参数估计 - 点估计

一、作业 (提交时间：Dec. 17, 2024)

1.[194-1] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a^2}(a-x), & 0 < x < a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 a 的矩估计量.

2.[195-4] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 未知, $\theta > 0$. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

3.[196-5] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中 θ 未知, $\theta > 0$. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

4.[197-7/201-5] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的分布列为

X	-1	0	1
概率	$\frac{\theta}{2}$	$1-\theta$	$\frac{\theta}{2}$

其中 θ 未知, $0 < \theta < 1$. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量, 并讨论 θ 的矩估计量和最大似然估计量的无偏性.

5.[199-1] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 $X \sim B(1,p)$, 其中 p 未知且 $0 < p < 1$, 证明 (1)X_1 是 p 的无偏估计; (2)X_1^2 不是 p^2 的无偏估计; (3) 当 $n \geq 2$ 时, X_1X_2 是 p^2 的无偏估计.

6.[200-3] 设总体 $X \sim U(\theta, \theta+1)$, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 证明:$\hat{\theta_1} = \bar{X} - \frac{1}{2}$, $\hat{\theta_2} = X_{(n)} - \frac{n}{n+1}$, $\hat{\theta_3} = X_{(1)} - \frac{1}{n+1}$ 都是 θ 的无偏估计.

7.[203-10] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 且总体 X 的期望 $\mathbb{E}[X] = \mu$, 方差 $\sigma(X) = \sigma^2$, 证明:$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i$ 是未知参数 μ 的无偏估计量, 也是一致性估计量.

二、练习

1.[194-2] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 其中总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 其中 λ 未知, $\lambda > 0$, 求 λ 的矩估计量和最大似然估计量.

2.[195-3] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - x^{-\theta}, & x \geq 1 \end{cases}$$

其中 θ 未知, $\theta > 1$. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

3.[196-6] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 服从几何分布, 其分布列为 $P(X = x; p) = p(1-p)^{x-1}$, $(x = 1, 2, \ldots)$. 其中 p 未知, $0 < p < 1$, 求 p 的矩估计量.

4.[197-8] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}, & x \geq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$. 求 θ 及 λ 的最大似然估计量.

5.[199-2] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\mu)}, & x > \mu \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $-\infty < \mu < +\infty$, μ 未知, 易知 μ 的最大似然估计量 $\hat{\mu}_1 = X_1$, 问 (1)$\hat{\mu}_1$ 是 μ 的无偏估计吗? 若不是请修正; (2)μ 的矩估计量 $\hat{\mu}_2$ 是 μ 的无偏估计吗? 是一致性估计量吗?

6.[200-4] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 选适当的值 c, 使得 $\hat{\sigma}^2 = c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计.

7.[202-8] 设 (X_1, X_2, X_3) 是取自总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 证明:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{2}{5}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{2}{5}X_3.$$

都是总体均值 μ 的无偏估计, 并进一步判断哪个估计量更有效.

参数估计–区间估计

一、作业 (提交时间：Dec. 17, 2024)

1.[203-1] 从应届高中毕业生中随机抽取了 9 人, 其体重分别为 (单位:kg): 65,78,52,63,84,79,77,54,60. 设体重服从正态分布 $X \sim \mathcal{N}(\mu, 49)$, 求平均体重 μ 的双侧 0.95 的置信区间.

2.[204-2] 某商店一年来的发票存根中随机抽取 25 张, 得到这 25 张发票的金额 (单位: 元) 分别为 $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$, 并由此算出 $\bar{x} = 78.5$, $s = 20$, 假定发票金额服从正态分布 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 和 σ^2 未知, 求 μ 和 σ^2 的双侧置信水平 0.9 的置信区间.

3.[204-5] 为考虑某种香烟的尼古丁含量 (单位:mg), 抽取了 10 支香烟并测得尼古丁的平均含量为 $\bar{x} = 0.25$, 设香烟的尼古丁含量 X 服从正态分布 $\mathcal{N}(\mu, 2.25)$, 求 μ 的单侧 0.95 置信上限.

4.[205-1] 某罐装加工厂有甲乙两条罐装生产线. 设罐装质量服从正态分布并且甲生产线与乙生产线互不影响. 已知甲生产线的罐头总体标准差 $\sigma_1 = 5$g, 从甲生产线中随机抽取 10 只罐头测得其平均质量 $\bar{x} = 501$g; 乙生产线的罐头总体标准差 $\sigma_2 = 4$g, 从乙生产线中随机抽取 20 只罐头测得其平均质量 $\bar{y} = 498$g. 求甲乙两条生产线的罐头质量均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的双侧置信水平 0.9 的置信区间.

5.[205-2] 假定甲乙两种柔光灯泡的使用寿命 X 和 Y(单位: 10^3h) 服从正态分布, 且由生产过程知道它们的方差相等但未知. 随机的抽取甲乙两种灯泡各 10 只, 得到数据 $\bar{x} = 2.33$, $\bar{y} = 0.75$; $\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 27.5$, $\sum_{i=1}^{10}(y_i - \bar{y})^2 = 19.2$, 求甲乙两种灯泡的使用寿命均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的双侧置信水平 0.95 的置信区间.

6.[b321-6] 在一批货物中随机抽取 80 件, 发现 11 件不合格品, 试求这批货物的不合格品率的置信水平为 0.9 的置信区间.

二、练习

1.[204-4] 设某种新型塑料的抗压力 X 服从正态分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 现对 4 个试验件做压力试验, 得到试验数据 (单位:10MPa), 并算出 $\sum_{i=1}^{4} x_i = 32$, $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 268$, 分别求 μ 和 σ 的双侧置信水平 0.9 的置信区间.

2.[b319-1] 某厂生产的化纤强度服从正态分布, 长期以来其标准差稳定在 $\sigma = 0.85$, 现随机抽取一个容量为 $n = 25$ 的样本, 测定其强度, 算得其样本均值 $\bar{x} = 2.25$, 试求这批化纤平均强度的置信水平为 0.95 的置信区间.

3.[b320-2] 总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知, 问样本容量 n 取多大时才能保证 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间长度不大于 k.

4.[209-7] 总体 X 中取出一组样本为:0.5, 1.25, 0.8, 2.0, 已知 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $\mathcal{N}(\mu, 1)$, 求 μ 的双侧 0.95 的置信区间.

5.[209-6] 为了得到某种鲜牛奶的冰点, 对其冰点进行了 21 次相互独立重复测试, 并算出其样本均值 $\bar{x} = -0.546$, 样本方差 $s^2 = 0.0015$, 若鲜牛奶的冰点服从正态分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

(1) 已知 $\sigma^2 = 0.0048$, 求 μ 的双侧 0.95 的置信区间.

(2) σ^2 未知时, 求 μ 和 σ^2 的双侧置信水平 0.95 的置信区间.

6.[205-3] 若从总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和总体 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中分别抽取容量为 $n_1 = 9$, $n_2 = 16$ 的样本, 经计算后有 $\bar{X} = 81$, $S_1^2 = 56$,$\bar{Y} = 72$, $S_2^2 = 52$.

(1) 已知 $\sigma_1^2 = 64$, $\sigma_2^2 = 49$, 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的 0.99 置信区间.

(2) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时, 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的 0.99 置信区间.

(3) 求 σ_1^2/σ_2^2 的 0.99 置信区间.