数字图像处理

第九章

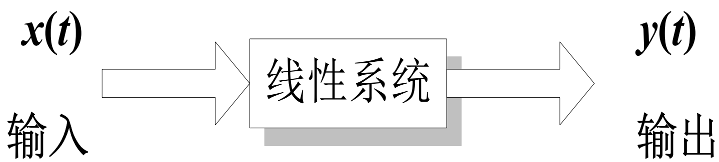
线性系统理论

CH9 线性系统理论

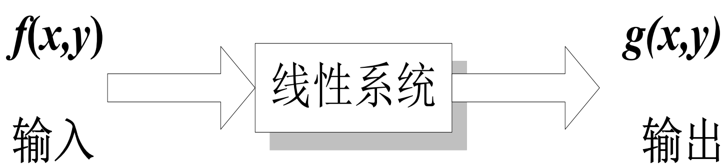
- 一、什么是线性系统
- 二、调谐信号分析
- 三、卷积
- 四、五个有用函数
- 五、卷积滤波及其应用
- 要点总结

1 什么是线性系统

- 1）定义



一维系统， 不失一般性，以时间t作为系统变量。



二维系统， 不失一般性，以空间坐标x,y作为系统变量。

1 什么是线性系统

- **2）性质**
  - **线性**

假设$x_1(t) \to y_1(t), x_2(t) \to y_2(t)$

若$x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$

则称此系统是线性系统

显然，对于线性系统若$x_1(t) \to y_1(t)$

则$ax_1(t) \to ay_1(t)$　其中a是有理数

显然，$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \to a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$

线性系统满足叠加性和齐次性。

1 什么是线性系统

- **移不变性**

对于线性系统，如果存在

$x(t) \to y(t)$,且$x(t-T) \to y(t-T)$

则称此线性系统具有移不变性。

对于二维系统，若$f(x,y) \to g(x,y)$

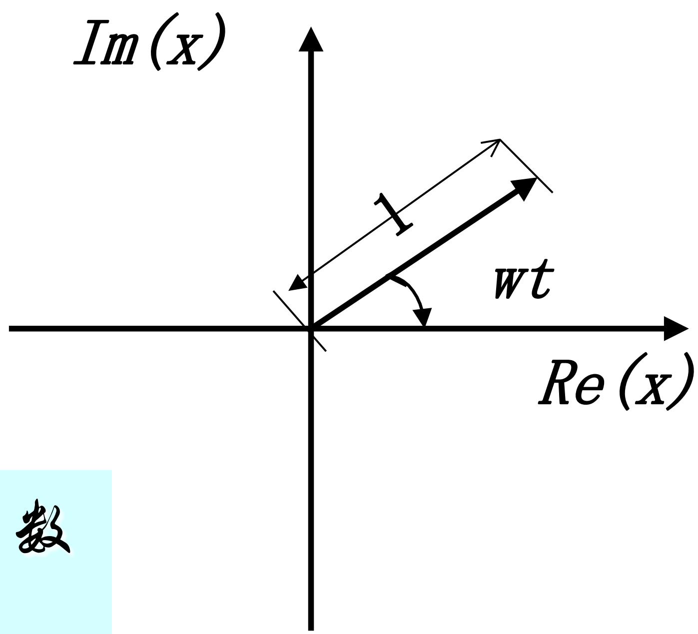
则$f(x-x_0, y-y_0) \to g(x-x_0, y-y_0)$

2 调谐信号分析

- 1）调谐信号

$$x(t)=e^{j\varpi t}=\cos(\varpi t)+j\sin(\varpi t)$$

其中$j^2=-1$，且$\varpi=2\pi f$



1. 图像可表示为二维实值函数
2. 实值函数是复函数的特例
3. 调谐信号是复函数的一种

2 调谐信号分析

- **2）线性系统对调谐输入的响应**

$$x_1(t)=e^{j\varpi t},y_1(t)=K(\varpi,t)x_1(t)=K(\varpi,t)e^{j\varpi t}$$

$$x_2(t)=x_1(t-T)=e^{j\varpi(t-T)}=e^{j\varpi t}e^{-j\varpi T}$$

$$y_2(t)=K(\varpi,t)x_2(t)=K(\varpi,t)x_1(t-T)$$

根据移不变性质

$$y_2(t)=y_1(t-T)=K(\varpi,t-T)x_1(t-T)$$

显然$K(\varpi,t)=K(\varpi,t-T)$

因此$y(t)=K(\varpi)x(t)$

结论：线性移不变系统对于

调谐信号的响应等于输入信号乘以一个依赖于频率的复函数。

2 调谐信号分析

- 3）调谐信号与正弦型信号
  - 将输入的正弦型信号表示成调谐信号;
  - 计算线性系统对此调谐输入的响应;
  - 取调谐输出的实部为真正的输出。
- 4）传递函数

2 调谐信号分析

将$K(\varpi)$表示成极坐标形式：

$$K(\varpi)=A(\varpi)e^{j\phi(\varpi)}$$

假设输入为余弦函数，令其为调谐信号的实部：

$$x(t)=\cos(\varpi t)=\mathrm{Re}\left(e^{j\varpi t}\right)$$

调谐输入的响应为

$$K(\varpi)e^{j\varpi t}=A(\varpi)e^{j\phi(\varpi)}e^{j\varpi t}$$

余弦函数的输出为

$$y(t)=\mathrm{Re}\left(A(\varpi)e^{j\phi(\varpi)}e^{j\varpi t}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\Big(A(\varpi)\big(\cos(\varpi t+\varphi)+j\sin(\varpi t+\varphi)\big)\Big)$$

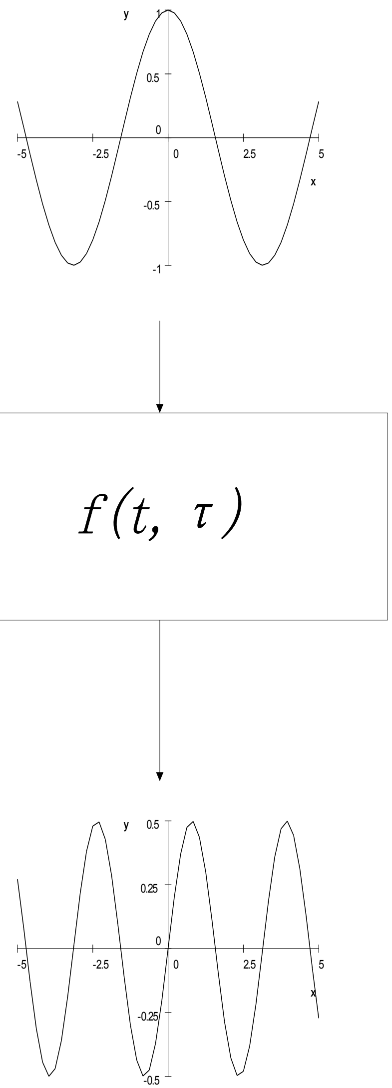
$$=A(\varpi)\cos(\varpi t+\varphi)$$

其中$A(\varpi)$为乘积增益函数，$\varphi(\varpi)$为相移角，对输入信号加以平移。

2 调谐信号分析

- 5）线性移不变系统的重要性质
  - 调谐输入总是产生同频率的调谐输出；
  - 系统的传递函数
    - 一个仅依赖于频率的复值函数，包含系统全部信息；
  - 传递函数对调谐信号输入只产生两种影响
    - 幅度的变化和相位的平移。

3 卷积



3 卷积

线性系统$x(t)$、$y(t)$的另一种一般表示

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

根据移不变性质，简化$f(t,\tau)$

$$y(t-T)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\tau)x(\tau-T)d\tau$$

对$t-T$和$\tau-T$进行变量变换，则

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t+T,\tau+T)x(\tau)d\tau$$

所以$f(t+T,\tau+T)\equiv f(t,\tau)$

所以两个变量的f函数可表达成

$$g(t-\tau)=f(t,\tau)$$

冲激响应

3 卷积

因此线性系统总可以表示成卷积形式

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

- 1）线性移不变系统的两种表示形式
  - 复数形式的传递函数;
  - 实数形式的卷积冲激响应;
  - 两者是统一的。

3 卷积

- 2）卷积的几个性质
  - 交换性

$$f*g=g*f$$

  - 加法的分配率

$$f*(g+h)=f*g+f*h$$

  - 结合率

$$f*(g*h)=(f*g)*h$$

  - 求导的性质

$$\frac{d}{dt}(f*g)=f'*g=f*g'$$

3 卷积

- **3）离散一维卷积**

对于两个长度为m和n的序列$f(i)$和$g(j)$，

$$h(i)=f(i)*g(i)=\sum_{j} f(j)g(i-j)$$

给出长度为$N=m+n-1$的输出序列。

其矩阵计算形式为

$$\mathbf{h}=\mathbf{ggf}=\begin{bmatrix} \mathbf{g_p(1)} & \mathbf{g_p(N)} & \mathrm{L} & \mathbf{g_p(2)} \\ \mathbf{g_p(2)} & \mathbf{g_p(1)} & \mathrm{L} & \mathbf{g_p(3)} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ \mathbf{g_p(N)} & \mathbf{g_p(N-1)} & \mathrm{L} & \mathbf{g_p(1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{f_p(1)} \\ \mathbf{f_p(2)} \\ \mathrm{M} \\ \mathbf{f_p(N)} \end{bmatrix}$$

3 卷积

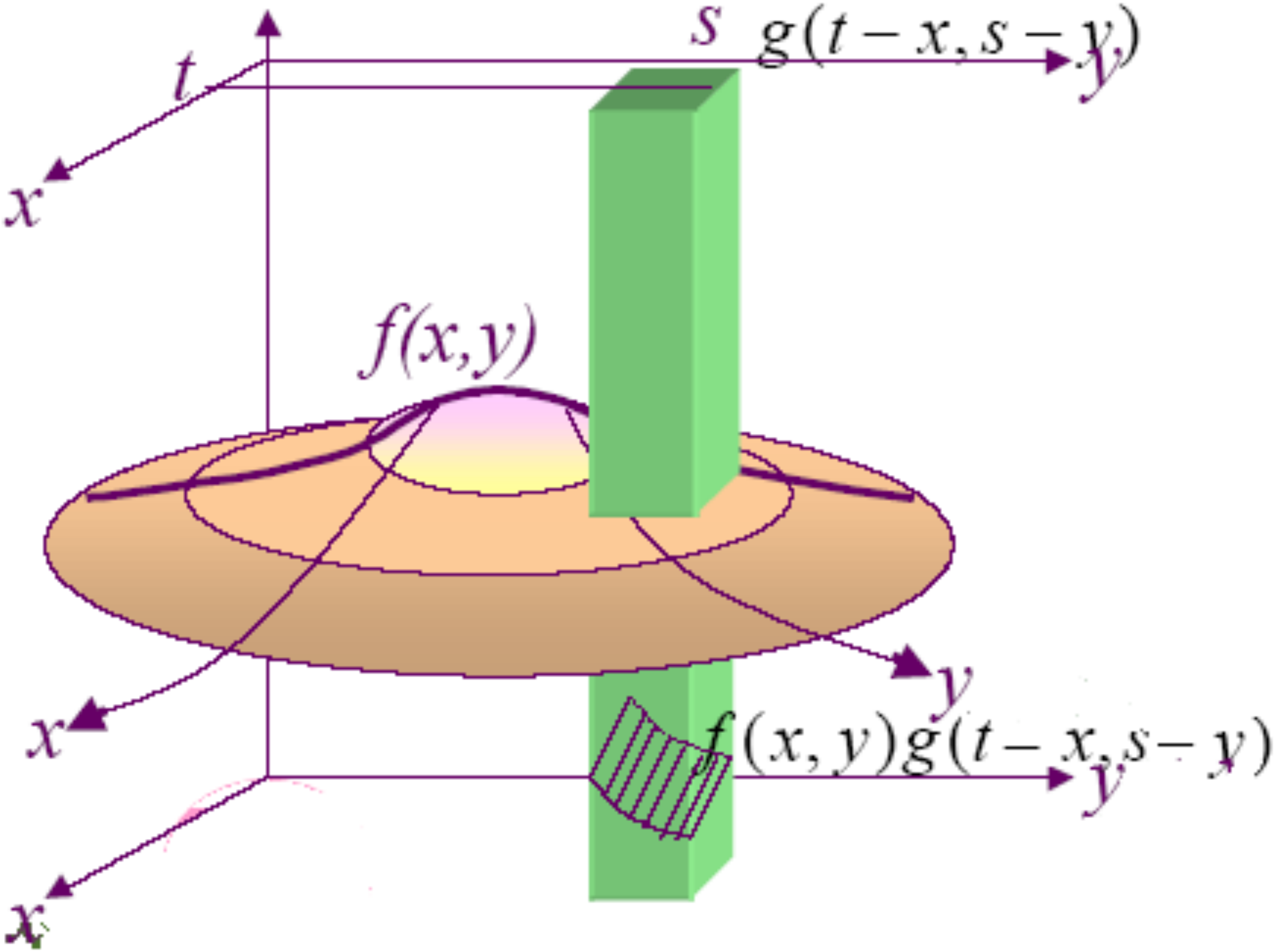
- **4）二维卷积和离散二维卷积**
  - 二维卷积定义

$$h(x,y)=f*g=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)g(x-u,y-v)dudv$$

  - 离散二维卷积定义

$$H=F*G$$

$$H(i,j)=\sum_{m}\sum_{n}F(m,n)G(i-m,j-n)$$



s
$g(t-x, s-y)$
t
y
x
$f(x,y)$
x
y
$f(x,y)g(t-x,s-y)$
y
x

3 卷积

- **二维卷积的矩阵计算形式**

$step1$：设F大小为$m_1 \times n_1$，G大小为$m_2 \times n_2$，

扩展F和G矩阵为F_p和G_p，大小为$M \times N$，其中

$M = m_1 + m_2 - 1;$

$N = n_1 + n_2 - 1;$以下假定M=N。

$step2$：从矩阵F_p构造一个$N^2 \times 1$维列向量f_p，

将F_p的第一行转置，使成为f_p最上面的N个元素，

然后其他行转置依次在下面。

$step3$：矩阵G_p每一行生成一个$N \times N$循环矩阵，总共

产生一个N个这样的矩阵$G_i\,(1 \le i \le N)$。

3 卷积

$step4:$按如下方式生成一个$N^2 \times N^2$的块循环矩阵G_b：

$$G_b = \begin{bmatrix} G_1 & G_N & \cdots & G_2 \\ G_2 & G_1 & \cdots & G_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_N & G_{N-1} & \cdots & G_1 \end{bmatrix}$$

$step5:$二维卷积的矩阵形式，再行列转换回矩阵形式

$$h_p = G_b \bullet f_p$$

3 卷积

- 例：二维卷积的矩阵计算形式。

$$\text{已知}F=\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix},G=\begin{vmatrix}-1 & 1\\-2 & 2\end{vmatrix},\text{求}F*G;$$

$$Step1:F_p=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 4 & 0\\0 & 0 & 0\end{vmatrix},G_p=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\-2 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

3 卷积

$$Step2: f_p = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

3 卷积

$$Step3: G_p = \begin{vmatrix} G_1 & G_3 & G_2 \\ G_2 & G_1 & G_3 \\ G_3 & G_2 & G_1 \end{vmatrix} \text{其中} G_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$G_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}, G_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$Step4: F * G = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -5 & -3 & 8 \\ -6 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

3 卷积

- **例：请花5分钟时间计算。**

$$已知F=\begin{vmatrix}3 & 1\\4 & 1\end{vmatrix},G=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\1 & -4 & 1\\0 & 1 & 0\end{vmatrix},求F*G。$$

$$F*G=\begin{bmatrix}0 & 3 & 1 & 0\\3 & -7 & 0 & 1\\4 & -12 & 1 & 1\\0 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

3 卷积

- 5）图像边缘处卷积处理方法
  - 1）重复图像边缘的行和列，使卷积在边缘可计算；
  - 2）卷绕输入图像，使之成为周期性；
  - 3）在图像边缘外侧填充0或其他常数；
  - 4）去掉不能计算的行和列，仅对可计算的象素进行卷积。

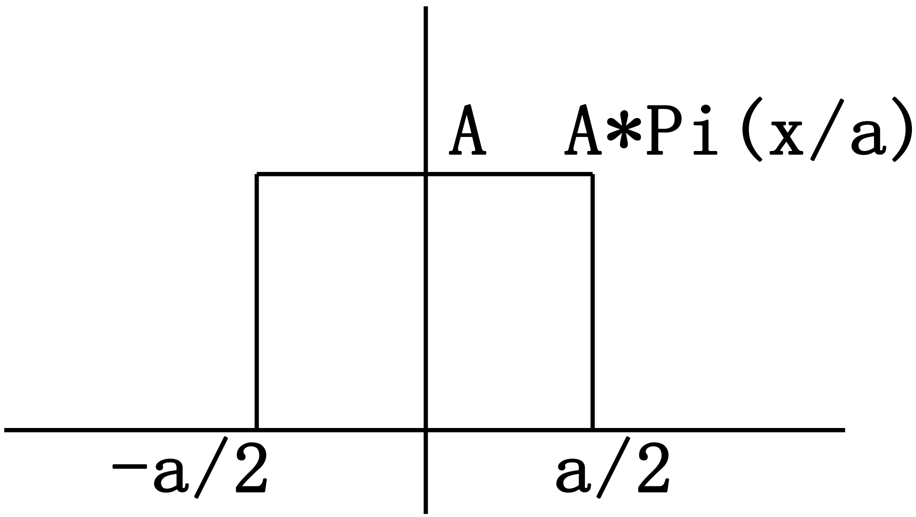
在实际图像应用中，边缘处四种卷积处理方法并不重要。

4 五个有用函数

- 1）矩形脉冲（Pi Function）

$$\Pi(x)=\begin{cases}1, -1/2 < x < 1/2 \\ 1/2, x=\pm 1/2 \\ 0, \text{others}\end{cases}$$

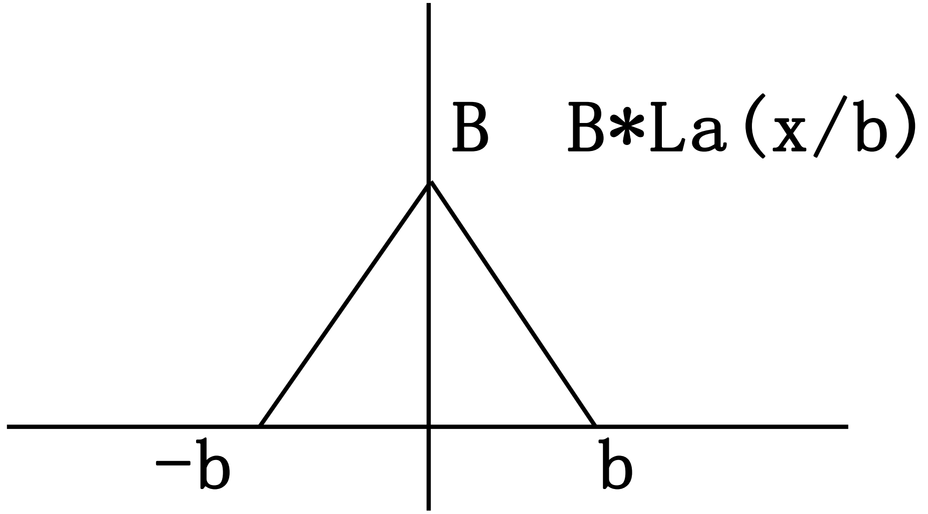
对应二维，即方形卷积模板



4 五个有用函数

- 2）三角脉冲（Lamda Function）

$$\Lambda(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$



- 两个相同矩形脉冲的卷积得到一个三角脉冲。

4 五个有用函数

- 3）高斯函数（Gaussian Function）

  - 两个高斯函数的卷积产生另一个高斯函数。 $G(x)=e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$$e^{-x^2} * e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{-(x-y)^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2-2xy-2y^2\right)} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\left(y-x/2\right)^2} e^{-x^2/2} dy = \sqrt{2\pi\left(\frac{1}{4}\right)} e^{-x^2/2}$$

$$A_1 e^{-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2} * A_2 e^{-(x-\mu_2)^2/2\sigma_2^2} = A_1 A_2 \sqrt{2\pi\sigma_1^2\sigma_2^2}\, e^{-(x-\mu_3)^2/2\sigma_3^2}$$

其中$\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$

$$\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

4 五个有用函数

- **4）冲激函数（Delta Function）**

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)dx=1，\quad x\neq 0\text{时}，\quad \delta(x)=0$$

$$\delta(x)=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\Pi\left(\frac{x}{a}\right)$$

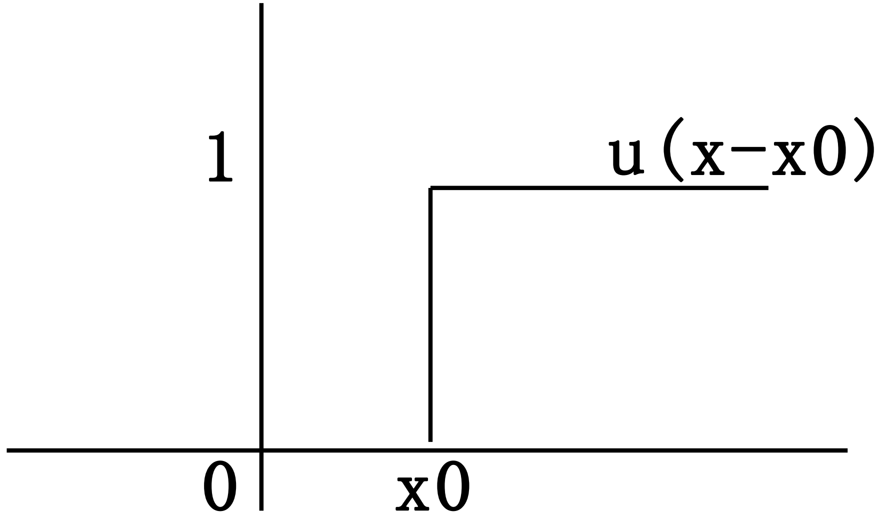
$$\int_{-\infty}^{\infty}A\delta(x)dx=A$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0)$$

4 五个有用函数

- 5）阶跃函数

$$u(x)=\begin{cases}1, x>0\\1/2, x=0\\0, x<0\end{cases}$$



4 五个有用函数

- **5）阶跃函数**
  - 阶跃函数是单位冲激函数的积分
  - 单位冲激函数是阶跃函数的导数

5 卷积滤波及其应用

- 1）平滑
  - 可采用矩形脉冲、三角脉冲或高斯脉冲为平滑函数。
  - 等价于邻域处理中的平滑去噪。
- 2）边缘增强
  - 带负的旁瓣（side lobes）的正尖峰函数，其边缘增强时产生两个效果。
    - * 增加边缘的梯度；
    - * 在边缘的两侧加边。类似与拉普拉斯算子产生的效果。
- 3）去卷积
  - 利用一个卷积去除另一卷积影响的技术。

要点总结

- 线性和移不变系统的定义；
- 调谐信号及其线性系统分析、传递函数；
- 线性移不变系统与卷积的关系；
- 离散二维卷积的矩阵计算；
- 典型冲激响应函数及其应用。