数字图像处理

第五章
代数运算

CH5 代数运算

- 一、引言
- 二、加法运算应用
- 三、减法运算应用
- 四、乘法运算和除法运算
- 五、有噪声图像的IOD
- 六、加法运算与直方图
- 七、一维卷积的离散化计算
- 八、要点总结
- 习题

1 引言

- 1）定义
  - 代数运算是指两幅输入图像进行点对点的加、减、乘或除计算而得到输出图像。

$$C(x,y)=A(x,y)+B(x,y)$$
$$C(x,y)=A(x,y)-B(x,y)$$
$$C(x,y)=A(x,y)\times B(x,y)$$
$$C(x,y)=A(x,y)\div B(x,y)$$

1 引言

- 2）主要应用
  - 图像相加可以将一幅图像内容加到另一幅图像上，以达到二次暴光的要求（double exposure）。
  - 图像相加可以对同一场景的多幅图像求平均值，以降低加性（additive）随机噪声。
  - 图像相减可去除图像中不需要的加性图案。
  - 图像相减也可用于运动检测。
  - 掩膜图像。

2 加法运算应用

- 1）通过求平均值降噪
  - 加性噪声：加性噪声和图像信号强度不相关。

    $$g(x,y)=f(x,y)+n(x,y)$$

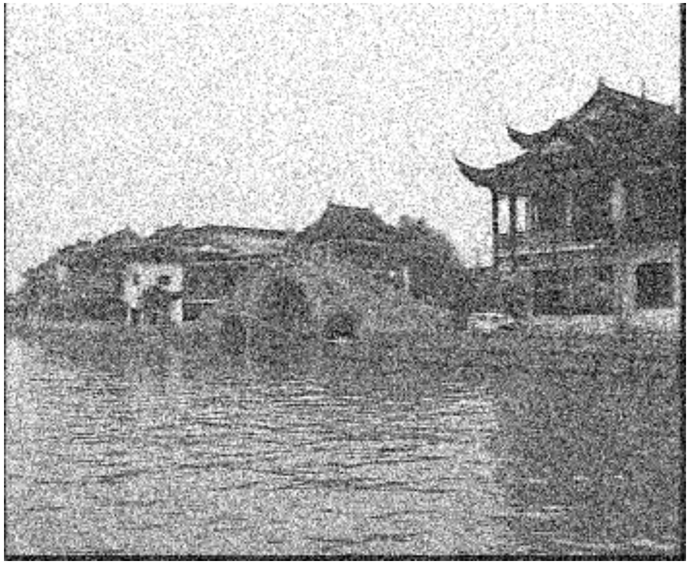
  - 乘性噪声：乘性噪声和图像信号是相关的。

    $$g=f+f*n$$

  - 椒盐噪声：黑图像上的白点，白图像上的黑点。
  - 量化噪声：是由量化过程引起的，解决的最好方法是<u>最佳量化</u>。

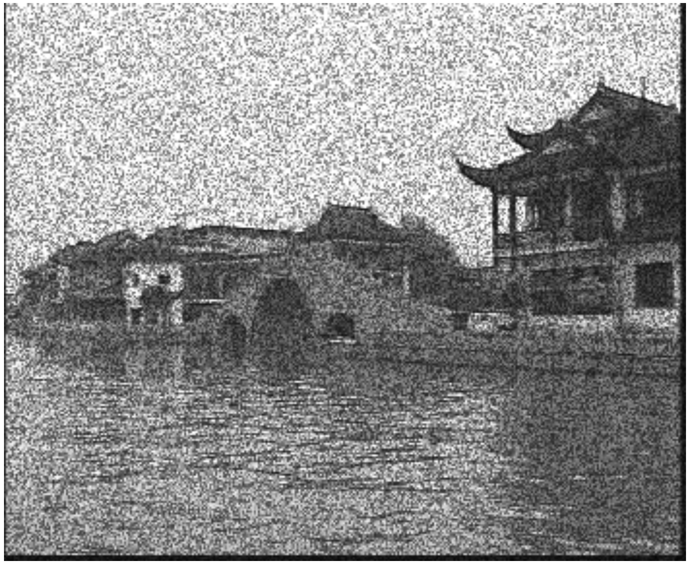
2 加法运算应用

上海朱家角风光



有加性噪声的朱家角风光

2 加法运算应用



有乘性噪声的朱家角风光

有椒盐噪声的朱家角风光

2 加法运算应用




噪声图像1

噪声图像2

噪声图像3

噪声图像4




噪声图像5

噪声图像6

噪声图像7

噪声图像8

2 加法运算应用

原始图像　　　　　　　　降

噪后图像

2 加法运算应用

- 定理：对M幅加性噪声图像进行平均，可以使图像的平方信噪比提高M倍。
- 证明：

$$D_i(x,y)=S(x,y)+N_i(x,y)\quad 其中E\{N_i(x,y)\}=0$$

对图象中每一点，定义功率信噪比

$$P(x,y)=\frac{S^2(x,y)}{E\{N^2(x,y)\}}$$

$$\overline{D}(x,y)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left[S(x,y)+N_i(x,y)\right]$$

$$\overline{P}(x,y)=\frac{S^2(x,y)}{E\left\{\frac{1}{M^2}\left[\sum_{i=1}^{M}N_i(x,y)\right]^2\right\}}$$

注意两点：
1 平方信噪比的概念
2 假定独立分布噪声期望为0

2 加法运算应用

以2幅图象例

$$E\left\{\left[N_1(x,y)+N_2(x,y)\right]^2\right\}=E\left\{N_1^{\ 2}(x,y)+N_2^{\ 2}(x,y)\right\}+2E\left\{N_1(x,y)\right\}\varepsilon\left\{N_2(x,y)\right\}$$

Q $N_i(x,y)$是随机、均值为0的噪声

$$\therefore E\left\{\left[N_1(x,y)+N_2(x,y)\right]^2\right\}=E\left\{N_1^{\ 2}(x,y)\right\}+E\left\{N_2^{\ 2}(x,y)\right\}$$

$$\therefore \overline{P}(x,y)=\frac{M^2S^2(x,y)}{\sum_{i=1}^{M}N_i^{\ 2}(x,y)}=\frac{M^2S^2(x,y)}{MN^2(x,y)}=MP(x,y)$$

2 加法运算应用

- **2) 加法运算和直方图的关系**
  - 输出直方图为输入直方图的卷积（请参考第6节内容）

3 减法运算应用

- 1）减去背景

乡村公路

3 减法运算应用

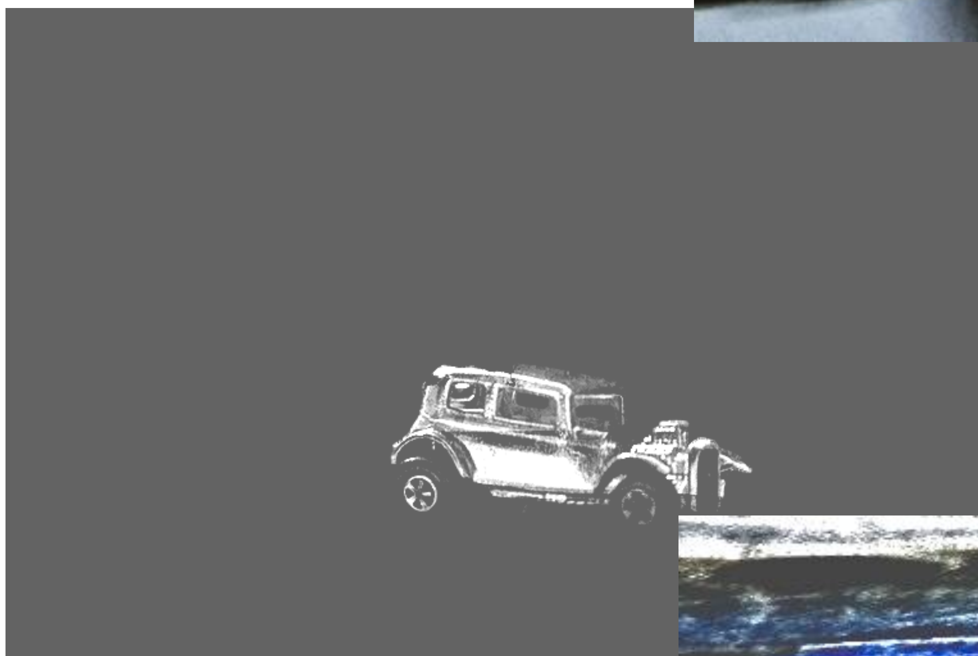
思考：如果背景光强与前一幅并不相等，怎么办？

打破宁静的不速之客

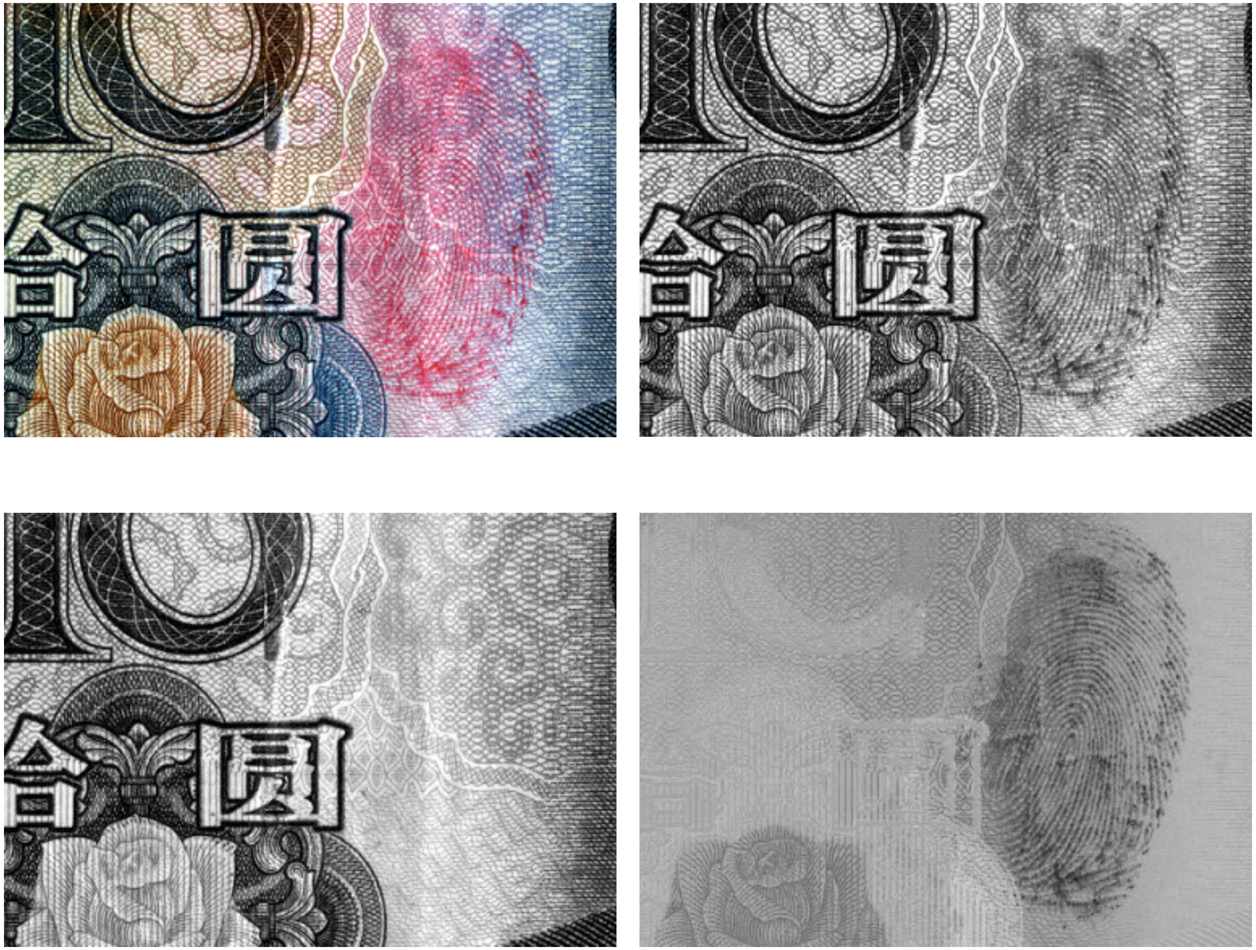
3 减法运算应用

模糊的影像

3 减法运算应用



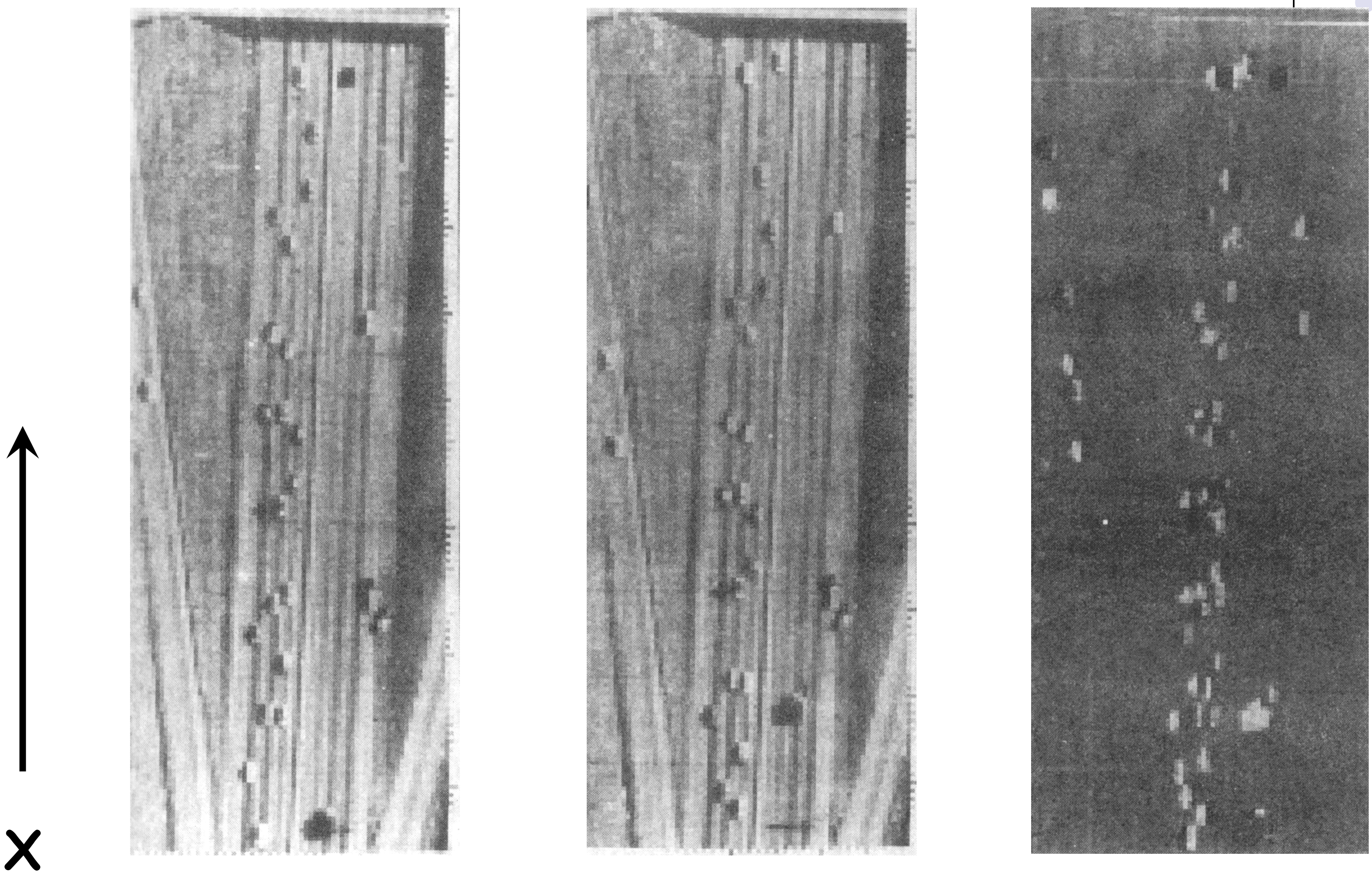
经过点运算之后的



3 减法运算

- 2）减运算和直方图
  - 不相关图像的减运算与加运算一样，输出直方图为输入直方图的卷积（请参考第6节内容）。
  - 几乎相同但稍有不对准图像的减法运算（运动检测）

3 减法运算



3 减法运算

$$C(x,y) = A(x,y) - A(x+\Delta x, y)$$

$$C(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} A(x,y) \Delta x$$

其中$\frac{\partial}{\partial x} A(x,y)$为一幅图象，其直方图为$H'_A(D)$

根据上一章线性点运算性质,差分图象的直方图为

$$H_C(D) = \frac{1}{\Delta x} H'_A\left(\frac{D}{\Delta x}\right)$$

因此运动物体在差分图像中产生低对比度的边缘。

3 减法运算

- 3）减运算和梯度幅度图像

定义梯度图象

严格意义上：求梯度运算是邻域运算的一种应用。

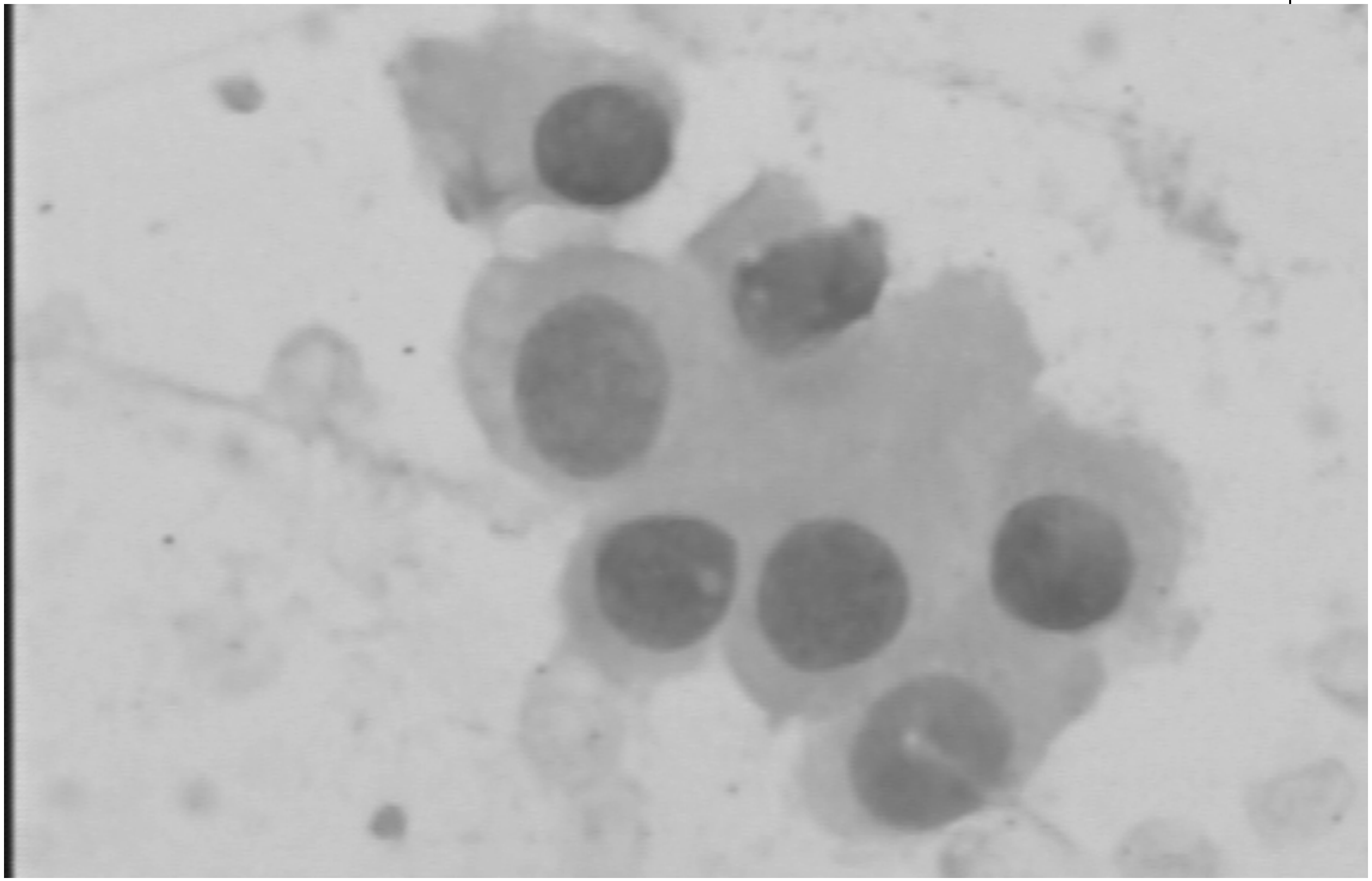
$$\nabla \mathrm{f}(\mathrm{x,y}) = i\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + j\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$\left|\nabla \mathrm{f}(\mathrm{x,y})\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

$$\left|\nabla \mathrm{f}(\mathrm{x,y})\right| \approx \max\left[\left|f(x,y) - f(x+1,y)\right|, \left|f(x,y) - f(x,y+1)\right|\right]$$

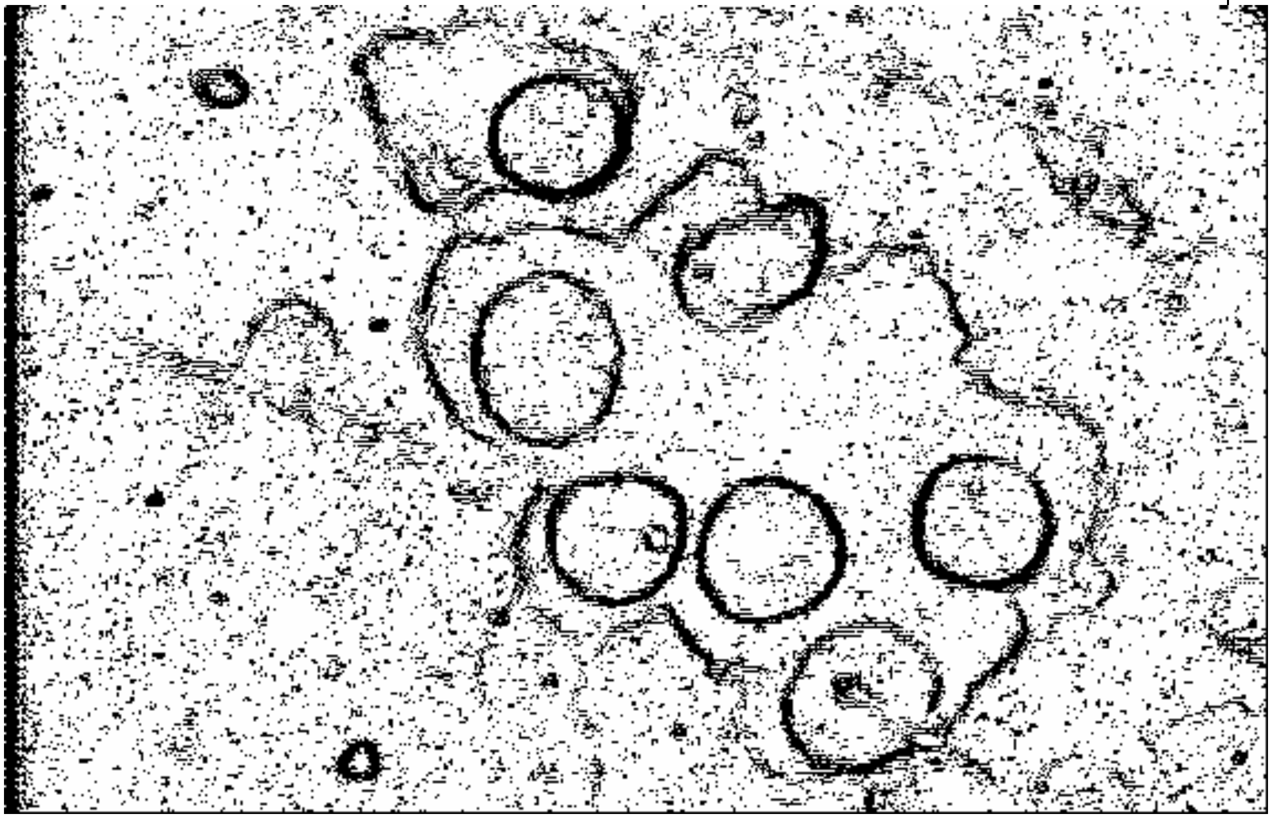
- 性质：梯度幅度在物体边缘处高，而在均匀物体的内部梯度幅度较低。

3 减法运算



肺癌穿刺细胞病理涂片图象

3 减法运算



肺癌穿刺细胞病理涂片图象的梯度图像

3 减法运算

```
j=zeros(366,572);
[i map]=imread('F:\image\cancer.bmp');
i=double(i);
a=0;b=0;
for m=1:365
    for n=1:571
        a=i(m,n)-i(m+1,n);
        b=i(m,n)-i(m,n+1);
        a=abs(a);b=abs(b);
        if a>b
            j(m,n)=a;
        else
            j(m,n)=b;
        end
```

3 减法运算

```
 if j(m,n)>3
         j(m,n)=0;
     else
         j(m,n)=255;
     end
  end
end
imshow(j,[0 255]);
```

4 乘法运算和除法运算

- 乘法运算
  - 可用于去除图像中部分影像。
  - 首先构造一副掩膜图像，在需要保留区域，图像灰度值为1；而在被去除区域，图像灰度值为0；
  - 然后将掩膜图像乘原始图像。
- 除法运算
  - 多光谱遥感运算的比值计算.
  - 同谱异物, 同物异谱.

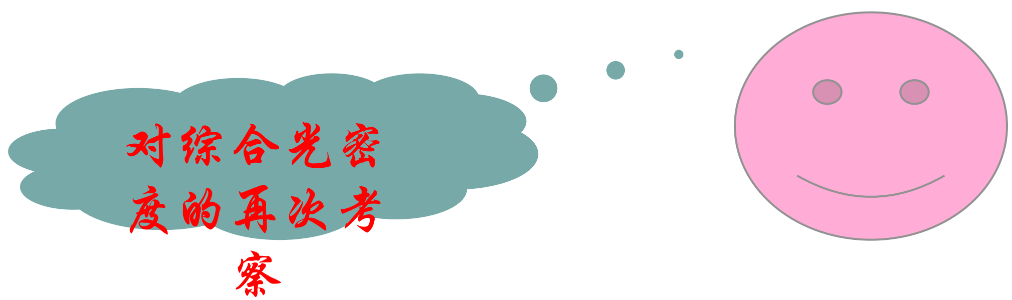
5 有噪声图像的IOD

- 1）什么是IOD?
  - 无噪声理想情况下的定义:

$$IOD = \int_0^a \int_0^b D(x,y)dxdy$$

$$IOD = \int_0^\infty DH(D)dD$$

可以得到物体的光密度，用于分析。



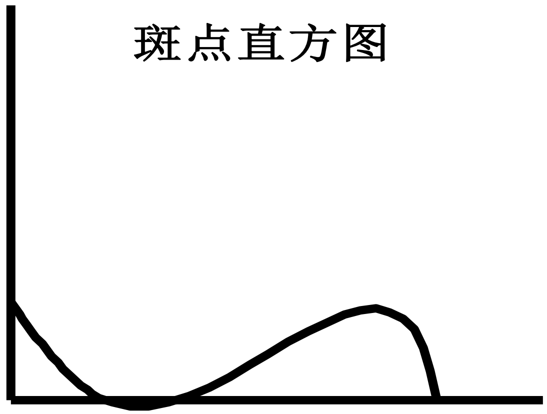
5 有噪声图像的IOD

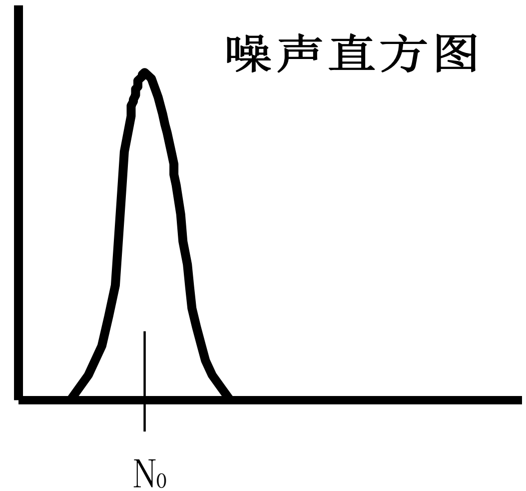
- 2）噪声图像的IOD
  - 问题描述：均匀背景上有对比度明显的物体图像，并且被加性噪声污染。请计算物体的IOD?
  - 思考：如果没有噪声，很容易确定物体的边缘阈值，从而求得物体的IOD。
  - 假设：

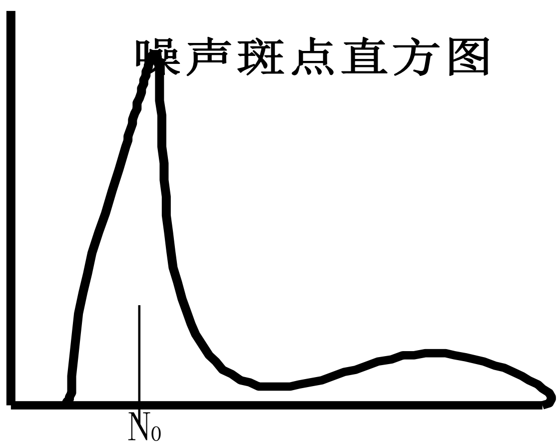
$$M(x,y)=S(x,y)+N(x,y)$$

  - 其直方图为：

5 有噪声图像的IOD







5 有噪声图像的IOD

$$\text{解：}\ IOD_S=\int_0^a\int_0^b S(x,y)\,dxdy$$

$$IOD_S=\int_0^a\int_0^b M(x,y)\,dxdy-\int_0^a\int_0^b N(x,y)\,dxdy$$

$$IOD_S=\int_0^\infty DH_M(D)\,dD-N_0A$$

$$\because\ A=\int_0^\infty H_M(D)\,dD$$

$$\therefore IOD_S=\int_0^\infty DH_M(D)\,dD-N_0\int_0^\infty H_M(D)\,dD$$

$$\text{即}IOD_S=\int_0^\infty (D-N_0)H_M(D)\,dD$$

5 有噪声图像的IOD

- 问题：在已知输出直方图的情况下，N_0是多少？
- 又是假设：噪声直方图左右对称，并且均值为N_0。其与H_S卷积后，直方图不发生变化。

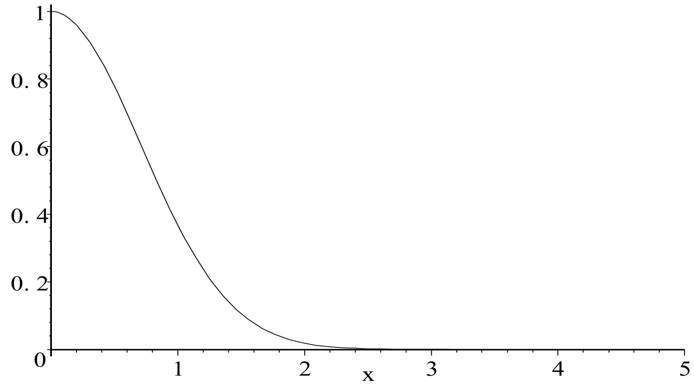
6 加法运算与直方图

- 1）图像之和的直方图
  - 问题：已知输入图像A和B的灰度直方图H_A、H_B，得到输出图像C的直方图H_C。
  - 二维直方图：如果输出图像的二维直方图是输入图像直方图的积，则认为两幅图像不相关。
  - 输出直方图：

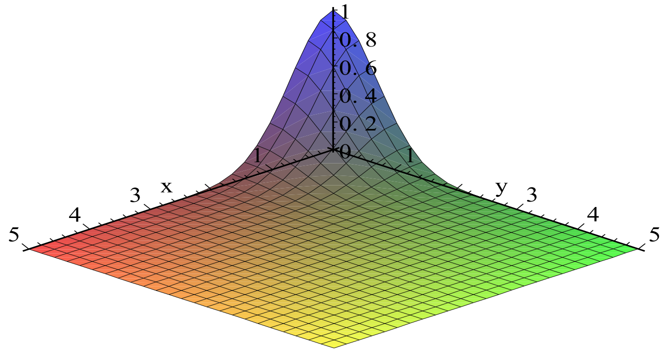
$$H_{AB}(D_A, D_B) = H_A(D_A) H_B(D_B)$$

注意：这里的定义H为归一化后的直方图概率密度函数。

6 加法运算与直方图



H_A和H_B



H_{AB}

6 加法运算与直方图

$$H(D)=\int_{-\infty}^{\infty}H_{AB}(D_A,D_B)dD_B$$

$$H(D)=\int_{-\infty}^{\infty}H_A(D_A)H_B(D_B)dD_B$$

$$\text{Q}\ D_A=D_C-D_B$$

$$\therefore H(D)=\int_{-\infty}^{\infty}H_A(D_C-D_B)H_B(D_B)dD_B$$

定义$H_C(D_C)=H_A(D_A)*H_B(D_B)$为卷积运算

6 加法运算与直方图

$$e^{-x^2} * e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{-(x-y)^2} dy$$

$$e^{-x^2} * e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2-2xy-2y^2\right)} dy$$

$$e^{-x^2} * e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\left(y-x/2\right)^2} e^{-x^2/2} dy$$

$$e^{-x^2} * e^{-x^2} = \sqrt{2\pi\left(\frac{1}{4}\right)} e^{-x^2/2}$$

$$A_1 e^{-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2} * A_2 e^{-(x-\mu_2)^2/2\sigma_2^2} = A_1 A_2 \sqrt{2\pi\sigma_1\sigma_2}\, e^{-(x-\mu_3)^2/2\sigma_3^2}$$

其中$\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$

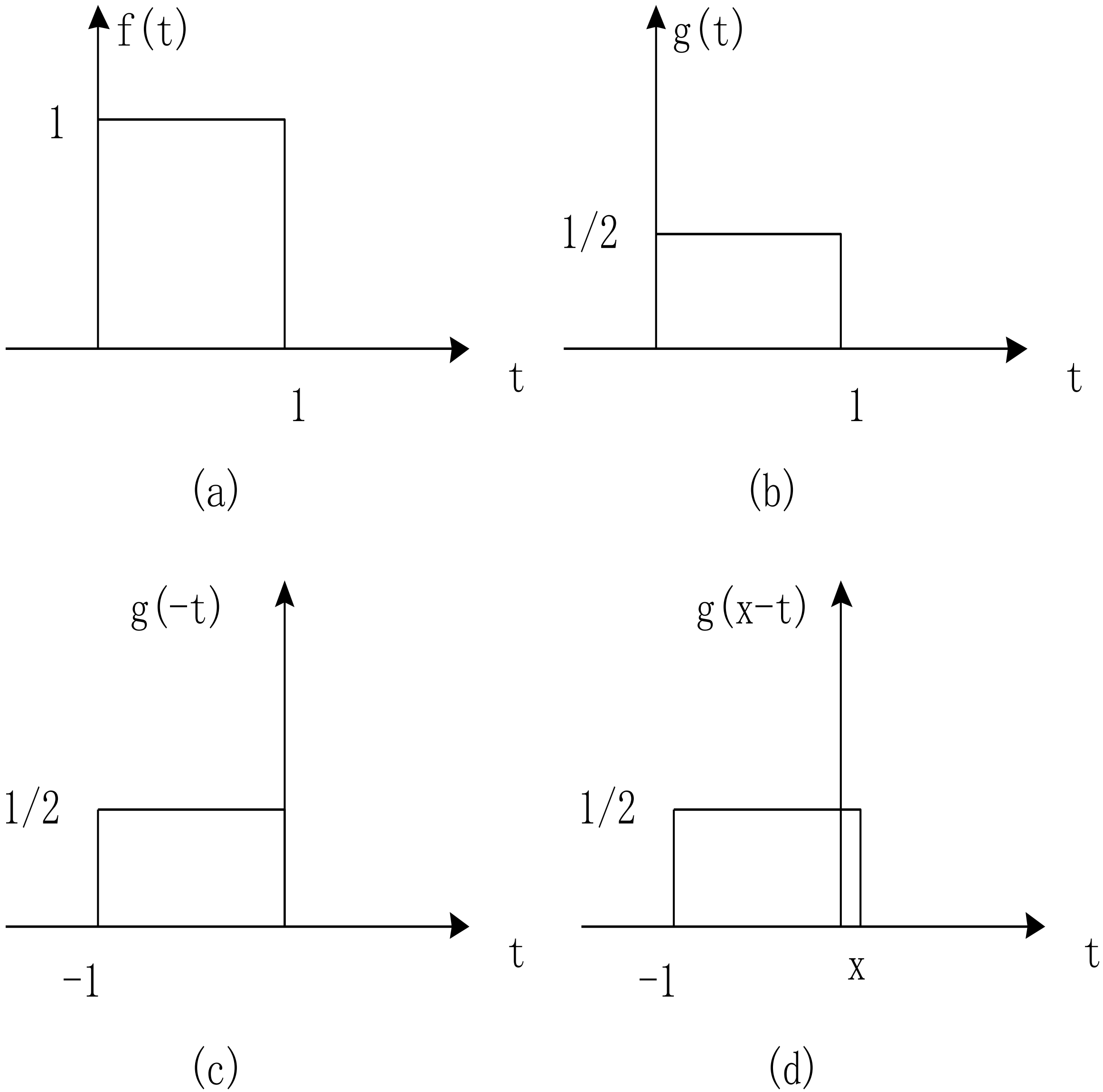
$\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2$

举例: 两个相同的高斯函数卷积

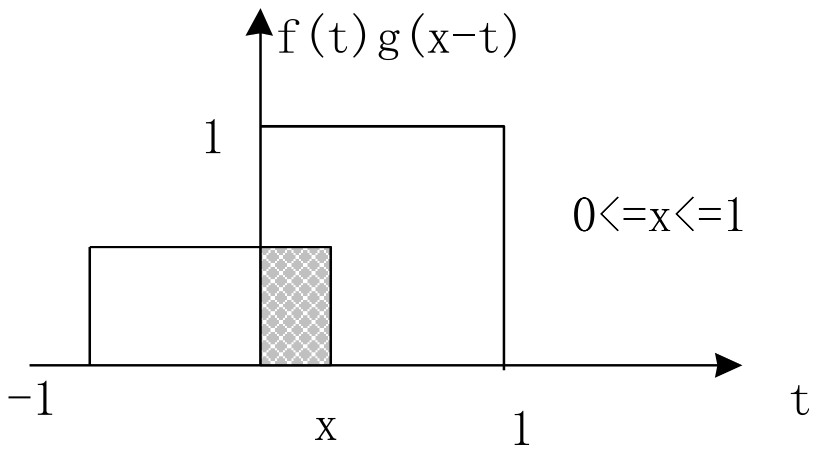
7 一维卷积的离散化计算

- 一维卷积
  - Step1:得到f(t)和g(t)的函数;
  - Step2:将函数g(t)关于y轴反转，得到g(-t);
  - Step3:将函数g(-t)平移x，得到g(x-t);
  - Step4:在给定x下，将f(t)和g(x-t)相乘;
  - Step5:对f(t)和g(x-t)的乘积求积分;
  - Step6:最后得到f(t)*g(t)函数，注意自变量取值区域。

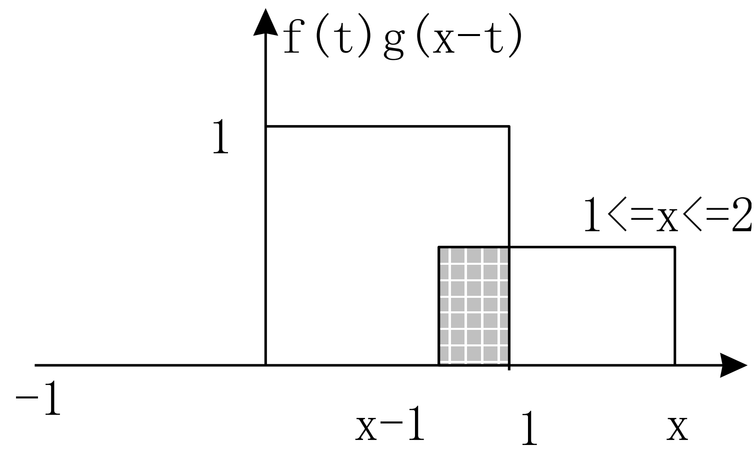
7 一维卷积的离散化计算



7 一维卷积的离散化计算



(e)



(f)

7 一维卷积的离散化计算

- 离散一维卷积

$$h(i)=f(i)*g(i)=\sum_{j}f(j)g(i-j)$$

  - 若f长度为m，g长度为n，则输出为 $N=m+n-1$

- 离散一维卷积矩阵计算
  - 将f和g扩展为N长度的序列，且

先不要试图理解它

$$f_p(i)=\begin{cases}f(i) & 1\le i\le m\\ 0 & m<i\le N\end{cases}$$

7 一维卷积的离散化计算

$$
\mathbf{h} = \mathbf{g} * \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{g_p}(\mathbf{1}) & \mathbf{g_p}(\mathbf{N}) & \cdots & \mathbf{g_p}(\mathbf{2}) \\ \mathbf{g_p}(\mathbf{2}) & \mathbf{g_p}(\mathbf{1}) & \cdots & \mathbf{g_p}(\mathbf{3}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{g_p}(\mathbf{N}) & \mathbf{g_p}(\mathbf{N-1}) & \cdots & \mathbf{g_p}(\mathbf{1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f_p}(\mathbf{1}) \\ \mathbf{f_p}(\mathbf{2}) \\ \vdots \\ \mathbf{f_p}(\mathbf{N}) \end{bmatrix}
$$

7 一维卷积的离散化计算

- 课堂练习:

$$f=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},g=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.\text{求}f\bullet g.$$

8 要点总结

- 1）两幅不相关图像之和的直方图是输入图像直方图的卷积。
- 2）对M幅随机加性噪声污染的图像求平均后，可使图像每点像素平方信噪比提高M倍；
- 3）减运算可用于图像背景去除和运动检测；
- 4）减运算可得到梯度图像；
- 5）乘运算可用于掩膜，除运算可用于多光谱遥感图像。