

Ch05: 多维随机变量及其数字特征

Operations on Multi-dimensional Random Variables – 1

November 15, 2023

引言

已知二维随机向量 (X, Y) 的概率分布, 求随机变量 (X, Y) 的函数 $Z = g(X, Y)$ 的概率分布, 分离散和连续两种情况讨论.

离散型随机变量函数的分布

已知离散型随机向量 (X, Y) 的联合分布列, 求随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的分布列:

- 根据 X, Y 的各种取值, 计算随机变量 Z 的取值;

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_n
x_1	$X = x_1, Y = y_1$	$X = x_1, Y = y_2$...	$X = x_1, Y = y_n$
x_2	$X = x_2, Y = y_1$	$X = x_2, Y = y_2$...	$X = x_2, Y = y_n$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
x_m	$X = x_m, Y = y_1$	$X = x_m, Y = y_2$...	$X = x_m, Y = y_n$

- 对相同的 Z 值合并, 对应的概率相加.

举例：离散型随机变量函数的分布

求随机变量 $Z = g(X, Y) = X * Y$ 的分布列:

- X, Y 的分布列

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}
2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}
3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}
4	p_{41}	p_{42}	p_{43}	p_{44}

- 对相同的 Z 值合并, 对应的概率相加

Z	1	2	3	4	6	8	9	12	16
P	p_{11}	$p_{12} + p_{21}$...	$p_{14} + p_{41} + p_{22}$...	$p_{24} + p_{42}$

二维离散型随机变量和 (和函数 $g = X + Y$) 的分布

定理 0.18 [卷积公式 - 和函数] 若离散随机变量 X 与 Y 独立, 其分布列为

$$a_i = P(X = i) \quad \text{和} \quad b_j = P(Y = j) \quad (i, j \in \mathbb{N}^+)$$

则随机变量 $Z = X + Y$ 的分布列为

$$P(Z = X + Y = k) = \sum_{i=1}^k a_i b_{k-i}$$

Remarks:

- 独立性: $P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$.
- 将 $k = i + j$ 的项加在一起.
- 比如: $k = 3$, 有 $P(Z = 3) = P(X = 1)P(Y = 2) + P(X = 2)P(Y = 1) = a_1 b_2 + a_2 b_1$.

命题一：二项分布之和是二项分布

定理 0.19 若随机变量 $X \sim B(n_1, p)$ 和 $Y \sim B(n_2, p)$ 独立, 则

$$Z = X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$$

Remarks of Proof: 二项分布 $P(X = i) = \binom{n_1}{i} p^i (1 - p)^{n_1 - i}$ ($i \in \mathbb{N}$).

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^k P(X = i)P(Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n_1}{i} p^i (1 - p)^{n_1 - i} \binom{n_2}{k - i} p^{k - i} (1 - p)^{n_2 - (k - i)} \\ &= \left[\sum_{i=0}^k \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{k - i} \right] p^k p^{n_1 + n_2 - k} = \binom{n_1 + n_2}{k} p^k (1 - p)^{n_1 + n_2 - k} \end{aligned}$$

命题一：二项分布之和是二项分布

推论 (多变量推论: 二项分布) 若相互独立的随机变量 $X_i \sim B(1, p)$ ($i \in \mathbb{N}^+$), 则

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$$

命题二：泊松分布之和是泊松分布

定理 0.20 若随机变量 $X \sim P(\lambda_1)$ 和 $Y \sim P(\lambda_2)$ 独立, 则

$$Z = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Remarks of Proof: 泊松分布 $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ($k \in \mathbb{N}$).

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^k P(X = i)P(Y = k - i) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} \\ &= \left[\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} \right] e^{-\lambda_1 - \lambda_2} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k \end{aligned}$$

连续型随机向量函数的分布

设二维连续型随机向量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 求随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的概率密度:

- 先计算分布函数 (积分区域)

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(g(x, y) \leq z) = \int \int_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy$$

- 对分布函数 $F_Z(z)$ 求导得到密度函数

$$f_Z(z) = F'_Z(z)$$

连续型随机向量函数的分布：例 0.84

例 0.84 设随机变量 X 与 Y 相互独立、且服从标准正态分布, 求下列随机变量的密度函数.

- $Z_1 = \sqrt{X^2 + Y^2}$

- $Z_2 = X^2 + Y^2$

解答：例 0.84

题目：设随机变量 X 与 Y 相互独立、且服从标准正态分布，求随机变量 $Z_1 = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 和 $Z_2 = X^2 + Y^2$ 的密度函数。

解答：

- 由独立性有 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = e^{-(x^2+y^2)/2}/2\pi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

- 当 $z_1 \leq 0$ 时有 $F_{Z_1}(z_1) = 0$ ；当 $z_1 > 0$ 时有

$$F_{Z_1}(z_1) = P(Z_1 \leq z_1) = P(\sqrt{X^2 + Y^2} \leq z_1) = \int \int_{X^2+Y^2 \leq z_1^2} e^{-(x^2+y^2)/2}/2\pi dx dy$$

利用极坐标积分变换 $x = r \cos \theta$ 和 $y = r \sin \theta$ 有

$$F_{Z_1}(z_1) = \int_0^{2\pi} \int_0^{z_1} \frac{r}{2\pi} e^{-r^2/2} d\theta dr = \int_0^{z_1} r e^{-r^2/2} dr = 1 - e^{-z_1^2/2}$$

- 对分布函数 $F_{Z_1}(z_1)$ 求导得到密度函数

$$f_{Z_1}(z_1) = \begin{cases} z_1 e^{-z_1^2/2}, & z_1 > 0 \\ 0, & z_1 \leq 0 \end{cases}$$

上述分布称为瑞利分布 (Rayleigh distribution), 该分布常用于通信等领域.

- 同理可证随机变量 $Z_2 \sim E(\frac{1}{2})$, 即

$$f_{Z_2}(z_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-z_2/2}, & z_2 > 0 \\ 0, & z_2 \leq 0 \end{cases}$$

上述分布称为卡方分布 (chi-square distribution, OR χ^2 -distribution).

二维连续型随机向量和 (和函数 $g = X + Y$) 的分布

定理 0.21 [求和基本公式] 设随机向量 (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y)$, 则随机变量 $Z = X + Y$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int \int_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy \right] dx \quad (\text{积分区域}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^z f(x, u-y) du \right] dx \quad (\text{变量}) \\ &= \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u-y) dx \right] du \end{aligned}$$

因此, 概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$$

二维连续型随机向量和的分布

定理 0.22 [卷积公式-和函数] 若连续随机变量 X 与 Y 相互独立, 其概率密度函数分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 则随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

推论: 更一般的情况, 对于同定义域上的函数 $f(x), g(x)$, 其卷积为

$$f * g (y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y-x) dx$$

二维连续随机向量函数和的分布 – 均匀分布: 例 0.85

例 0.85 设随机变量 $X \sim U(0, 1)$ 和 $Y \sim U(0, 1)$ 相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解答：例 0.85

题目：设随机变量 $X \sim U(0, 1)$ 和 $Y \sim U(0, 1)$ 相互独立，求 $Z = X + Y$ 的概率密度。

解答：

- 根据卷积公式有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

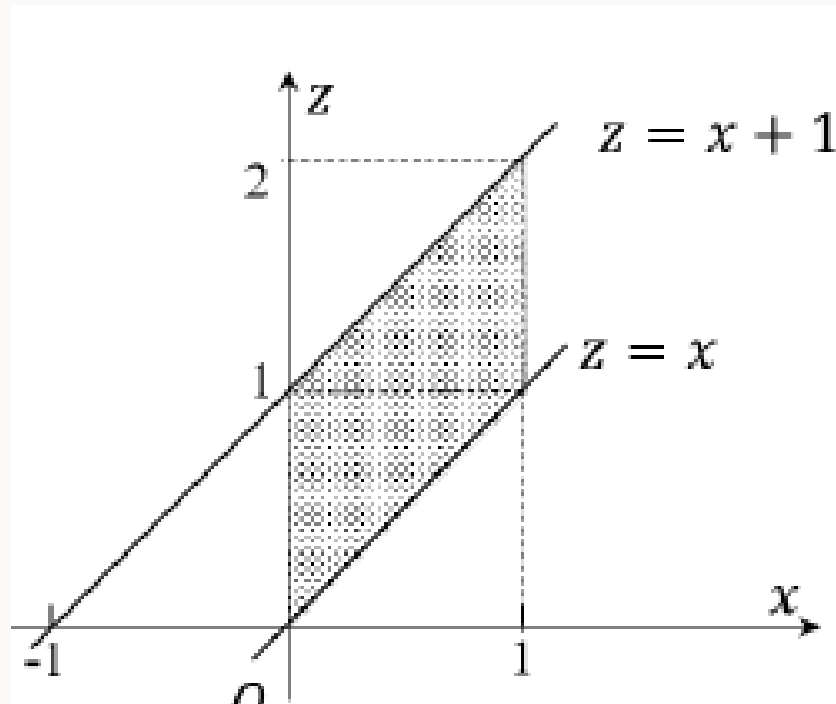
分析 $f_X(x)$, $f_Y(z-x)$ 的取值情况可知：

- 当 $x \in [0, 1]$ 时，有 $f_X(x) = 1$
- 当 $z-x \in [0, 1]$ 时，有 $f_Y(z-x) = 1$

因此，积分区域为 $\{x \in [0, 1], z-x \in [0, 1]\}$ 。

- 由下图所示：

- 当 $z \leq 0$ 或 $z \geq 2$ 时，有 $f_Z(z) = 0$
- 当 $z \in (0, 1)$ 时，有 $f_Z(z) = \int_0^z 1 dz = z$
- 当 $z \in [1, 2)$ 时，有 $f_Z(z) = \int_{z-1}^1 1 dx = 2 - z$



• $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} z, & z \in [0, 1] \\ 2 - z, & z \in [1, 2] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

二维连续随机向量函数和的分布 – 指数分布：例 0.86

例 0.86 设随机变量 $X \sim e(\lambda)$ 和 $Y \sim e(\lambda)$ 相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的分布函数和概率密度.

解答：例 0.86

题目：设随机变量 $X \sim e(\lambda)$ 和 $Y \sim e(\lambda)$ 相互独立，求 $Z = X + Y$ 的分布函数和概率密度.

解答：

- 根据卷积公式有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

分析 $f_X(x)$, $f_Y(z-x)$ 的取值情况可知,

- 当 $x \geq 0$ 时, 有 $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$;
- 当 $z-x \geq 0$ 时, 有 $f_Y(z-x) = \lambda \exp(-\lambda(z-x))$,

因此积分区域为 $\{x \in [0, +\infty], z-x \in [0, +\infty]\}$.

- 当 $z \geq 0$ 时有

$$f_Z(z) = \lambda^2 \int_0^z \exp(-\lambda x) \exp(-\lambda(z-x)) dx = \lambda^2 z \exp(-\lambda z)$$

命题三：正态分布之和是正态分布

定理 **0.23** 若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 相互独立, 则

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

推论 若相互独立的随机变量 $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ ($i \in [n]$), 则

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$

证明 若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$, 则根据正太分布的性质有

$$X' = X - \mu_x \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2) \quad \text{和} \quad Y' = Y - \mu_y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_y^2).$$

因此只需证明 $Z = X' + Y' \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. 根据卷积公式有

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(z-x)^2}{2\sigma_2^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(x - \frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)^2 - \frac{z^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) dx \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \times \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(x - \frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)^2\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right), \end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为正太分布的规范性.

随机变量的乘/除法分布

前面提及了连续型随机变量的加法, 减法是同样的计算. 接下来我们介绍关于乘法/除法的计算.

定理 0.24 设随机向量 (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y)$, 则随机变量 $Z = XY$ 的概率密度为

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx$$

随机变量 $Z = Y/X$ 的概率密度为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dx$$

随机变量的乘/除法分布: 证明

求证:

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx$$

证明: 对 $F_{XY}(z)$ 关于 z 求导即可,

$$\begin{aligned} F_{XY}(z) &= P(XY \leq z) \\ &= \int \int_{xy \leq z} f(x, y) dx dy = \int_{x < 0} \int_{y \geq z/x} f(x, y) dx dy + \int_{x \geq 0} \int_{y \leq z/x} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \left[\int_{z/x}^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx + \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z/x} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \left[\int_z^{-\infty} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{t}{x}\right) dt \right] dx + \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^z \frac{1}{x} f\left(x, \frac{t}{x}\right) dt \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \left[\int_{-\infty}^z -\frac{1}{x} f\left(x, \frac{t}{x}\right) dt \right] dx + \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^z \frac{1}{x} f\left(x, \frac{t}{x}\right) dt \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^0 -\frac{1}{x} f\left(x, \frac{t}{x}\right) dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{t}{x}\right) dx \right] dt = \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{t}{x}\right) dx \right] dt \end{aligned}$$

命题四：连续随机向量函数的分布：例 0.87

例 0.87 若标准正态分布的随机变量 X 与 Y 相互独立, 证明: 则随机变量 $Z = Y/X$ 服从柯西分布.

Proof: 根据独立性和定理0.24有

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2(1+z^2)/2} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-x^2(1+z^2)/2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{e^{-x^2(1+z^2)/2}}{1+z^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi(1+z^2)} \end{aligned}$$

证毕.

最大值和最小值的分布

定理 0.25 设 X_1, \dots, X_n 相互独立、分布函数为 $F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)$, 则

- 随机变量 $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$ 的分布函数为

$$F_Y(y) = F_{X_1}(y) F_{X_2}(y) \dots F_{X_n}(y)$$

- 随机变量 $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$ 的概率密度为

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)] [1 - F_{X_2}(z)] \dots [1 - F_{X_n}(z)]$$

Proof Sketches:

- For max, $P(Y \leq y) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq y) = P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_n \leq y)$
- For min, $P(Z \leq z) = P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq z) = 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > z) = 1 - P(X_1 > z, X_2 > z, \dots, X_n > z)$

最大值和最小值的分布: 证明

- 随机变量 $Y = \max(X_1, \dots, X_n) \leq y$, 则需要每一个 $X_i \leq y$

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq y) \\&= P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_n \leq y) \\&= P(X_1 \leq y)P(X_2 \leq y) \dots P(X_n \leq y) \\&= F_{X_1}(y) F_{X_2}(y) \dots F_{X_n}(y)\end{aligned}$$

- 随机变量 $Z = \min(X_1, \dots, X_n) \leq z$, 则需要每一个 $1 - X_i \geq y$

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq z) = 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > z) \\&= 1 - P(X_1 > z, X_2 > z, \dots, X_n > z) \\&= 1 - P(X_1 > z)P(X_2 > z) \dots P(X_n > z) \\&= 1 - [1 - P(X_1 \leq z)] [1 - P(X_2 \leq z)] \dots [1 - P(X_n \leq z)] \\&= 1 - [1 - F_{X_1}(z)] [1 - F_{X_2}(z)] \dots [1 - F_{X_n}(z)]\end{aligned}$$

最大值和最小值的分布: 推论

推论 若相互独立的随机变量 X_1, \dots, X_n 其分布函数和密度函数分别为 $F(x)$ 和 $f(x)$, 即

$$F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) = \cdots = F_{X_n}(x) = F(x)$$

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \cdots = f_{X_n}(x) = f(x)$$

则随机变量 $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$ 的分布函数和密度函数分别为

$$F_Y(y) = (F(y))^n \quad \text{和} \quad f_Y(y) = n(F(y))^{n-1}f(y)$$

随机变量 $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$ 的分布函数和密度函数分别为

$$F_Z(z) = 1 - (1 - F(z))^n \quad \text{和} \quad f_Z(z) = n(1 - F(z))^{n-1}f(z)$$

连续随机向量函数的分布：例 0.88 指数分布

例 0.88 若随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim e(\alpha)$ 和 $Y \sim e(\beta)$, 求随机变量 $Z_1 = \max(X, Y)$ 和 $Z_2 = \min(X, Y)$ 的概率密度.

解答：例 0.88

题目：若随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim E(\alpha)$ 和 $Y \sim E(\beta)$ ，求随机变量 $Z_1 = \max(X, Y)$ 和 $Z_2 = \min(X, Y)$ 的概率密度。

解答：

- 根据定理0.25有，随机变量 Z_1 的分布函数为

$$F_{Z_1}(z_1) = F_X(z_1)F_Y(z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} f_X(t)dt \int_{-\infty}^{z_1} f_Y(t)dt$$

当 $z_1 \leq 0$ 时有 $F_{Z_1}(z_1) = 0$ ；当 $z_1 > 0$ 时

$$F_{Z_1}(z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} f_X(t)dt \int_{-\infty}^{z_1} f_Y(t)dt = \int_{-\infty}^{z_1} \alpha e^{-\alpha t} dt \int_{-\infty}^{z_1} \beta e^{-\beta t} dt = (1 - e^{-\alpha z_1})(1 - e^{-\beta z_1})$$

等式两边对 z_1 求导可得其密度函数为

$$f_{Z_1}(z_1) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z_1} + \beta e^{-\beta z_1} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha + \beta)z_1}, & z_1 > 0 \\ 0, & z_1 \leq 0 \end{cases}$$

- 同理可得, 随机变量 Z_2 的分布函数和密度函数分别为

$$F_{Z_2}(z_2) = \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z_2}, & z_2 > 0 \\ 0, & z_2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad f_{Z_2}(z_2) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z_2}, & z_2 > 0 \\ 0, & z_2 \leq 0 \end{cases}$$

连续型随机变量复合函数的联合分布函数

问题: 随机变量 (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y)$, 设 (X, Y) 的函数

$$U = u(x, y), \quad V = v(x, y).$$

如何求 (U, V) 的联合分布. 这里二元函数 $u(\cdot, \cdot)$ 和 $v(\cdot, \cdot)$ 具有连续的偏导, 并满足

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad \text{存在唯一的反函数} \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

连续型随机变量复合函数的联合分布函数

定理 0.26 设 $U = u(X, Y)$ 和 $V = v(X, Y)$ 有连续偏导, 反函数 $X = x(U, V)$ 和 $Y = y(U, V)$. 若 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 则 (U, V) 的联合密度为

$$f_{UV}(u, v) = f_{XY}(x(u, v), y(u, v))|J|,$$

其中 J 为变换的雅可比行列式, 即

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1},$$

上述结论可推广到一般的 n 维随机变量.

连续型随机向量复合函数的分布：例 0.89

例 0.89 设 X 与 Y 是相互独立的标准正态分布随机变量. 证明: 有随机变量

$$R = X^2 + Y^2 \quad \text{与} \quad \theta = \arctan(Y/X)$$

相互独立, 且有 $R \sim e(1/2)$ 以及 $\theta \sim U(0, 2\pi)$.

解答：例 0.89

题目：设 X 与 Y 是相互独立的标准正态分布随机变量，证明：有随机变量 $R^2 = X^2 + Y^2$ 与 $\theta = \arctan(Y/X)$ 相互独立，且有 $R \sim e(1/2)$ 以及 $\theta \sim U(0, 2\pi)$ 。

解答：

- 根据定理0.26列出雅可比行列式

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}.$$

- 由此可得 R 与 Θ 的联合分布为

$$f_{R \times \Theta}(r, \theta) = f_{X \times Y}(\sqrt{r} \cos \theta, \sqrt{r} \sin \theta) |J| = \frac{1}{4\pi} \exp(-r/2) = \frac{1}{2} \exp(-r/2) \times \frac{1}{2\pi}$$

由此可发现 $R \sim E(1/2)$ 以及 $\theta \sim U(0, 2\pi)$ ， R 与 Θ 相互独立。