多维随机变量函数的期望及条件期望

一、作业 (提交时间：Dec. 3, 2024)

1.[128-8] 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合分布列如下

X \ Y	0	1	2
0	0.25	0.1	0.3
1	0.15	0.15	0.05

定义 $Z=\max(X,Y)$. 计算:

(1) X、Y 的期望 $\mathbb{E}[X]$、$\mathbb{E}[Y]$;

(2) X^2、Y^2 的期望 $\mathbb{E}[X^2]$、$\mathbb{E}[Y^2]$;

(3) Z 的期望 $\mathbb{E}[Z]$.

2.[b153-3] 从数字 $0,1,\ldots,n$ 中任取两个不同的数字, 求这两个数字之差的绝对值的数学期望.

3.[b155-8] 设 X 与 Y 均为服从 $U(0,1)$ 的独立的随机变量, 试证:

$$\mathbb{E}(|X-Y|^\alpha)=\frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)},\alpha>0.$$

4.[b180-11] 设 X 与 Y 相互独立, 分别服从参数为 λ_1、λ_2 的泊松分布, 试求 $\mathbb{E}(X|X+Y=n)$.

5.[b181-12] 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0<x,y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求 $\mathbb{E}(X|Y=0.5)$.

6.[b183-17] 设随机变量 $X\sim\mathcal{N}(\mu,1)$, $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$, 且 X 与 Y 相互独立, 令

$$I=\begin{cases}1, & Y<X\\ 0, & X\le Y\end{cases}$$

试证明:

(1) $\mathbb{E}(I|X=x)=\Phi(x)$;

(2) $\mathbb{E}[\Phi(X)]=P(Y<X)$;

(3) $\mathbb{E}[\Phi(X)]=\Phi(\mu/\sqrt{2})$.

二、练习

1. [128-9] 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

定义 $Z=\min(X,Y)$. 计算:

(1) X、Y 的期望 $\mathbb{E}[X]$、$\mathbb{E}[Y]$;

(2) X^2、Y^2 和 XY 的期望 $\mathbb{E}[X^2]$、$\mathbb{E}[Y^2]$、$\mathbb{E}[XY]$;

(3) Z 的期望 $\mathbb{E}[Z]$.

2.[b153-4] 设在区间 $(0,1)$ 上任取 n 个点, 求相距最远的两点间的距离的数学期望.

3.[b155-9] 设 X 与 Y 是独立同分布的随机变量, 且

$$P(X=i)=\frac{1}{m},i=1,2,3,\ldots.$$

试证:

$$\mathbb{E}(|X-Y|)=\frac{(m-1)(m+1)}{3m}$$

4.[b181-13] 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试在 $0<y<1$ 时, 求 $\mathbb{E}(X|Y=y)$.
5.[b182-16] 设 X 与 Y 是相互独立的随机变量, 且都服从参数为 λ 的指数分布. 令

$$Z=\begin{cases}3X+1, & X\geq Y\\ 6Y, & X<Y\end{cases}$$

分别利用多维随机变量函数的期望的定义及重期望的公式求 $\mathbb{E}(Z)$.
6.[b158-17] 某商店经销某种商品, 每周进货量 X 与顾客对该商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量, 且都服从区间 $(10,20)$ 上的均匀分布. 商店每售出一件该商品可获利润 1000 元; 若需求量超过了进货量, 可从其他商店调货, 但这时每售出一件该商品只获利润 500 元. 试求商店经销该商品每周的平均利润.
7. [144-1.14] 从甲地到乙地的旅游车上载有 20 位旅客. 旅游车自甲地开出，沿途有 10 个车站. 设每位旅客在各个车站下车是等可能的，如果到达一个车站没有旅客下车就不停车. 以 X 表示停车次数，求 $\mathbb{E}(X)$.
8. [145-1.16] 游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光. 电梯于每个整点的第 5 分钟、25 分钟和 55 分中从底层起行，假设一游客在早八点的第 X 分钟到达底层候梯处，且 X 在 [0,60] 上均匀分布，求游客等候时间的数学期望.
9. [149-2.6] 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2，求随机变量 $3X-2Y$ 的方差.
10. [152-2.14] 设一次试验成功的概率是 p，进行 100 次独立重复的试验. 当 $p=?$ 时，成功的标准差最大，并求其最大值.

多维随机变量函数的方差、协方差及相关系数

一、作业 (提交时间：Dec. 3, 2024)

1.[132-1] 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合分布列如下

X \ Y	-1	0	2
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	0
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

(1) 计算 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 与 $\sigma(X-2Y)$;

(2) 计算相关系数 $\rho(X,Y)$.

2.[134-3] 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x,y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 与相关系数 $\rho(X,Y)$.
3.[b160-21] 抛掷一枚骰子两次, 求其两次点数之和与点数之差的协方差.
4.[b161-24] 设 X 与 Y 是相互独立的随机变量, 且都服从参数为 λ 的泊松分布. 令

$$U=2X+Y,\qquad V=2X-Y$$

试求相关系数 $\rho(U,V)$.
5.[b167-37] 设 a 为区间 $(0,1)$ 上的一个定点, 随机变量 X 是服从 $(0,1)$ 上的均匀分布, Y 表示点 X 到 a 的距离. 问 a 取何值时 X 与 Y 不相关.

二、练习

1. [135-4] 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{16}{5}(x^2+\frac{xy}{2}), & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 与相关系数 $\rho(X,Y)$.
2.[b160-23] 重复抛掷一枚硬币 n 次, 以 X 与 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 试求协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 与相关系数 $\rho(X,Y)$.
3.[b163-30] 设 X 与 Y 是相互独立的随机变量, 且都服从参数为 λ 的指数分布. 令

$$U=4X-3Y,\qquad V=3X+Y$$

试求相关系数 $\rho(U,V)$.
4.[b164-31] 设 X_1 与 X_2 是相互独立的随机变量, 且都服从正态分布 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. 令

$$U=aX_1+bX_2,\qquad V=aX_1-bX_2$$

其中 a,b 为非零常数, 试求相关系数 $\rho(U,V)$.
5.[b164-33] 设二维随机变量 (X,Y) 服从区间 $D=\{(x,y):0<x<1,0<x<y<1\}$ 上的均匀分布, 求协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 与相关系数 $\rho(X,Y)$.
6. [158-3.7] 将一枚硬币重复投掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，求 X 和 Y 的相关系数.
7. [160-3.12] 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\ ,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

求

- 求 X 的期望和方差;
- 求 X 和 $|X|$ 的协方差，并回答 X 和 $|X|$ 是否不相关?
- 问 X 和 $|X|$ 是否独立？为什么?

8. [164-3.19] 设 (X,Y) 的协方差矩阵为

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 9\end{pmatrix}$$

求 ρ_{XY}.

三、思考题

设随机向量 $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^\top$ 和 $Y=(Y_1,Y_2,\ldots,Y_m)^\top$, 以及

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\sim\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu_x}\\ \boldsymbol{\mu_y}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma_{xx}} & \boldsymbol{\Sigma_{xy}}\\ \boldsymbol{\Sigma_{yx}} & \boldsymbol{\Sigma_{yy}}\end{pmatrix}\right),$$

则有

- 随机向量 X 和 Y 的边缘分布为 $X\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu_x},\boldsymbol{\Sigma_{xx}})$ 和 $Y\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu_y},\boldsymbol{\Sigma_{yy}})$
- 随机向量 X 和 Y 相互独立的充要条件是 $\boldsymbol{\Sigma_{xy}}=\mathbf{0}_{m\times n}$ (元素全为零的 $m\times n$ 矩阵)
- 在 $X=\boldsymbol{x}$ 的条件下, 随机向量 Y 的分布

$$Y\mid X=\boldsymbol{x}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu_y}+\boldsymbol{\Sigma_{yx}}\boldsymbol{\Sigma_{xx}^{-1}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x}),\boldsymbol{\Sigma_{yy}}-\boldsymbol{\Sigma_{yx}}\boldsymbol{\Sigma_{xx}^{-1}}\boldsymbol{\Sigma_{xy}})$$

- 在 $Y=\boldsymbol{y}$ 的条件下, 随机向量 X 的分布

$$X\mid Y=\boldsymbol{y}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu_x}+\boldsymbol{\Sigma_{xy}}\boldsymbol{\Sigma_{yy}^{-1}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu_y}),\boldsymbol{\Sigma_{xx}}-\boldsymbol{\Sigma_{xy}}\boldsymbol{\Sigma_{yy}^{-1}}\boldsymbol{\Sigma_{yx}})$$