。即相当复杂图像中每个像素点简单复制过程。因此导致图像的模糊。当D增加时环半径也增加，模糊程度减弱。

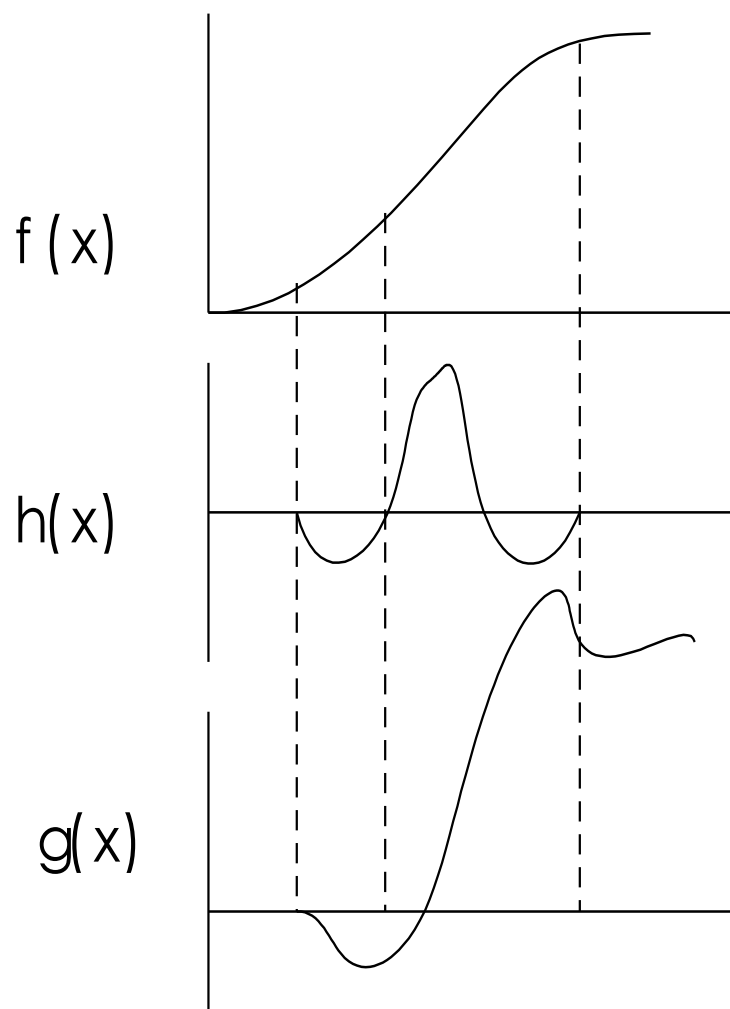


1 低通滤波器法



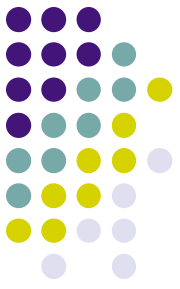
- (2) 振铃
- **ILPF**空域上冲激响应卷积产生两个现象：
- 一是边缘渐变部分的对比度；
- 二是边缘部分加边 (**ringing**) 。
- 其原因是冲激响应函数的多个过零点。

1 低通滤波器法



1 低通滤波器法

- 3) 巴特沃思低通滤波器 (BLPF)



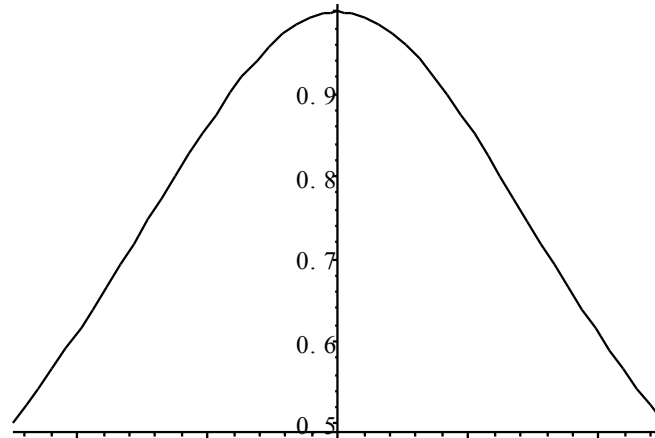
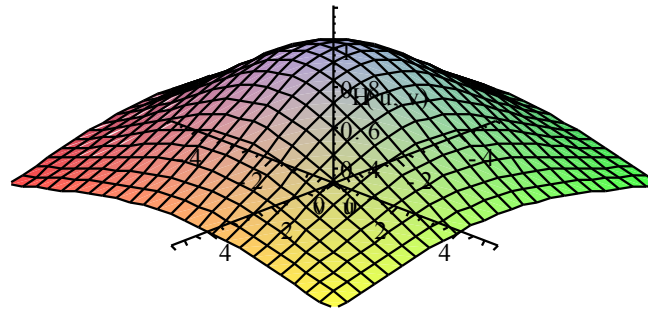
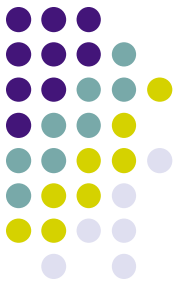
n 阶巴特沃思 (Butterworth) 滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{D_0} \right)^{2n}}$$

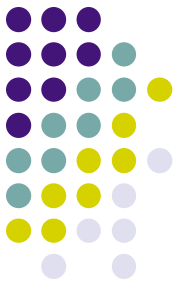
$n = 1$, 1阶巴特沃思滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \frac{(u^2 + v^2)}{D_0^2}}$$

1 低通滤波器法

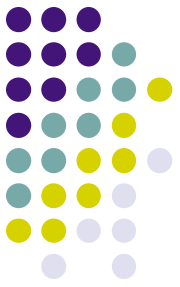


1 低通滤波器法



$D_0=10$

1 低通滤波器法



$D_0=20$



$D_0=50$

1 低通滤波器法

- 巴特沃斯低通滤波器的优点是：
- 一、模糊大大减少。因为包含了许多高频分量；
- 二、没有振铃现象。因为滤波器是平滑连续的。



1 低通滤波器法

● 4) 指数低通滤波器 (elpf)

指数低通滤波器

$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{D_0}\right]^{2n}}$$

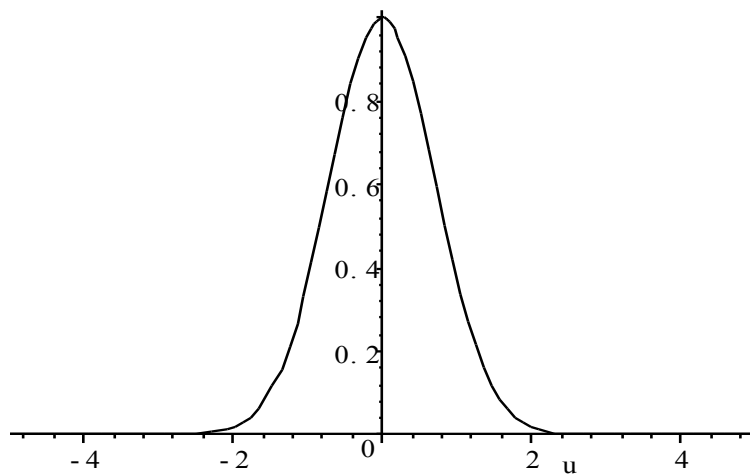
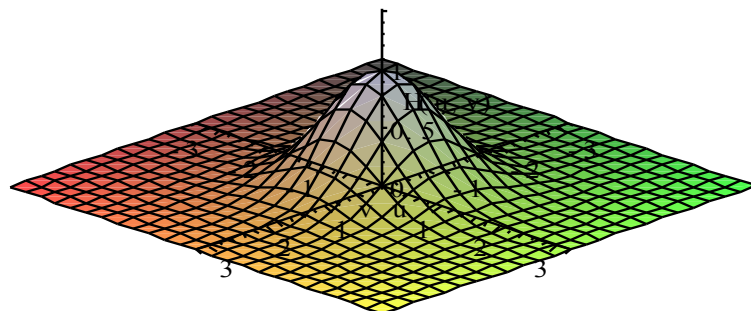
$n = 1$ 的指数低通滤波器

$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{u^2+v^2}{D_0^2}\right]}$$

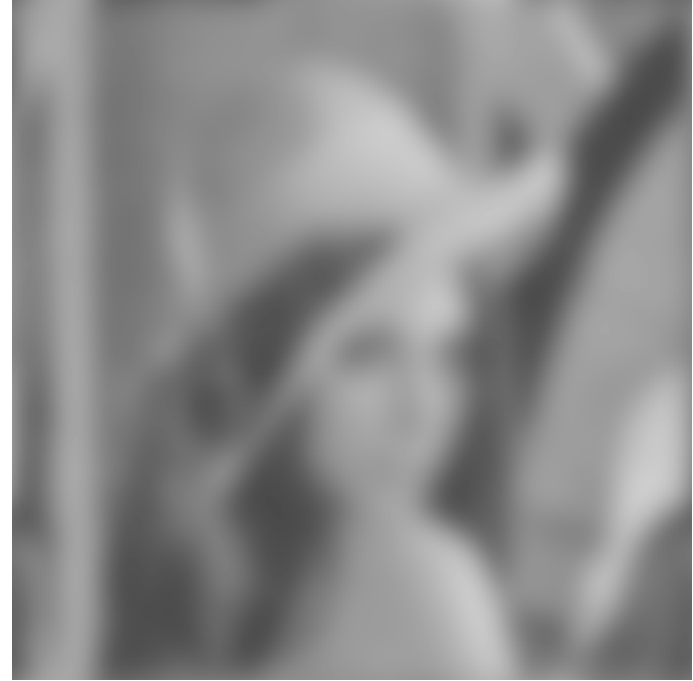
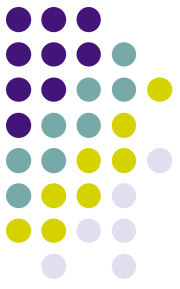
性质：比相应的巴特沃思滤波器要稍微模糊，但没有振铃现象。



1 低通滤波器法

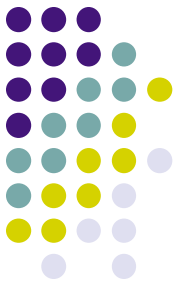


1 低通滤波器法



$D_0=10$

1 低通滤波器法



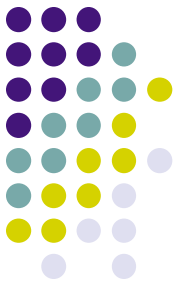
$D_0=20$



$D_0=50$

2 高通滤波器法

- 1) 原理
- 2) 理想高通滤波器
- 3) 巴特沃思高通滤波器
- 4) 指数高通滤波器
- 5) 高斯差分滤波器



2 高通滤波器法



● 1) 原理

- 图像锐化处理的目的是**使模糊图像变得清晰**。
- 通常图像模糊是由于图像受到平均或积分运算，因此图像锐化采用微分运算。
- 在频域处理上，即采用高通滤波器法。
- 注意：进行处理的图像必须有较高的信噪比，否则图像锐化后，图像信噪比会更低。

2 高通滤波器法

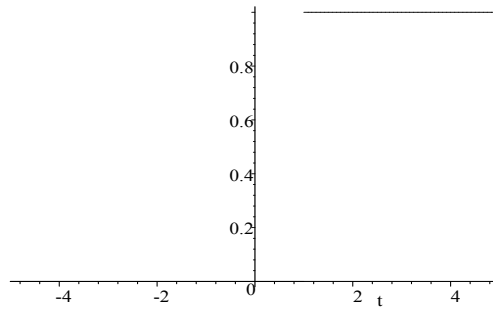
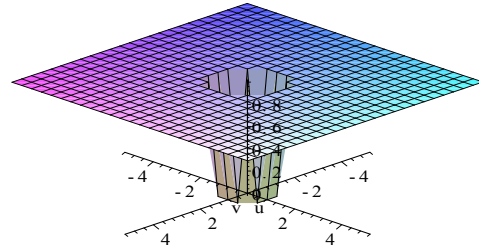
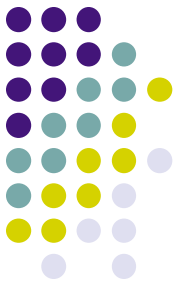
- 2) 理想高通滤波器 (**IHPF**)

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

其中 $D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$



2 高通滤波器法



2 高通滤波器法

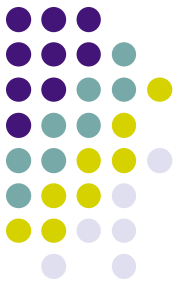
- 3) 巴特沃思高通滤波器 (BHPF)

n 阶巴特沃思 (Butterworth) 高通滤波器

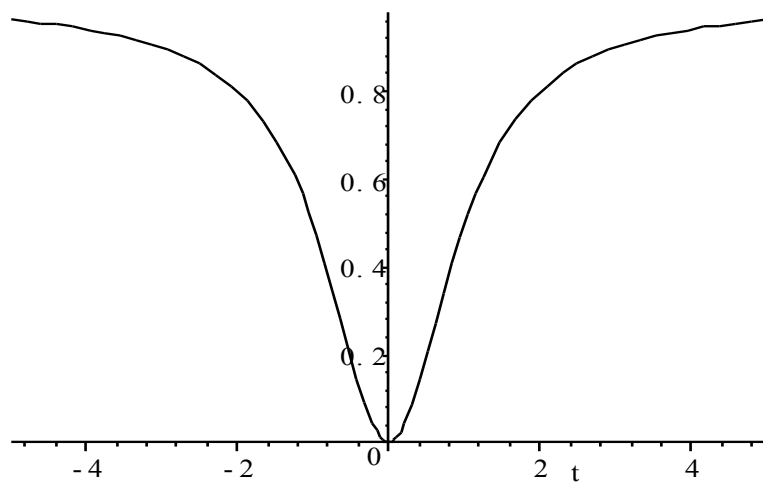
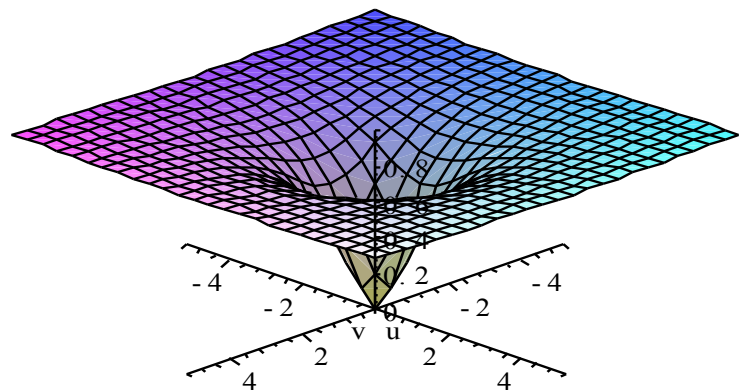
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D_0}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)^{2n}}$$

$n = 1, 1$ 阶巴特沃思高通滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \frac{D_0^2}{(u^2 + v^2)}}$$



2 高通滤波器法



2 高通滤波器法

- 4) 指数高通滤波器 (EHPF)

指数高通滤波器

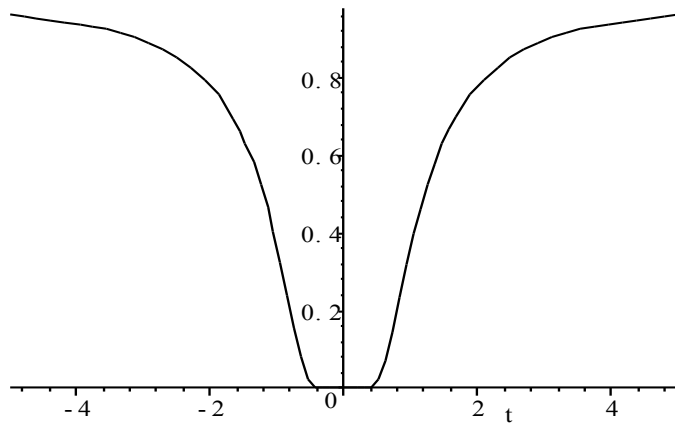
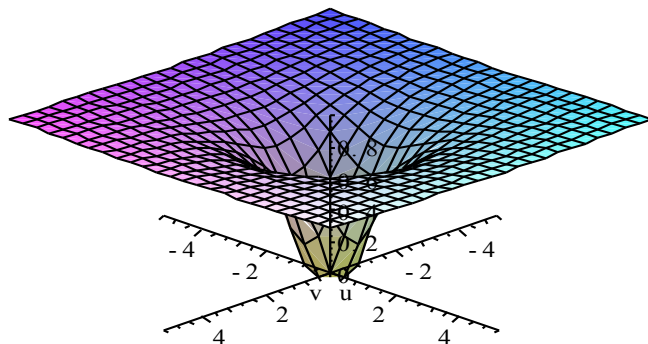
$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{D_0}{\sqrt{u^2+v^2}}\right]^2}$$

$n = 2$ 的指数高通滤波器

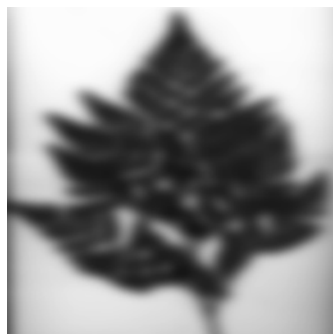
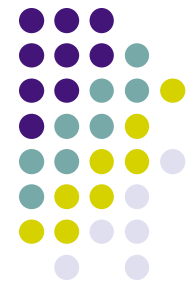
$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{D_0^2}{u^2+v^2}\right]}$$



2 高通滤波器法



2 高通滤波器法



原图



IHPF

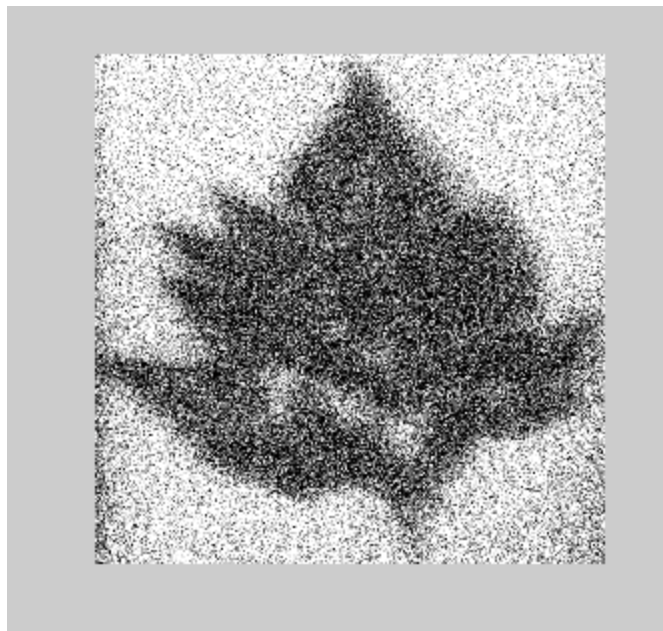
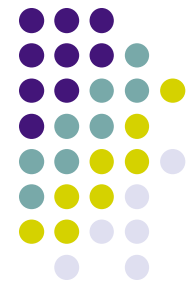


BHPF

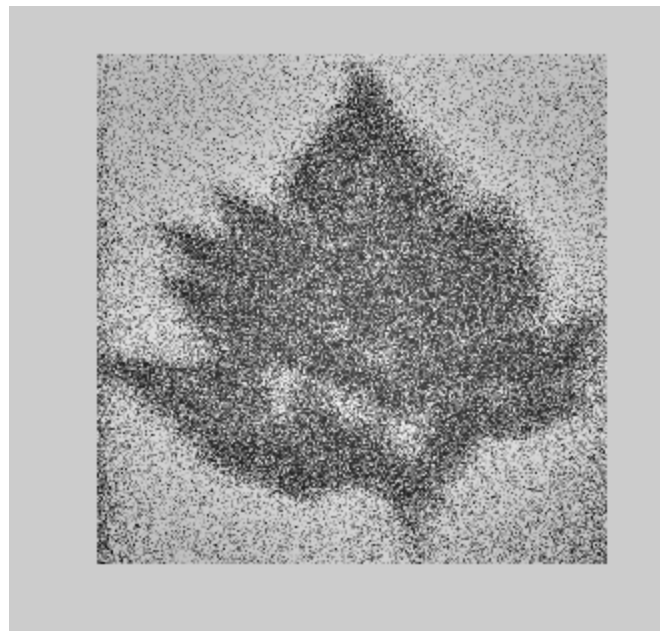


EHPF

2 高通滤波器法



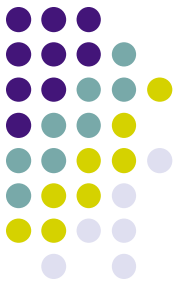
有噪声的图



采用**BHPF**高通滤波后，
信噪比变小。

2 高通滤波器法

- 5) 高斯差分滤波器 (DoG, Difference of Gaussian)



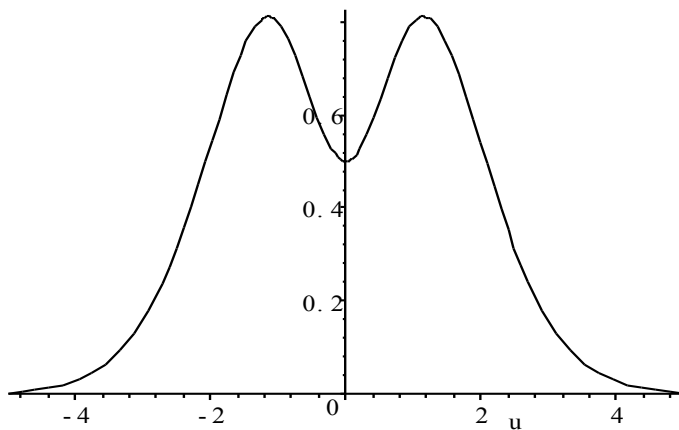
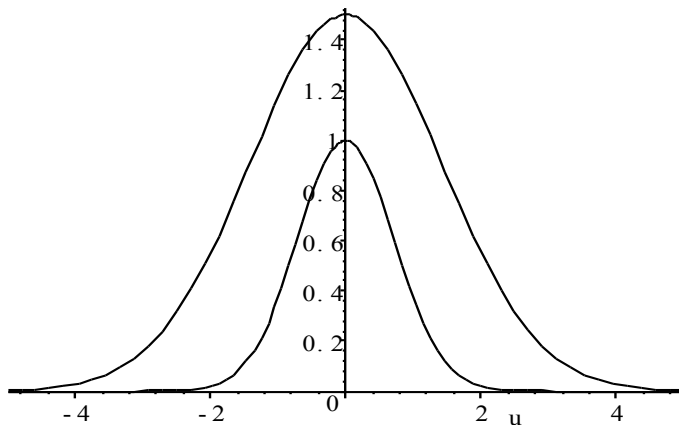
高斯差分滤波器的传递函数定义为:

两个不同宽度高斯函数之差。

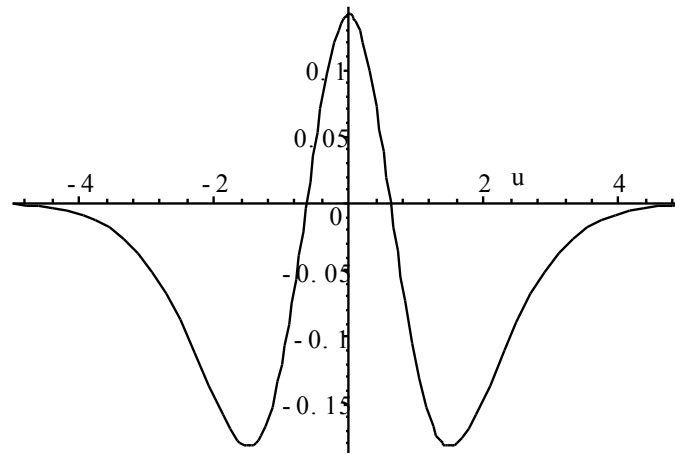
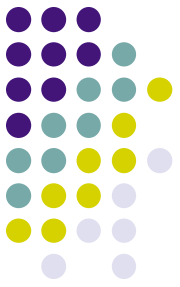
$$G(u) = Ae^{-u^2/2\sigma_1^2} - Be^{-u^2/2\sigma_2^2} \quad A \geq B, \sigma_1 \geq \sigma_2$$

$$g(t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-t^2/2\sigma_1^2} - \frac{B}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-t^2/2\sigma_2^2}$$

2 高通滤波器法



2 高通滤波器法



3 带通和带阻滤波器法



- 1) 理想的带通滤波器

$$H(u) = \begin{cases} 1 & f_1 \leq |u| \leq f_2 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

$$u_0 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \Delta u = f_2 - f_1$$

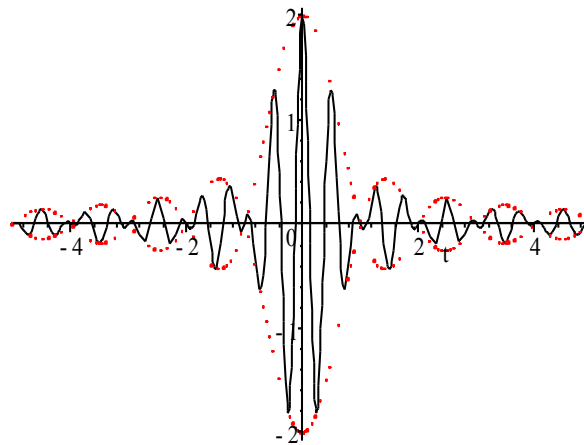
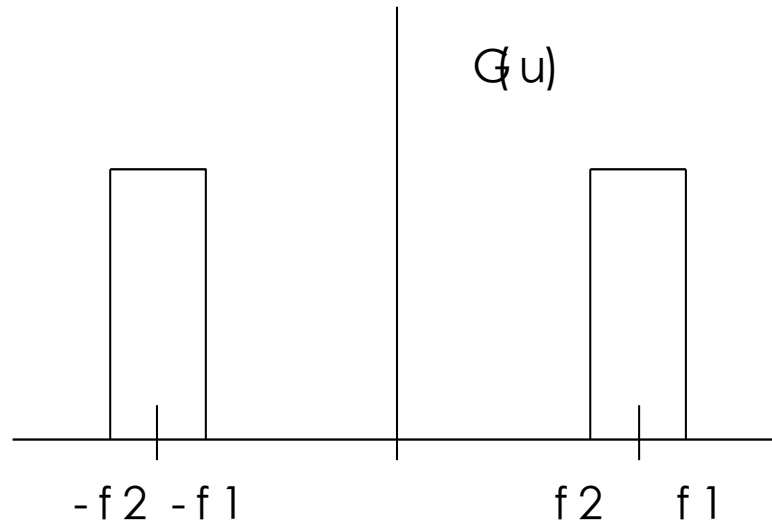
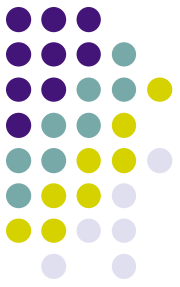
理想带通滤波器的传递函数可写为

$$H(u) = \Pi\left(\frac{u}{\Delta u}\right) * [\delta(u - u_0) + \delta(u + u_0)]$$

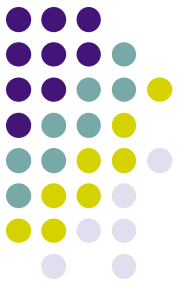
理想带通函数的冲激响应为

$$h(t) = 2\Delta u \frac{\sin(\pi\Delta u t)}{\pi\Delta u t} \cos(2\pi u_0 t)$$

3 帶通和帶阻濾波器法



3 带通和带阻滤波器法



• 2) 理想的带阻滤波器

$$H(u) = \begin{cases} 0 & f_1 \leq |u| \leq f_2 \\ 1 & \text{others} \end{cases}$$

$$u_0 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \Delta u = f_2 - f_1$$

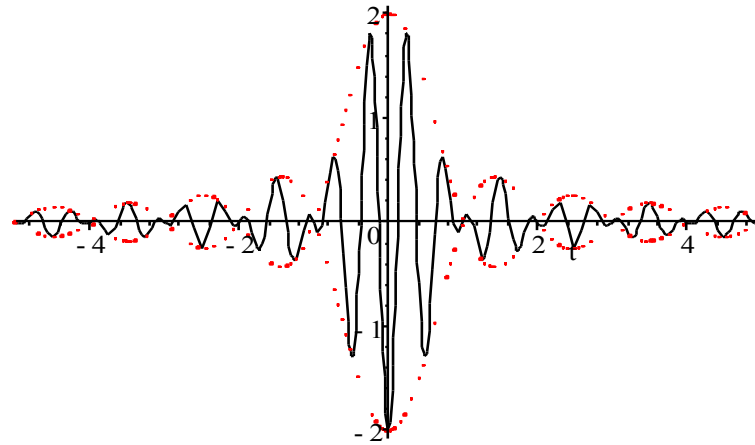
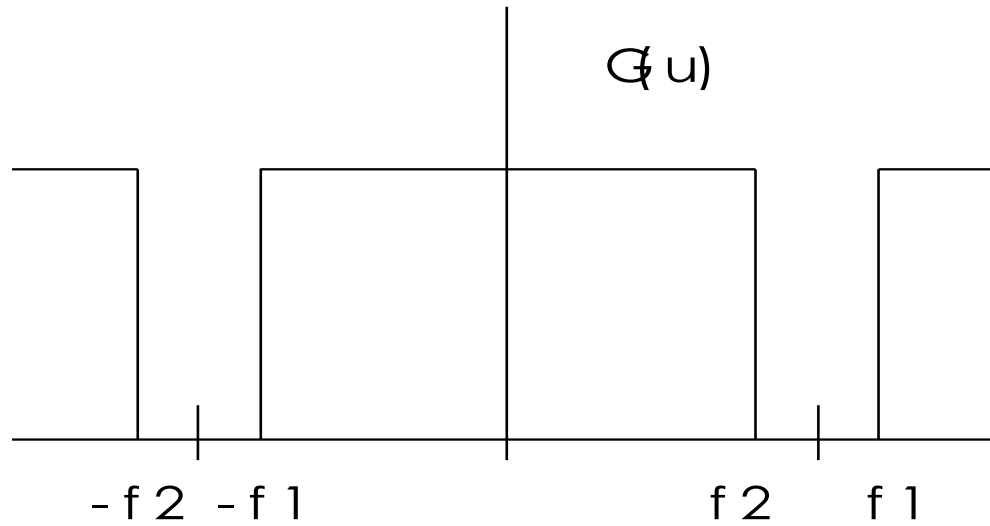
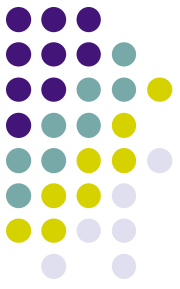
理想带阻滤波器的传递函数可写为

$$H(u) = 1 - \Pi\left(\frac{u}{\Delta u}\right) * [\delta(u - u_0) + \delta(u + u_0)]$$

理想带阻函数的冲激响应为

$$h(t) = \delta(t) - 2\Delta u \frac{\sin(\pi\Delta ut)}{\pi\Delta ut} \cos(2\pi u_0 t)$$

3 帶通和帶阻濾波器法



3 带通和带阻滤波器法

• 3) 通用带通滤波器

选取非负单峰函数 $K(u)$ ，与冲激偶做卷积

$$H(u) = K(u) * [\delta(u - u_0) + \delta(u + u_0)]$$

其冲激响应为

$$h(t) = 2k(t) \cos(2\pi u_0 t)$$

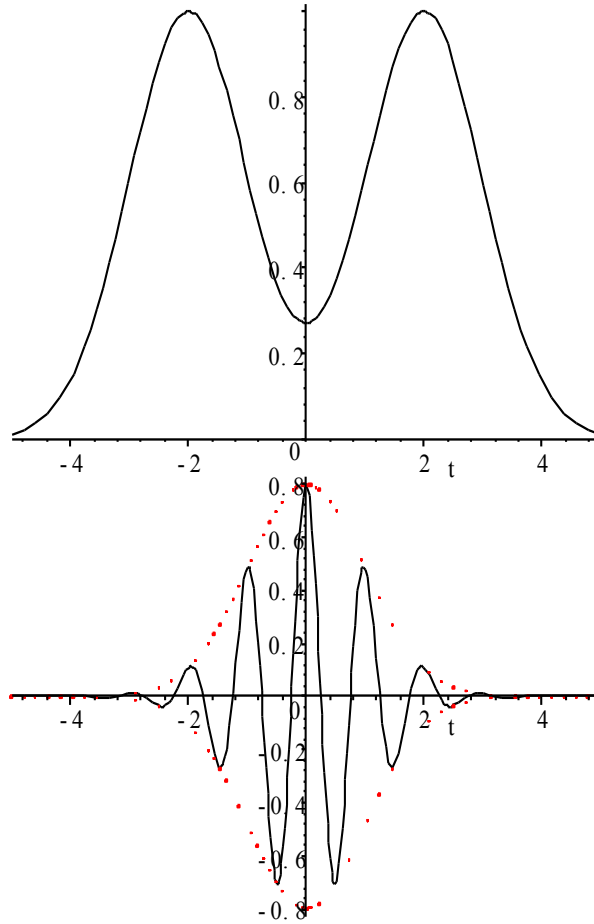
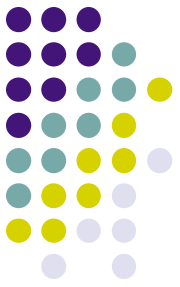
若 $K(u)$ 为高斯函数

$$H(u) = A e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} * [\delta(u - u_0) + \delta(u + u_0)]$$

$$h(t) = \frac{2A}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \cos(2\pi u_0 t)$$



3 帶通和帶阻濾波器法



3 带通和带阻滤波器法

- 4) 巴特沃斯带通滤波器

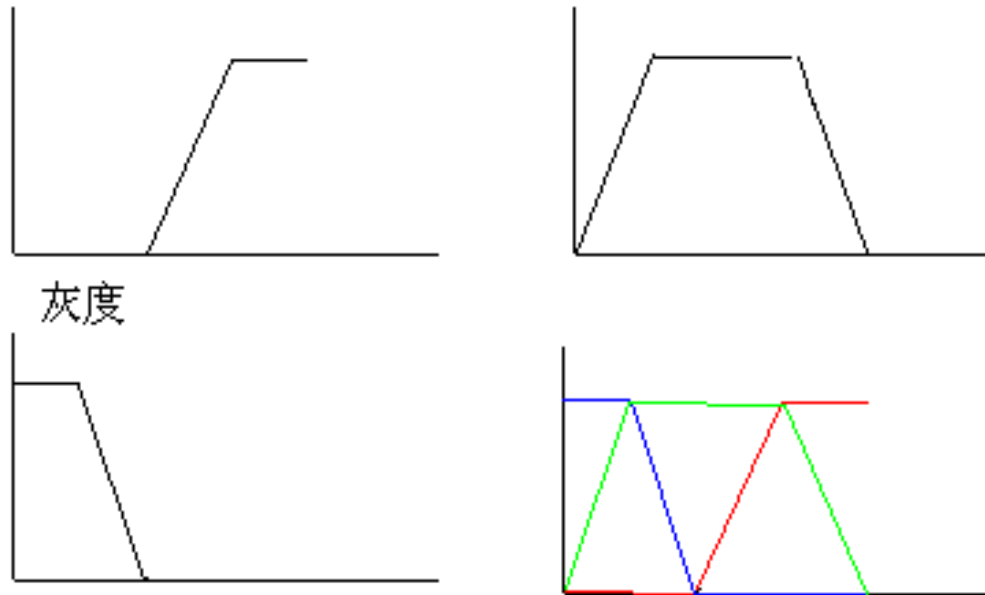
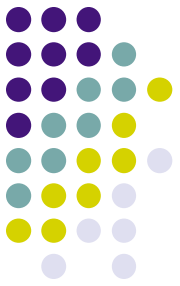
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}}$$

其中 W 为带宽， D_0 为带的中心。

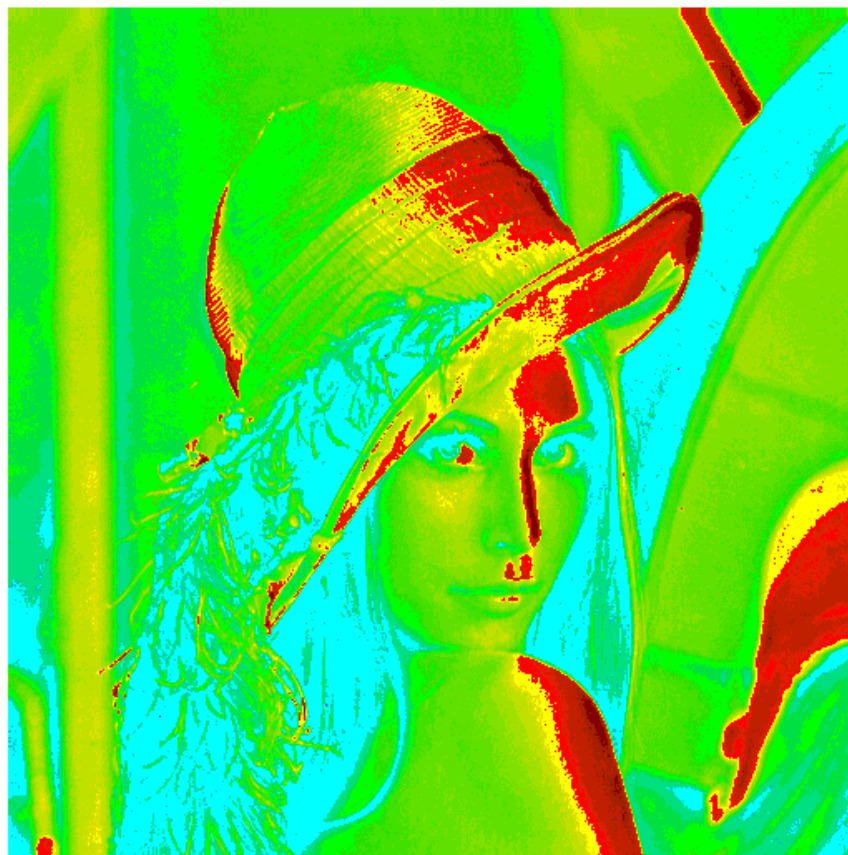


3 带通和带阻滤波器法

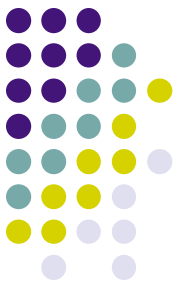
- 4) 伪彩色处理
 - 空域上的灰度—彩色变换函数



3 带通和带阻滤波器法

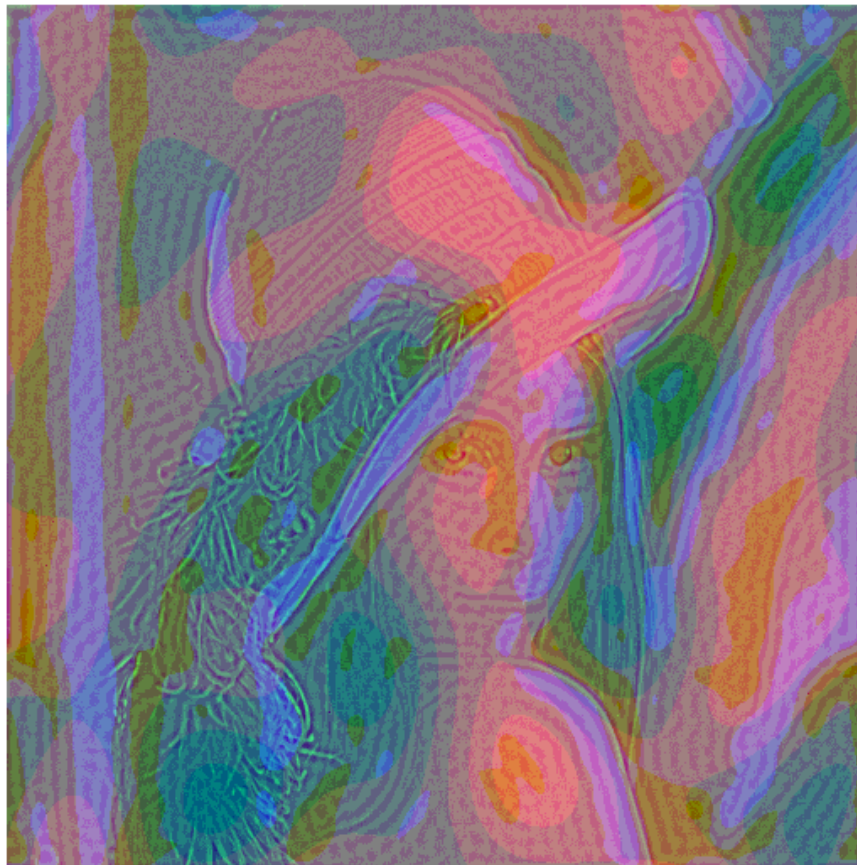


3 带通和带阻滤波器法



- 频域上的伪彩色处理（举例）
 - 低通滤波器：以围绕图像能量**90%**的圆作为截止点，半径为**5**，傅立叶反变换后作为红色分量；
 - 带通滤波器：以围绕图像能量**83%**的圆作为截止点，带宽以围绕图像能量**93%**的圆，半径为**4到20**，傅立叶反变换后作为兰色分量；
 - 高通滤波器：以围绕图像能量**95%**的圆作为截止点，半径为**50**，傅立叶反变换后作为绿色分量；

3 带通和带阻滤波器法

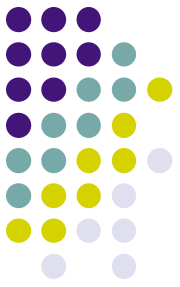


4 同态滤波



- 目的：正常图象是在均匀光强度情况下获得的图象，实际上光照射是不均匀，或光强范围动态太大。
- 方法：为解决光照不均匀的影响，可用同态滤波来解决。
- 原理：
- 光照下景物图象的模型
 - $f(x,y)=f_i(x,y)f_r(x,y)$
 - $f_i(x,y)$:随空间位置不同的光强分量
 - $f_r(x,y)$:景物反射到眼睛的图象
 - $f(x,y)$:最终获得的图象

4 同态滤波



4 同态滤波



- 分析

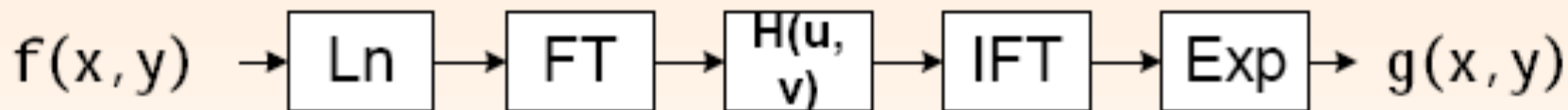
- $f_i(x, y)$: 缓慢变化, 频率集中在低频部分
- $f_r(x, y)$: 包含景物各种信息, 高频分量丰富

- 处理

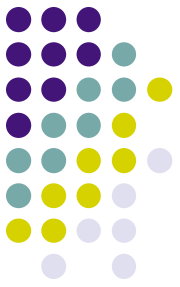
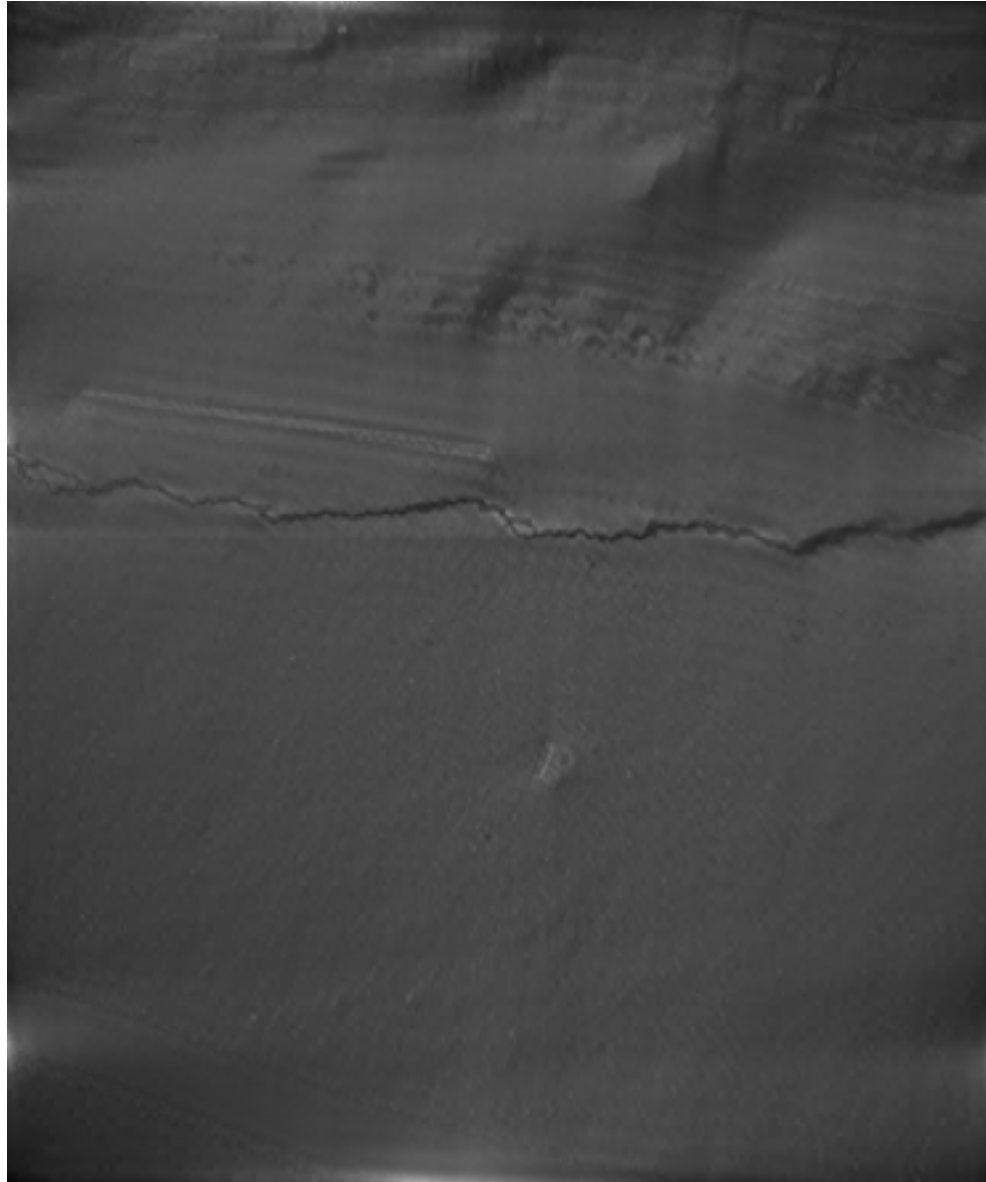
$$\ln f(x, y) = \ln f_i(x, y) + \ln f_r(x, y)$$

$$FFT[\ln f(x, y)] = FFT[\ln f_i(x, y)] + FFT[\ln f_r(x, y)]$$

- 选择一低通滤波函数 $H(u, v)$ 在频域空间处理



4 同态滤波



5 维纳估计器



● 1) 目的

- 从加性噪声中最优的恢复未知信号。

自相关函数

$$R_f(\tau) = f(t) * f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t + \tau) dt$$

自相关函数恒为偶函数，且在 $\tau = 0$ 处有极大值

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right]^2$$

每个函数都有唯一的自相关函数，但反之不成立

能量谱

$$P_f(u) = F(R_f(\tau)) = |F(u)|^2$$

5 维纳估计器



• 2) 维纳估计器

- (1) 目标：已知噪声的能量谱，输入和输出，求未被噪声污染的原信号。
- (2) 最优准则：采用实际输出与期望输出的均方差最小。

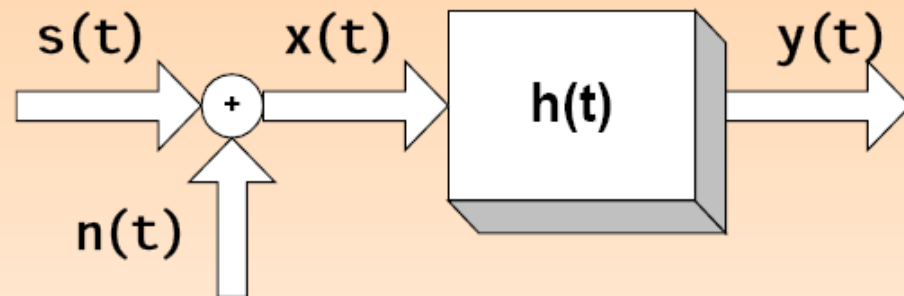
原信号 $s(t)$ ，噪声信号 $n(t)$ ，

含噪声的信号输入 $x(t)$ ，

线性系统冲激响应 $h(t)$ ，

信号输出为 $y(t)$ 。

$$MSE = \int_{-\infty}^{\infty} (s(t) - y(t))^2 dt$$



5 维纳估计器



- (3) 使用冲激响应 $h(t)$ 描述均方误差

$$MSE = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} s(t) y(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt$$

$$= T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = R_s(0)$$

$$T_2 = -2 \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau dt$$

$$= -2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) R_{xs}(\tau) d\tau$$

$$T_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) h(u) R_x(u - \tau) d\tau du$$

5 维纳估计器



- (4) 最小化MSE
- MSE最小即滤波器最优的充分必要条件：维纳滤波器使得输入/输出的互相关函数等于信号/（信号+噪声）的互相关函数。

$$R_{xs}(\tau) = h_o(\tau) * R_x(u) = R_{xy}(\tau)$$

$$P_{xs}(u) = H_o(u)P_x(u) = P_{xy}(u)$$

$$H_o(u) = \frac{P_{xs}(u)}{P_x(u)}$$

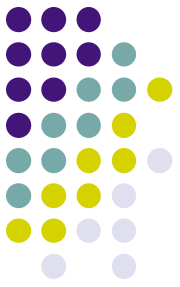
5 维纳估计器



- (5) 维纳滤波器设计

- (1) 对输入信号 $x(t)$ 进行数字化;
- (2) 求输入样本自相关得 $R_x(\tau)$ 的估值;
- (3) 计算 $R_x(\tau)$ 的傅立叶变换 $P_x(u)$;
- (4) 在无噪声情况下对输入信号 $s(t)$ 进行数字化;
- (5) 求无噪声信号与输入样本的互相关来估计 $R_{xs}(\tau)$;
- (6) 求 $R_{xs}(\tau)$ 的傅立叶变换 $P_{xs}(u)$;
- (7) 计算最优滤波器的传递函数和冲激响应。

5 维纳估计器



5 维纳估计器



● 3) 举例

- 问题：取得无噪声信号的样本不可能。
- 替代方案：取得噪声信号样本的能量谱。
- (1) 信号和噪声互不相关

0频率傅立叶函数幅值

$$R_{x_s}(\tau) = R_s(\tau) + N(0)S(0)$$

$$R_x(\tau) = R_s(\tau) + R_n(\tau) + 2N(0)S(0)$$

$$H_o(u) = \frac{P_s(u) + N(0)S(0)\delta(u)}{P_s(u) + P_n(u) + 2N(0)S(0)\delta(u)}$$

$$H_o(u) \approx \frac{P_s(u)}{P_s(u) + P_n(u)}$$

5 维纳估计器



● 4) 维纳去卷积

- 目标：信号 $s(t)$ 既受到 $f(t)$ 线性系统模糊，又受到加性噪声源 $n(t)$ 的污染。
- 设计滤波器 $g(t)$ 既能去卷积，又能抑制噪声信号。

5 维纳估计器



输入信号的频谱

$$X(u) = F(u)S(u) + N(u)$$

输出信号的频谱

$$Y(u) = S(u) + \frac{N(u)}{F(u)} = S(u) + K(u)$$

$$H_o(u) = \frac{P_s(u)}{P_s(u) + P_k(u)} = \frac{|S(u)|^2}{|S(u)|^2 + \left| \frac{N(u)}{F(u)} \right|^2}$$

因此均方意义上最优的去卷积滤波器的传递函数为

$$G(u) = \frac{H_o(u)}{F(u)} = \frac{F^*(u)P_s(u)}{|F(u)|^2 P_s(u) + P_n(u)}$$

6 匹配检测器



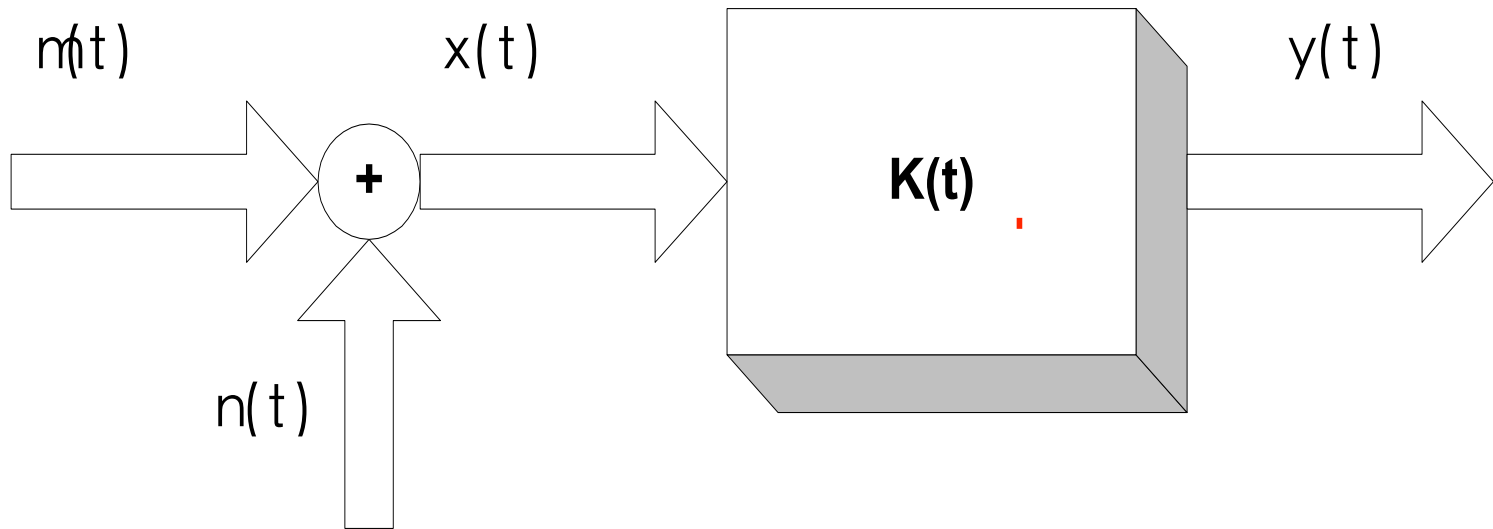
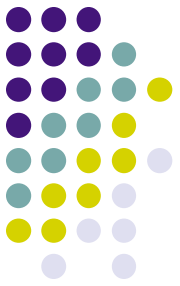
● 1) 概念

- 观察信号 $x(t)$ 是由原信号 $m(t)$ 受加性噪声 $n(t)$ 污染形成，经过冲激响应 $k(t)$ 的线性滤波器得到输出 $y(t)$ 。
- 目标：判断在噪声污染信号中是否存在信号 $m(t)$ 。
- 输出可由两个分量组成：

$$u(t) = m(t) * k(t)$$

$$v(t) = n(t) * k(t)$$

6 匹配检测器



6 匹配检测器

- 2) 匹配检测器
 - (1) 最优化准则

输出端的平均信噪比作为衡量标准

$$\rho = \frac{\varepsilon \{u^2(0)\}}{\varepsilon \{v^2(0)\}}$$

最优化准则是期望线性系统在 $m(t)$ 出现时使 ρ 最大，
在 $m(t)$ 不出现时使 ρ 最小。

ρ 可推导为

$$\rho = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} K(u) M(u) du \right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |K(u)|^2 P_n(u) du}$$



6 匹配检测器



- (2) 最大化 ρ 值

根据**Schwartz**不等式

$$\rho_{\max} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|M(u)|^2}{P_n(u)} du$$

- (3) 匹配检测器的传递函数

$$K_o(u) = C \frac{M^*(u)}{P_n(u)}$$

6 匹配检测器



● 3) 举例

● (1) 白噪声

噪声的频谱是白的，即

$$P_n(u) = N_0^2$$

因此令 $C = \frac{1}{N_0^2}$ ，则 $K_o(u) = M^*(u)$

时域中 $k_o(t) = F^{-1}\{K_o(u)\} = \int_{-\infty}^{\infty} M^*(u) e^{j2\pi ut} du = m(-t)$

因此输出端的信号分量 $u(t)$ 和 $v(t)$ 分别为

$$u(t) = m(t) * k_o(t) = R_m(-t)$$

$$v(t) = n(t) * k_o(t) = R_{mn}(-t)$$

因为 m, n 不相关，因此 $v(t)$ 很小；相反 $u(t)$ 在 $t = 0$ 时有最大值

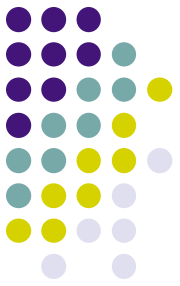
6 匹配检测器



- 物理意义

- 匹配检测器即需要检测信号的反转，这样卷积后即等于需要检测信号的自相关，因此在出现信号时匹配检测器输出最大值。

6 匹配检测器



- (2) 矩形脉冲滤波器
 - 根据以上讨论，矩形脉冲滤波器仍然是一个矩形脉冲，这样在出现矩形脉冲时，输出峰值。但是输出信号并不等于矩形脉冲。

要点总结

- 理解低通、高通滤波对应图像的变化
- 理解理想低通滤波器中模糊和振铃现象；

