多维随机变量及其分布函数

一、作业 (提交时间：Nov. 12, 2024)

1. [75-1/81-1] 一个箱子中装有 100 件同类产品, 其中一、二、三等品分别有 70, 20, 10 件. 现从中随机抽取一件, 试求:

(1) (X_1, X_2) 的联合分布列, 其中

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{如果抽到 } i \text{ 等品} \\ 0, & \text{如果抽到非 } i \text{ 等品} \end{cases} \qquad i = 1, 2;$$

(2) 分别求 X_1, X_2 的边缘分布列.

2. [78-6/85-6] 设 (X, Y) 的联合密度函数

$$f(x,y) = \begin{cases} c(6-x-y)\ , & 0<x<2, 2<y<4 \\ 0\ , & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求常数 c 的值;

(2) 求概率 $P(X+Y<4)$;

(3) 求概率 $P(X<1 \mid X+Y<4)$;

(4) 计算 X, Y 的边缘密度函数.

3. [80-2/90-3] 设 (X, Y) 的服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 由直线 $y=-x$, $y=x$ 与 $x=2$ 所围成. 求:

(1) (X, Y) 的联合密度函数;

(2) 概率 $P(X+Y<2)$;

(3) X, Y 的边缘密度函数.

4. [87-10] 设区域 G 为: 由 $(0,0)$, $(1,1)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 为顶点的四边形与以 $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $(1,0)$, $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 为顶点的三角形合成, 而 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布. 求:

(1) (X, Y) 的联合密度函数;

(2) X, Y 的边缘密度函数.

二、练习

1. [76-2/82-2/89-2] 两名水平相当的棋手弈棋三盘. 设 X 表示某名棋手获胜的盘数, Y 表示他输赢盘数之差的绝对值. 假定没有和棋, 且每盘结果相互独立. 试求:

(1) (X, Y) 的联合分布列;

(2) 分别求 X, Y 的边缘分布列.

2. [79-7/85-7] 设 (X, Y) 的联合密度函数

$$f(x,y) = \begin{cases} ce^{-(x+2y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求常数 c 的值;

(2) 求概率 $P(X<1, Y>2)$;

(3) 求 X, Y 的边缘密度函数.

3. [78-5] 假设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布, 随机变量

$$X_k=\begin{cases}1, & Y>k\\ 0, & Y\le k\end{cases}\qquad k=1,2;$$

求 (X_1,X_2) 的联合分布列.

4. [79-8/86-8] 设 (X,Y) 的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}cxy, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中, 区域 $G=\{(x,y):0<y<2x \text{ 且 } 0<x<2\}$.

(1) 求常数 c 的值;

(2) 求概率 $P(X+Y<1)$;

(3) 求 X,Y 的边缘密度函数.

5. [80-1] 设 (X,Y) 服从以原点为圆心的单位圆上的均匀分布, 记

$$U=\begin{cases}1, & X+Y\le 0\\ 0, & X+Y>0\end{cases}$$

$$V=\begin{cases}1, & X-Y\le 0\\ 0, & X-Y>0\end{cases}$$

求 (X_1,X_2) 的联合分布列.

6. [82-1.2] 设二维连续型随机变量 (X_1,X_2) 与 (Y_1,Y_2) 的联合密度分别为 $p(x,y)$ 和 $g(x,y)$。令 $f(x,y)=ap(x,y)+bq(x,y)$, 要确保 $f(x,y)$ 是某个二维随机变量的联合密度函数, 则 a,b 需要满足何种数量关系?

7. [83-1.4] 盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球, 在其中任选 4 只球, 以 X 表示取到黑球的数量, 以 Y 表示取到红球的数量, 求 X 和 Y 的联合分布列.

8. [85-1.7] 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x\ , & 0\le x\le y\le 1\\ 0\ , & \text{otherwise}\end{cases}$$

求 $P(X+Y\le 1)$.

9. [87-2.2] 设离散型随机变量的分布列 且满足 $P(X_1X_2=0)=1$. 求 $P(X_1=X_2)$.

$X_i\ (i\in\{1,2\})$	-1	0	1
概率	0.25	0.50	0.25

10. [88-2.3] 设随机变量 $Y\sim U(0,3)$, 随机变量 X 满足

$$X_k=\begin{cases}0\ , & Y\le k\\ 1\ , & Y>k\end{cases}\quad (k=1,2)$$

求 (X_1,X_2) 的联合概率分布和边缘分布.

三、思考题

1. 证明：多项分布的边缘分布是二项分布.

2. 已知

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]\quad \text{和}\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\exp\left[-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]$$

请问该 Copula 函数应该如构造?