数字图像处理

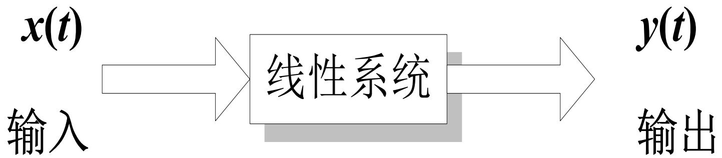
线性系统理论

CH9 线性系统理论

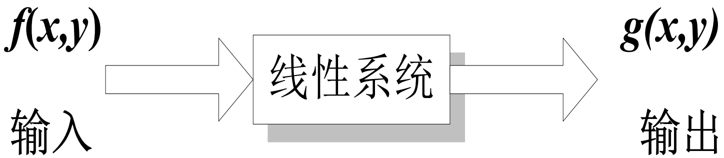
- 一、什么是线性系统
- 二、调谐信号分析
- 三、卷积
- 四、五个有用函数
- 五、卷积滤波及其应用
- 要点总结

1 什么是线性系统

- 1）定义



一维系统， 不失一般性，以时间t作为系统变量。



二维系统， 不失一般性，以空间坐标x,y作为系统变量。

1 什么是线性系统

- **2）性质**
  - **线性**

假设$x_1(t)\rightarrow y_1(t), x_2(t)\rightarrow y_2(t)$

若$x_1(t)+x_2(t)\rightarrow y_1(t)+y_2(t)$

则称此系统是线性系统

显然，对于线性系统若$x_1(t)\rightarrow y_1(t)$

则$ax_1(t)\rightarrow ay_1(t)$　其中a是有理数

显然，$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\rightarrow a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$

线性系统满足叠加性和齐次性。

1 什么是线性系统

- 移不变性

对于线性系统，如果存在

$x(t) \to y(t)$,且$x(t-T) \to y(t-T)$

则称此线性系统具有移不变性。

对于二维系统，若$f(x,y) \to g(x,y)$

则$f(x-x_0, y-y_0) \to g(x-x_0, y-y_0)$

2 调谐信号分析

- 0）复数的基本概念
  - 复数的一般表示形式

$$z = a + bi$$

- a, b都是实数
- 实数a表示复数z的实部, 也记为re(z)
- bi 表示复数z的虚部，也记为im(z)

2 调谐信号分析

- 0）复数的基本概念
  - 复数的基本运算

- 加法: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
- 减法: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
- 乘法: $(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i$(模值相乘，幅角相加)
- 除法: $\dfrac{(a+bi)}{(c+di)}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2-(di)^2}=\dfrac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i,$

2 调谐信号分析

- 0）复数的基本概念
  - 复平面（笛卡尔坐标系）

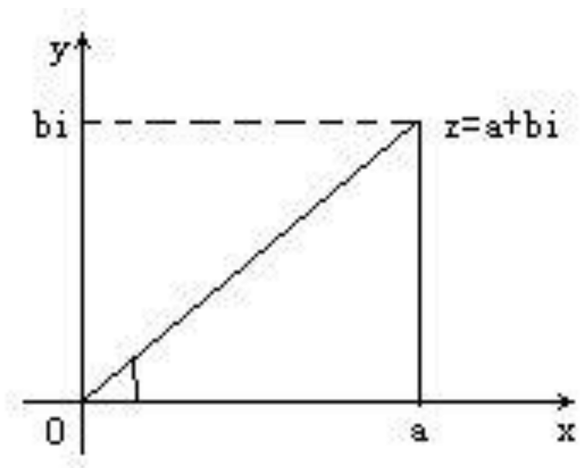


图 4-21

2 调谐信号分析

- 0）复数的基本概念
  - 极坐标表示

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{if } x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y \ge 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0 \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0. \end{cases}$$

2 调谐信号分析

- **0）复数的基本概念**
  - 复平面的极坐标表示

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right),$$

  - <u>欧拉公式**(1748年)**</u>:

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

2 调谐信号分析

- **0）复数的基本概念**
  - 欧拉公式证明

$e^{ix}=cosx+isinx$的证明：

因为$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ldots\cdots$

$$cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\ldots\ldots$$

$$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\ldots\ldots$$

在e^x的展开式中把x换成±ix.

$$(\pm i)^2=-1,(\pm i)^3=\mp i,(\pm i)^4=1\ldots\ldots$$

$$e^{\pm ix}=1\pm\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}\mp\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\ldots\cdots=(1-\frac{x^2}{2!}+\ldots\ldots)\pm i(x-\frac{x^3}{3!}\ldots\ldots)$$

所以$e^{\pm ix}=cosx\pm isinx$

$$e^{\pi i}+1=0$$

2 调谐信号分析

- 0）复数的基本概念
  - 复平面的极坐标表示

$$z = re^{i\varphi}$$

  - 极坐标下的复数乘法、除法、开方、幂次

$$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

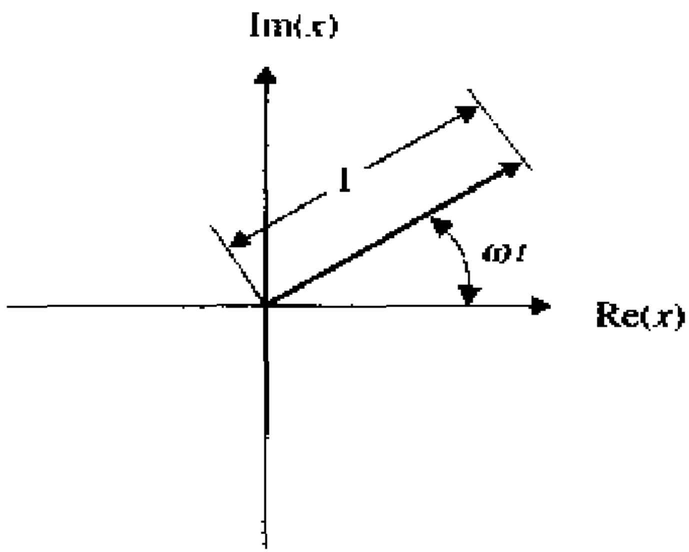
$$\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$$

2 调谐信号分析

- 1）调谐信号

$$x(t) = e^{j\varpi t} = \cos(\varpi t) + j\sin(\varpi t)$$

其中$j^2 = -1$，且$\varpi = 2\pi f$



调谐信号是复函数的一种简单形式

2 调谐信号分析

- 2）线性移不变系统对调谐输入的响应：输入输出均为调谐信号

$$x_1(t)=e^{j\varpi t}, y_1(t)=K(\varpi,t)x_1(t)=K(\varpi,t)e^{j\varpi t}$$

$$x_2(t)=x_1(t-T)=e^{j\varpi(t-T)}=e^{j\varpi t}e^{-j\varpi T}$$

$$y_2(t)=K(\varpi,t)x_2(t)=K(\varpi,t)x_1(t-T)$$

- 根据移不变性

$$y_2(t)=y_1(t-T)=K(\varpi,t-T)x_1(t-T)$$

$$\Rightarrow \quad K(\varpi,t)=K(\varpi,t-T)$$

2 调谐信号分析

- 2）线性移不变系统对调谐输入的响应：输入输出均为调谐信号
  - 根据移不变性

$$y_2(t)=y_1(t-T)=K(\varpi,t-T)x_1(t-T)$$

$$\Rightarrow \quad K(\varpi,t)=K(\varpi,t-T) \qquad \text{对任意T成立}$$

$$K(\varpi,t)=K(\varpi)$$

  - 从而线性移不变系统对于调谐信号的响应相当于输入信号乘于一个只依赖频率的函数

2 调谐信号分析

- 3）调谐信号与正弦波信号
  - 具体物理系统中，输出信号常为正弦或余弦波；
  - 正弦波信号如何通过线性系统来响应：
    - 将输入的正弦型信号表示成调谐信号；
    - 计算线性系统对此调谐输入的响应；
    - 取调谐输出的实部为真正的输出。

2 调谐信号分析

- 4）传递函数K(w)
  - 将K(w)表示成极坐标形式

$$\mathbf{K}\left(\boldsymbol{\varpi}\right)=\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\varpi}\right)\mathbf{e}^{\mathbf{j}\phi\left(\boldsymbol{\varpi}\right)}$$

  - 假设输入为余弦波，令其为调谐信号的实部

$$\mathrm{x}\left(\mathrm{t}\right)=\mathbf{cos}\left(\boldsymbol{\varpi}\mathbf{t}\right)=\mathbf{Re}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{j}\boldsymbol{\varpi}\mathbf{t}}\right)$$

2 调谐信号分析

- 4）传递函数K(w)
  - 调谐输入的响应（输出）为

$$K(\varpi)e^{j\varpi t} = A(\varpi)e^{j\phi(\varpi)}e^{j\varpi t}$$

  - 余弦函数的输出为

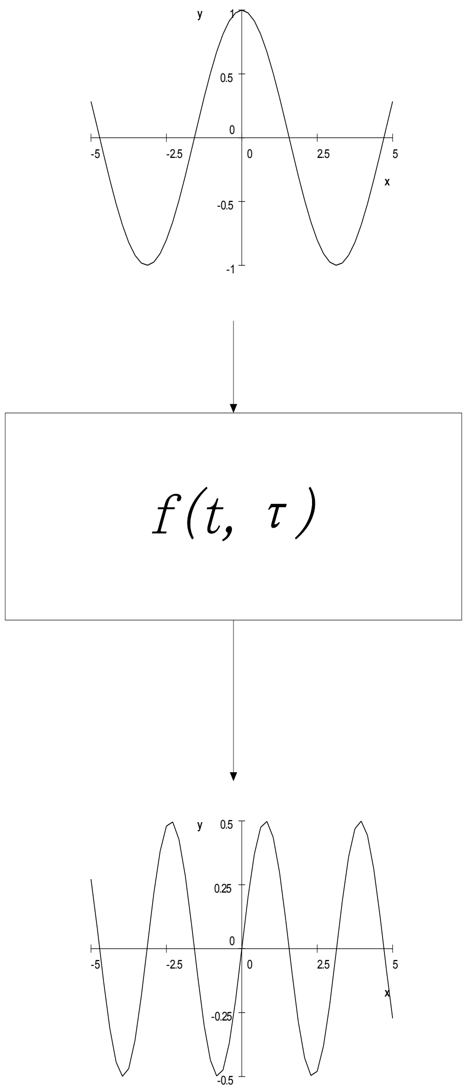
$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{Re}\left(A(\varpi)e^{j\phi(\varpi)}e^{j\varpi t}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(A(\varpi)\left(\cos(\varpi t+\varphi)+j\sin(\varpi t+\varphi)\right)\right) \\ &= A(\varpi)\cos(\varpi t+\varphi) \end{aligned}$$

    - 其中**A(w)**为乘积增益函数，**φ**为相移角

2 调谐信号分析

- 5）线性移不变系统对调谐信号响应的几个重要性质
  - 1）调谐输入总是产生同频率的调谐响应输出；
  - 2）系统的传递函数是仅依赖于频率的复值函数，包含系统全部信息；
  - 3）传递函数对调谐信号输入只产生两种影响，即幅度的变化和相位的平移。

3 卷积



3 卷积

线性系统$x(t)$、$y(t)$的另一种一般表示

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

根据移不变性质，简化$f(t,\tau)$

$$y(t-T)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\tau)x(\tau-T)d\tau$$

对$t-T$和$\tau-T$进行变量变换，则

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t+T,\tau+T)x(\tau)d\tau$$

所以$f(t+T,\tau+T)\equiv f(t,\tau)$

所以两个变量的f 函数可表达成

$$g(t-\tau)=f(t,\tau)$$

冲激响应

3 卷积

因此线性系统总可以表示成卷积形式

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

- 1）线性移不变系统的两种表示形式
  - 复数形式的传递函数；
  - 实数形式的卷积冲激响应；
  - 两者是统一的。

3 卷积

- 2）卷积的几个性质
  - 交换性

$$f * g = g * f$$

  - 加法的分配率

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

  - 结合率

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

  - 求导的性质

$$\frac{d}{dt}(f * g) = f' * g = f * g'$$

3 卷积

- 3）离散一维卷积

对于两个长度为m和n的序列$f(i)$和$g(j)$，

$$h(i)=f(i)*g(i)=\sum_j f(j)g(i-j)$$

给出长度为$N=m+n-1$的输出序列。

其矩阵计算形式为

$$\mathbf{h}=\mathbf{g}\bullet\mathbf{f}=\begin{bmatrix} \mathbf{g_p}(1) & \mathbf{g_p}(N) & \cdots & \mathbf{g_p}(2) \\ \mathbf{g_p}(2) & \mathbf{g_p}(1) & \cdots & \mathbf{g_p}(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{g_p}(N) & \mathbf{g_p}(N-1) & \cdots & \mathbf{g_p}(1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{f_p}(1) \\ \mathbf{f_p}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{f_p}(N) \end{bmatrix}$$

3 卷积

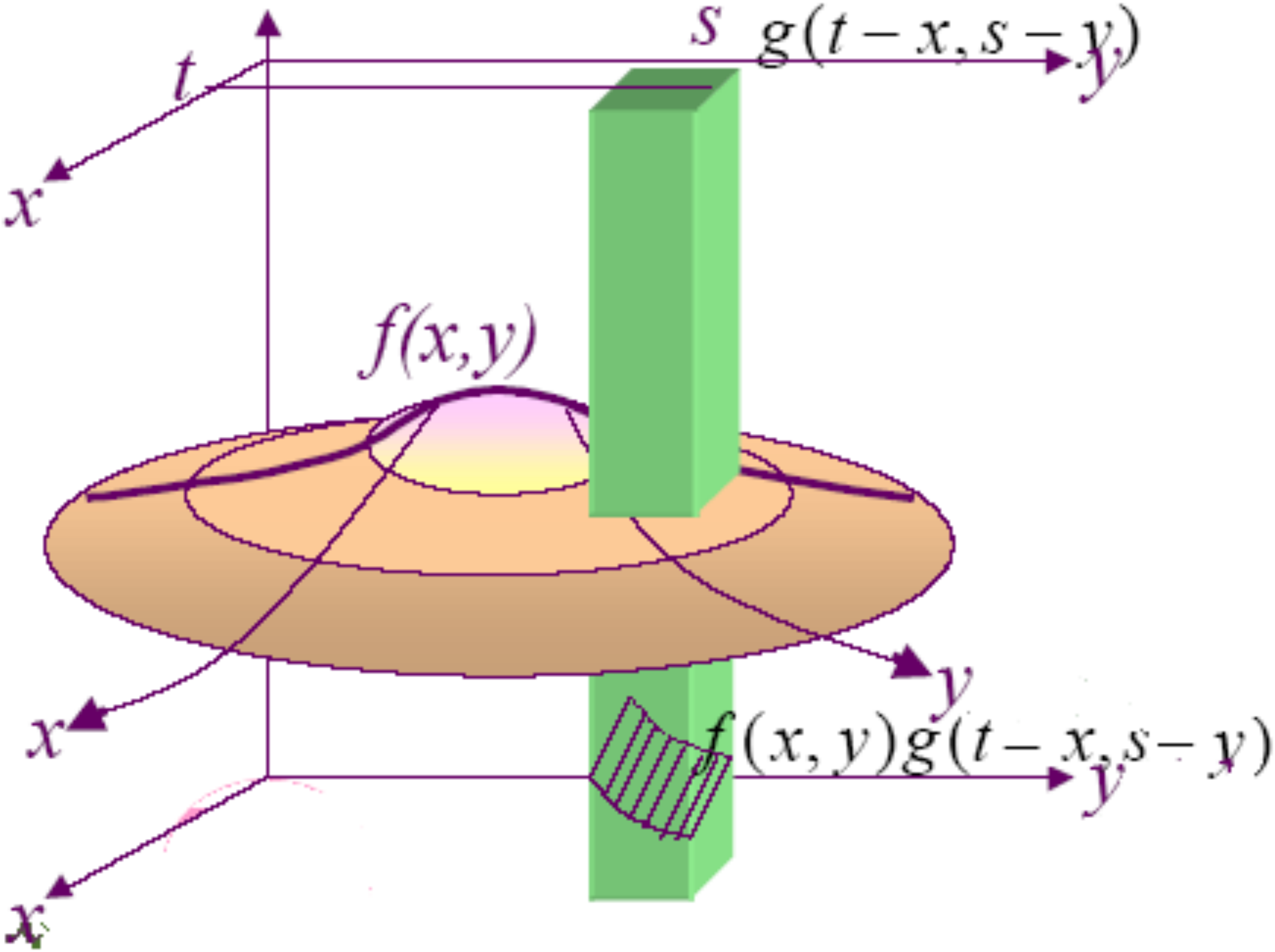
- 4）二维卷积和离散二维卷积
  - 二维卷积定义

$$h(x,y) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,g(x-u,y-v)\,du\,dv$$

  - 离散二维卷积定义

$$H = F * G$$

$$H(i,j) = \sum_{m}\sum_{n} F(m,n)\,G(i-m,j-n)$$



s
$g(t-x, s-y)$
t
x
y
$f(x,y)$
x
y
$f(x,y)g(t-x,s-y)$
y
x

3 卷积

- **二维卷积的矩阵计算形式**

$step1$: 设F大小为$m_1 \times n_1$, G大小为$m_2 \times n_2$,

扩展F和G矩阵为F_p和G_p, 大小为$M \times N$, 其中

$M = m_1 + m_2 - 1$;

$N = n_1 + n_2 - 1$;以下假定M=N。

$step2$: 从矩阵F_p构造一个$N^2 \times 1$维列向量f_p,

将F_p的第一行转置，使成为f_p最上面的N个元素，

然后其他行转置依次在下面。

$step3$: 矩阵G_p每一行生成一个$N \times N$循环矩阵，总共

产生一个N个这样的矩阵$G_i \left(1 \le i \le N\right)$。

3 卷积

$step4$：按如下方式生成一个$N^2 \times N^2$的块循环矩阵G_b：

$$G_b = \begin{bmatrix} G_1 & G_N & \cdots & G_2 \\ G_2 & G_1 & \cdots & G_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_N & G_{N-1} & \cdots & G_1 \end{bmatrix}$$

$step5$：二维卷积的矩阵形式，再行列转换回矩阵形式

$$h_p = G_b \bullet f_p$$

3 卷积

- 例：二维卷积的矩阵计算形式。

$$已知F = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, G = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, 求F * G;$$

$$Step1: F_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, G_p = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3 卷积

$$Step2: f_p = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

3 卷积

$$Step3: G_p = \begin{vmatrix} G_1 & G_3 & G_2 \\ G_2 & G_1 & G_3 \\ G_3 & G_2 & G_1 \end{vmatrix} \text{其中} G_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$G_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}, G_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$Step4: F * G = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -5 & -3 & 8 \\ -6 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

3 卷积

- 例：请花5分钟时间计算。

$$\text{已知}F=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix},G=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix},\text{求}F*G\text{。}$$

$$F*G=\begin{bmatrix}0 & 3 & 1 & 0\\ 3 & -7 & 0 & 1\\ 4 & -12 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

3 卷积

- 5）图像边缘处卷积处理方法
  - 1）重复图像边缘的行和列，使卷积在边缘可计算；
  - 2）卷绕输入图像，使之成为周期性；
  - 3）在图像边缘外侧填充0或其他常数；
  - 4）去掉不能计算的行和列，仅对可计算的象素进行卷积。

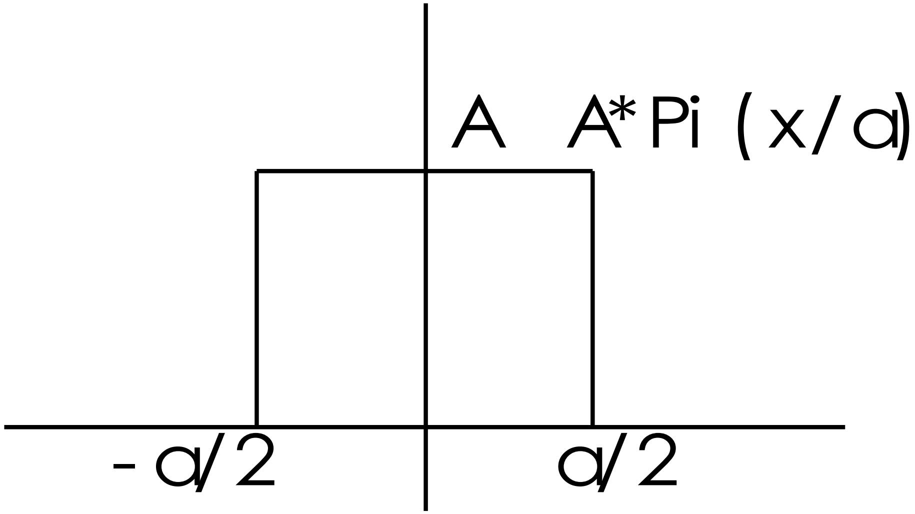
在实际图像应用中，边缘处四种卷积处理方法并不重要。

4 五个有用函数

- 1）矩形脉冲（Pi Function）

$$\Pi(x)=\begin{cases}1, -1/2 < x < 1/2 \\ 1/2, x = \pm 1/2 \\ 0, \text{others}\end{cases}$$

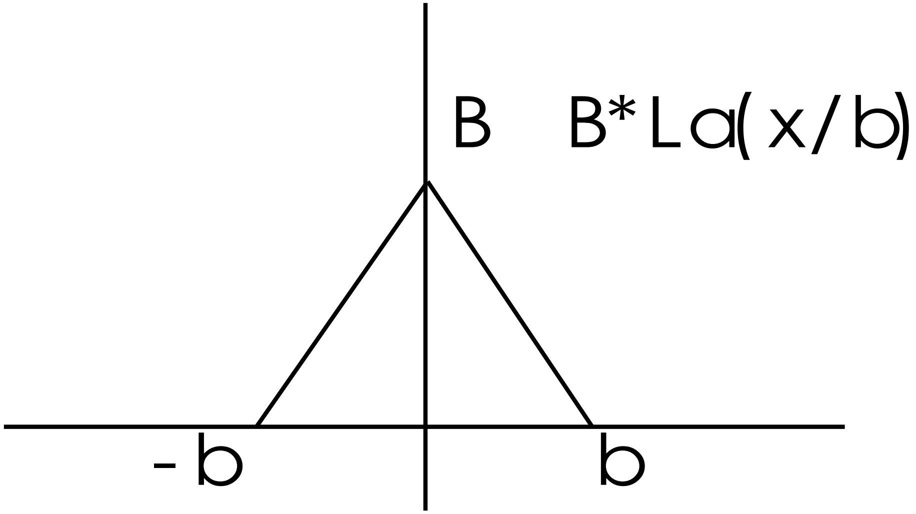
对应二维，即方形卷积模板



4 五个有用函数

- 2）三角脉冲（**Lamda Function**）

$$\Lambda(x)=\begin{cases}1-|x|,|x|\le 1\\ 0,|x|>1\end{cases}$$



- <u>两个相同矩形脉冲的卷积得到一个三角脉冲。</u>

4 五个有用函数

- 3）高斯函数（Gaussian Function）
  - 两个高斯函数的卷积产生另一个高斯函数。 $G(x)=e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$$e^{-x^2} * e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{-(x-y)^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2-2xy-2y^2\right)} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\left(y-x/2\right)^2} e^{-x^2/2} dy = \sqrt{2\pi\left(\frac{1}{4}\right)} e^{-x^2/2}$$

$$A_1 e^{-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2} * A_2 e^{-(x-\mu_2)^2/2\sigma_2^2} = A_1 A_2 \sqrt{2\pi\sigma_1^2\sigma_2^2} e^{-(x-\mu_3)^2/2\sigma_3^2}$$

其中$\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$

$\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$

4 五个有用函数

- **4）冲激函数（Delta Function）**

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)dx=1,\ x\neq 0\text{时},\ \delta(x)=0$$

$$\delta(x)=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\Pi\left(\frac{x}{a}\right)$$

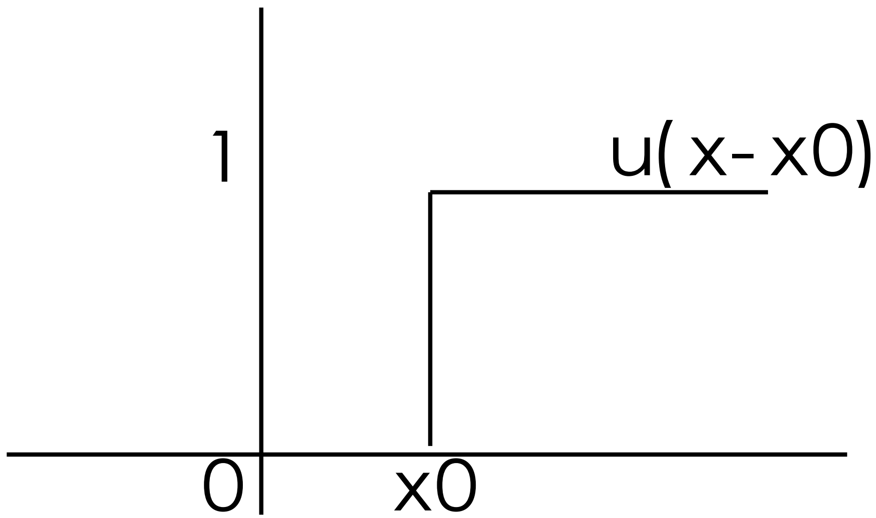
$$\int_{-\infty}^{\infty}A\delta(x)dx=A$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0)$$

4 五个有用函数

- **5）阶跃函数**

$$u(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 1/2, x=0\\ 0, x<0\end{cases}$$



4 五个有用函数

- 5）阶跃函数
  - 阶跃函数是单位冲激函数的积分
  - 单位冲激函数是阶跃函数的导数

5 卷积滤波及其应用

- 1）平滑
  - 可采用矩形脉冲、三角脉冲或高斯脉冲为平滑函数。
  - 等价于邻域处理中的平滑去噪。
- 2）边缘增强
  - 带负的旁瓣（side lobes）的正尖峰函数，其边缘增强时产生两个效果。
    - * 增加边缘的梯度；
    - * 在边缘的两侧加边。类似与拉普拉斯算子产生的效果。
- 3）去卷积
  - 利用一个卷积去除另一卷积影响的技术。

要点总结

- 线性和移不变系统的定义；
- 调谐信号及其线性系统分析、传递函数；
- 线性移不变系统与卷积的关系；
- 离散二维卷积的矩阵计算；
- 典型冲激响应函数及其应用。

思考题

- 线性移不变系统的传递函数为何不依赖于时间变量t
- 计算 g=[1 2 4 3 2] 与 f=[2 4] 的卷积;
- 矩形冲击函数与自身卷积的结果是什么?