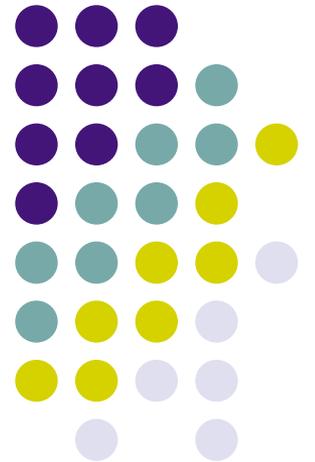


# 数字图像处理

形态学处理



# 历史



- 六十年代

- 1964年，法国巴黎矿业学院，G.Matheron, J.Serra；铁矿的定量岩石分析，以预测其开采价值；
- 1966年，南锡的酒吧，G.Matheron, J.Serra和Ph. Formeny奠定了数学形态学；
- 1968年4月，法国成立枫丹白露(Fontainebleau)数学形态学研究中心；

- 七十年代

- TAS（纹理分析系统）；
- 12年5000万；
- 大量专利；
- 但仅面向用户和自然科学家；

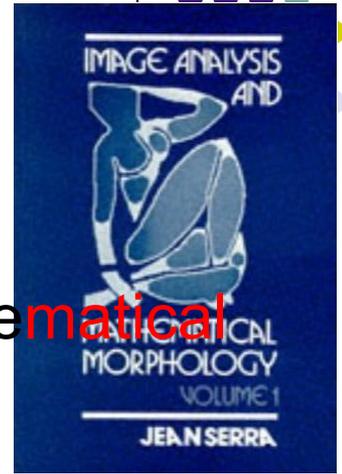


Birth of MM.pdf

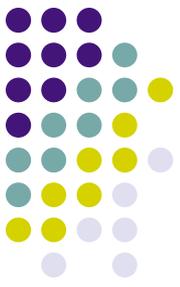
<http://cmm.ensmp.fr/~serra>

# 历史

- 八十年代，数学形态学广为人知
  - 1982年，Serra, "Image Analysis and Mathematical Morphology";
  - Sternberg, 美国机器视觉公司的首席科学家;
  - 80年代的石油危机;
  - 84年枫丹白露成立MorphoSystem指纹识别公司;
  - 86年枫丹白露成立Noesis图像处理公司;
  - 全球成立十几家数学形态学研究中心，进一步奠定理论基础;
- 九十年代，数学形态学应用在图像增强、分割、恢复、边缘检测、纹理分析等领域。



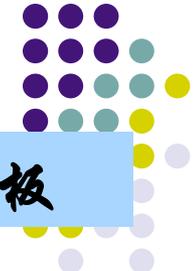
# 1 什么是形态学处理



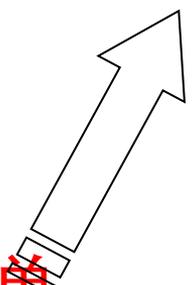
## ● 1) 起源

- 60年代采矿、动植物调查时采用的数学工具；
- 是针对二值图像依据数学形态学 (Mathematical Morphology) 的集合论方法发展起来的图像处理方法。
- 数学形态学起源于岩相学对岩石结构的定量描述工作，近年来在数字图像处理和机器视觉领域中得到了广泛的应用，形成了一种独特的数字图像分析方法和理论。

# 1 什么是形态学处理



加权模板



- 2) 思想

- 表现为一种邻域运算形式;
- 一种特殊定义的邻域称之为“**结构单元**”（**Structure Element**），在每个像素位置上它与二值图像对应的区域进行特定的逻辑运算，逻辑运算的结果为输出图像的相应像素。
- 形态学运算的效果取决于结构单元的大小、内容以及逻辑运算的性质。

- 3) 数字图像形态学处理的目的是

- 研究数字图像中物体目标的结构及拓扑关系。

## 2 基本处理定义

- 1) 二值形态学处理

$A, B \subseteq E^N$ ,  $A$ 为物体,  $B$ 为结构单元

结构单元 $B$ 包含于 $A$ , 记作 $B \subset A$ ;

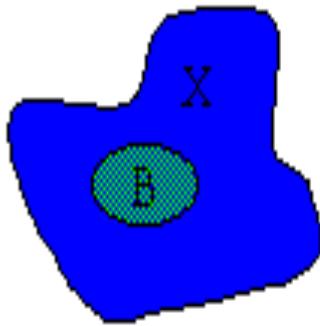
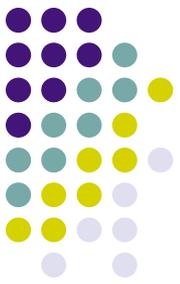
结构单元 $B$ 击中 $A$ (HIT), 记作 $B \cap A \neq \emptyset$ ;

结构单元 $B$ 击不中 $A$ (MISS),  $B \cap A = \emptyset$ ;



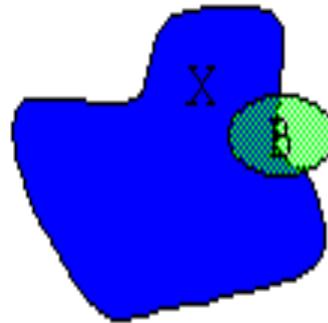
集合 $A$ 与二值图像 $f(x,y)$ 的关系

## 2 基本处理定义



$$B \subset X$$

包含于 include in



$$B \uparrow X$$

$$(B \cap X \neq \emptyset) \wedge (B \not\subset X)$$

击中 hit



$$B \subset X^C$$

$$B \cap X = \emptyset$$

不击中 miss

## 2 基本处理定义



- 2) 平移 (**translation**)

$A, x \subseteq E^N$ ,  $A$  平移  $x$  记作  $A_x$ , 定义为

$$A_x = \{c \subset E^N, c = a + x, \forall a \in A\}$$

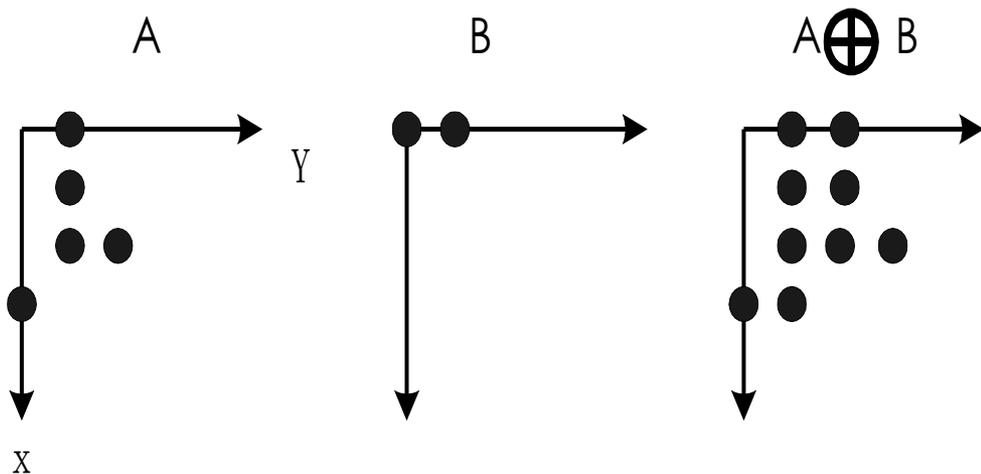
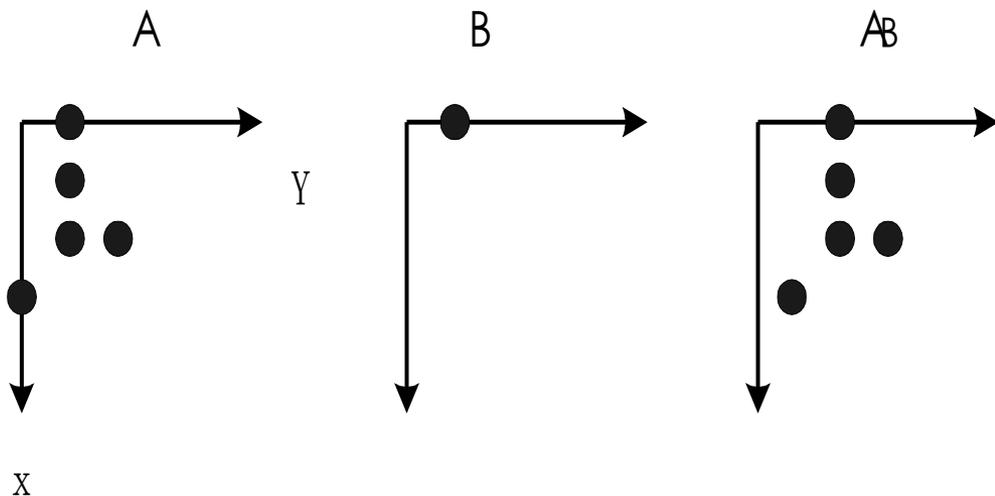
其中  $A_B$  表示  $x = B$  时的平移。

例:  $A = \{(0,1), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0)\}$ ,  $x = \{(0,1)\}$

则  $A_x = \{(0,2), (1,2), (2,2), (2,3), (3,1)\}$

**A**物体, **x**结构单元。在平移运算中通常为**1**个点

# 2 基本处理定义



## 2 基本处理定义



### ● 3) 扩张 (**dilation**)

定义 $A$ 用 $B$ 结构单元扩张记作 $A \oplus B$ , 定义为

$$A \oplus B = \{c \subset E^N, c = a + b, \forall a \subset A, \forall b \subset B\} \text{ 或}$$

$$A \oplus B = \{A_b, \forall b \subset B\}$$

例:  $A = \{(0,1), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0)\}$

$$B = \{(0,0), (0,1)\}$$

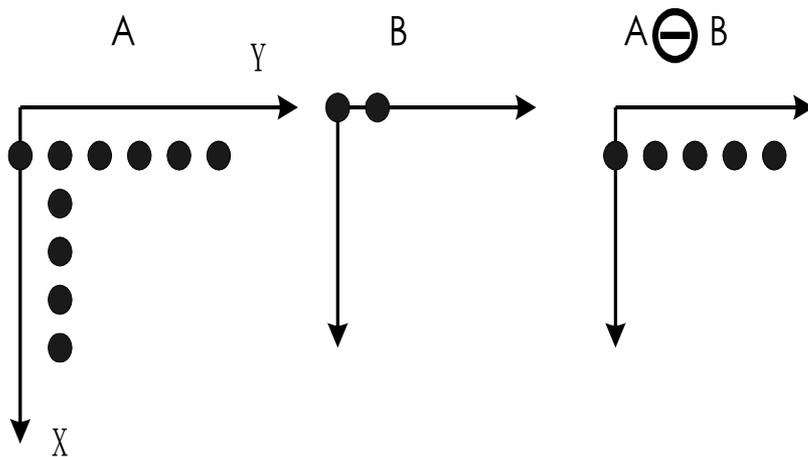
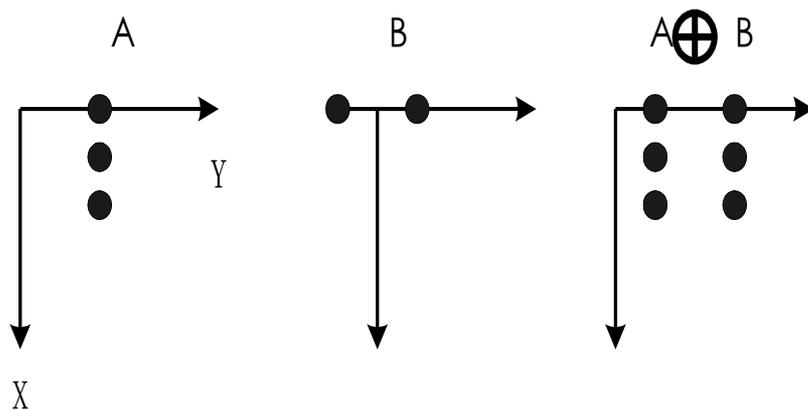
则 $A \oplus B =$

$$\{(0,1), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0), (0,2), (1,2), (2,2), (2,3), (3,1)\}$$

$A \oplus B$ 的意义 $A$ 用 $B$ 扩张,

即所有 $A$ 的点集使 $B_a$ 击中 $A$ 且交集非零。

# 2 基本处理定义



## 2 基本处理定义



- 4) 腐蚀 (erosion)

定义 $A$ 用 $B$ 结构单元腐蚀为 $A\ominus B$ ,其意义为

$$A\ominus B = \{c \subset E^N, c + b \subset A, \forall b \subset B\} \text{ 或}$$

$$A\ominus B = \{c, B_c \subset A\}$$

例:  $A =$

$$\{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1)\}$$

$$B = \{(0,0), (0,1)\}$$

$$\text{则 } A\ominus B = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$$

## 2 基本处理定义

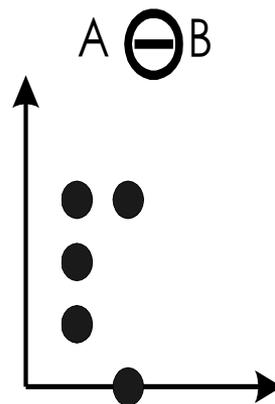
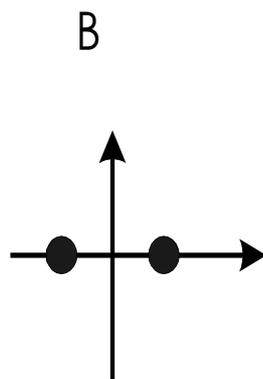
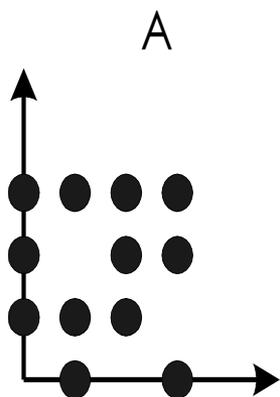


- 注意: 如果结构单元包含原点, 则  $A \ominus B \subset A$  成立;
- 而若结构单元不包含原点, 则上式不成立。

$$\text{例: } S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0_{\Delta} & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad E = \begin{vmatrix} 1 & 0_{\Delta} & 1 \end{vmatrix}$$

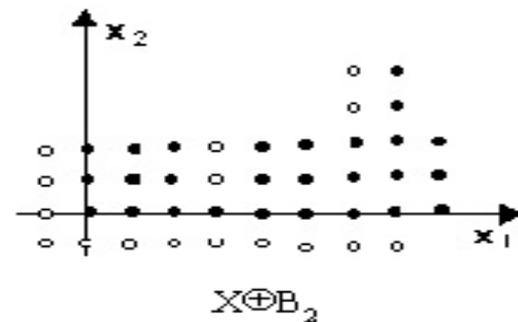
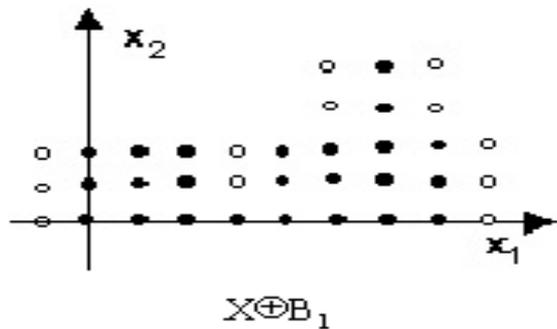
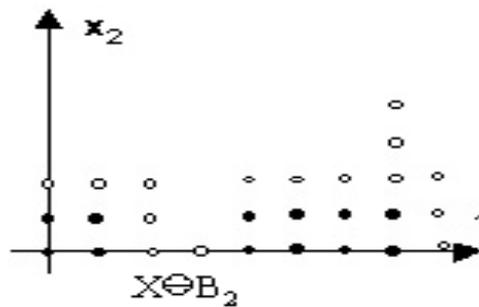
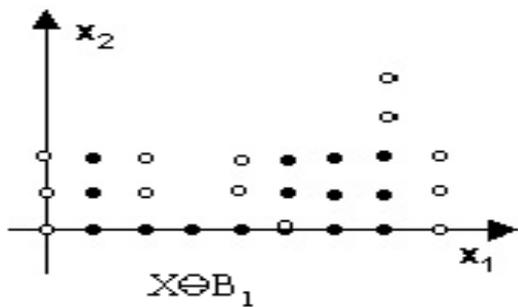
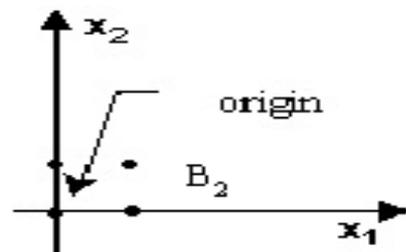
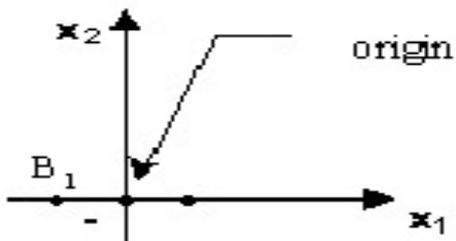
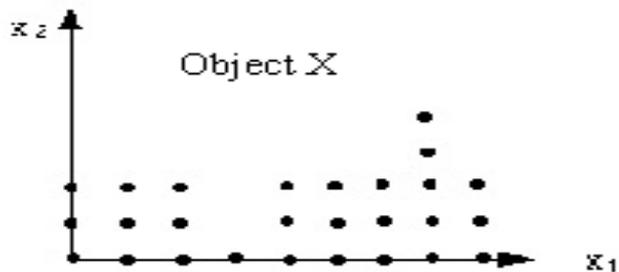
$$\text{则 } S \ominus E = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

# 2 基本处理定义

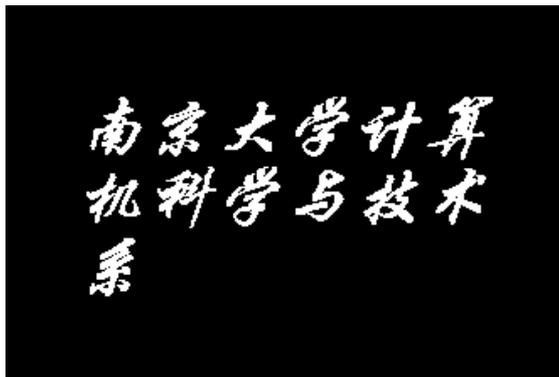


(腐蚀)

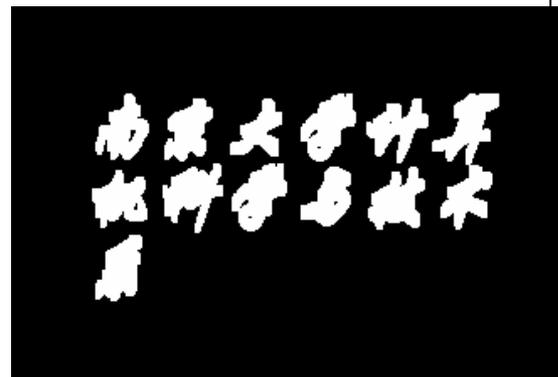
# 2 基



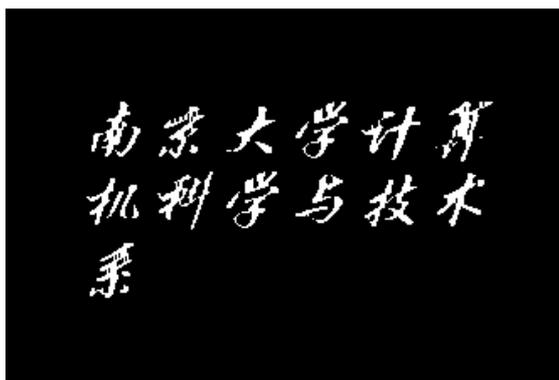
## 2 基本处理定义



文字图像

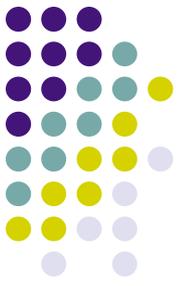


膨胀后的文字图像



腐蚀后的文字图像

## 2 基本处理定义



- 5) 腐蚀与扩张并不互为逆运算，但有下列性质：

$$A_a \oplus B = (A \oplus B)_a$$

$$\text{分配率: } A \oplus (B \cup B') = (A \oplus B) \cup (A \oplus B')$$

$$A \ominus (B \cup B') = (A \ominus B) \cap (A \ominus B')$$

$$(A \cap C) \ominus B = (A \ominus B) \cap (C \ominus B)$$

$$\text{迭代性: } (A \ominus B) \ominus B' = A \ominus (B \oplus B')$$

$$(A \oplus B) \oplus B' = A \oplus (B \oplus B')$$

单调增加性：

$$\text{若 } A \subset A', \text{ 则 } A \ominus B \subset A' \ominus B \quad \forall B$$

$$\text{若 } A \subset A', \text{ 则 } A \oplus B \subset A' \oplus B \quad \forall B$$

$$\text{若 } B \subset B', \text{ 则 } A \ominus B' \subset A \ominus B \quad \forall A$$

$$\text{对偶性: 若 } A^c \text{ 为 } A \text{ 的补集 } A^c \oplus B = (A \ominus B)^c$$

## 2 基本处理定义



- 分配率

$$A \ominus (B \cup B') = (A \ominus B) \cap (A \ominus B')$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ 1 & [ & ] & 1 & \Rightarrow & 1 & [ & ] & \cup & [ & ] & 1 \\ 1 & & 1 & & 1 & & & & & & 1 \end{array}$$

- 迭代性

$$(A \oplus B) \oplus B' = A \oplus (B \oplus B')$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & 1 \\ 1 & 1 & [1] & 1 & 1 & \Rightarrow & [1 & 1 & [1] & 1 & 1] & \oplus & [1] \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & 1 \end{array}$$

## 2 基本处理定义

- 6) 不同结构单元对腐蚀和扩张的影响



$E1=3*3$ 方形结构单元



原图



$E1$ 扩张后图像



$E1$ 腐蚀后图像

## 2 基本处理定义



$E2=5*5$ 方形结构单元



原图

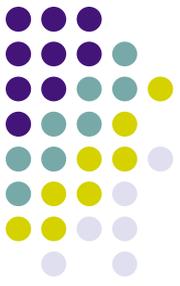


$E2$ 扩张后图像



$E2$ 腐蚀后图像

# 3 形态学变换



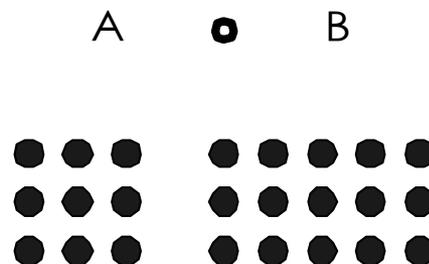
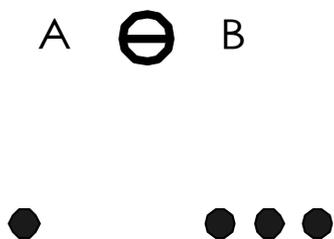
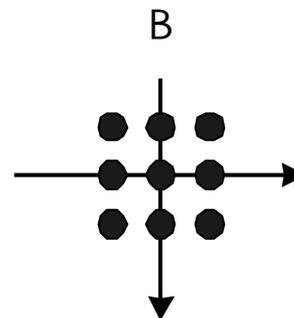
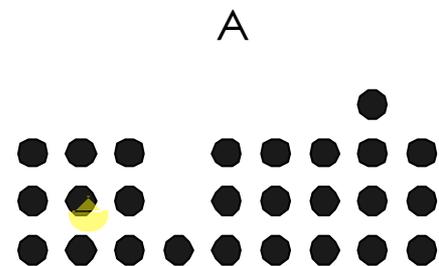
- 1) 结构开 (open) 变换

- 定义:  $A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$

- 意义: 先腐蚀然后再扩张;

- 目的: 使轮廓平滑, 抑制A物体边界的小离散点或尖峰, 在研究物体的形态分布时常用。用来消除小物体、在纤细点处分离物体、平滑较大物体的边界的同时并不明显改变其面积。

# 3 形态学变换



# 3 形态学变换



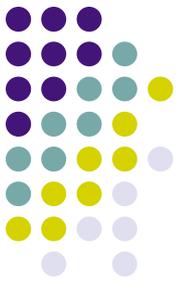
Lenna  
Sobel边界  
的二值图像

# 3 形态学变换



**Lenna Open**  
变换后的二  
值图像

# 3 形态学变换



- 2) 结构闭 (**close**) 变换

- 定义:  $A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$

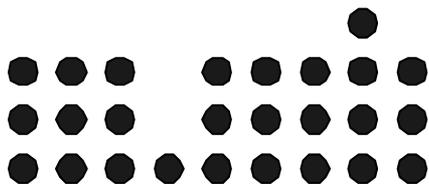
- 意义: 先扩张再腐蚀;

- 目的: 用来填充物体内细小空洞、连接邻近物体、平滑其边界的同时并不明显改变其面积。

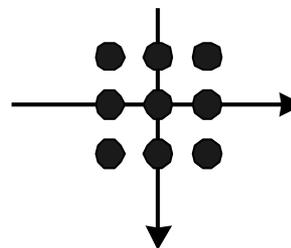
# 3 形态学变换



A



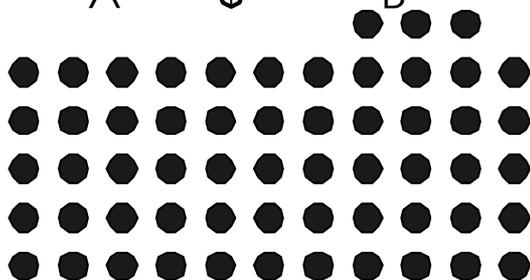
B



A

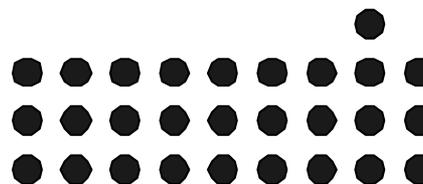
$\oplus$

B



A

B

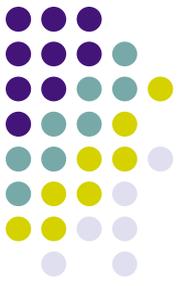


### 3 形态学变换



Lenna close  
变换后的二  
值图像

# 3 形态学变换



- 3) 交变序列滤波器 (ASF)
  - (1) 开运算对并噪声的滤波作用
    - 未被噪声污染的图像  $S$
    - 噪声图像  $N$
    - 被噪声污染的图像  $S \cup N$

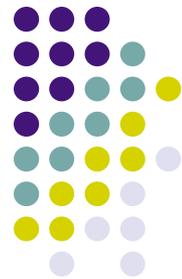
因为

$$S \circ B \subset (S \cup N) \circ B \subset S \cup N$$

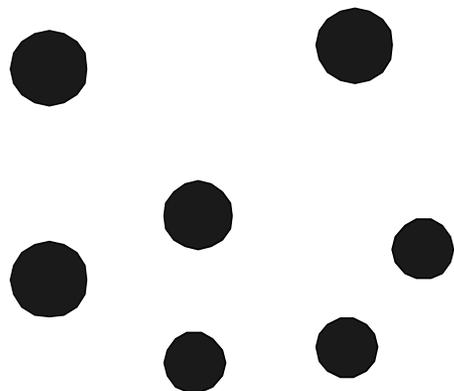
因此

滤波后的图象在非噪声污染图象和噪声污染图象之间

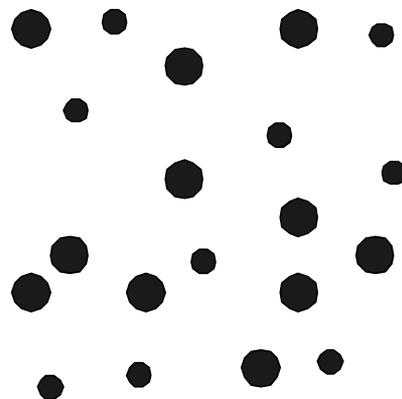
# 3 形态学变换



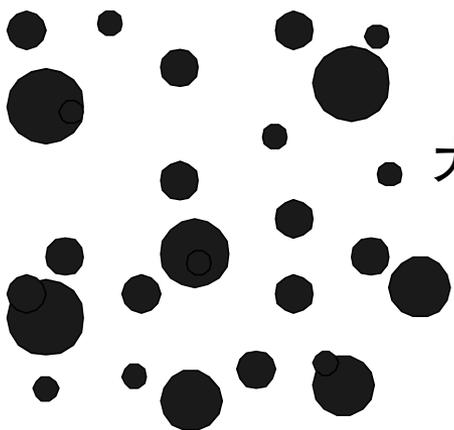
S



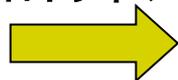
N



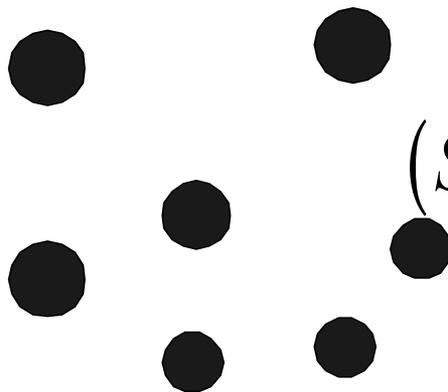
$S \cup N$



大结构单元B

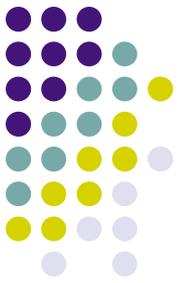


$(S \cup N) \circ B$

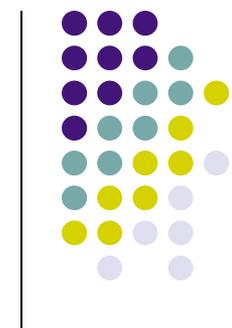


# 3 形态学变换

- (2) 闭运算对差噪声的滤波作用
  - 未被噪声污染的图像  $S$
  - 噪声图像  $N$
  - 被噪声污染的图像  $S \cap N$

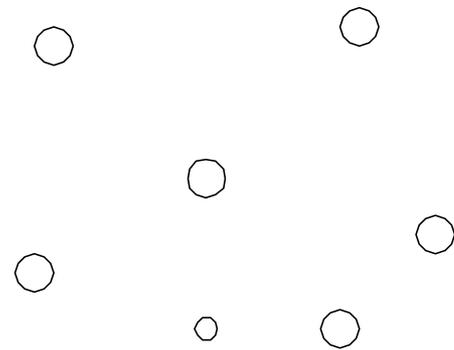
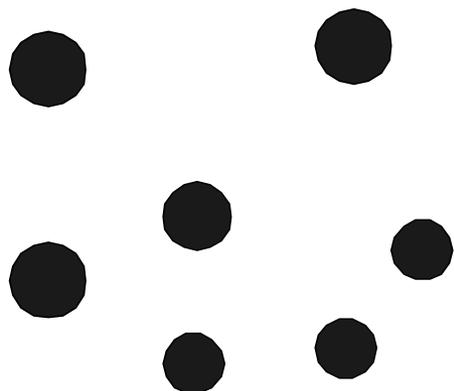


# 3 形态学变换

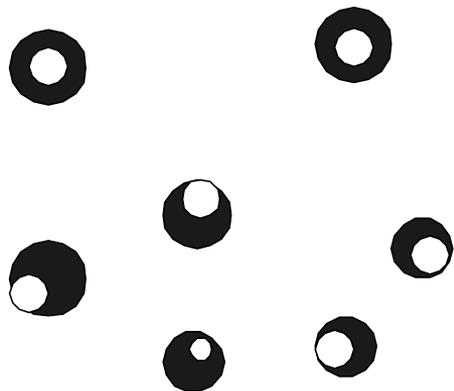


N

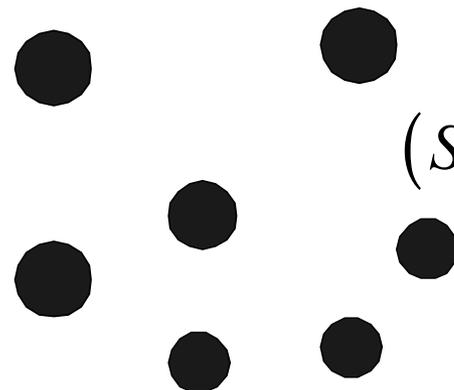
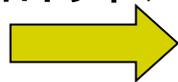
S



$S \cap N$

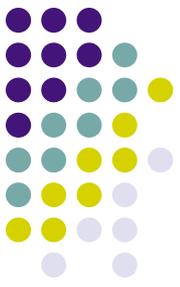


小结构单元B



$(S \cap N) \cdot B$

# 3 形态学变换



- (3) 交变序列滤波器
  - 在**ASF**方法中，开-闭滤波器（或闭-开）序列交替执行；
  - 初始时，采用较小的结构单元；然后逐步增加结构单元的尺寸；
  - 方法在某个尺寸的结构单元终止，否则将毁坏图像；
  - 结构单元尺寸的最优化算法是目前研究的热点。

# 3 形态学变换



- 4) 击中击不中 (HIT-MISS) 变换

- 击中击不中变换 (HMT) 需要两个结构单元  $w$  和  $b$ ，合成一个结构元素对  $B = (w, b)$ 。一个探测图像内部，另一个探测图像外部。

- 定义：

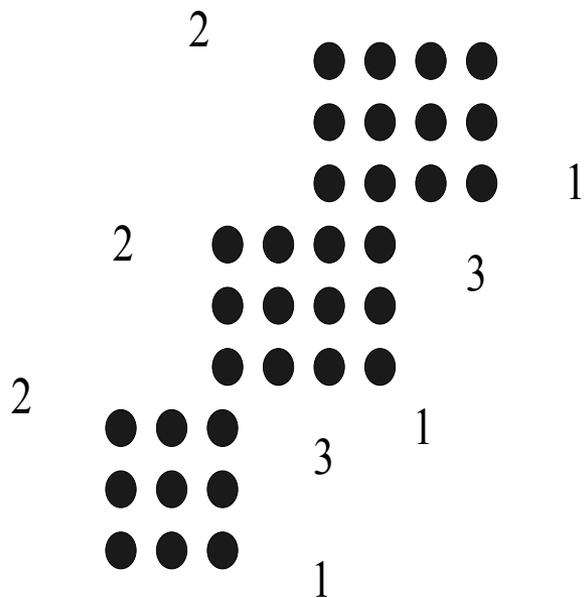
$$\begin{aligned} A \otimes B &= \{a, B_w(a) \subset A, B_b(a) \subset A^c\} \\ &= (A \ominus B_w) \cap (A^c \ominus B_b) \\ &= (A \ominus B_w) / (A \oplus B_b) \end{aligned}$$

- 其中  $B_w$  要求击中的部分， $B_b$  要求击不中的部分。
- 目的：用于精确检测图像  $A$  中结构元素  $B$  的位置，或从图  $A$  中检索  $B$  目标时使用。

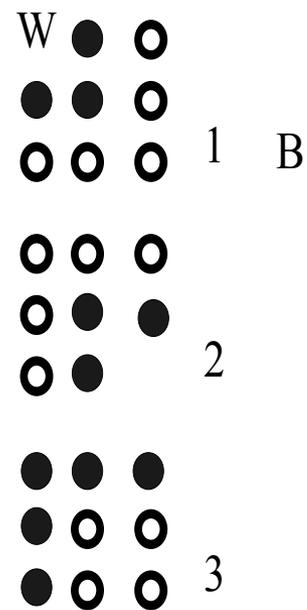
# 3 形态学变换



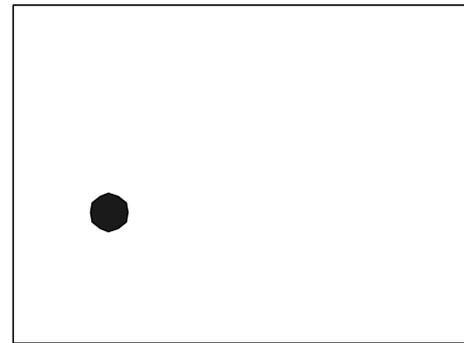
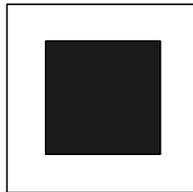
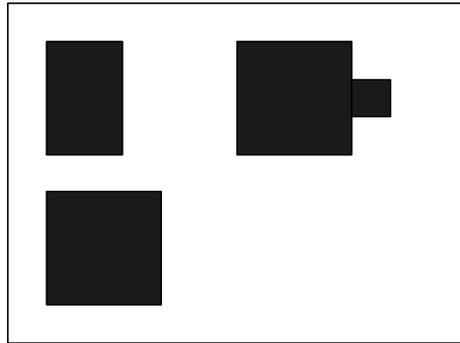
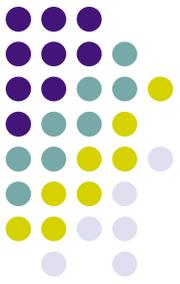
A



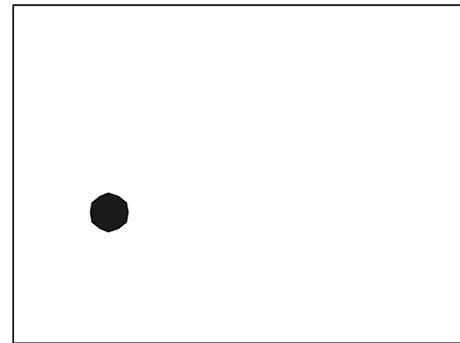
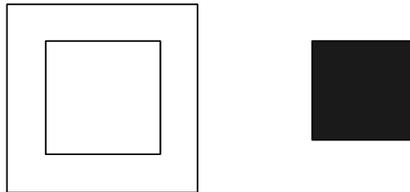
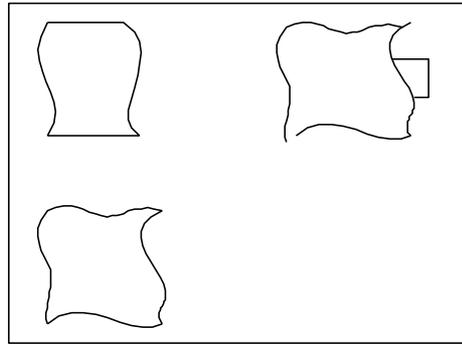
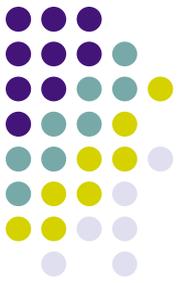
T



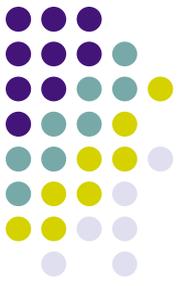
# 3 形态学变换



# 3 形态学变换



# 4 形态学变换的应用



- 1) 图像细化变换

- 定义:

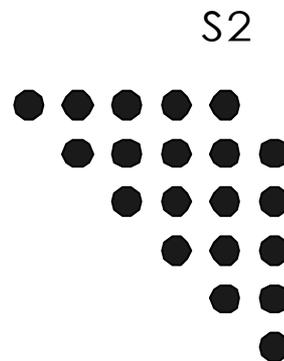
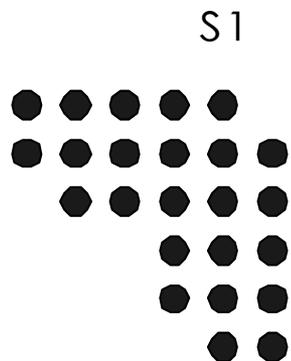
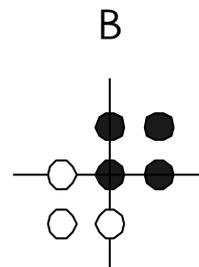
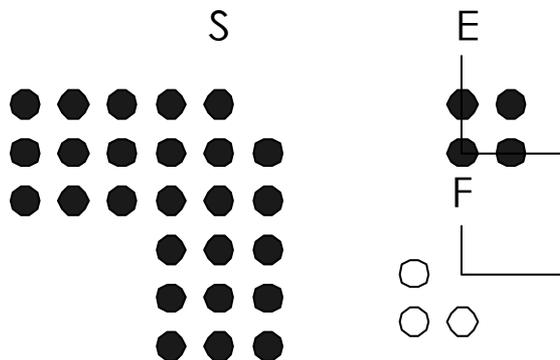
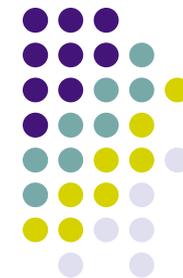
$$A \ominus B = A / (A \otimes B)$$

更一般地，利用结构对序列  $B^1$ 、 $B^2$ 、 $\dots$ 、 $B^K$

迭代地产生输出序列，直至输出结果不再变化

- 首先利用一个结构对的顺序细化

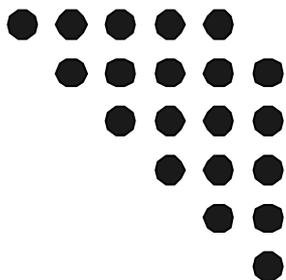
# 4 形态学变换的应用



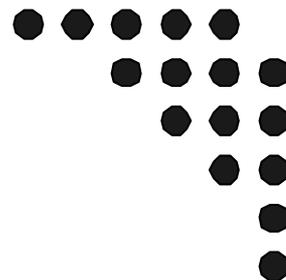
# 4 形态学变换的应用



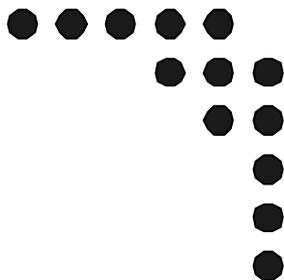
S2



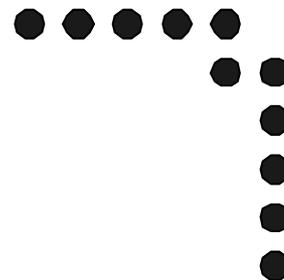
S3



S4

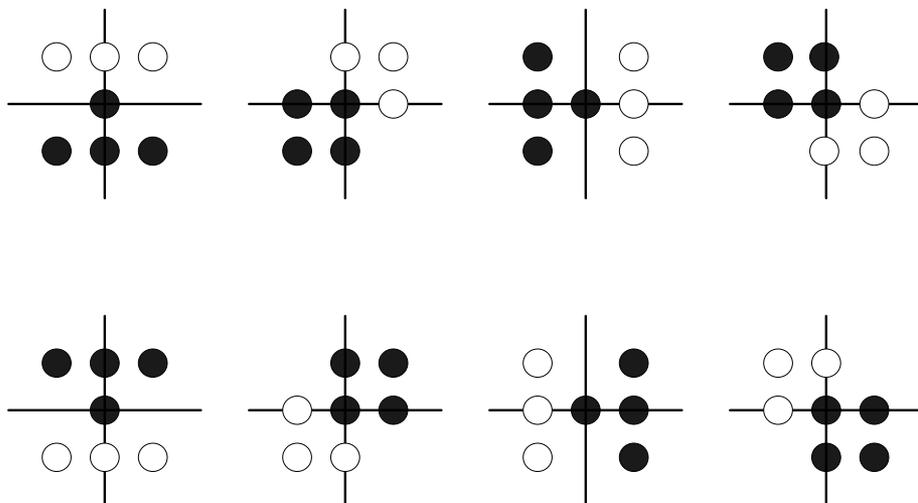


S5



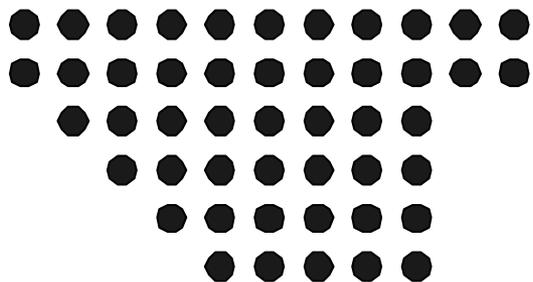
# 4 形态学变换的应用

- 通常使用八个方向结构对进行细化

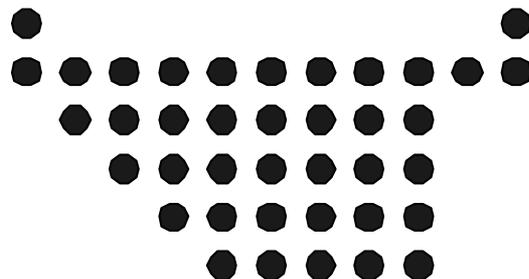


# 4 形态学变换的应用

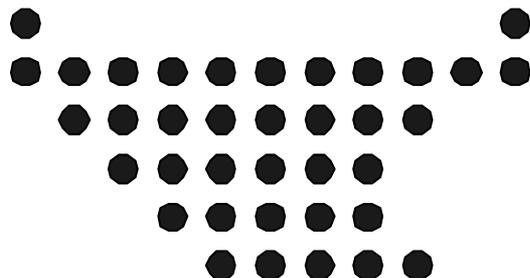
S



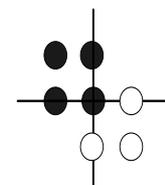
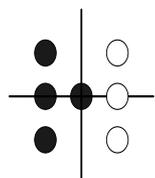
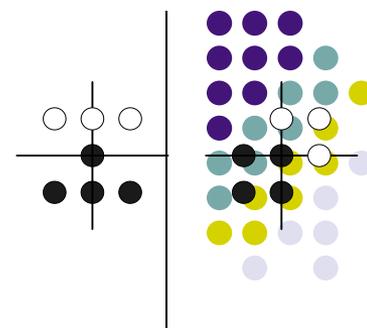
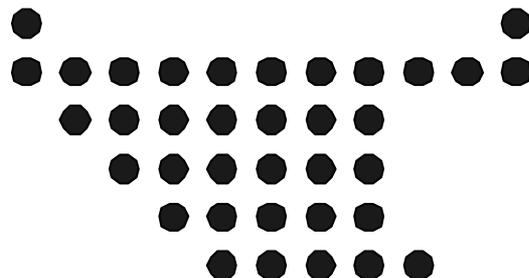
S1: 1, 2



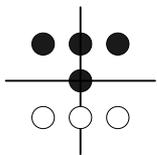
S1: 3



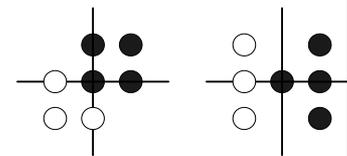
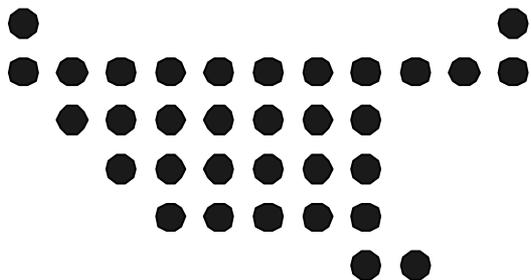
S1: 4



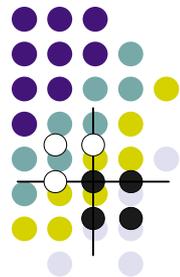
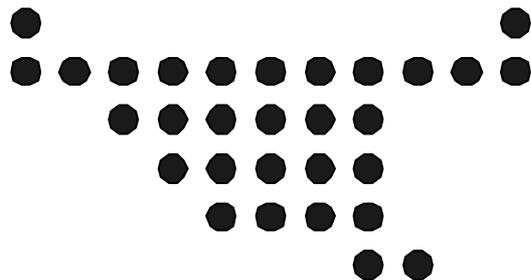
# 4 形态学变换的应用



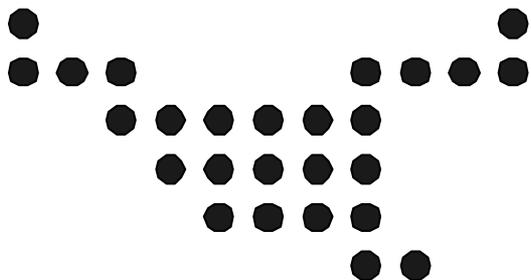
S1: 5



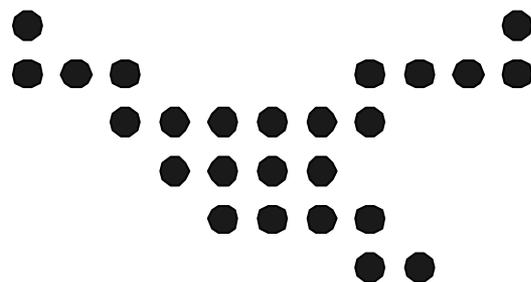
S1: 6, 7, 8



S2: 1, 2



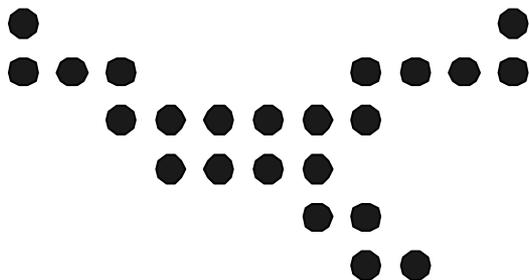
S2: 3, 4



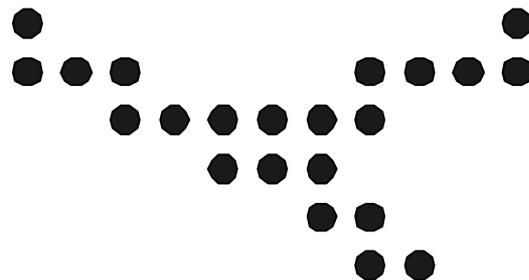
# 4 形态学变换的应用



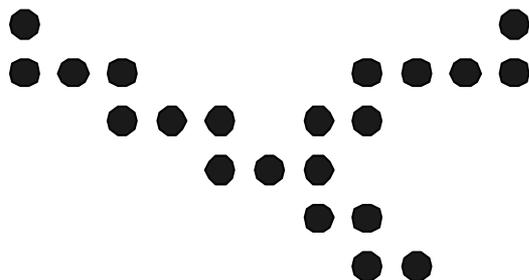
S2: 5



S2: 6, 7, 8



S3: 1

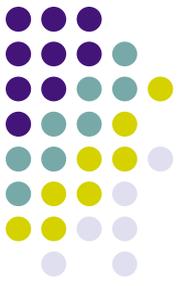


# 4 形态学变换的应用



细化Lenna  
的二值图像

# 4 形态学变换的应用



- 2) 粗化 (Thick)

- 定义:  $A \diamond B = A \cup (A \otimes B)$

- 3) 骨架 (Skeleton)

- 定义: 与细化的不同在于拐角处, 骨架延伸到边界。

- 4) 其他运算

- 收缩、剪枝等等。

# 4 形态学变换的应用



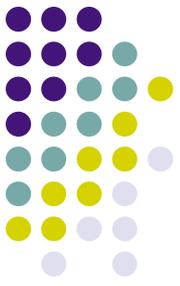
粗化Lenna  
的二值图像

# 4 形态学变换的应用



Lenna的骨架二值图像

# 4 形态学变换的应用



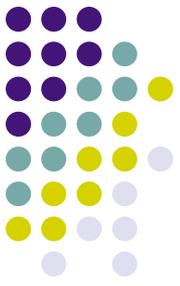
- 5) 形态学边界检测

- 原理：给定图像**A**和结构单元**B**（通常为圆形），则
  - $(A \oplus B) / A$  给出图像的外边界，
  - $A / (A \ominus B)$  给出图像的内边界，
  - $(A \oplus B) / (A \ominus B)$  给出跨越实际欧氏边界上的边界，又称为形态学梯度。

# 4 形态学变换的应用



# 5 灰度图像形态学

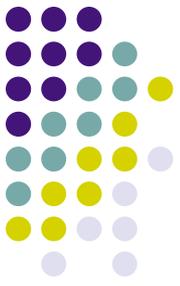


- 灰度图像膨胀和腐蚀
  - 以像素邻域的最大值和最小值来定义
  - 灰度膨胀

$$(f \oplus b)(x, y) = \max \{ f(x - x', y - y') + b(x', y') \mid (x', y') \in D_b \}$$

- 结构元素**b**
  - 定义域 $D_b$
  - 结构元素**b**的值
  - 平坦的结构单元

# 5 灰度图像形态学



- 灰度腐蚀

$$(f \ominus b)(x, y) = \min \{ f(x - x', y - y') - b(x', y') \mid (x', y') \in D_b \}$$

Original



Eroded



Dilated



[strel\('ball', 5, 5\)](#)

# 6 要点总结



- 形态学中扩张运算和腐蚀运算的定义；
- 形态学中开变换、闭变换、击中击不中变换的定义；
- 形态学变换的主要应用（细化、粗化、形态学边界）的定义及实现。