全概率公式与贝叶斯公式

一、作业 (提交时间：Oct. 8, 2024)

1. [25-7] 已知甲袋中装有 a 只红球, b 只白球; 乙袋中装有 c 只红球, d 只白球. 试求下列事件的概率:

(1) 合并两个口袋, 从中随机地取 1 个球, 该球是红球;

(2) 随机地取 1 个口袋, 再从该袋中随机地取 1 个球, 该球是红球;

(3) 从甲袋中随机地取出 1 个球放入乙袋, 再从乙袋中随机地取出 1 个球, 该球是红球.

2. [23-1] 对以往数据分析结果表明, 当机器运转正常时, 产品的合格率为 90%; 而当机器发生故障时, 其合格率为 30%, 机器开动时, 机器运转正常地概率为 75%.

(1) 求某日首件产品是合格品的概率;

(2) 已知某日首件产品是合格品, 求机器运转正常的概率.

3. [27-15] 学生在结束本周某课程的学习后, 他可能跟上课程也可能跟不上课程. 如果某周他跟上课程, 那么, 他下周跟上课程的概率为 0.9; 如果某周他没跟上课程, 那么, 他下周跟上课程的概率仅为 0.3. 假设在第一周上课前, 学生是跟上课程的, 求:

(1) 经过 2 周的学习, 他仍能跟上课程的概率;

(2) 经过 n 周的学习 $(n = 1, 2, \cdots)$, 他仍能跟上课程的概率.

4. [27-14] 某学生接连参加同一课程的两次考试, 第一次及格的概率为 p . 若第一次及格则第二次也及格的概率也为 p ; 若第一次不及格, 第二次及格的概率为 $p/2$.

(1) 若至少有一次及格则他能取得某种资格, 求能取得该资格的概率;

(2) 已知第二次已经及格, 求第一次也及格的概率.

5. [27-13] 假设乒乓球在未使用前称为新球, 使用后称为旧球. 现袋中有 10 个乒乓球, 其中 8 个为新球. 第一次比赛时从袋中任取 2 个球作为比赛用球, 比赛后将球放回袋中, 第二次比赛时再从袋中任取 2 个球作为比赛用球. 求:

(1) 第二次比赛时取出的球都是新球的概率;

(2) 已知第二次比赛取出的球都是新球, 求第一次比赛时取出的球也都是新球的概率.

二、课后提升

1. [23-3] 已知甲袋中装有 6 只红球, 4 只白球; 乙袋中装有 7 只红球, 3 只白球; 丙袋中装有 5 只红球, 5 只白球.

(1) 随机地取 1 个口袋, 再从该袋中随机地取 1 个球, 求该球是红球的概率;

(2) 已知取出的是红球, 求该球是取自甲袋的概率.

2. [24-4] 已知袋中装有 6 只黑球, 4 只白球. 抛掷一枚均匀的骰子, 掷出几点就从袋子中取出几个球, 求从袋子中取到的都是黑球的概率.

3. [24-5] 某厂生产的钢琴中有 70% 可以直接出厂. 剩下的钢琴经调试后, 其中 80% 可以出厂, 20% 被定为不合格品不能出厂. 现该厂生产 n 架钢琴 $(n \geq 2)$, 假定各钢琴的质量是相互独立的. 求:

(1) 任意 1 架钢琴能出厂的概率;

(2) 全部钢琴都能出厂的概率.

4. [24-5] 甲、乙、丙 3 门高炮同时相互独立的向敌机发射 1 枚炮弹, 它们命中敌机的概率以此为 0.7, 0.8, 0.9, 敌机被击中 1 弹而坠毁的概率为 0.1, 被击中 2 弹而坠毁的概率为 0.5, 而被 3 弹击中必定坠毁. 求:

(1) 敌机坠毁的概率;

(2) 已知敌机坠毁, 它在坠毁前只被击中 1 弹的概率.

5. [26-11] 甲乙两人对弈, 甲获胜的概率为 0.6, 乙获胜的概率为 0.4, 且获胜方得一分. 若一方分数超对方 2 分, 则对弈结束, 即为最终获胜. 求甲最终获胜的概率.

6. [26-10] 甲、乙两箱装有同种产品, 其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品, 乙箱中仅装有 3 件合格品. 先从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱, 再从乙箱中任取 2 件产品, 求从乙箱中取到 1 件合格品、1 件次品的概率.

7. [25-8] 发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号 “*” 和 “-” . 由于通信系统受到干扰, 当发出信号 “*” 时, 收报台未必收到 “*” , 而是分别以概率 0.8 和 0.2 收到信号 “*” 和 “-” ; 同样, 当发出信号 “-” 时, 收报台分别以概率 0.9 和 0.1 收到信号 “*” 和 “-” , 求:

(1) 收报台收到信号“*”的概率;

(2) 收报台收到信号“*”时, 发报台的确发出信号是“*”的概率.

8. [36-18] 某学生在做单选题，该题目有 4 个选项. 设定 (1) 该生知道该问题正确答案的概率仅有 0.2，(2) 如果该生不知道正确答案，就作随机猜测. 老师在阅卷时发现该生该题回答正确，请问该生确实知道该题的正确答案的概率.

三、思考题

1. 描述: 小明参加一次竞赛, 目前排名不理想, 分析其原因:

- 方法不够新颖的概率为 50%, 通过设计新方法后取得理想排名的概率为 50%,
- 程度代码有误的概率为 30%, 通过纠正代码后取得理想排名的概率为 60%,
- 数据不充分的概率为 20%, 通过采集更多数据后取得理想排名的概率为 80%,

问题：小明可以任意选择 (组合) 策略（可以使用一种，两种，或者三种方法)，求小明最后取得理想排名的概率.