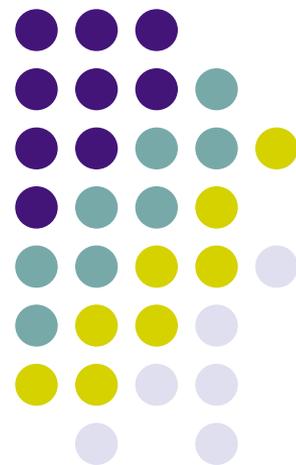


数字图像处理

代数运算与卷积



1 引言



- 1) 代数运算定义

- 代数运算是指两幅或多幅输入图像进行点对点的加、减、乘或除计算而得到输出图像的运算。

$$C(x, y) = A(x, y) + B(x, y)$$

$$C(x, y) = A(x, y) - B(x, y)$$

$$C(x, y) = A(x, y) \times B(x, y)$$

$$C(x, y) = A(x, y) \div B(x, y)$$



=

+





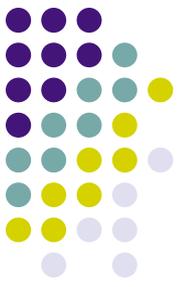
=



—



1 引言

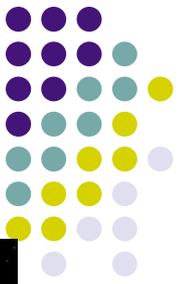


● 2) 代数运算用途

- 加法运算可以用来降低图像中的**随机噪音**（前提是图像中的其他部分必须是不动的）。加法运算可以达到**二次或多次曝光**的效果。
- 减法运算可以**用来减去背景，运动检测，进行梯度幅度运算**
- 乘法运算通常用来进行掩模运算
- 除法运算可以用来归一化

乘法和除法用的比较少，但在某些应用上很重要

二次曝光例子



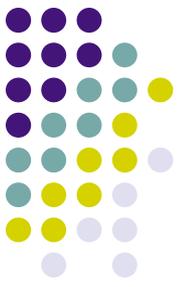
多次曝光 例子



多次曝光



2 加法运算应用



● 1) 噪声分类

- 加性噪声：加性噪声和图像信号强度不相关。

$$g(x, y) = f(x, y) + n(x, y)$$

- 乘性噪声：乘性噪声和图像信号是相关的。

$$g(x, y) = f(x, y) + f(x, y) \times n(x, y)$$

- 椒盐(**Salt and Pepper**)噪声：黑图像上的白点，白图像上的黑点。

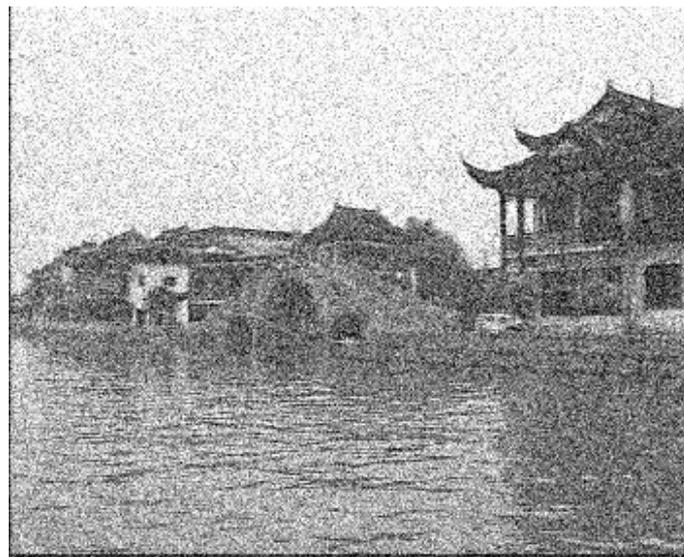
- 量化噪声：是由量化过程引起的，解决的最好方法是最佳量化。

2 加法运算应用

- 例子



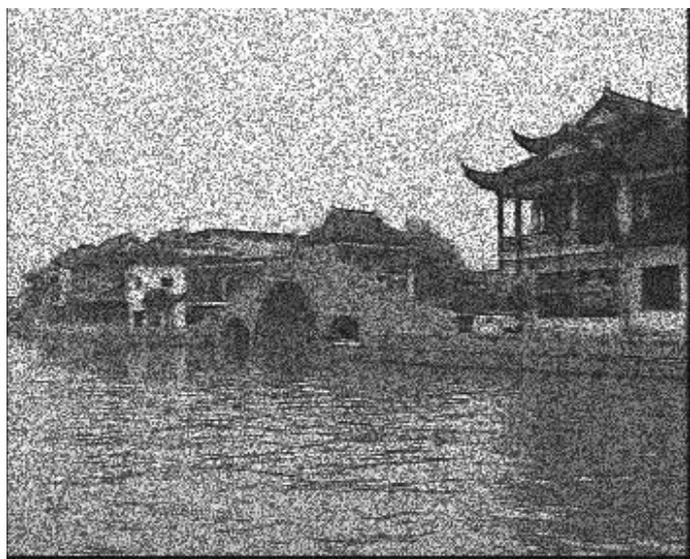
上海朱家角风光



有加性噪声的朱家角风光

2 加法运算应用

- 例子



有乘性噪声的朱家角风光



有椒盐噪声的朱家角风光

2 加法运算应用

- 例子2



原图像



椒盐噪声



高斯噪声

2 加法运算应用



- 加法运算可以用来降低图像中的**随机加性噪音**

2 加法运算应用



- Lenna的8个随机加性噪声图片



噪声图像1



噪声图像2



噪声图像3



噪声图像4



噪声图像5



噪声图像6



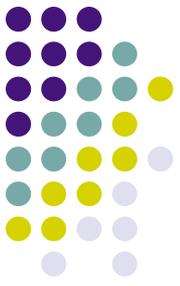
噪声图像7



噪声图像8

2 加法运算应用

- 降噪后的图像



原始图像



降噪后图像

2 加法运算应用



- 定理：对M幅加性噪声图像进行平均，可以使图像的正方形信噪比提高M倍。

- 证明：

$$D_i(x, y) = S(x, y) + N_i(x, y) \text{ where } E\{N_i(x, y)\} = 0$$

信噪比

$$P(x, y) = \frac{S^2(x, y)}{E\{N^2(x, y)\}} \quad \frac{\text{信号}}{\text{噪声}}$$

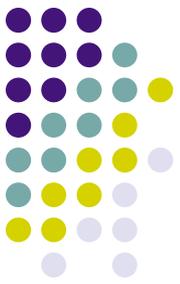
$$\bar{D}(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [S(x, y) + N_i(x, y)]$$

$$\bar{P}(x, y) = \frac{S^2(x, y)}{E\left\{\frac{1}{M^2} \left[\sum_{i=1}^M N_i(x, y)\right]^2\right\}}$$

注意两点：

1 平方信噪比的概念
2 假定独立分布噪声期望为0

2 加法运算应用



以2幅图象例

$$E \left\{ [N_1(x, y) + N_2(x, y)]^2 \right\} = E \left\{ N_1^2(x, y) + N_2^2(x, y) \right\} + 2E \left\{ N_1(x, y) \right\} \varepsilon \left\{ N_2(x, y) \right\}$$

Q $N_i(x, y)$ 是随机、均值为0的噪声

$$\therefore E \left\{ [N_1(x, y) + N_2(x, y)]^2 \right\} = E \left\{ N_1^2(x, y) \right\} + E \left\{ N_2^2(x, y) \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{P}(x, y) &= \frac{S^2(x, y)}{E \left\{ \frac{1}{M^2} \left[\sum_{i=1}^M N_i(x, y) \right]^2 \right\}} \\ &= \frac{S^2(x, y)}{\frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M E [N_i(x, y)]^2} \\ &= \frac{S^2(x, y)}{\frac{1}{M^2} M \cdot E [N(x, y)]^2} \\ &= M \cdot P(x, y) \end{aligned}$$

2 加法运算应用



- 2) 加法运算和直方图的关系
 - 输出直方图为输入直方图的**卷积** ([请参考第6节内容](#))

3 减法运算应用

- 1) 减去背景



乡村公路

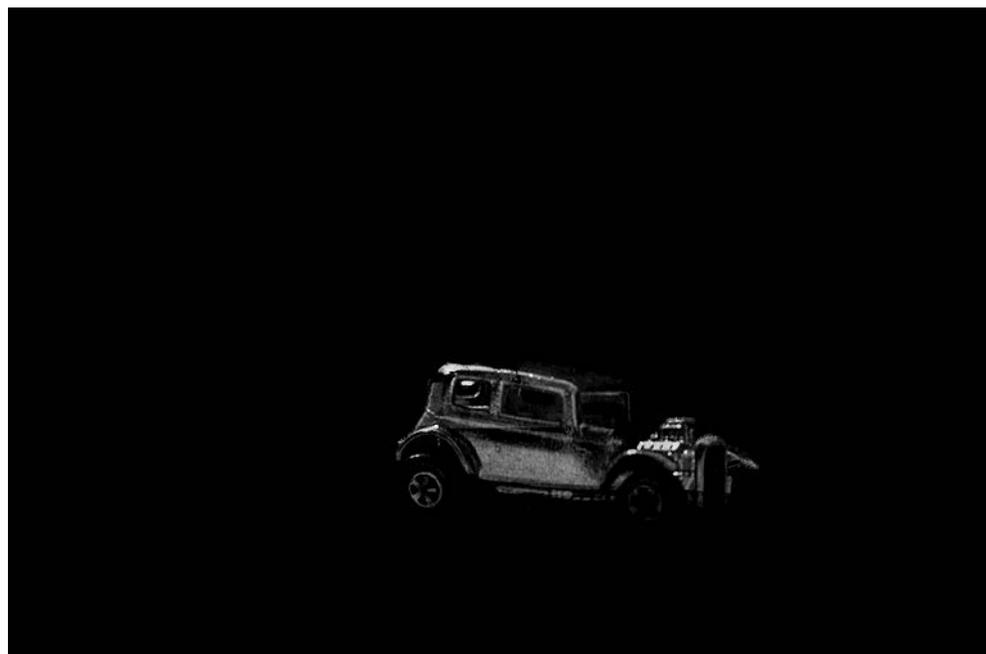
3 减法运算应用

思考：如果背景光强与前一幅并不相等，怎么办？



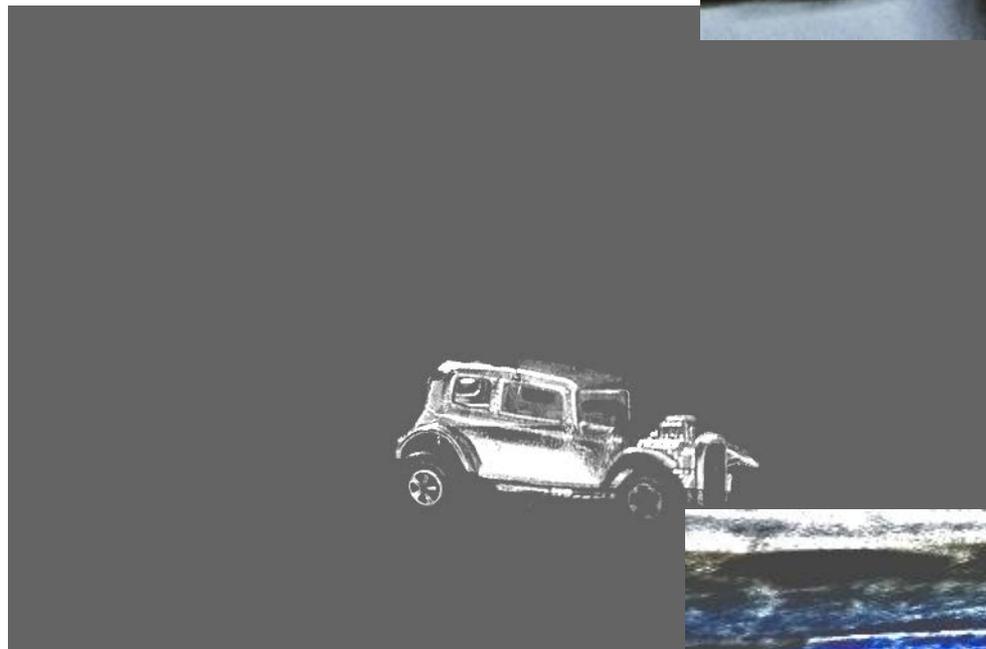
打破宁静的不速之客

3 减法运算应用

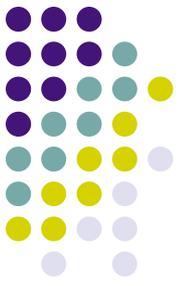


模糊的影像

3 减法运算应用



经过点运算之后的



3 减法运算



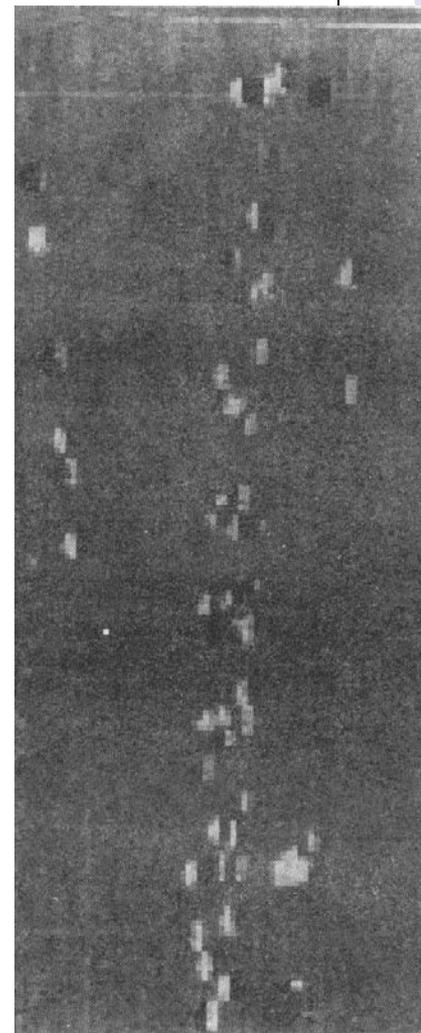
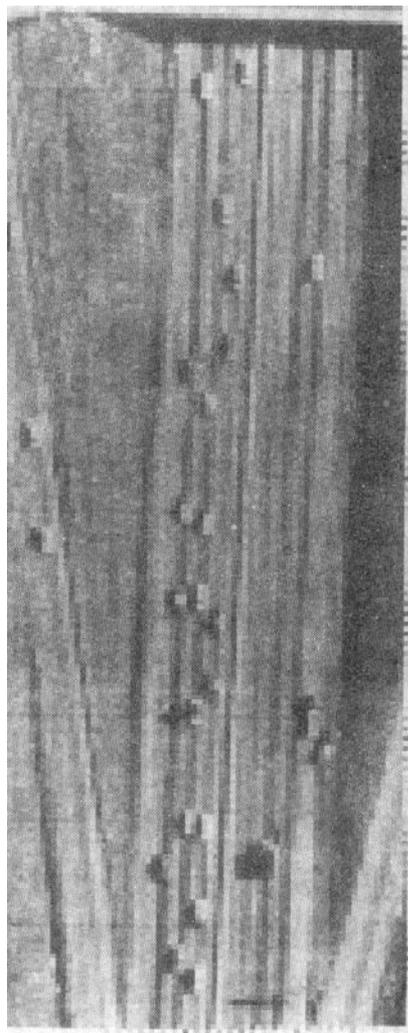
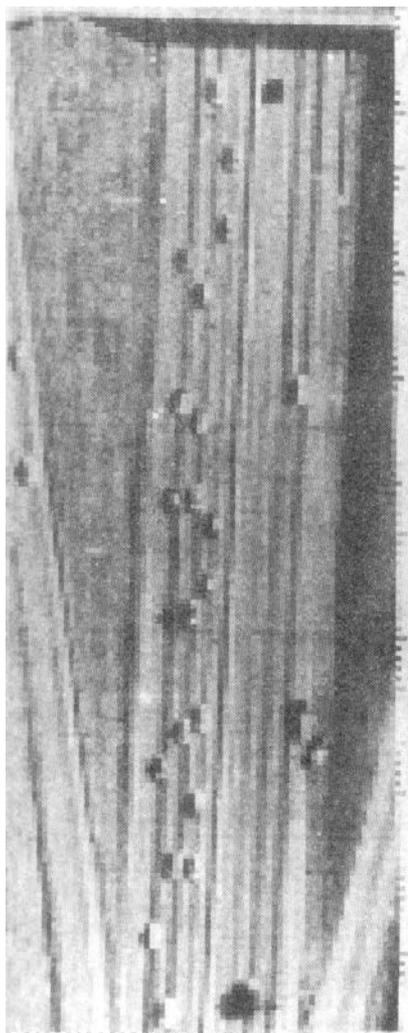
- 2) 减运算和直方图

- 不相关图像的减运算与加运算一样，输出直方图为输入直方图的卷积（[请参考第6节内容](#)）。
- 前后帧相减 -> 运动检测

3 减法运算



X



3 减法运算



- 3) 图像自身错位相减->梯度幅度图像

定义梯度图象

$$\nabla f(x,y) = i \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + j \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

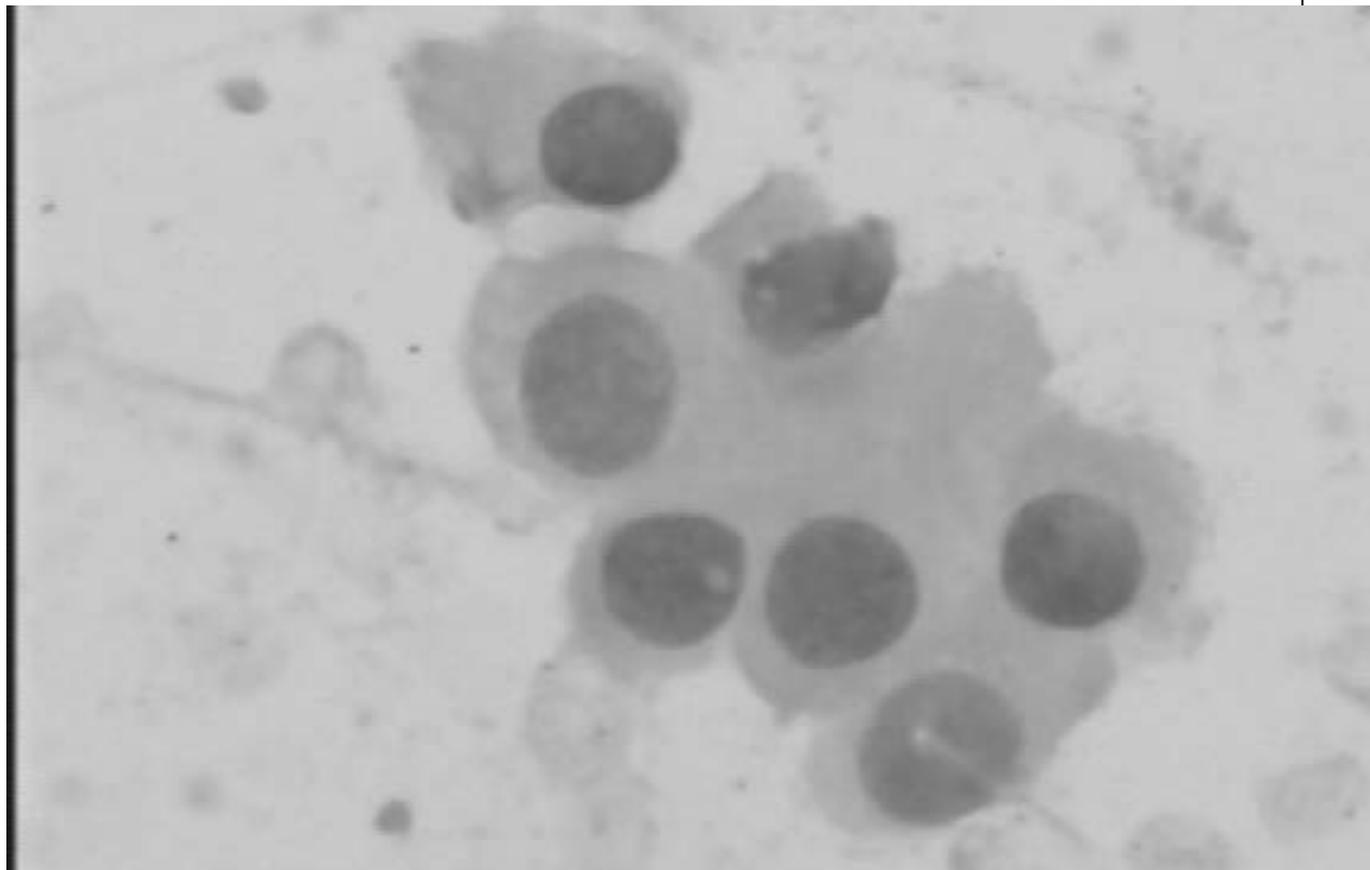
$$|\nabla f(x,y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

$$|\nabla f(x,y)| \approx \max [|f(x,y) - f(x+1,y)|, |f(x,y) - f(x,y+1)|]$$

严格意义上：求梯度运算是邻域运算的一种应用。

- 性质：梯度幅度在物体边缘处高，而在均匀物体的内部梯度幅度较低。

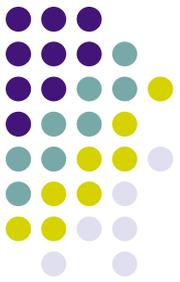
3 减法运算



肺癌穿刺细胞病理涂片图象

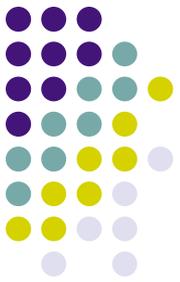
3 减法运算

- `j=zeros(366,572);`
- `[i map]=imread('cancer.bmp');`
- `i=double(i);`
- `a=0;b=0;`
- `for m=1:365`
- `for n=1:571`
- `a=i(m,n)-i(m+1,n);`
- `b=i(m,n)-i(m,n+1);`
- `a=abs(a);b=abs(b);`
- `if a>b`
- `j(m,n)=a;`
- `else`
- `j(m,n)=b;`
- `end`

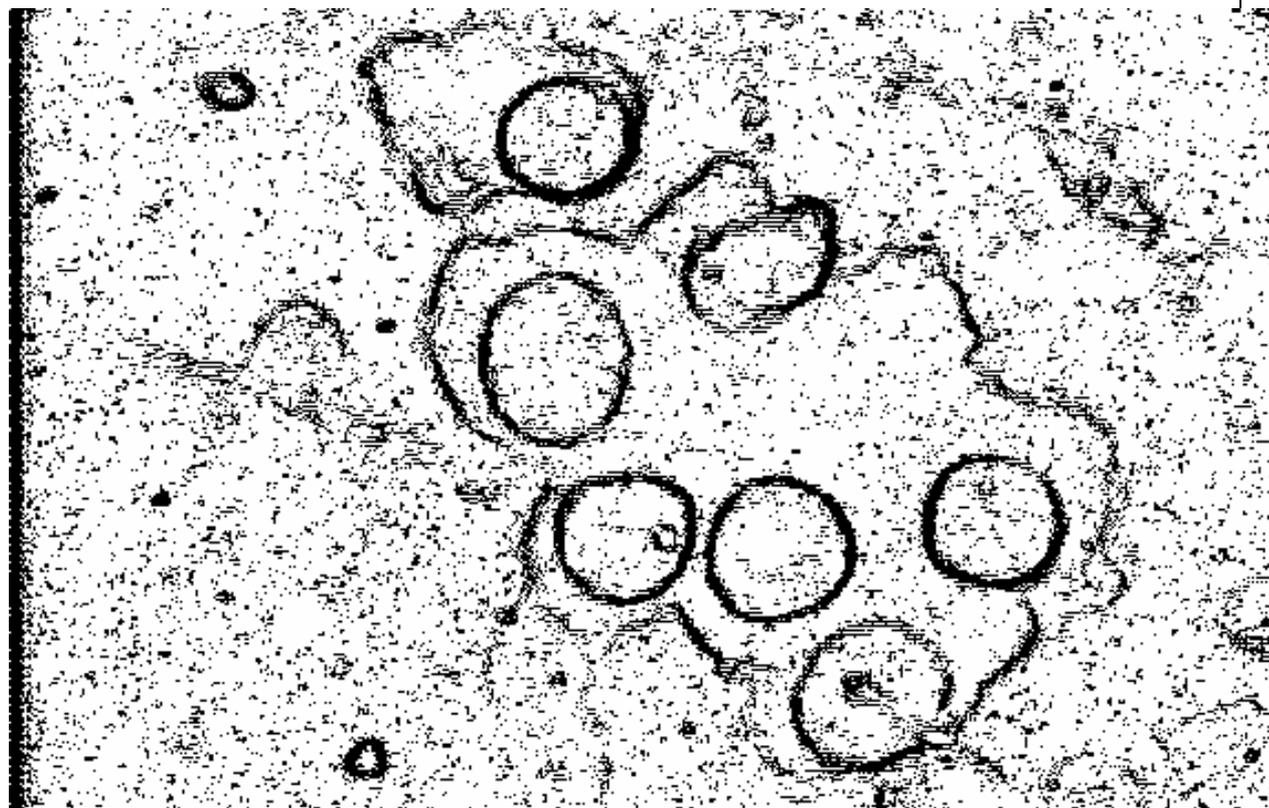


3 减法运算

- `if j(m,n)>3`
- `j(m,n)=0;`
- `else`
- `j(m,n)=255;`
- `end`
- `end`
- `end`
- `imshow(j,[0 255]);`



3 减法运算



肺癌穿刺细胞病理涂片图象的梯度图像

4 乘法运算和除法运算



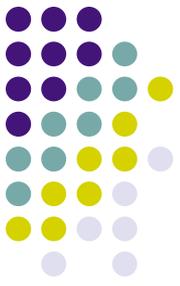
- 乘法运算

- 可用于去除图像中部分影像。
- 首先构造一副掩膜图像，在需要保留区域，图像灰度值为**1**；而在被去除区域，图像灰度值为**0**；
- 然后将掩膜图像乘原始图像。

- 除法运算

- 多光谱遥感运算的比值计算。
- 同谱异物, 同物异谱.

5 有噪声图像的IOD



● 1) 什么是IOD?

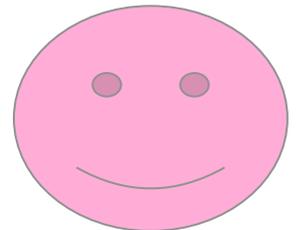
- 无噪声理想情况下的定义:

$$\text{IOD} = \int_0^a \int_0^b D(x, y) dx dy$$

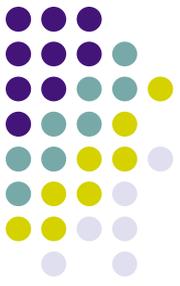
$$\text{IOD} = \int_0^{\infty} DH(D) dD$$

可以得到物体的光密度，用于分析。

对综合光密
度的再次考
察



5 有噪声图像的IOD



● 2) 噪声图像的IOD

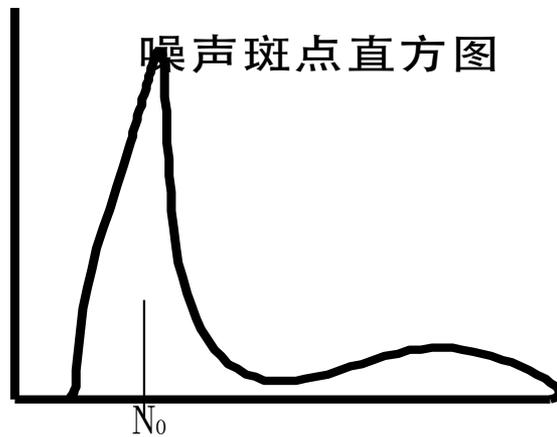
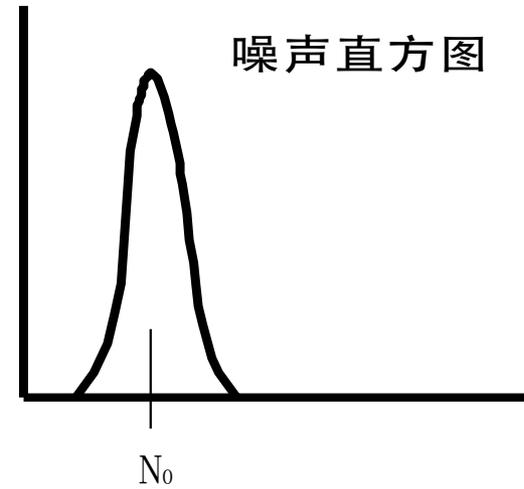
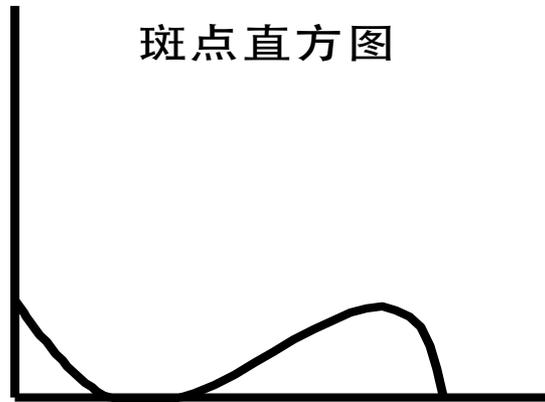
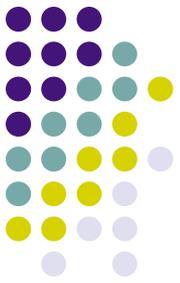
- 问题描述：均匀背景上有对比度明显的物体图像，并且被加性噪声污染。请计算物体的IOD?
- 思考：如果没有噪声，很容易确定物体的边缘阈值，从而求得物体的IOD。

- 假设：

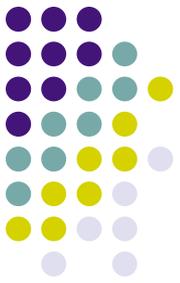
$$M(x,y) = S(x,y) + N(x,y)$$

- 其直方图为：

5 有噪声图像的IOD



5 有噪声图像的IOD



$$\text{解: } \text{IOD}_S = \int_0^a \int_0^b S(x, y) dx dy$$

$$\text{IOD}_S = \int_0^a \int_0^b M(x, y) dx dy - \int_0^a \int_0^b N(x, y) dx dy$$

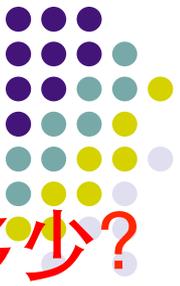
$$\text{IOD}_S = \int_0^{\infty} D H_M(D) dD - N_0 A$$

$$Q A = \int_0^{\infty} H_M(D) dD$$

$$\therefore \text{IOD}_S = \int_0^{\infty} D H_M(D) dD - N_0 \int_0^{\infty} H_M(D) dD$$

$$\text{即 } \text{IOD}_S = \int_0^{\infty} (D - N_0) H_M(D) dD$$

5 有噪声图像的IOD



- 问题：在已知输出直方图的情况下， N_0 是多少？
- 又是假设：噪声直方图左右对称，并且均值为 N_0 。其与 H_S 卷积后，直方图不发生变化。

6 加法运算与直方图



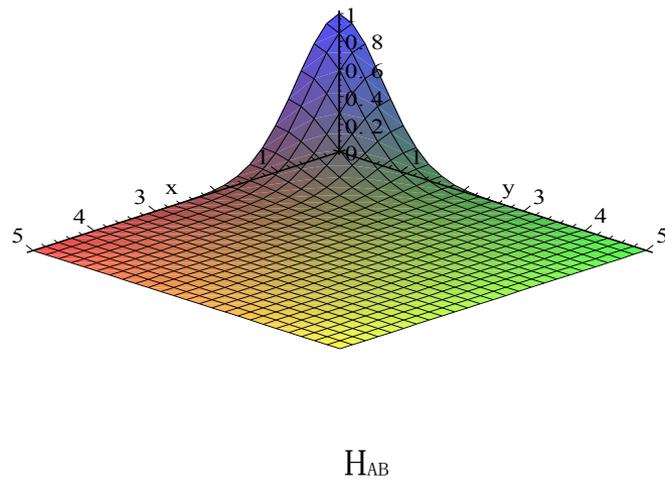
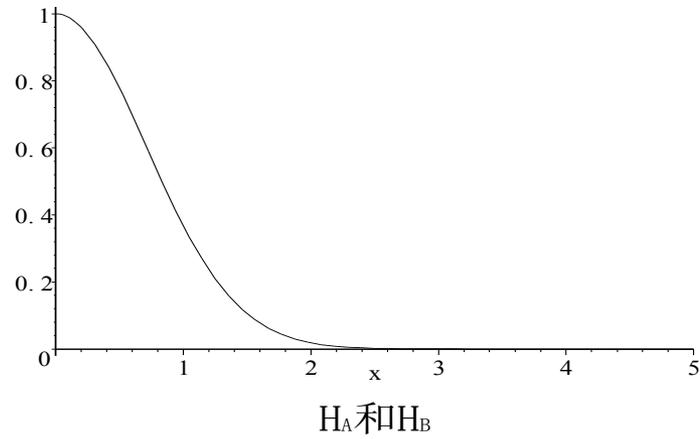
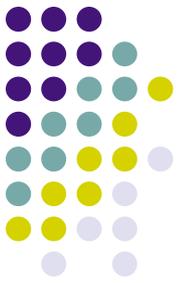
● 1) 图像之和的直方图

- 问题：已知输入图像**A**和**B**的灰度直方图 H_A 、 H_B ，得到输出图像**C**的直方图 H_C 。
- 二维直方图：如果输出图像的二维直方图是输入图像直方图的积，则认为两幅图像不相关。
- 输出直方图：

$$H_{AB}(D_A, D_B) = H_A(D_A)H_B(D_B)$$

注意：这里的定义 H 为归一化后的直方图概率密度函数。

6 加法运算与直方图



6 加法运算与直方图



$$H(D) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{AB}(D_A, D_B) dD_B$$

$$H(D) = \int_{-\infty}^{\infty} H_A(D_A) H_B(D_B) dD_B$$

$$Q D_A = D_C - D_B$$

$$\therefore H(D) = \int_{-\infty}^{\infty} H_A(D_C - D_B) H_B(D_B) dD_B$$

定义 $H_C(D_C) = H_A(D_A) * H_B(D_B)$ 为卷积运算

6 加法运算与直方图



$$e^{-x^2} * e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{-(x-y)^2} dy$$

$$e^{-x^2} * e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 - 2xy - 2y^2)} dy$$

$$e^{-x^2} * e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(y-x/2)^2} e^{-x^2/2} dy$$

$$e^{-x^2} * e^{-x^2} = \sqrt{2\pi \left(\frac{1}{4}\right)} e^{-x^2/2}$$

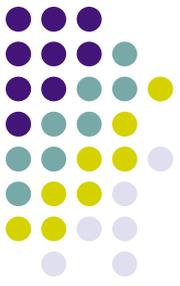
$$A_1 e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} * A_2 e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} = A_1 A_2 \sqrt{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{(x-\mu_3)^2}{2\sigma_3^2}}$$

其中 $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$

$$\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2$$

举例: 两个相同的高斯函数卷积

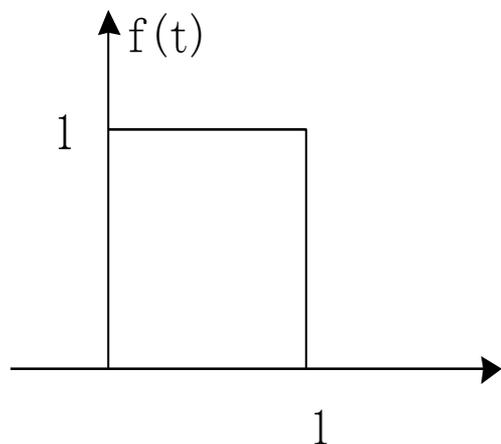
7 一维卷积的离散化计算



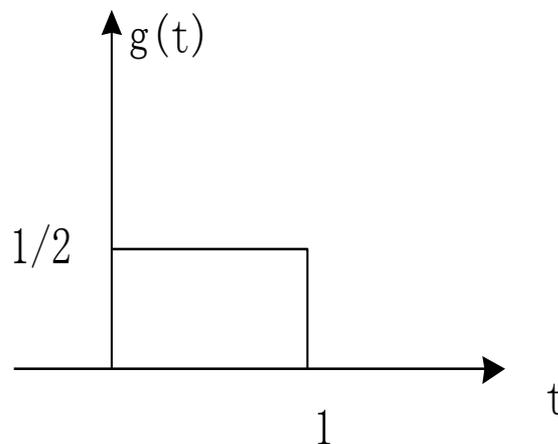
● 一维卷积

- **Step1:** 得到 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的函数;
- **Step2:** 将函数 $g(t)$ 关于 y 轴反转, 得到 $g(-t)$;
- **Step3:** 将函数 $g(-t)$ 平移 x , 得到 $g(x-t)$;
- **Step4:** 在给定 x 下, 将 $f(t)$ 和 $g(x-t)$ 相乘;
- **Step5:** 对 $f(t)$ 和 $g(x-t)$ 的乘积求积分;
- **Step6:** 最后得到 $f(t)*g(t)$ 函数, 注意自变量取值区域。

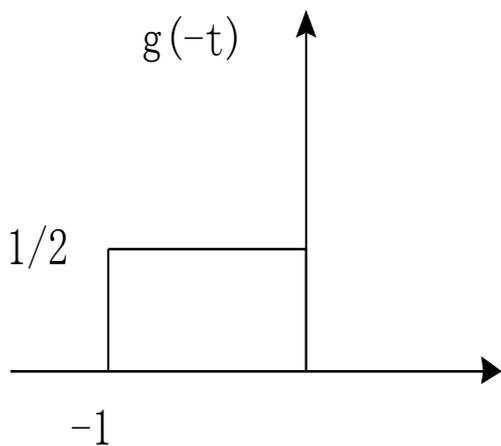
7 一维卷积的离散化计算



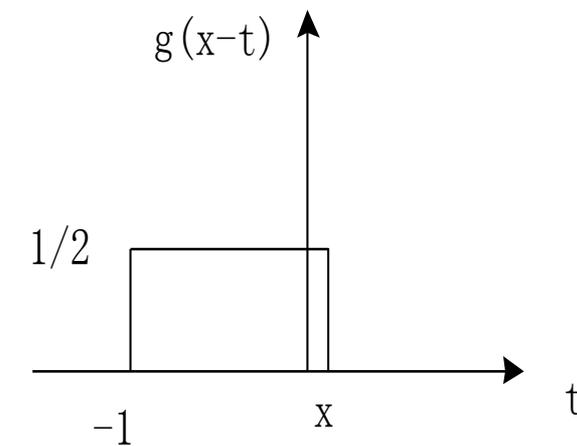
(a)



(b)

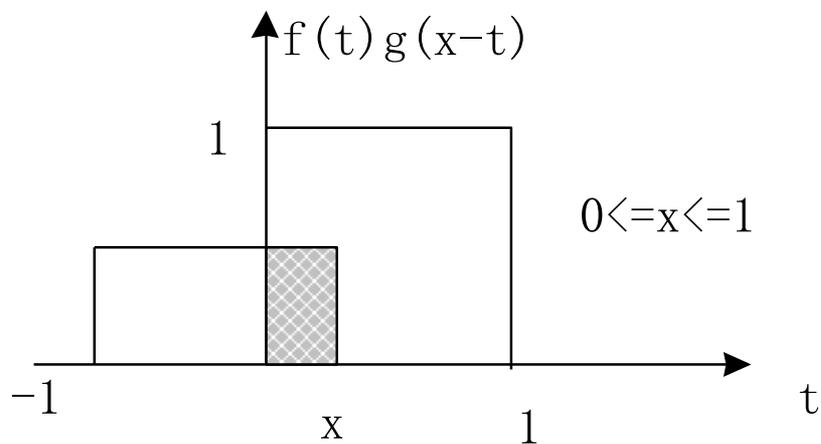


(c)

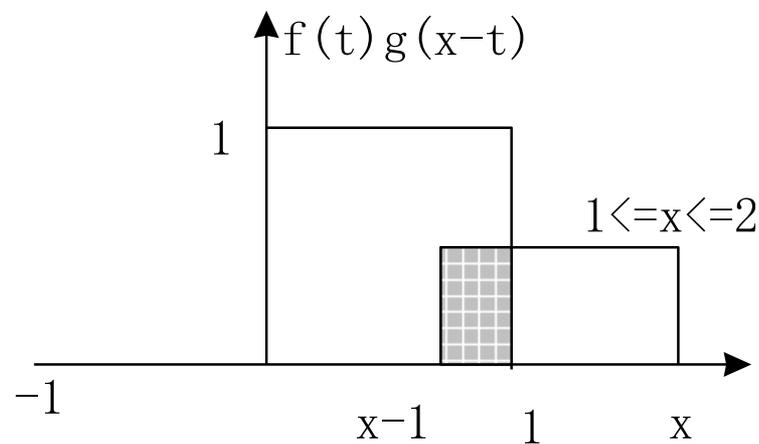


(d)

7 一维卷积的离散化计算



(e)



(f)

7 一维卷积的离散化计算



- 离散一维卷积

$$h(i) = f(i) * g(i) = \sum_j f(j)g(i-j)$$

- 若**f**长度为**m**，**g**长度为**n**，则输出为 $N = m + n - 1$

- 离散一维卷积矩阵计算

- 将**f**和**g**扩展为**N**长度的序列，且

$$f_p(i) = \begin{cases} f(i) & 1 \leq i \leq m \\ 0 & m < i \leq N \end{cases}$$

7 一维卷积的离散化计算

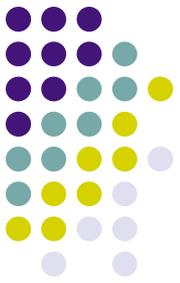


$$\mathbf{h} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_p(1) & \mathbf{g}_p(N) & \cdots & \mathbf{g}_p(2) \\ \mathbf{g}_p(2) & \mathbf{g}_p(1) & \cdots & \mathbf{g}_p(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{g}_p(N) & \mathbf{g}_p(N-1) & \cdots & \mathbf{g}_p(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p(1) \\ \mathbf{f}_p(2) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_p(N) \end{bmatrix}$$

7 一维卷积的离散化计算

- 课堂练习:

$$f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \text{求 } f \cdot g.$$



8 思考题



- 理解加法运算用于多次曝光，减法运算用于去除背景
- 理解两幅不相关图像之和的直方图是输入图像直方图的卷积。
- 理解对 M 幅随机加性噪声污染的图像求平均后，可使图像每点像素平方信噪比提高 M 倍；