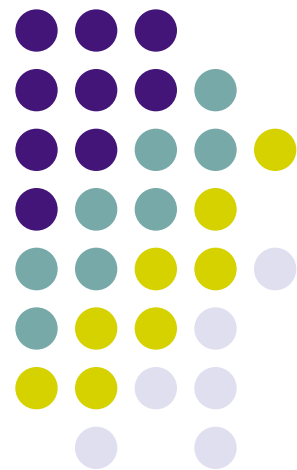


数字图像处理

第十二章 离散图像变换



CH12 离散图像变换

- 一、基本概念
- 二、余弦型变换
- 三、正弦型变换和哈特利变换
- 四、方波型变换
- 要点总结
- 上机实习





1 基本概念

- 1) 一维离散线性变换、酉变换、正交变换

定义：线性变换

如果 x 是一个 $N \times 1$ 的向量， T 是 $N \times N$ 的矩阵， $y = Tx$ ，则定义了向量 x 的一个线性变换。其中矩阵 T 称为此变换的核矩阵。

例如：平面坐标系中的向量旋转变换

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$



1 基本概念

逆变换：当 T 为非奇异阵时，存在逆变换。

$$x = T^{-1}y$$

显然 $TT^{-1} = I$ 。

酉变换：当 T 的逆变换等于其复数共轭的转置时，称该线性变换为酉变换。

$$T^{-1} = T^{*'}, \text{ 或 } TT^{*'} = I。$$

正交变换：若 T 为实数变换，则称该酉变换为正交变换。

$$T^{-1} = T', \text{ 或 } TT' = I。$$

正交基：正交变换 T 的每一行称为该正交变换的正交基。



1 基本概念

- 证明：一维离散傅立叶变换是酉变换。

举例 $N = 4$:

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \quad T_4^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

$$T_4 T_4^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

因此通常为了归一化，傅立叶变换时乘以系数 $\frac{1}{\sqrt{N}}$



1 基本概念

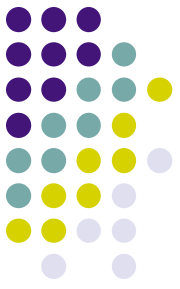
- 2) 二维离散线性变换、酉变换、正交变换

定义：二维离散线性变换

将 $N \times N$ 矩阵 F 变换为另一个 $N \times N$ 矩阵 G 的一般形式为

$$G(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \mathfrak{S}(x, y, u, v) F(x, y) \quad 0 \leq u, v \leq N-1$$

\mathfrak{S} 为变换的核函数，是 $N^2 \times N^2$ 的块矩阵，每行由 N 个块，共有 N 行，每块是 $N \times N$ 的矩阵。块由 u, v 索引，块中元素由 x, y 索引。

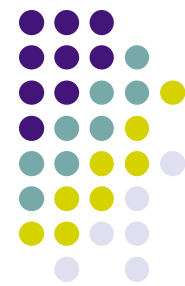


1 基本概念

$$v=1 \quad v=2 \quad v=3 \quad v=4 \quad F(x, y)$$

$$\begin{matrix} u=1 \\ u=2 \\ u=3 \\ u=4 \end{matrix} \begin{bmatrix} [] & [] & [] & [] \\ [] & [] & [] & [] \\ [] & [] & [] & [] \\ [] & [] & [] & [] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$T_r(x, u) = \begin{bmatrix} () & () & () & () \end{bmatrix} \quad T_c(y, v) = \begin{bmatrix} () \\ () \\ () \\ () \end{bmatrix}$$



1 基本概念

可分离核函数：

若核函数能分解为行方向上分量函数和列方向上分量函数的乘积，称为此核函数是可分离的。

$$\mathfrak{J}(x, y, u, v) = T_r(x, u)T_c(y, v)$$

$$G(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \left[\sum_{y=0}^{N-1} T_c(y, v) f(x, y) \right] T_r(x, u)$$

对称的：若可分离核函数行分量与列分量相同，称为对称的。

$$G = \sum_{x=0}^{N-1} \left[\sum_{y=0}^{N-1} T(y, v) f(x, y) \right] T(x, u) = TFT'$$

其中 T 为酉矩阵，称为变换的核矩阵。其反变换为书上有错！

$$F = T^{-1}GT^{-1} = T'^*GT'^*$$



1 基本概念

● 3) 基函数和基图像

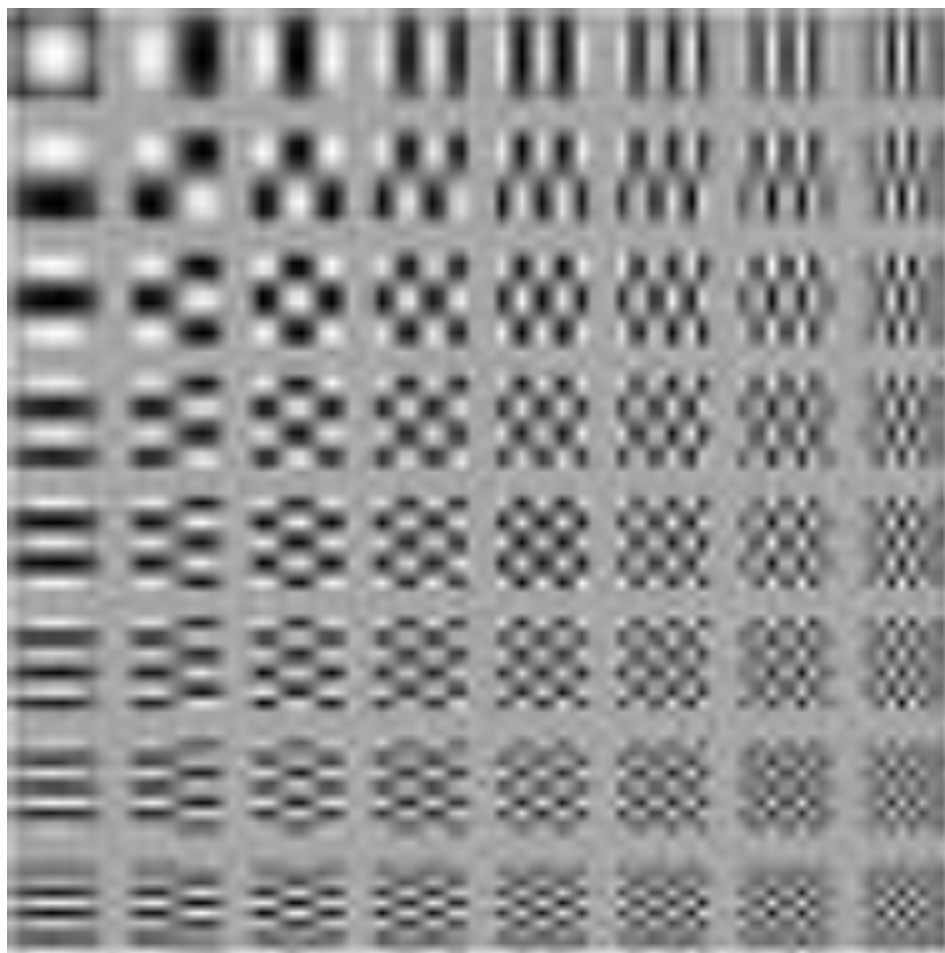
酉变换的核矩阵的行向量构成 N 维向量空间的一组基，它们彼此正交的。即

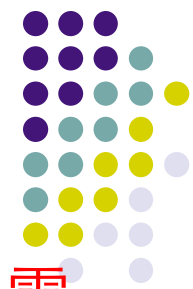
$$TT^* = I$$

通常基向量取同一种形式的基函数。

对于二维图象的反变换，相当于把反变换核矩阵作为 N^2 个图象与变换值求加权后，重构图象。因此又把二维的称为基图象。

1 基本概念





2 余弦型变换 (DCT)

- 思想：当 $f(x)$ 或 $f(x,y)$ 为偶函数时，傅立叶变换只需要进行实变换。如果 $f(x)$ 为一个任意函数.....?
- 1) 一维余弦变换

设一维离散序列 $f(x)$, $x = 0, 1, 2, \dots, N-1$, 以 $-1/2$ 为中心反折, 形成 $-N$ 至 -1 的序列, 与原序列合并形成 $2N$ 的偶序列。此时傅立叶变

换的核函数为 $e^{-j2\pi ux/N}$ 改变为 $e^{-j2\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)u/2N}$

按傅立叶变换性质, 虚部为0不进行运算, 核函数等价于

$$\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\right]$$

2 余弦型变换 (DCT)



因此余弦正变换：
$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \left[\frac{\pi}{2N} (2x+1)u \right]$$

为保证每行正交向量模=1，对上式进行归一化处理，

$$F(u) = a(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \left[\frac{\pi}{2N} (2x+1)u \right]$$

$$a(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \text{当 } u = 0 \text{ 时} \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{当 } u \neq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

余弦变换采用矩阵表示为 $F_c = Cf$

其中核矩阵 C 中元素为
$$C_{x,u} = a(u) \cos \left[\frac{\pi}{2N} (2x+1)u \right]$$

2 余弦型变换 (DCT)



- 例：当 $N=4$ 时余弦变换核矩阵 C 为

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{N}} & \sqrt{\frac{1}{N}} & \sqrt{\frac{1}{N}} & \sqrt{\frac{1}{N}} \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{3\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{5\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{7\pi}{2N} \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{2\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{6\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{10\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{14\pi}{2N} \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{3\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{9\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{15\pi}{2N} & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{21\pi}{2N} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.653 & 0.271 & -0.271 & -0.653 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.271 & -0.653 & 0.653 & -0.271 \end{bmatrix}$$

2 余弦型变换 (DCT)



- 例：计算 $f=[1 \ 3 \ 3 \ 1]$ 的余弦变换。

$$F = Cf = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.653 & 0.271 & -0.271 & -0.653 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.271 & -0.653 & 0.653 & -0.271 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 余弦型变换 (DCT)



- 因为余弦变换是傅立叶变换的特例，傅立叶反变换的核矩阵即是W阵的共轭矩阵，对于余弦变换共轭矩阵即等于本身，因此

$$f = C^T F_C$$

2 余弦型变换 (DCT)



• 2) 二维余弦变换

- 思想：如何形成二维偶函数？先水平做对折镜象，然后再垂直做对折镜象。
- 偶对称偶函数：

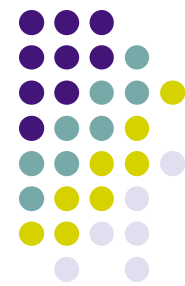
$$f(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{当 } x, y \geq 0 \text{ 时} \\ f(-1-x, y) & \text{当 } x < 0, y \geq 0 \\ f(x, -1-y) & \text{当 } x \geq 0, y < 0 \\ f(-1-x, -1-y) & \text{当 } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

$$F_C(u, v) = a(u)a(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos \left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N} \right] \cos \left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N} \right]$$

书本有错！

用矩阵表示为 $F_C = CfC^T$

2 余弦型变换 (DCT)



● 3) 余弦变换的性质

- (1) 余弦变换为实正交变换 $C = C^*$, $C^{-1} = C^T$
- (2) 离散序列的余弦变换是DFT的对称扩展形式;
- (3) 和傅立叶变换相同, 余弦变换也存在快速变换;
- (4) 和傅立叶变换类似, 余弦变换具有将高度相关数据能量集中的优势;

2 余弦型变换 (DCT)



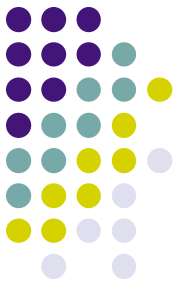
- 求下列图像的余弦变换。

$$(1) f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{解: } F_1 = Cf_1C^T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

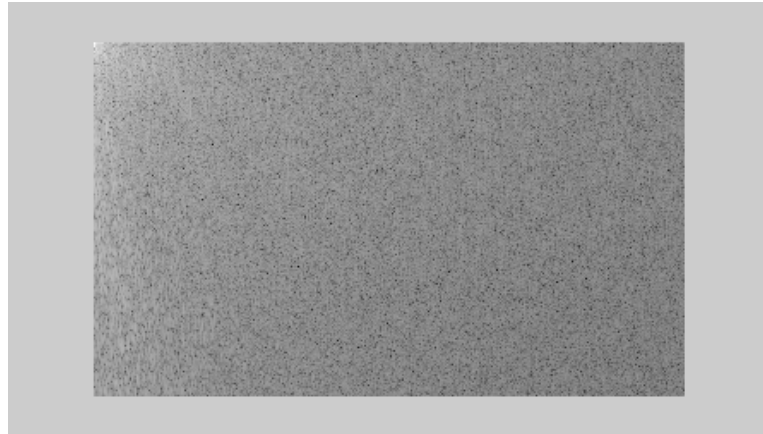
2 余弦型变换 (DCT)



原图



余弦变换



2 余弦型变换 (DCT)



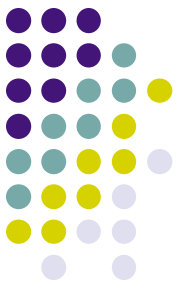
将大部分信息滤掉



重构图像



3 正弦型变换和哈特利变换



- 1) 一维正弦变换 (DST)

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \sin \frac{\pi(x+1)(u+1)}{N+1} \quad 0 \leq u \leq N-1$$

一维正弦反变换为:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \sin \frac{\pi(x+1)(u+1)}{N+1} \quad 0 \leq x \leq N-1$$

添加一个等于0的点，形成n+1，水平右移1个单位。
然后再做奇对称，形成2n+2个点。

3 正弦型变换和哈特利变换



- 2) 二维正弦变换

$$F(u, v) = \frac{2}{N+1} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \sin \frac{\pi(x+1)(u+1)}{N+1} \sin \frac{\pi(y+1)(v+1)}{N+1}$$

二维正弦反变换为:

$$f(x, y) = \frac{2}{N+1} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \sin \frac{\pi(x+1)(u+1)}{N+1} \sin \frac{\pi(y+1)(v+1)}{N+1}$$

3 正弦型变换和哈特利变换

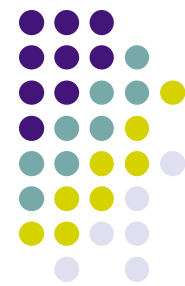


- 3) 正弦变换性质

(1) 正弦变换为实对称正交变换 $S = S^* = S^{-1} = S^T$;

(2) 和傅立叶变换相同，正弦变换也存在快速变换，但要求 $N = 2^p - 1$;

(3) 和傅立叶变换类似，正弦变换具有将高度相关数据能量集中在低频的优势；



3 正弦型变换和哈特利变换

- 4) 哈特利 (Hartley) 变换 (DHT)

- 思想: 作为DFT的替代, 以减少复数运算。

$$F_H(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \text{cas} \left[\frac{2\pi}{N} (xu + yv) \right]$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \text{cas} \left[\frac{2\pi}{N} (xu + yv) \right]$$

其中 $\text{cas}(\theta) = \cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

将二维分离为一维, DHT的核矩阵元素为

$$H_{x,u} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\text{cas} \left(2\pi \frac{xu}{N} \right) \right]$$

4 方波型变换



- 1) 离散沃尔什变换 (Walsh)
 - 思想：核矩阵中只有+1和-1元素，要求 $N=2^p$ ，是对称的可分离的正交矩阵。

在 $N = 2^p$ 时，定义一维离散沃尔什变换为

$$W(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \prod_{i=0}^{p-1} (-1)^{b_i(x)b_{p-1-i}(u)}$$

常数项也可取 $\sqrt{\frac{1}{N}}$

其中 $b_i(x)$ 是 x 的二进制表示的第 i 位值。

如 $p = 3$ ， $N = 2^p = 8$ ， $x = 6$ (二进制110)时，

$$b_0(6) = 0, \quad b_1(6) = 1, \quad b_2(6) = 1。$$

4 方波型变换



N=2,4,8时的b值

N值	N=2		N=4				N=8							
	p=1		p=2				p=3							
x值	0	1	0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6	7
x二进制	0	1	00	01	10	11	00	0	01	01	10	1	11	11
							0	0	0	1	0	0	0	1
$b_0(x)$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$b_1(x)$			0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$b_2(x)$							0	0	0	0	1	1	1	1

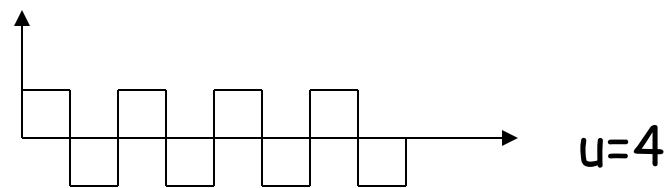
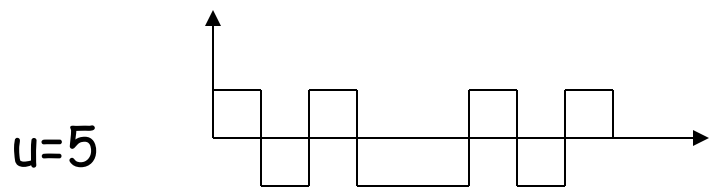
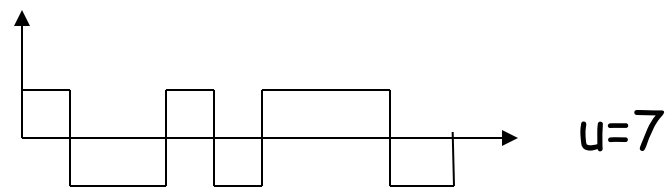
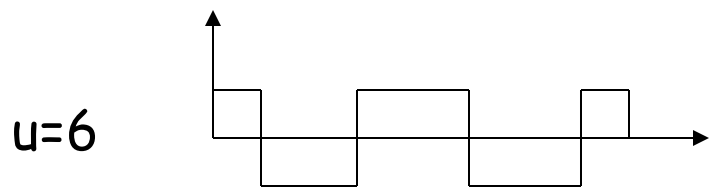
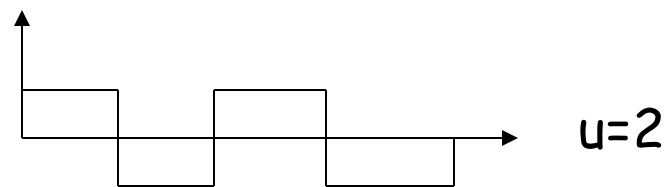
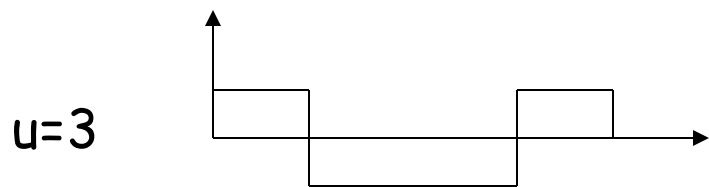
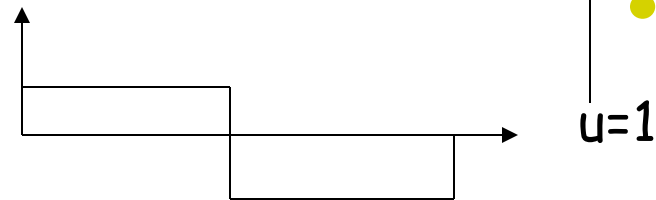
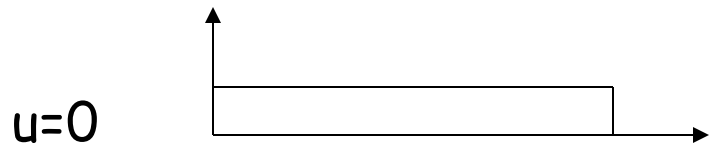
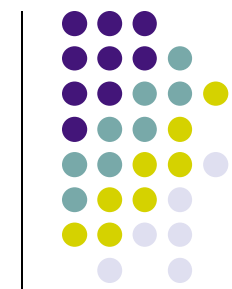
4 方波型变换



N=2,4,8时的沃尔什变换核

N	N=2 p=1		N=4 p=2				N=8 p=3							
x u	0	1	0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6	7
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
1	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-
2			+	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-
3			+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+
4							+	-	+	-	+	-	+	-
5							+	-	+	-	-	+	-	+
6							+	-	-	+	+	-	-	+
7							+	-	-	+	-	+	+	-

4 方波型变换



4 方波型变换



- 例：求N=4时沃尔什变换。

解：通过定义得，

$$W(0) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 \left[f(x) \prod_{i=0}^1 (-1)^{b_i(x)b_{p-1-i}(0)} \right] = \frac{1}{4} [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)]$$

$$W(1) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 \left[f(x) \prod_{i=0}^1 (-1)^{b_i(x)b_{p-1-i}(1)} \right] = \frac{1}{4} [f(0) + f(1) - f(2) - f(3)]$$

$$W(2) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 \left[f(x) \prod_{i=0}^1 (-1)^{b_i(x)b_{p-1-i}(2)} \right] = \frac{1}{4} [f(0) - f(1) + f(2) - f(3)]$$

$$W(3) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 \left[f(x) \prod_{i=0}^1 (-1)^{b_i(x)b_{p-1-i}(3)} \right] = \frac{1}{4} [f(0) - f(1) - f(2) + f(3)]$$

4 方波型变换



- 二维离散沃尔什变换

$$\begin{aligned} W(u, v) &= \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \prod_{i=0}^{p-1} (-1)^{b_i(x)b_{p-1-i}(u) + b_i(y)b_{p-1-i}(v)} \\ &= \frac{1}{N} \left[\frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x, y) \prod_{i=0}^{p-1} (-1)^{b_i(x)b_{p-1-i}(u)} \right] \prod_{i=0}^{p-1} (-1)^{b_i(y)b_{p-1-i}(v)} \\ &= \frac{1}{N^2} GfG \end{aligned}$$

4 方波型变换



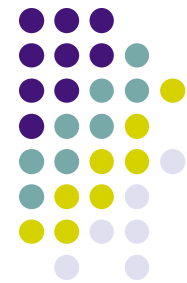
- 例：求下列数字图像信号矩阵的DWT。

$$(1) f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{解： } F_1 = \frac{1}{N^2} W f_1 W = \frac{1}{4^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 方波型变换



$$\text{解: } F_2 = \frac{1}{N^2} W f_2 W$$

$$= \frac{1}{4^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 方波型变换



- 沃尔什变换本质上将一个函数变换为取值为+1或-1的基向量构成的级数；
- 类似于频率函数，但又不同于频率函数；
- 以过零点数目替代频率的概念，称为序率；

4 方波型变换



- 沃尔什变换具有某种能量集中。而且原始数据中数字越是均匀分布，经变换后的数据越集中于矩阵的边角上。因此沃尔什变换可以压缩图像信息。且变换比傅立叶变换快。
- 快速沃尔什变换 (FWT)

$$W(u) = \frac{1}{2} [W_e(u) + W_o(u)]$$

$$W\left(u + \frac{N}{2}\right) = \frac{1}{2} [W_e(u) - W_o(u)]$$

$$u = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

4 方波型变换



● 2) 哈达玛 (Hadamard) 变换

- 哈达玛变换本质上是一种特殊排序的沃尔什变换；
- 其与沃尔什变换的区别是变换核矩阵行的次序不同；
- 哈达玛变换最大优点在于变换核矩阵具有简单的递推关系，即高阶的变换矩阵可以用低阶转换矩阵构成。

一维离散哈达玛变换定义为：

$$H(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) (-1)^{\sum_{i=0}^{p-1} b_i(x) b_i(u)}$$

其中 $N = 2^p$, $x, u = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

4 方波型变换

$$\text{当 } N = 2 \text{ 时, } H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{当 } N > 2 \text{ 时, } H_N = \begin{bmatrix} H_{N/2} & H_{N/2} \\ H_{N/2} & -H_{N/2} \end{bmatrix}$$

当 $N = 4$ 时,

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$





4 方波型变换

- 定序哈达玛变换
 - 列率：在哈达玛变换矩阵中，沿某一系列符号改变的次数称为这个列的列率；
 - 实际使用中，通常交换哈达玛变换矩阵的列，使列率随 u 增加而递增。此时称定序哈达玛变换。

$$H'_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4 方波型变换



定序哈达玛变换核的定义为:

$$H(x, u) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{p-1} b_i(x) p_i(u)}$$

其中

$$P_0(u) = b_{p-1}(u);$$

$$P_1(u) = b_{p-1}(u) + b_{p-2}(u);$$

M

$$P_{n-1}(u) = b_1(u) + b_2(u);$$

4 方波型变换



- 求下列图像的哈达玛变换。

$$(1) f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{解: } F_1 = \frac{1}{4} H f_1 H = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



4 方波型变换

● 3) 斜变换 (Slant)

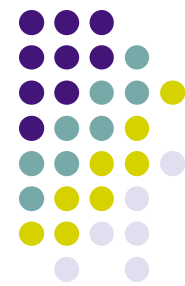
- 斜变换是为了某种特殊信号的有效变换。对于灰度有渐变性质的电视信号特别有效。
- 斜变换的变换矩阵

$S(p)$ 表示 $N \times N$ 斜矩阵 $N = 2^p$, 则

$$S(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 记作 } S_1$$

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & b_2 & -a_2 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -b_2 & a_2 & b_2 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{bmatrix}$$

4 方波型变换



$$= \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_2 + b_2 & a_2 - b_2 & -a_2 + b_2 & -a_2 - b_2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ a_2 - b_2 & -a_2 - b_2 & a_2 + b_2 & -a_2 + b_2 \end{bmatrix}$$

使斜函数的跳变均匀，可令 $a_2 = 2b_2$ ，根据正交条件

$$\frac{1}{\sqrt{4}} [3b \quad b \quad -b \quad -3b] \frac{1}{\sqrt{4}} [3b \quad b \quad -b \quad -3b]^T = 1$$

$$\therefore b = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

4 方波型变换

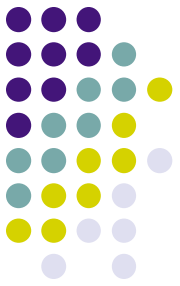


$$\therefore S_2 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} & 3/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

递归定义:

$$S_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a_p & b_p & -a_p & b_p \\ & I & & I \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -b_p & a_p & b_p & a_p \\ & & I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{p-1} \\ S_{p-1} \end{bmatrix}$$

4 方波型变换



$$\begin{cases} b_p = \left(1 + 4a_{p-1}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ a_p = 2b_p a_{p-1} \quad a_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{p+1} = \left(\frac{3p^2}{4p^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ b_{p+1} = \left(\frac{p^2 - 1}{4p^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad N = 2^p$$

4 方波型变换



- 斜变换性质
- (1) 斜变换是实正交变换 $S = S^*, S^{-1} = S^T$
- (2) 斜变换是一种快速变换，适合灰度渐变的电视信号中；
- (3) 对图像有较好的能量集中特性；
- (4) S 阵的基向量即各行向量。

4 方波型变换



- 例：求下列数字图像信号矩阵的DCT和ST。

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{解： } DCT(f) = \begin{bmatrix} 10 & -4.46 & 0 & -0.32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ST(f) = S_2 f S_2' = \begin{bmatrix} 10 & 4.47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

要点总结



- 1、线性变换、酉变换、正交变换、基函数、基图像的概念；
- 2、一维余弦变换、二维余弦变换的定义，余弦变换的性质和初步应用；
- 3、正弦变换、哈特利变换的定义；
- 4、沃尔什变换、哈达玛变换和斜变换的定义。