连续型随机变量

一、作业 (提交时间：Oct. 29, 2024)

1. [41-5] 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-(1+x)e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$$

求 X 的密度函数, 并计算 $P(X\leq 1)$ 和 $P(X>2)$.

2. [42-7] 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}cx^3, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(1) 求常数 c 的值.

(2) 求 $P(-1<X<0.5)$.

(3) 求 X 的分布函数 $F(x)$.

3. [126-4] 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试求 $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}(X^{-2})$.

4. [130-3] 设随机变量 X 的服从参数为 λ 的指数分布. 求 $P(X>\sqrt{\mathbb{VAR}(X)})$.

5. [48-9] 设 X_1 , X_2 , X_3 是 3 个随机变量, 且 $X_1\sim\mathcal{N}(0,1)$, $X_2\sim\mathcal{N}(0,2^2)$, $X_3\sim\mathcal{N}(0,3^2)$, $p_j=P(-2\leq X_j\leq 2)$, $j=1,2,3$, 证明 $p_1>p_2>p_3$.

6. [46-1] 设随机变量 X 在区间 $(1,6)$ 上服从均匀分布, 求方程 $t^2+Xt+1=0$ 有实数根的概率.

7. [62-5.6] 设 X 为随机变量，若矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 0 & -2 & -X\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

的特征值全为实数的概率为 0.5. 判断下列情况的正确性.

(1) X 服从区间 [0,2] 上的均匀分布；

(2) X 服从二项分布 $B(2,0.5)$；

(3) X 服从正态分布 $N(0,1)$.

8. [75-12] 设 $g(x)$ 为连续型随机变量 X 取值的集合上的非负、不减、连续函数，且 $\mathbb{E}[g(x)]$ 存在，求证：对于任意 $\epsilon>0$，有

$$P(X>\epsilon)\leq\frac{\mathbb{E}[g(x)]}{g(\epsilon)}\ .$$

二、练习

1. [41-6] 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ a+b\arcsin x, & -1\leq x<1\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$$

(1) 当 a,b 取何值时 $F(x)$ 为连续函数?

(2) 求 $P\left(|X|<\frac{1}{2}\right)$.

(3) 求 X 的密度函数.

2. [126-5] 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对 X 相互独立重复地观察 4 次, 用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数. 求:

(1) X 的数学期望 $\mathbb{E}(X)$.

(2) Y 的数学期望 $\mathbb{E}(Y)$.

3. [130-5] 设 $X\sim\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$ 的密度函数, 求 $\mathbb{E}(|X|)$ 及 $\mathbb{VAR}(|X|)$.

4. [47-3] 设某类手机通用充电宝的充电时间 $X\sim e(1/6)$ (单位: 小时).

(1) 任取一块这类充电宝, 求 7 个小时之内能完成充电的概率.

(2) 某一块这类充电宝, 已经充电 3 个小时, 求能在 7 小时内完成充电的概率.

5. [48-10] 设某人上班所需时间 X 服从正态分布 $\mathcal{N}(50,100)$(单位: 分钟) 且 8 点上班.

(1) 求他能在一小时内到达工作单位的概率;

(2) 已知他早上 7 点从家出发, 现在是 7 点 30 分, 求他 8 点能到工作单位的概率;

(3) 一周 5 个工作日, 他每天早上 7 点从家出发, 求一周内都不迟到的概率.

6. [46-2] 设随机变量 X 的表示某游乐园内一主题商店从早晨开园到第一位游客到店等待的时间 (单位: 分钟), X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-0.4x}, & x\ge 0\end{cases}$$

求: (1)P(等待时间至多 3 分钟); (2)P(等待时间至少 4 分钟); (3)P(等待时间 3 分钟至 4 分钟); (4)P(等待时间恰好 2.5 分钟); (5)X 的密度函数 $f(x)$.

7. [47-4] 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布. 求 $P(Y\le 3\mid Y>2)$.

8. [47-5] 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=Ae^{-x^2+x}, -\infty<x<+\infty$. 利用正态分布的密度函数性质求未知参数 A 的数值.

9. [48-8] 设随机变量 X 服从 $\mathcal{N}(-1,16)$. 借助标准正态分布的分布函数表计算: (1)$P(X<3)$; (2)$P(X>-3)$; (3)$P(X<-5)$; (4)$P(-5<X<2)$; (5)$P(|X|<2)$; (6) 确定 a 使得 $P(X<a)=0.95$.

10. [77-5.41] 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 0.5，求 μ.

三、思考题

1. 求证定理 0.13，即若 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 对任意 $\epsilon>0$ 有

$$\begin{cases} P(X\ge\epsilon)\le\dfrac{1}{2}e^{-\epsilon^2/2}\\ P(|X|\ge\epsilon)\le\min\left(1,\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\epsilon}e^{-\frac{\epsilon^2}{2}}\right)\end{cases}$$