Law of large numbers and Central limit theorem

December 2, 2023

大数定律

大数定律是概率论与数理统计的基本定理之一.

- 在随机试验中, 每次的试验的结果可能不同, 但是当进行大量的重复试验后, 试验结果几乎总是趋近于某个确定的值.
- 最常见的例子是投硬币, 当进行大量的试验后, 硬币出现正反面的次数会各占一半.

用统计学语言就是随机变量序列的均值收敛于某一个常数.

依概率收敛

定义 0.63 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 是一随机变量序列, a 是一常数, 如果对任意 $\epsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P[|X_n - a| < \epsilon] = 1, \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty} P[|X_n - a| > \epsilon] = 0\,.$$

则称随机变量序列 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 依概率收敛于 a, 记 $X_n \xrightarrow{P} a$.

依概率收敛的含义是

- X_n 对 a 的绝对偏差不小于任一给定量的可能性, 随着 n 的增大, 而愈来愈接近于 0 .
- 绝对偏差 $|X_n - a|$ 小于任一给定量的可能性, 随着 n 的增大, 而愈来愈接近于 1 .

其他的收敛方式

针对 $\{f_n\}$ and $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$

- 一致收敛：For any $\epsilon > 0$ and $x \in \mathcal{X}$, there exists a universal constant $N > 0$ such that for any $n > N$, it holds $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
- 点态收敛：For any $\epsilon > 0$ and $x \in \mathcal{X}$, there exists some $N_x > 0$ such that for any $n > N_x$, it holds $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
- 依概率收敛
- 依分布收敛

依概率收敛的性质 – 函数依概率收敛

- 若 $X_n \xrightarrow{P} a$, 函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $X=a$ 点连续, 则

$$g(X_n) \xrightarrow{P} g(a).$$

  - 对任意常数 c 有, $cX_n \xrightarrow{P} ca$.

- 若 $X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b$, 函数 $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 (a,b) 点连续, 则

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a,b).$$

  - $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a \pm b$
  - $X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$
  - $X_n \div Y_n \xrightarrow{P} a \div b \quad (b \neq 0)$

大数定律

定理 0.54 若随机变量序列 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 满足

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]\,,$$

则称 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

Remarks:

- 大数定律刻画了随机变量的均值 (算术平均值) 依概率收敛于期望的均值 (算术平均值).
- 揭示了样本均值和真实期望之间的关系, 即当样本量很大的时候, 那么样本均值收敛到真实期望.
- 在实际应用中, 当试验次数很大时, 便可以用事件的频率来代替事件的概率, 即 "经验观测可以反映随机规律".

- Proof Sketch:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]\right| \geq \epsilon\right] = 0$$

马尔可夫 (Markov) 大数定律

定理 0.55 若随机变量序列 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 满足

$$\frac{1}{n^2}\mathbb{VAR}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \to 0, \qquad n \to \infty$$

则称 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

Remarks:

- 适用条件: 不要求随机变量 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 相互独立或同分布.
- Proof Sketch:

$$P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{1}{n^2\epsilon^2}\mathbb{VAR}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \to 0$$

切比雪夫 (Chebyshev) 大数定律

定理 0.56 设随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立 (或者不相关), 且存在常数 $c > 0$ 使得 $\mathbb{VAR}(X_n) \le c$, 则 X_n 服从大数定律.

Remarks:

- 适用条件: $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 相互独立且方差有限, 即 $\mathbb{VAR}(X_n) \le c$.
- Proof Sketch:

$$P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])\right| \ge \epsilon\right] \le \frac{1}{n^2\epsilon^2}\mathbb{VAR}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \le \frac{c}{n\epsilon^2} \to 0$$

辛钦 (Khintchine) 大数定律

定理 0.57 设随机变量序列 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 相互独立同分布, 且每个随机变量的期望 $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ 存在, 则 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

Remarks:

- 适用条件: $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 独立同分布、期望存在.
- Proof Sketch: 该证明不要求方差存在, 其证明超出本课程范围.

伯努利 (Bernoulli) 大数定律

定理 0.58 设随机变量序列 $X_n \sim \mathrm{Ber}(n,p)$, 对任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right] = 0$$

Remarks:

- 适用条件: $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 服从伯努利分布.
- Proof Sketch:
  - 定义独立同分布的随机变量 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, 其中 $Y_i \sim \mathrm{Ber}(p)$, 则有 $X_n = \sum Y_i \sim B(n,p)$
  - 根据之前的结论

$$P\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right] = P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mathbb{E}[Y_i])\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{1}{n^2\epsilon^2}\mathbb{VAR}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \to 0$$

大数定律小结

- Markov 大数定律:
  若随机变量序列 $\{X_i\}$ 满足 $\frac{\mathbb{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{n^2} \to 0$, 则满足大数定律.
- Chebyshev 大数定律:
  若独立随机变量序列 $\{X_i\}$ 满足 $\mathbb{VAR}(X_i) \leq c$, 则满足大数定律.
- Khintchine 大数定律:
  若独立同分布随机变量序列 $\{X_i\}$ 期望存在, 则满足大数定律.
- Bernoulli 大数定律:
  对二项分布 $X_n \sim \mathrm{Ber}(n, p)$, 有 $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} p$.

大数定律：例 0.108

例 0.108 设 $\{X_k\}$ 是独立随机变量序列, 且

$$P\left(X_k = \pm\sqrt{\ln k}\right) = \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

证明 $\{X_k\}$ 服从大数定律.

解答：例 0.108

题目: 设 $\{X_k\}$ 是独立随机变量序列, 且

$$P(X_k = \pm\sqrt{\ln k}) = \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

证明 $\{X_k\}$ 服从大数定律.

解答:

- 因为 $X_1, X_2, \ldots$ 相互独立, 且 $\mathbb{E}[X_k] = 0, \mathbb{VAR}(X_k) = \ln k$, 所以

$$\mathbb{VAR}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq n \times \ln n\ .$$

- 由马尔可夫大数定律的条件可得

$$\frac{1}{n^2}\mathbb{VAR}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \leq \frac{\ln n}{n} \to 0, \quad n \to \infty\ .$$

因此, $\{X_k\}$ 服从大数定律.

大数定律：例 0.109

例 0.109 若随机变量序列 $\{X_i\}$ 独立同分布, 且 $X_i \sim U(-2,2), i \in [N]$. 求 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 分别依概率收敛的结果.

解答：例 0.109

题目: 若随机变量序列 $\{X_i\}$ 独立同分布, 且 $X_i \sim U(-2,2), i \in [N]$, 求 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 分别依概率收敛的结果.

解答:

- 因为随机变量序列 $\{X_i\}$ 独立同分布, 由辛钦大数定律可知

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \mathbb{E}(X_i), \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] = \mathbb{E}(X_i^2)$$

- 当 $X_i \sim U(-2,2)$ 时, $\mathbb{E}[X_i] = 0$, $\mathbb{E}[X_i^2] = \mathbb{VAR}(X_i) + [\mathbb{E}[X_i]]^2 = \frac{4}{3}$. 所以

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} 0,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} \frac{4}{3}.$$

大数定律：例 0.110

例 0.110 若随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立, 且满足

$$P[X_n = n^{1/4}] = P[X_n = -n^{1/4}] = 1/2\ .$$

证明 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

解答：例 0.110

题目: 若随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立, 且满足 $P[X_n = n^{1/4}] = P[X_n = -n^{1/4}] = 1/2$, 证明 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

解答:

- 由题意得 $\mathbb{E}[X_i] = 0, \mathbb{VAR}(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] = i^{1/2}$, 根据切比雪夫不等式和独立性有

$$P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{1}{n^2\epsilon^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{VAR}(X_i) = \frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^{1/2} \leq \frac{1}{\epsilon^2\sqrt{n}}$$

- 再根据

$$\sum_{i=1}^{n} i^{1/2} \leq \sum_{i=1}^{n}\int_{i}^{i+1} i^{1/2}dx \leq \sum_{i=1}^{n}\int_{i}^{i+1} x^{1/2}dx = \int_{1}^{n+1} x^{1/2}dx = 2((n+1)^{3/2}-1)/3$$

  由此可得当 $n \to \infty$ 时, 有

$$P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{2((n+1)^{3/2}-1)/3}{n^2\epsilon^2} \to 0.$$

中心极限定理

大数定律研究的是一系列随机变量 $\{X_n\}$ 的均值 $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是否会依概率收敛于其期望 $\mathbb{E}[\bar{X}_n]$.

而中心极限定理进一步研究 $\bar{X}_n$ 服从什么分布？

- 若 $\{X_n\}$ 满足一定的条件, 当 n 足够大时, 近似服从正态分布, 这就是中心极限定理的主要思想, 这也体现了正态分布的重要性与普遍性.

依分布收敛

我们知道分布函数全面地描述了随机变量的统计规律, 因此讨论一个分布函数序列 $\{F_n(x)\}$ 收敛到一个极限分布函数 $F(x)$ 是有意义的.

定义 0.64 设随机变量 $X, X_1, X_2, \ldots$ 的分布函数分别为

$$F(x), F_1(x), F_2(x), \ldots$$

若对 $F(x)$ 的任一点连续点 x, 都有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

则称 $\{X_n\}$ 依分布收敛于 X, 记作 $X_n \xrightarrow{d} X$.

林德贝格-勒维 (Lindeberg-Lévy) 中心极限定理

定理 0.59 设独立同分布的随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 的

- 期望 $\mathbb{E}[X_i] = \mu$
- 方差 $\mathbb{VAR}(X_i) = \sigma^2$

则有

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = n\,\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)\ .$$

Remarks:

- 中心极限定理说明样本均值符合正态分布 (而不是样本本身符合正态分布).
- 基于这个定理, 我们可以用抽样结果的均值来估计总体的均值.

林德贝格-勒维 (Lindeberg-Lévy) 中心极限定理

由定理 0.59 可知, 随机变量 Y_n 是随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的标准化, 其极限服从标准正态分布.

- Informally speaking:

$$n\,\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)\ .$$

  can be converted into

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,n)\ .$$

- 当 n 足够大时, 近似有 $Y_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, 中心极限定理的变形公式为

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} \mathcal{N}(n\mu, n\mathbb{VAR}^2), \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mu, \mathbb{VAR}^2/n).$$

中心极限定理：例 0.111

例 0.111 设一电压接收器同时接收到 20 个独立同分布的信号电压 $V_k(k \in [20])$, 且 $V_k \sim U(0,10)$, 求 20 个信号电压之和大于 105 的概率.

解答：例 0.111

题目: 设一电压接收器同时接收到 20 个独立同分布的信号电压 $V_k(k \in [20])$, 且 $V_k \sim U(0,10)$, 求 20 个信号电压之和大于 105 的概率.

解答:

- 由题意 $V_k \sim U(0,10)$ 得 $\mathbb{E}[V_k] = 5$, $\mathbb{VAR}(V_k) = 100/12 = 25/3$, 设 $V = \sum_{k=1}^{20} V_k$, 则有
$$\mathbb{E}[V] = 20 \times 5 = 100 \qquad \mathbb{VAR}(V) = 20 \times 25/3 = 500/3$$
- 再根据中心极限定理近似有
$$\frac{V - \mathbb{E}[V]}{\sqrt{\mathbb{VAR}(V)}} = \frac{V - 100}{\sqrt{500/3}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$
根据标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 有
$$P(V \geq 105) = P\left(\frac{V-100}{\sqrt{500/3}} \geq \frac{105-100}{\sqrt{500/3}}\right) = P\left(\frac{V-100}{\sqrt{500/3}} \geq 0.387\right) = 1 - \Phi(0.387).$$
查表完成证明.

中心极限定理：例 0.112

例 0.112 某产品装箱, 每箱重量是随机的, 假设其期望是 50 公斤, 标准差为 5 公斤. 若最大载重量为 5 吨, 问每车最多可装多少箱能以 0.997 以上的概率保证不超载?

解答：例 0.112

题目: 如上所述.

解答:

- 假设最多可装 n 箱使得车子不超载, 用 X_i 表示第 i 箱重量 $(i \in [n])$, 由题意得 $\mathbb{E}[X_i] = 50$, $\mathbb{VAR}(X_i) = 25$, 设 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, 则有 $\mathbb{E}[X] = 50n$, $\mathbb{VAR}(X) = 25n$, 根据中心极限定理近似有

$$(X - 50n)/\sqrt{25n} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

- 根据标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 有

$$P(X \geq 5000) = P\left(\frac{X - 50n}{\sqrt{25n}} \geq \frac{5000 - 50n}{\sqrt{25n}}\right) = \Phi\left(\frac{5000 - 50n}{\sqrt{25n}}\right) > 0.977 = \Phi(2).$$

根据函数的单调性有

$$\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}} > 2 \Longrightarrow 1000n^2 - 2000n + 1000^2 > 4n.$$

求解可得 $n > 102.02$ 或 $n < 98.02$, 由题意可知 $n = 98$.

棣莫弗-拉普拉斯 (De Moivre-Laplace) 中心极限定理

定理 0.60 设随机变量 $X_n \sim \mathrm{Ber}(n, p)$, 则

$$Y_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

棣莫弗-拉普拉斯 (De Moivre-Laplace) 中心极限定理又称二项分布中心极限定理, 它是独立同分布中心极限定理的特殊情况, 也是最先被发现的中心极限定理.

该定理表明: 当试验次数 n 足够大时, 二项分布近似于正态分布.

棣莫弗-拉普拉斯 (De Moivre-Laplace) 中心极限定理

由棣莫弗-拉普拉斯 (De Moivre-Laplace) 中心极限定理可知:

- 当 n 非常大时, 随机变量 $X_n \sim \mathrm{Ber}(n, p)$ 满足 $X_n \overset{\text{近似}}{\sim} \mathcal{N}(np, np(1-p))$.

- 从而有如下近似估计

$$P[X_n \leq y] = P\left[\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{y - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \approx \Phi\left(\frac{y - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

- 针对上式, 可以考虑三种问题:
  - 已知 n 和 $P[X_n \leq y]$, 求 y
  - 已知 n 和 y, 求 $P[X_n \leq y]$
  - 已知 y 和 $P[X_n \leq y]$, 求 n

中心极限定理：例 0.113

例 0.113 车间有 200 台独立工作的车床, 每台工作的概率为 0.6, 工作时每台耗电 1 千瓦, 至少供电多少千瓦才能以 99.9% 的概率保证正常生产.

解答：例 0.113

题目: 车间有 200 台独立工作的车床, 每台工作的概率为 0.6, 工作时每台耗电 1 千瓦, 至少供电多少千瓦才能以 99.9% 的概率保证正常生产.

解答:

- 已知 n 和 $P[X_n \leq y]$, 求 y. 设 X 为车床数, 易知 $X \sim \textbf{Ber}(200, 0.6)$, 至少供电 y 千瓦. 根据棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理近似有 $X \sim \mathcal{N}(120, 48)$, 进一步有

  $$P[X \leq y] \geq 0.999 \Rightarrow P\left(\frac{X-120}{\sqrt{48}} \leq \frac{y-120}{\sqrt{48}}\right) \approx \Phi\left(\frac{y-120}{\sqrt{48}}\right) \leq 0.999 = \Phi(3.1)$$

  所以有 $\frac{y-120}{\sqrt{48}} \geq 3.1$, 求解可得 $y \geq 141$.

中心极限定理：例 0.114

例 0.114 系统由 100 个相互独立的部件组成, 每部件损坏率为 0.1, 至少 85 个部件正常工作系统才能运行, 求系统运行概率.

解答：例 0.114

题目: 系统由 100 个相互独立的部件组成, 每部件损坏率为 0.1, 至少 85 个部件正常工作系统才能运行, 求系统运行概率.

解答:

- 已知 n 和 y, 求 $P[X_n \leq y]$. 设 X 为损坏的部件数, 易知 $X \sim Ber(100, 0.1)$, 且 $\mathbb{E}[X] = 10$, $\mathbb{VAR}(X) = 9$. 根据棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理近似有 $X \sim \mathcal{N}(10, 9)$, 求系统运行概率为

$$P[X \leq 15] = P\left(\frac{X - 10}{\sqrt{9}} \leq \frac{15 - 10}{\sqrt{9}}\right) \approx \Phi(5/3).$$

中心极限定理：例 0.115

例 0.115 一次电视节目调查中调查 n 人, 其中 k 人观看了电视节目, 因此收看比例 k/n 作为电视节目收视率 p 的估计, 要以 90% 的概率有 $|k/n-p| \leq 0.05$ 成立, 需要调查多少对象?

解答：例 0.115

题目: 如上所述.

解答:

- 已知 y 和 $P[X_n \le y]$, 求 n. 设 X_n 表示 n 个调查对象中收看节目的人数, 则有 $X_n \sim$ Ber(n, p). 根据棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理近似有 $(X_n - np)/\sqrt{np(1-p)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 进一步有

$$P\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \le 0.05\right] = P\left[\frac{|X_n - np|}{n} \le 0.05\right] = P\left[\frac{|X_n - np|}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{0.05\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right]$$
$$= \Phi\left(\frac{0.05\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{0.05\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right).$$

- 对于标准正态分布函数有 $\Phi(-\alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$ 以及 $p(1-p) \le 1/4$, 于是有

$$P\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \le 0.05\right] = 2\Phi\left(\frac{0.05\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 > 2\Phi(\sqrt{n}/10) - 1 > 0.9.$$

所以 $\Phi(\sqrt{n}/10) \ge 0.95$, 查表解得 $n \ge 271$.

李雅普诺夫 (Lyapunov) 中心极限定理

上述随机变量之和的极限分布结果, 基于独立同分布的条件

- 在实际问题中随机变量 X_i 之间具有独立性是常见的, 但是很难说 X_i 是 "同分布" 的随机变量.

为使 $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 的极限分布是正态分布, 必须对 $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 的各项有一定的要求

- 要求各项 X_i 在概率意义下 "均匀地小", 使得 $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 不会因为其中某一项或某几项 X_i "突然变大" 或 "突然变小" 而发生 "突变"
- 我们可以通过 "限制 X_i 方差是有限的" 来达成以上要求

李雅普诺夫 (Lyapunov) 中心极限定理

定理 0.61 设独立随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 满足

$$\mathbb{E}[X_k] = \mu_k \ , \quad \mathbb{VAR}(X_k) = \sigma_k^2 > 0 \ .$$

记 $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. 若存在 $\delta > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[|X_k - \mu_k|^{2+\delta} \right] = 0$$

成立, 则有

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k]}{\sqrt{\mathbb{VAR}(\sum_{k=1}^n X_k)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

<u>Remarks</u>:

- 归一化方案: (随机变量的均值 - 期望的均值) / 随机变量的标准差.

中心极限定理小结

- 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理:
  随机变量独立且同伯努利/二项分布. 若 $X_n \sim B(n,p)$, 则
  $$X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

- 林德贝格-勒维中心极限定理:
  随机变量独立同分布. 若 $\mathbb{E}[X_k] = \mu$ 和 $\mathbb{VAR}(X_k) = \mathbb{VAR}^2$, 则
  $$\sum_{k=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} \mathcal{N}(n\mu, n\mathbb{VAR}^2)$$

- 李雅普诺夫定理:
  随机变量独立不同分布.

收敛方式小结 (思考题)

考虑 $X_n = f_n : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, 有如下四种收敛方式

- 一致收敛: $f_n \to f$
- 点态收敛: $f_n \xrightarrow{\cdot} f$
- 依概率收敛: $X_n \xrightarrow{P} X$
- 依分布收敛: $X_n \xrightarrow{d} X$

思考题: 这四者之间的关系是什么？并试图说明.