

多维随机变量的独立性及条件分布

一、作业 (提交时间: Nov. 19, 2023)

1. [76-3] 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布列为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X = 0\}$ 与 $\{X + Y = 1\}$ 相互独立, 求 a, b 的值.

2. [75-1/81-1/88-1] 一个箱子中装有 100 件同类产品, 其中一、二、三等品分别有 70, 20, 10 件. 已知 (X_1, X_2) 的联合分布列, 以及 X_1, X_2 的边缘分布列如上次作业题的第 1 题所得. 试求:

- (1) X_1, X_2 是否互相独立? 为什么?
- (2) 给定条件 $\{X_1 = 1\}$ 下 X_2 的条件分布列;
- (3) 给定条件 $\{X_2 = 0\}$ 下 X_1 的条件分布列;
- (4) 给定条件 $\{X_2 = 0\}$ 下 X_1 的条件分布函数 $F_{X_1|X_2}(x_1 | 0)$.

3. [86-9] 设 (X, Y) 的服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 由曲线 $y = \frac{1}{x}$ 以及直线 $y = 0, x = 1$ 与 $x = e^2$ 所围成. 求:

- (1) (X, Y) 的联合密度函数;
- (2) X, Y 的边缘密度函数;
- (3) X, Y 是否互相独立? 为什么?

4. [90-3] 设 (X, Y) 的服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 由直线 $y = -x, y = x$ 与 $x = 2$ 所围成. 已知 (X, Y) 的联合密度函数, 以及 X, Y 的边缘密度函数如上次作业题的第 3 题所得. 求:

- (1) 条件密度函数 $f_{X|Y}(x | 1)$ 和 $f_{X|Y}(x | y)$, 其中 $|y| < 2$;
- (2) 条件概率 $P(X \leq \sqrt{2} | Y = 1)$;
- (3) 给定条件 $\{Y = 1\}$ 下 X 的条件分布函数 $F_{X|Y}(x | 1)$;
- (4) 给定条件 $\{Y = y\}$ 下 X 的条件分布函数 $F_{X|Y}(x | y)$, 其中 $|y| < 2$.

5. [93-7] 设某班车起点站上客人数 X 服从 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为 p ($0 < p < 1$), 且中途下车与否相互独立. 以 Y 表示中途下车的人数. 求:

- (1) 发车时上车人数为 n 的条件下, 中途有 m 人下车的概率 $P(Y = m | X = n)$;
- (2) 二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律;
- (3) 证明 Y 服从 λp 的泊松分布. [提示: $P(Y = m) = \sum_{n=m}^{\infty} P(X = n)P(Y = m | X = n)$.]

二、练习

1. [83-3] 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布列为

X \ Y	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	α	β

当 α 与 β 取何值时 X, Y 相互独立?

2. [76-2/82-2/89-2] 两名水平相当的棋手弈棋三盘. 设 X 表示某名棋手获胜的盘数, Y 表示他输赢盘数之差的绝对值. 假定没有和棋, 且每盘结果相互独立. 已知 (X, Y) 的联合分布列, 以及 X, Y 的边缘分布列如上次练习的第 1 题所得. 试求:

- (1) X, Y 是否互相独立? 为什么?

(2) 给定条件 $\{Y = 1\}$ 下 X 的条件分布列;

(3) 给定条件 $\{X = 1\}$ 下 Y 的条件分布列.

3. [84-5] 已知随机变量 X, Y 的概率函数如下, 且 $P(XY = 0) = 1$. 试求: (1) (X, Y) 的联合分布列; (2) X, Y 是否互相独立? 为什么?

X	-1	0	1
概率	1/4	1/2	1/4

Y	0	1
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

4. [92-4] 设 (X, Y) 的联合密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求:

(1) 条件密度函数 $f_{X|Y}(x | 1)$ 和 $f_{X|Y}(x | y)$, 其中 $y > 0$;

(2) (X, Y) 的联合密度函数;

(3) 概率 $P(X < 1, Y > 2)$.

5. [93-6] 设随机变量 $X \sim E(1)$, 当已知 $X = x$ 时, $Y \sim U(0, x)$, 其中 $x > 0$. 试求 (X, Y) 的联合密度函数.

6. [92-3.3] 设二维随机变量 $(X, Y) \sim U(D)$, 其中 $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. 求条件概率

$$P\left\{X > \frac{1}{2} \mid Y = 0\right\}.$$

7. [95-4.3] 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} Axy^2, & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

求: X 和 Y 是否相互独立, 并证明.

8. [98-4.9] 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且服从 $U(0, 3)$. 求 $P(\max\{X, Y\} \leq 1)$.

三、思考题

1. 求证定理 0.17. 设二维随机变量 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$, 则

- 在 $Y = y$ 条件下随机变量 X 的服从正态分布

$$\mathcal{N}\left(\mu_x + \rho(y - \mu_y)\frac{\sigma_x}{\sigma_y}, (1 - \rho^2)\sigma_x^2\right),$$

- 在 $X = x$ 条件下随机变量 Y 的服从正态分布

$$\mathcal{N}\left(\mu_y + \rho(x - \mu_x)\frac{\sigma_y}{\sigma_x}, (1 - \rho^2)\sigma_y^2\right).$$