数字图像处理

傅立叶变换

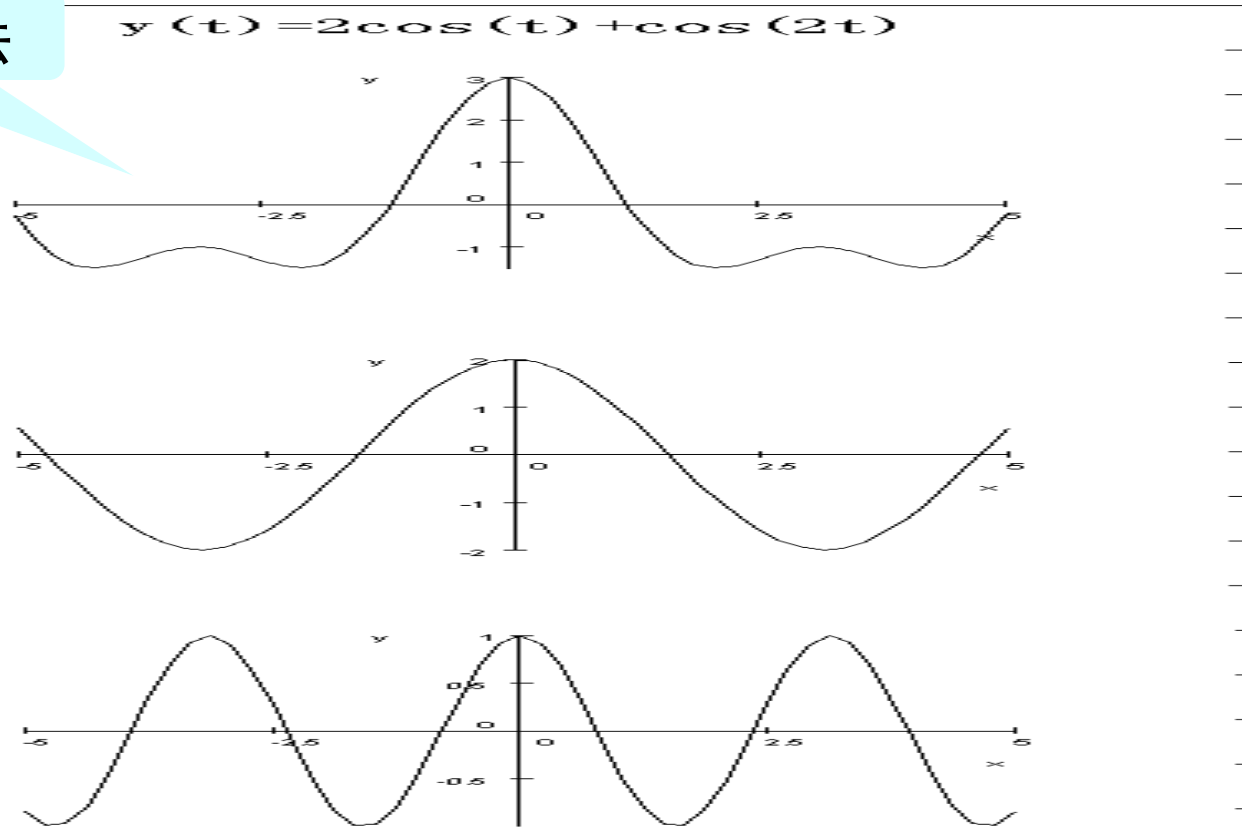
傅立叶变换

- 一、一维连续傅立叶变换
- 二、二维连续傅立叶变换
- 三、一维离散傅立叶变换
- 四、二维离散傅立叶变换

1 一维连续傅立叶变换

- 引子——信号（波）的三种表示方法

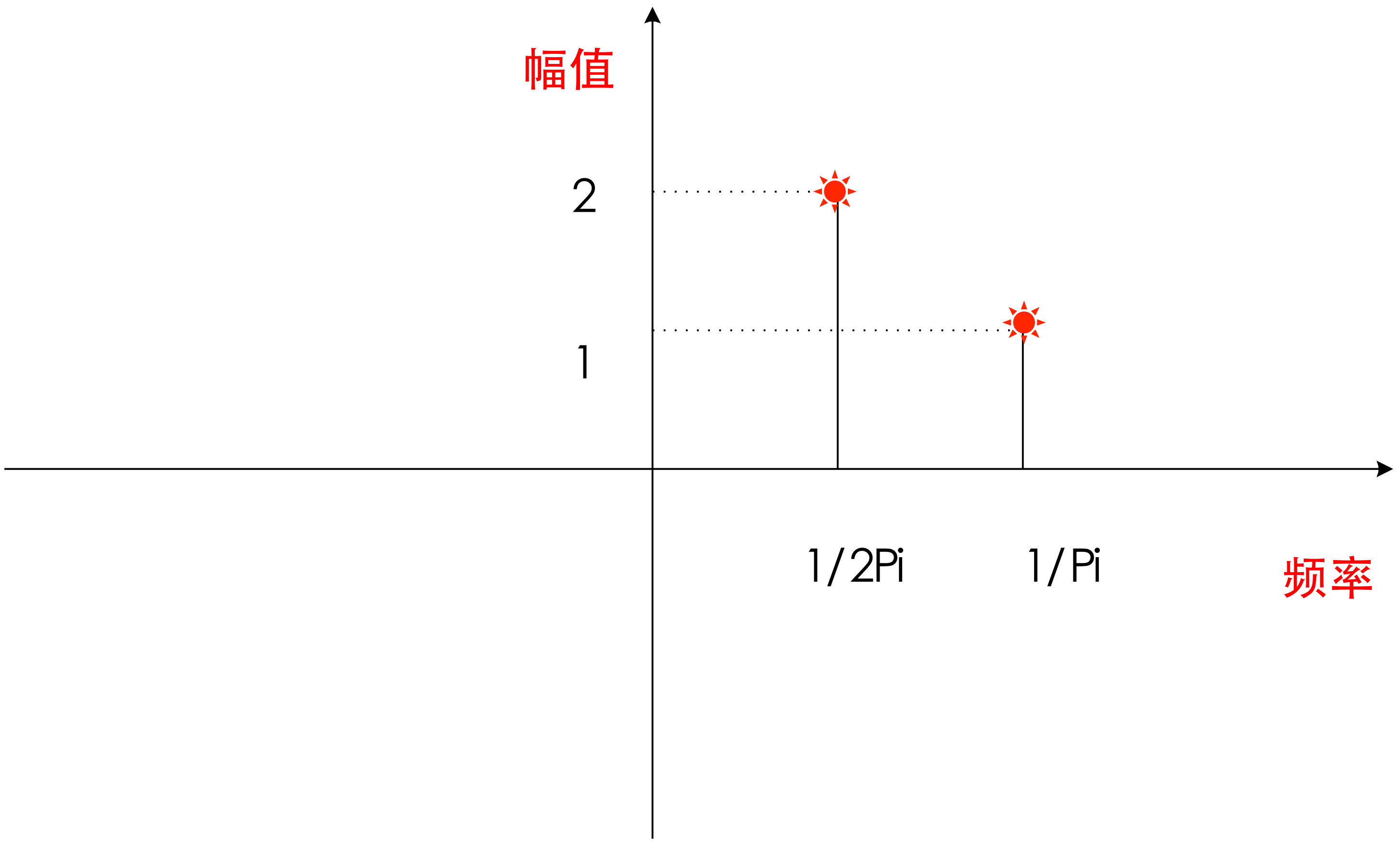
第1种表示方法



第2种表示方法

1 一维连续傅立叶变换

- 第3种表示法



1 一维连续傅立叶变换

- 思考
  - 如何把任意波形的信号表达成不同频率基波的组合?
  - 在上一章中，不同频率的基波（正弦或余弦信号）表现为复域上的调谐信号;
  - 因此：问题转化成如何把任意波形的信号表达成复数域上不同角速度的调谐信号之和.

$$x(t) = e^{j2\pi ut} = \cos(2\pi ut) + j\sin(2\pi ut)$$

其中$j^2 = -1$

1 一维连续傅立叶变换

请仔细思考F(u)函数的形式.

- 1）变换

定义实变量x的连续可积函数$f(x)$的傅立叶变换为

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx = R(u)+jI(u)$$

从$F(u)$中恢复$f(x)$，定义为傅立叶反变换

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux}du \quad \text{记} F(u)\Leftrightarrow f(x)$$

幅度 $$|F(u)| = \sqrt{R^2(u)+I^2(u)}$$

相角 $$|\phi(u)| = \tan^{-1}\left({I(u)}\big/{R(u)} \right)$$

幅度函数$|F(u)|$又称为$f(x)$的傅立叶谱

1 一维连续傅立叶变换

- 例**10-1**：为下图所示的简单函数**f(x)**，求其傅立叶变换**F(u)**。

$$解：F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$

$$=\int_{0}^{X} Ae^{-j2\pi ux}dx=\frac{-A}{j2\pi u}\left[e^{-j2\pi ux}\right]_{0}^{X}$$

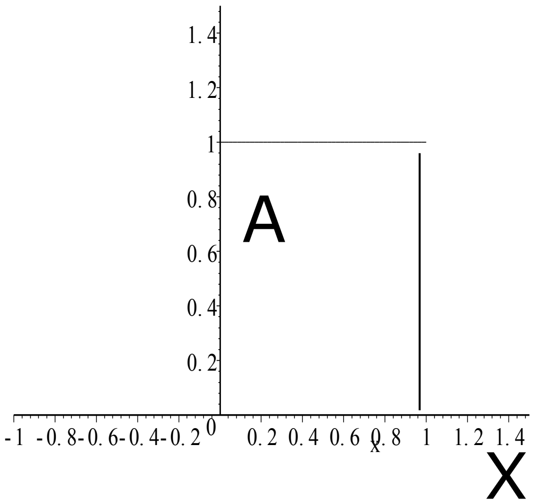
$$=\frac{-A}{j2\pi u}\left[e^{-j2\pi uX}-1\right]=\frac{-A}{j2\pi u}\left[e^{-j\pi uX}-e^{j\pi uX}\right]e^{-j\pi uX}$$

$$=\frac{A}{\pi u}\sin(\pi uX)e^{-j\pi uX}$$

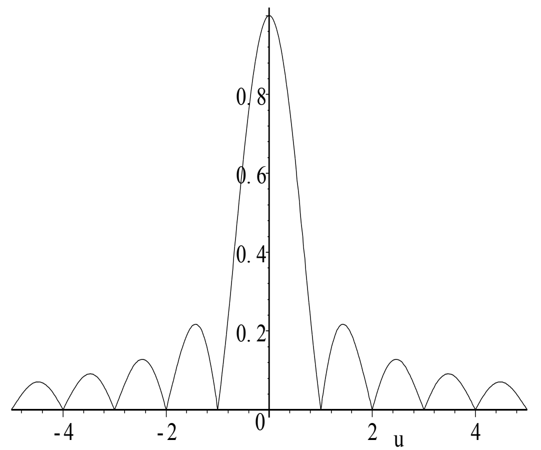
$$|F(u)|=AX\left|\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}\right|$$

1 一维连续傅立叶变换

矩形函数



矩形函数的傅立叶谱



请思考除此之外的第3种表达?

1 一维连续傅立叶变换

- 例10-2：对高斯函数G(t)，求其傅立叶变换F(u)。

$$\because G(t) = e^{-\pi t^2}$$

$$\therefore F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-j2\pi ut} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(t^2 + j2ut\right)} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi(ju)^2} e^{-\pi(t+ju)^2} dt = e^{-\pi u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+ju)^2} dt$$

$$= e^{-\pi u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi T^2} dT = e^{-\pi u^2}$$

高斯函数的傅立叶变换同样是高斯函数。

1 一维连续傅立叶变换

函数	$f(t)$	$F(u)$
高斯	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi u^2}$
矩形脉冲	$\Pi(\mathrm{t})$	$\sin(\pi u)/\pi u$
三角脉冲	$\Lambda(t)$	$\sin^2(\pi u)/(\pi u)^2$
冲激	$\delta(t)$	1
单位阶跃	$u(t)$	$[\delta(u)-j/\pi u]/2$
余弦	$\cos(2\pi ft)$	$[\delta(u+f)+\delta(u-f)]/2$
正弦	$\sin(2\pi ft)$	$j[\delta(u+f)+\delta(u-f)]/2$
复指数	$e^{2\pi ft}$	$\delta(u-f)$

1 一维连续傅立叶变换

- **2）加快运算**

$$f(x)e^{-j2\pi ux}=f(x)\left[\cos 2\pi ux-j\sin 2\pi ux\right]$$

因为奇函数乘偶函数为奇函数，

奇函数乘奇函数为偶函数。

而积分对于奇函数为零。

因此若$f(x)$为奇函数，只需计算虚数项；

若$f(x)$为偶函数，只需计算实数项。

2 二维连续傅立叶变换

定义实变量x, y的连续可积函数$f(x,y)$的傅立叶变换为

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy = R(u,v)+jI(u,v)$$

从$F(u,v)$中恢复$f(x,y)$，定义为傅立叶反变换

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

幅度 $$|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$$

相角 $$|\phi(u,v)| = \tan^{-1}\left(I(u,v) \big/ R(u,v)\right)$$

能量谱 $$|E(u,v)| = R^2(u,v)+I^2(u,v)$$

2 二维连续傅立叶变换

- 例10-3：为下图所示的二维函数f(x,y)，求其傅立叶变换F(u,v)。

解：$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$

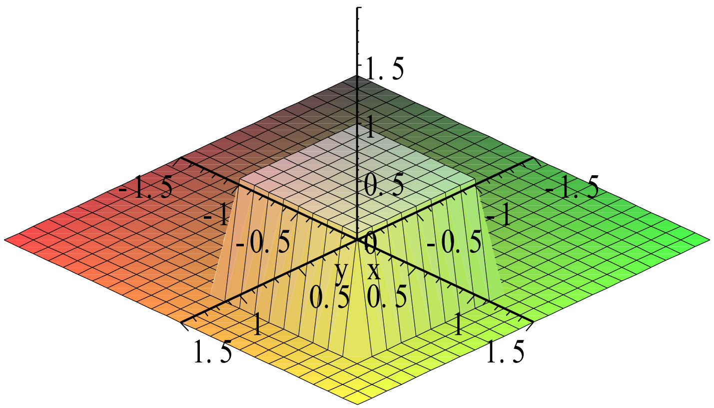
$$= A\int_{0}^{X} e^{-j2\pi ux}dx\int_{0}^{Y} e^{-j2\pi uy}dy$$

$$= AXY\left[\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}e^{-juX}\right]\left[\frac{\sin(\pi vY)}{\pi vY}e^{-jvY}\right]$$

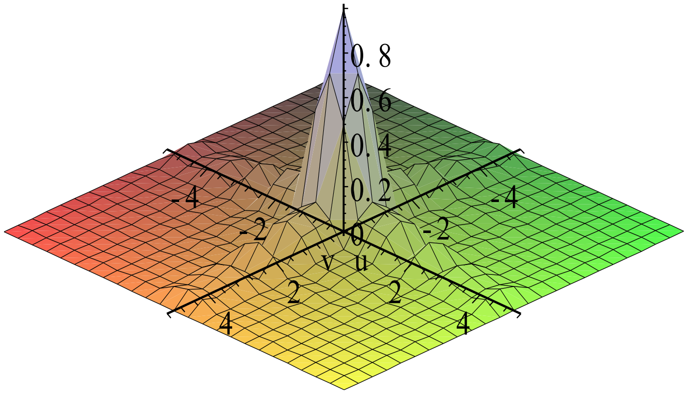
$$\left|F(u,v)\right| = AXY\left|\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}\right|\left|\frac{\sin(\pi vY)}{\pi vY}\right|$$

2 二维连续傅立叶变换

二维矩形
函数



二维矩形
函数的傅
立叶谱



3 一维离散傅立叶变换

- 1）一维离散傅立叶变换对

设离散函数$f(x)$为相应连续函数取N个间隔Δx的取样值。

$$f(x)=f(x_0+x\Delta x)$$

离散函数的傅立叶变换对为

$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)e^{-j2\pi ux/N}$$

$$f(x)=\sum_{x=0}^{N-1}F(u)e^{j2\pi ux/N}$$

注意：1/N并没有固定位置.

3 一维离散傅立叶变换

$$\text{取}N=4, F(u)=\frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)e^{-j2\pi ux/4}\text{展开为}$$

$$u=0, F(0)=\frac{1}{4}\left[f(0)e^{0}+f(1)e^{0}+f(2)e^{0}+f(3)e^{0}\right]$$

$$u=1, F(1)=\frac{1}{4}\left[f(0)e^{0}+f(1)e^{-j\frac{\pi}{2}}+f(2)e^{-j\frac{2\pi}{2}}+f(3)e^{e^{-j\frac{3\pi}{2}}}\right]$$

$$u=2, F(2)=\frac{1}{4}\left[f(0)e^{0}+f(1)e^{-j\frac{2\pi}{2}}+f(2)e^{-j\frac{4\pi}{2}}+f(3)e^{-j\frac{6\pi}{2}}\right]$$

$$u=3, F(3)=\frac{1}{4}\left[f(0)e^{0}+f(1)e^{-j\frac{3\pi}{2}}+f(2)e^{-j\frac{6\pi}{2}}+f(3)e^{-j\frac{9\pi}{2}}\right]$$

3 一维离散傅立叶变换

- 例：一维离散函数如下,求其离散傅立叶变换.

$$f(x)=\{f(0)=1, f(1)=1, f(2)=1, f(3)=1\}$$

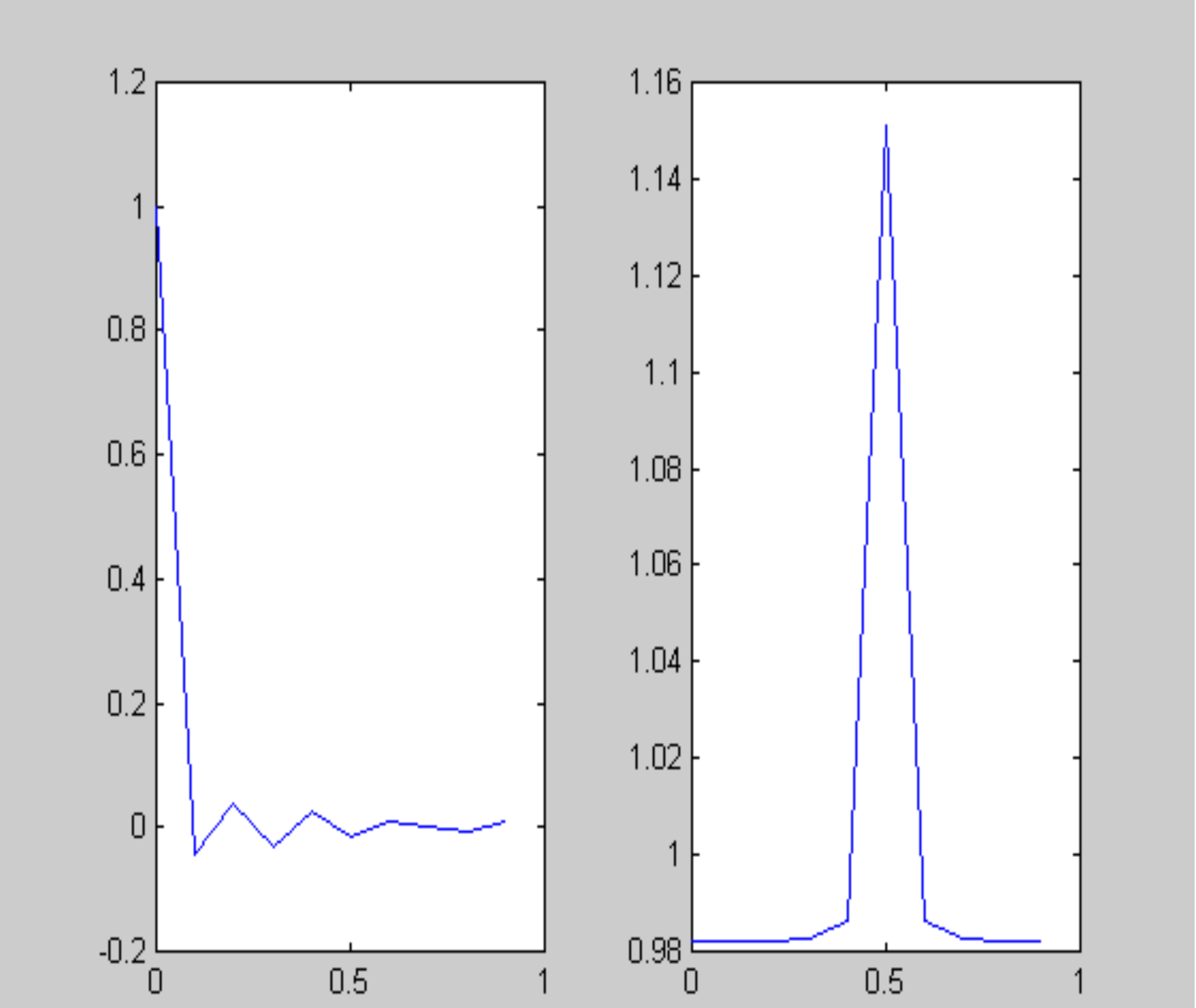
$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{3} f(x)e^{-j2\pi\frac{ux}{N}}=\frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} e^{-j2\pi\frac{ux}{4}}$$

$$F(0)=1, F(1)=0, F(2)=0, F(3)=0$$

3 一维离散傅立叶变换

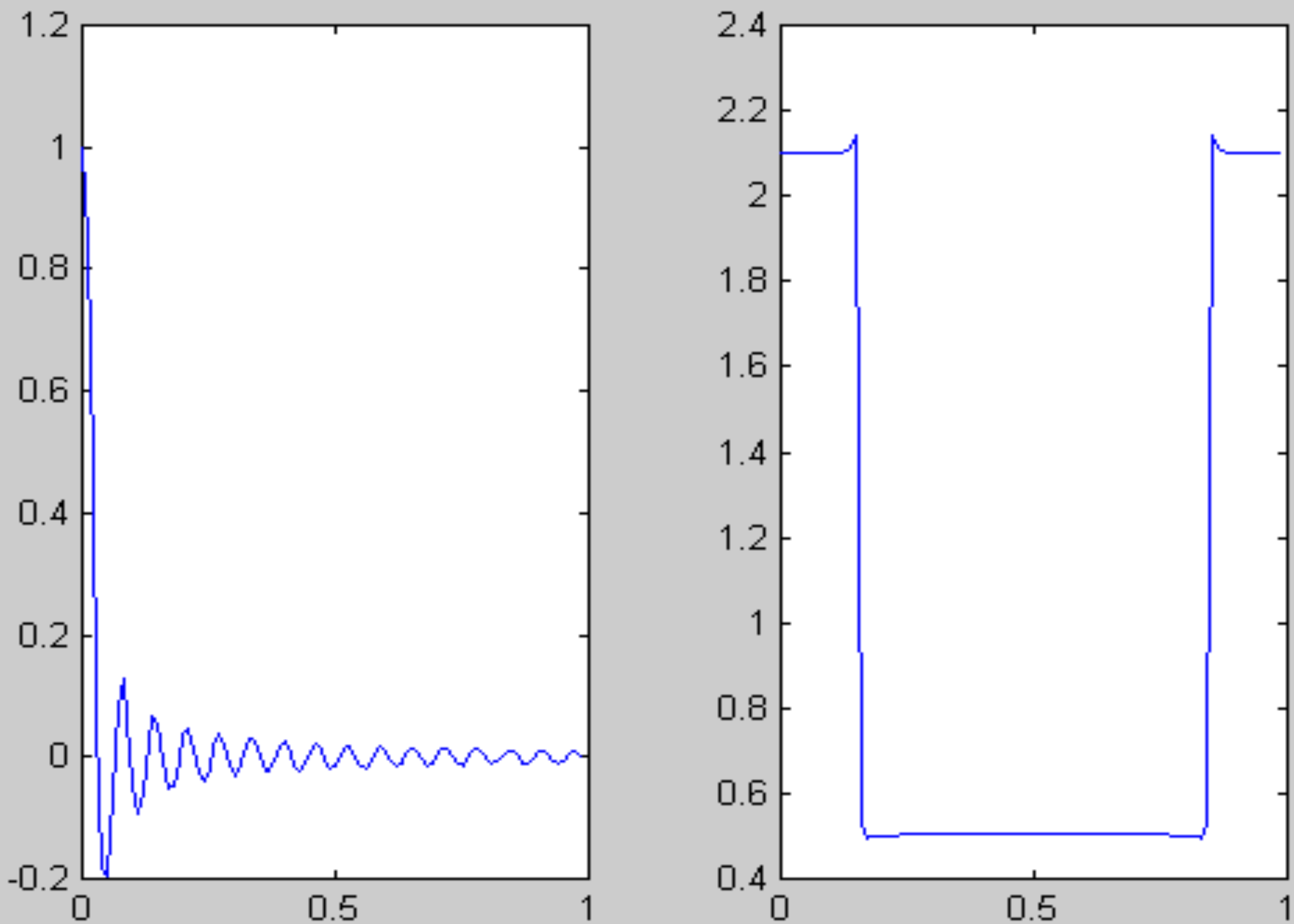
- 例：对连续sinc函数的不同采样，导致的不同离散傅立叶变换。
  - 1）采样10个点；
  - 2）采样100个点。

3 一维离散傅立叶变换



下标从[0,1]扩展到[0,10]

3 一维离散傅立叶变换



下标从[0,1]扩展到[0,100]

3 一维离散傅立叶变换

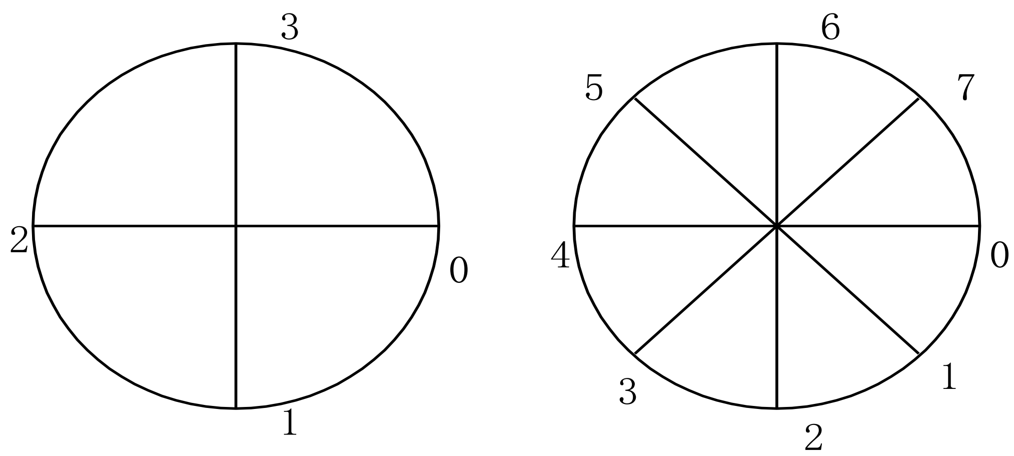
- 2）DFT的矩阵表示法

考虑到$\frac{1}{N}$,记作$F = Wf$

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^0 & e^0 & e^0 & e^0 \\ e^0 & e^{-j\frac{\pi}{2}} & e^{-j\pi} & e^{-j\frac{3\pi}{2}} \\ e^0 & e^{-j\pi} & e^{-j2\pi} & e^{-j3\pi} \\ e^0 & e^{-j\frac{3\pi}{2}} & e^{-j3\pi} & e^{-j\frac{9\pi}{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$

3 一维离散傅立叶变换

$$\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^0 & W^2 \\ W^0 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$



N=4和N=8的W各元素

步进法

3 一维离散傅立叶变换

- **N=8时W各元素**

$$W^0 = 1, W^2 = -j, W^4 = -1, W^6 = j$$

$$W^1 = (1-j)/\sqrt{2}$$

$$W^3 = (-1-j)/\sqrt{2}$$

$$W^5 = (-1+j)/\sqrt{2}$$

$$W^7 = (1+j)/\sqrt{2}$$

3 一维离散傅立叶变换

- **3） 常用一维DFT的几个性质**

  $(1)W_N^{ux}$阵是对称阵

  W_N阵u方向和x方向是对称的；

  $(2)f(x)$的DFT是周期性, 即W_N^{ux}阵是周期性

  即$F(u)=F(u+N), f(x)=f(x+N)$;

  $(3)f(x)$为偶函数或奇函数情况

  当$f(x)$为奇函数，计算时只计算虚部；

  当$f(x)$为偶函数，计算时只计算实部；

  $(4)W$阵的可分性

  参看快速傅立叶变换

3 一维离散傅立叶变换

- 4）快速傅立叶变换FFT

$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)e^{-j\frac{2\pi ux}{N}}$$

DFT计算复杂度$=N^2$次乘法$+N(N-1)$次加法

对于$N=2^n$幂时有快速算法

FFT计算复杂度$=N\lg_2 N$

- 时域分组：将W中把x不断分解为奇偶表达式；
- 频域分组：将u不断分解为奇偶表达式。

旋转因子 W_N^{km} 的性质

1)周期性

$$W_N^{(k+N)m} = W_N^{k(m+N)} = W_N^{km}$$

2) 对称性

$$W_N^{mk+\frac{N}{2}} = -W_N^{mk} \qquad \left(W_N^{km}\right)^* = W_N^{-mk}$$

3)可约性

$$W_N^{mk} = W_{nN}^{nmk}$$

$$W_N^{mk} = W_{N/n}^{mk/n}, \quad N/n\text{为整数}$$

3 一维离散傅立叶变换

$N=2^m$幂，$f(x)$分解为$f(2x)$和$f(2x+1)$:

注意x的取值范围

$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)W_N^{ux}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N/2-1}f(2x)W_N^{2ux}+\frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N/2-1}f(2x+1)W_N^{u(2x+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N/2-1}f(2x)W_{N/2}^{ux}+\frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N/2-1}f(2x+1)W_{N/2}^{ux}W_N^{u}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[F_e(u)+W_N^uF_o(u)\right]$$

$$F\left(u+\frac{N}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[F_e\left(u+\frac{N}{2}\right)+W_N^{u+N/2}F_o\left(u+\frac{N}{2}\right)\right]$$

3 一维离散傅立叶变换

$$Q\ F_e\left(u+\frac{N}{2}\right)=F_e(u),F_o\left(u+\frac{N}{2}\right)=F_o(u)$$

$$W_N^{u+N/2}=W_N^u W_N^{N/2}=W_N^u e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}}=W_N^u e^{-j\pi}=-W_N^u$$

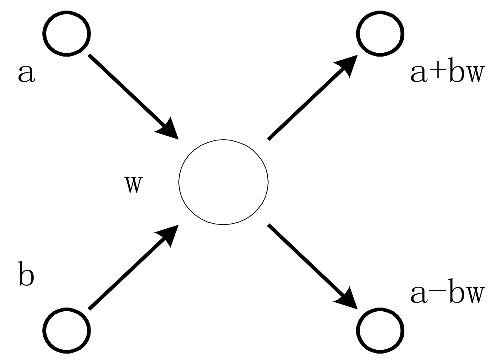
$$\therefore F\left(u+\frac{N}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[F_e(u)-W_N^u F_o(u)\right]$$

因此F_e和F_o中的x继续分解，直到2点。

$$F_0\sim F_7\Rightarrow F_0\sim F_3\Rightarrow F_0\sim F_1\Rightarrow F_0=f_0$$

3 一维离散傅立叶变换

- 蝶形图



- 显然计算一次蝶形需1次乘法和2次加（减）法。

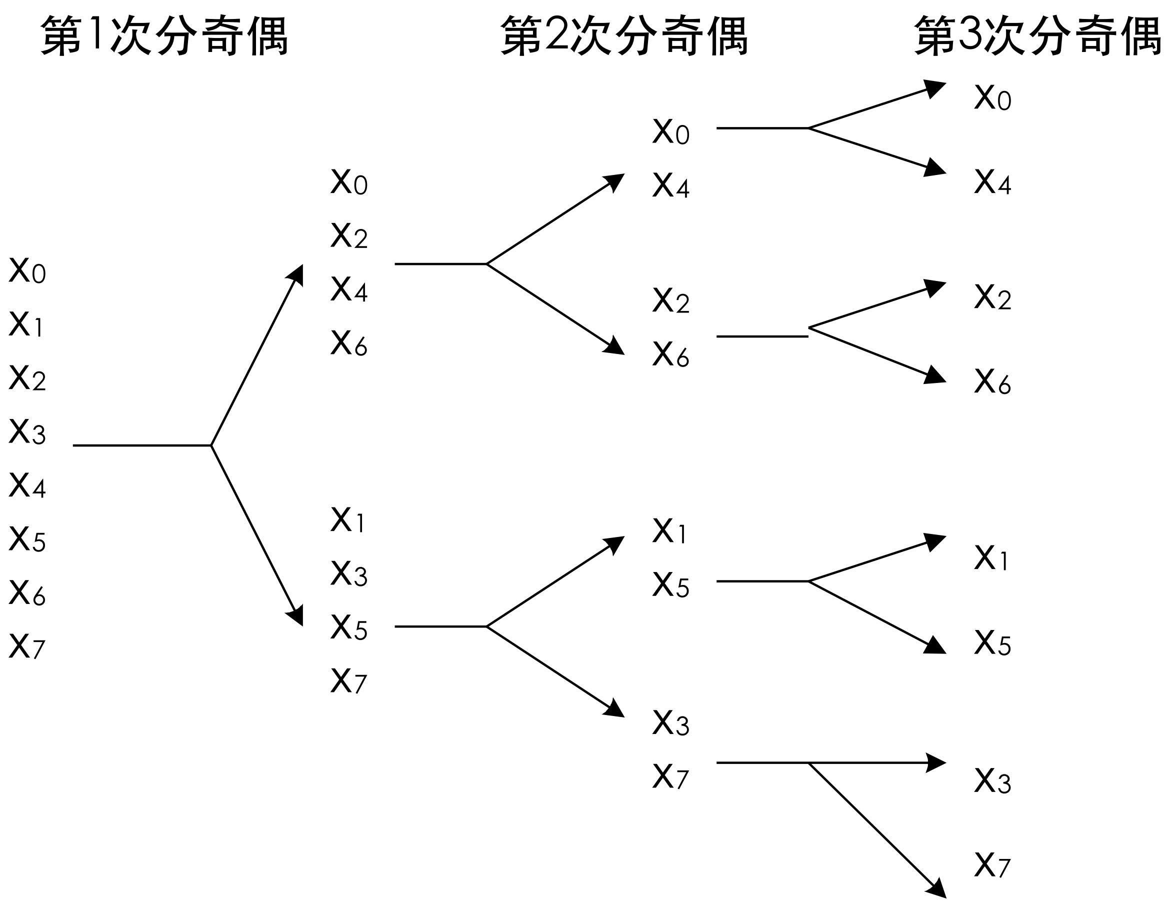
对于$N=2^m$点的DFT，每轮有$N/2$个蝶形，

总共有$\dfrac{N}{2}\times m=\dfrac{N}{2}\times\log_2 N$个蝶形。

总共有$\dfrac{N}{2}\times\log_2 N$次乘法和$N\log_2 N$加法。

3 一维离散傅立叶变换

- 比特倒序



4 二维离散傅立叶变换

容易将一维离散傅立叶变换推广到二维情况

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

式中：$u=0,1,2,\cdots,M-1;$

$v=0,1,2,\cdots,N-1$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

式中：$x=0,1,2,\cdots,M-1;$

$y=0,1,2,\cdots,N-1$

在数字图象处理中，图象一般取方形，

即$M=N.$

思考题

- 理解傅立叶变换能够将时／空域转换为频域
- 理解典型函数（余弦函数和矩形脉冲函数）对应的频域空间图像
- 傅立叶变换的什么特性使得可以做到快速傅立叶变换