多维随机变量函数的分布

一、作业 (提交时间：Nov. 19, 2024)

1.[94-1] 已知 (X,Y) 的联合分布列如下

X \ Y	-2	-1	0	1	4
0	0.2	0	0.1	0.2	0
1	0	0.2	0.1	0	0.2

(1) 分别求 $U=\max(X,Y)$, $V=\min(X,Y)$ 的分布列;

(2) 试求 (U,V) 的联合分布列.

2. [97-7] 设 X 与 Y 是相互独立的随机变量, 且 $X\sim E(1)$, $Y\sim E(2)$, 求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的密度函数 $f_Z(z)$.
3. [98-8] 设随机变量 (X,Y) 是服从区域 $D=\{(x,y)|1\le x,y\le 3\}$ 上的二维均匀分布, 求 $Z=|X-Y|$ 的密度函数 $f_Z(z)$.
4. [100-11] 设某商店一天的需求量是一个随机变量 X, 它的密度函数为

$$f(x,)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

假定各天的需求量相互独立, 求该店两天的需求量 Y 的密度函数. 求密度函数时要求分别用分布函数法和卷积公式法两种方法进行计算.

5.[108-12] 设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}1/2, & -1<x<0\\ 1/4, & 0\le x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$Y=X^2$, $F(x,y)$ 为随机变量 (X,Y) 的联合分布函数, 求:

(1) Y 的密度函数 $f_Y(y)$;

(2) $F(-\frac{1}{2},4)$.

二、练习

1. [94-2] 设 X 与 Y 是相互独立的随机变量, 且它们都服从 $0-1$ 分布 $B(1,p)$. 记随机变量 Z 如下

$$Z=\begin{cases}1, & \text{如果}X+Y\text{为零或偶数}\\ 0, & \text{如果}X+Y\text{为奇数}\end{cases}$$

(1) 求 Z 的分布列;

(2) 求 (X,Z) 的联合分布列;

(3) 求 p 取何值时, X 与 Z 相互独立?

2. [99-10] 设 X 与 Y 是相互独立的随机变量, 且 $X\sim U(0,2)$, $Y\sim U(0,1)$, 求 $Z=XY$ 的密度函数 $f_Z(z)$.
3. [101-12] 设 X 与 Y 是相互独立的随机变量, 且 X 的分布列为

X	1	2
概率	0.3	0.7

而 Y 的密度函数为 $f_Y(y)$, 求随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

4. [98-9] 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

记 $Z=X-Y$, 求:

X	1	3
p	0.3	0.7

Y	2	4
p	0.6	0.4

(1) 概率 $P(Z<2)$;

(2) Z 的密度函数.

5.[102-3] 设 X 与 Y 是相互独立的随机变量, 且 $X\sim U(0,1)$, $Y\sim E(1)$, 求随机变量 $Z=2X+Y$ 的密度函数.
6. [101-5.1] 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的分布列分别为
求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布列.
7. [101-5.2] 设两个随机变量 X 和 Y 相互独立, X 的概率分布如下表所示, $Y\sim e(\lambda)$. 求 $Z=XY$ 的概率分布.

X	-1	1
p	0.5	0.5

8. [102-5.3] 假设随机变量 X_i $(i=1,2,3,4)$ 相互独立且同分布, 求行列式 X 的概率分布.

X_i	0	1
p	0.6	0.4

$$X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$$

9. [106-5.9] 设 (X,Y) 的联合分布是正方形区域 $G=[1,3]\times[1,3]$ 上的均匀分布. 求随机变量 $Z=|X-Y|$ 的概率密度函数.
10. [109-5.14] 设两个随机变量 X 和 Y 相互独立, X 的概率分布如下表所示, Y 的概率密度为 $f(y)$. 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

X	1	2
p	0.3	0.7

11. [135-6.45] 设某种型号的电子元件的寿命 (以小时计) 近似地服从 $\mathcal{N}(160,20^2)$, 随机地选择 4 只. 求其中没有一只寿命小于 180 小时的概率.