古典概型与几何概型

(题型构成)

September 10, 2024

本节提要

本节课的几个概念:

- 古典概型
- 超几何概型
- 几何概型

回忆: 例 0.6

例 0.12 (Poker Hands)

- Decks of 52 cards:
  - 13 ranks: 2, 3, 4, . . . , J, Q, K, A
  - 4 suits: S, H, C, D
- Gaming:
  - a one-pair hand consists of 5 cards

- **Questions**: the probability of a one-pair hand is
  - count less than point 12
  - all cards are “S”

回忆: 例 0.6

回到 Poker Hands 的例子:

- **Gaming**: a one-pair hand that draws 5 cards from 52 cards
- 这个游戏的特点:
  1. a one-pair hand consists of 5 cards, such as $\omega_i = \{2S, 3H, 4D, 6C, 10C\}$
     - 试验结果只有有限种可能, 即 $\binom{52}{5} = 2,598,960$
  2. computing the probability of any one-pair hand ω_i
     - 每种结果发生的可能性相同, 即 $P(\omega_i) = \frac{1}{2{,}598{,}960}$
- 这样的试验称为**等可能概型**, 即**古典概型 (classical)**.
  - w_i 也被称为基本事件
  - 若事件 A 包含 k 个基本事件, 则 $P(A) = \frac{k}{2{,}598{,}960}$

古典概型: 例 0.13

例 0.13 (comparison: 15-7) 将 n 个不同的球随机放入 N $(N \geq n)$ 个不同的盒子中, 每个盒子足够大, 可以容纳多个球。请问:

- 事件 A 表示恰有 n 个盒子且每盒一球
- 事件 B 表示指定的 n 个盒子中各有一球
- 事件 C 表示 n 个球都在同一个盒子里的概率
- 事件 D 表示 n 个球都在不同盒子里的概率
- 事件 E 表示指定一个盒子恰有 m 个球

求事件 A, B, C, D, E 发生的概率.

解答: 例 0.13

问题: 将 n 个不同的球随机放入 N $(N \geq n)$ 个不同的盒子。

- 基本事件的个数 N^n
- 事件 A 表示恰有 n 个盒子且每盒一球:
  球不动, 排盒子 $|A|_{\#} = (N)_n$
- 事件 B 表示指定的 n 个盒子中各有一球:
  仅需排列指定的 n 个球和盒子的关系即可, $|B|_{\#} = n!$
- 事件 C 表示 n 个球都在同一个盒子里的概率:
  选出这个盒子即可 $\binom{N}{1}$
- 事件 D 表示 n 个球都在不同盒子里的概率: D 同于 A
- 事件 E 表示指定一个盒子恰有 m 个球:
  先给这个盒子挑出球来 $\binom{n}{m}$, 再将剩下的 $n-m$ 个球分配到其他的 $N-1$ 个盒子里 (the latter is a sub-problem). 因此, 有 $\binom{n}{m}(N-1)^{n-m}$

古典概型: 例 0.14

例 0.14 (生日问题) 有 K 个人 $(K < 365)$, 每个人的生日等可能地出现于 365 天中的任意一天。

请问:

- 至少两人生日相同的概率
- 恰好有两人生日相同的概率 (思考 ing)

解答: 例 0.14

问题: 有 K 个人 $(K < 365)$, 每个人的生日等可能地出现于 365 天中的任意一天。

- 基本事件的个数 365^K
- "至少两人生日相同的概率" 的反问题 (逆问题): "K 个人在 365 天中完全不相同". 后者是一个排列问题: $(365)_K$. 所以, 原问题的势为 $365^K - (365)_K$
- "恰好有两人生日相同的概率": 首先选出这两个人 $\binom{K}{2}$, 选择这两人生在哪一天 $\binom{365}{1}$, 剩下的 $K-2$ 个人的生日在其他的 364 天里完全不相同 (the latter is a sub-problem of the first problem). 因此, 原问题的势为 $\binom{K}{2}\binom{365}{1}(364)_{K-2}$

超几何概率: 例 0.15

例 0.15 设一批 N 件产品中有 M 件次品.

- 现从 N 件产品中有放回地任选 n 件, 记事件 A 为 “取出的产品种恰有 m 件次品”, 求事件 A 的概率.

- 现从 N 件产品中无放回地任选 n 件, 记事件 B 为 “取出的产品种恰有 m 件次品”, 求事件 B 的概率.

后者被称为 超几何概率 (hypergeometric).

解答: 例 0.15

- “有放回”: 基本事件的个数 N^n, 取到 m 件次品 $\binom{n}{m}M^m$, 剩下的都是良品 $(N-M)^{n-m}$. 因此, $\binom{n}{m}M^m(N-M)^{n-m}$.

- “无放回”: 基本事件的个数 $\binom{N}{n}$, 取到 m 件次品 $\binom{M}{m}$, 剩下的都是良品 $\binom{N-M}{n-m}$. 因此, $\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}$.

思考: 例 0.16

例 0.16 (抽签问题) 袋中有 a 个不同的白球, b 个不同的红球, 假设有 k 个人依次随机

- 有放回地
- 无放回地

从袋中取一个球, 问第 i 个人 $(i \le k)$ 取出红球的概率?

提醒: 该问题是否是等可能概型?

解: 例 0.16

问题: 袋中有 a 个不同的白球, b 个不同的红球, 假设有 k 个人依次随机无放回地从袋中取一个球, 问第 i 个人 $(i \leq k)$ 取出红球的概率?

提问:

- 基本事件是什么?
- 如何计数该事件中所包含的基本事件个数?
- a, b, i, k 的大小关系会影响结果吗?
- 抽签的公平性

解答: 例 0.16

问题: 袋中有 a 个不同的白球, b 个不同的红球, 假设有 k 个人依次随机有放回地从袋中取一个球, 问第 i 个人 $(i \leq k)$ 取出红球的概率?

- 有放回的问题里, 第几个人取都是相互不影响的, 所以 $\frac{b}{a+b}$.

问题: 袋中有 a 个不同的白球, b 个不同的红球, 假设有 k 个人依次随机无放回地从袋中取一个球, 问第 i 个人 $(i \leq k)$ 取出红球的概率?

- 基本事件: $(a+b)_i$
- 第 i 个人一定会取到红球 b
- 我们现在需要讨论前 $i-1$ 个人怎么取? 该问题可以表述为 "前 $i-1$ 个人无放回地取 $a+b-1$ 个球, 这是原问题的子问题. $(a+b-1)_{i-1}$.
- 因此, $b(a+b-1)_{i-1}$. 因而, 可以得到概率 $\frac{b}{a+b}$.

拓展: 当 $a \leq i$ 或者 $b \leq i$ 时, 可能会出现 "第 i 个人必然取得或者一定不会取得红球" 的情况. 当前的技术进行计算有点麻烦, 可以通过计算机模拟来实现.

超几何概率: 例 0.17

例 0.17 (匹配问题) 将 n 对夫妻任意分成 n 组, 每组一男一女, 问至少有一对夫妻被分到同一组的概率是多少?

思考: 这个题和生日题的联系和区别在哪里?

解答: 例 0.17

问题: 将 n 对夫妻任意分成 n 组, 每组一男一女, 问至少有一对夫妻被分到同一组的概率是多少?

- **基本事件是什么?** $(n!)^2$ or $n!$
- **如何计数该事件中所包含的基本事件个数?**

$$\text{总数} = S(n) + \binom{1}{n} S(n-1) + \cdots + \binom{n-1}{n} S(1) + 1$$

  - $S(1,1) = 0$, $S(2) = 1$, $S(3) = 2, \ldots$
  - $P = 1 - \frac{S(n)}{\text{总数}}$
- Other way?

解答: 例 0.17

问题: 将 n 对夫妻任意分成 n 组, 每组一男一女, 问至少有一对夫妻被分到同一组的概率是多少?

- 基本事件的个数 $n!$
- 考虑 “1 对夫妻匹配成功” 的情况: 任取 1 对 $\binom{n}{1}$, 其余的任意排列 (子问题: $n-1$ 队夫妻任意分成 $n-1$ 组) $(n-1)!$
- 考虑 “2 对夫妻匹配成功” 的情况: 任取 2 对 $\binom{n}{2}$, 其余的任意排列 (子问题: $n-2$ 队夫妻任意分成 $n-2$ 组) $(n-2)!$
- ...
- 易发现, 上述事件满足容斥原理. 即

$$\sum_i |A_i|_\# - \sum_{i<j} |A_iA_j|_\# + \dots \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \dots$$

思考题: 例 0.18

例 0.18 (匹配问题) 将 n 对夫妻任意分成 n 组, 每组 2 人, 不限男女, 问至少有一对夫妻被分到同一组的概率是多少?

几何概型

古典概型考虑有限的样本空间, 即有限个等可能的基本事件, 在很多实际应用中受到限制.

接下来, 我们讨论另一种特殊的随机现象, 具有如下特征:

- **样本空间无限可测.** 样本空间包含无限不可列个样本点, 可以用几何图形 (如一维线段、二位平面区域、或三维空间区域等) 来表示, 其相应的几何测度 (如长度、面积、体积等) 是一个非零有限的实数
- **基本事件等可能性.** 每个基本事件发生的可能性大小相等, 从而使得每个事件发生的概率与该事件的几何测度相关, 与具体位置无关

称为**几何概型**.

几何概型与测度

定义 0.4 在一个测度有限的区域 Ω 内等可能性投点, 落入 Ω 内的任意子区域 A 的可能性与 A 区域的测度成正比, 与 A 的位置与形状无关, 这样的概率模型称之为几何概型.

事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

这里 $\mu(\cdot)$ 表示区域的测度.

几何概型: 例 0.19

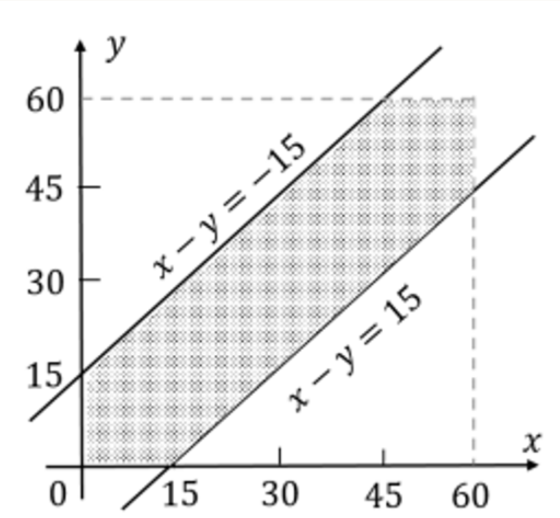
例 0.19 (时间约定问题) 两银行经理约定中午 12:00 - 13:00 到某地会面, 两人到达时间随机, 先到者等另一人 15 分钟后离开.求两人见面的概率.

几何概型: Monte-Carlo 模拟法

通过计算机模拟近似计算几何概型的概率. 具体地,

- 构造概率模型
- 进行计算机模拟试验
- 用统计的方法计算其估计值近似概率

```
n_A ← 0
For i = 1 : N
    x ← Random(0, 60)
    y ← Random(0, 60)
    If |x − y| ⩽ 15 then
        n_A ← n_A + 1
    Endif
Endfor
Return n_A/N
```



几何概型: 例 0.20

例 0.20 (公交车发车班次) 假设一乘客到达汽车站的时间是任意的, 客车间隔一段时间发班, 请规划最长的间隔发车时间, 才能确保乘客候车等待时间不超过 20 分钟的概率大于 80%.

解答：例 0.20

题目: 假设一乘客到达汽车站的时间是任意的, 客车间隔一段时间发班, 请规划最长的间隔发车时间, 才能确保乘客候车等待时间不超过 20 分钟的概率大于 80%.

解答:

- 设客车的间隔时间为 $l(l > 20)$, 选择特定的连续的 l 分钟为样本空间, 则乘客到达时间的样本空间为 $\Omega = \{x : 0 < x \leq l\}$. 用 B 表示乘客的等待时间超过 20 分钟的事件, 而事件 B 发生则可知乘客到达车站的时间在 0 与 $l - 20$ 之间, 即

$$B = \{x : 0 < x < l - 20\}.$$

- 可知事件 B 发生的概率小于或等于 20%, 即

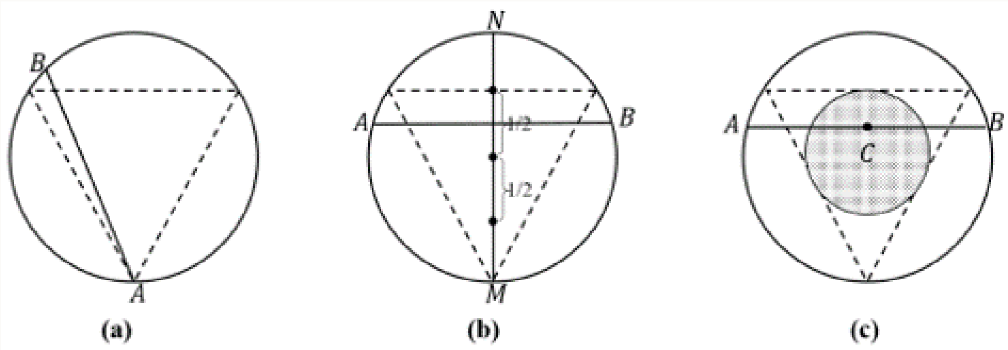
$$P(B) = \frac{l - 20}{l} \leq 0.2,$$

求解可得 $l \leq 25$.

几何概型: 例 0.21

例 0.21 (贝特朗 (Bertrand) 奇论) 在半径为 1 的圆内随机地取一条弦, 求其弦长超过该圆内接等边三角形边长 $\sqrt{3}$ 的概率.

解法: 贝特朗 (Bertrand) 奇论

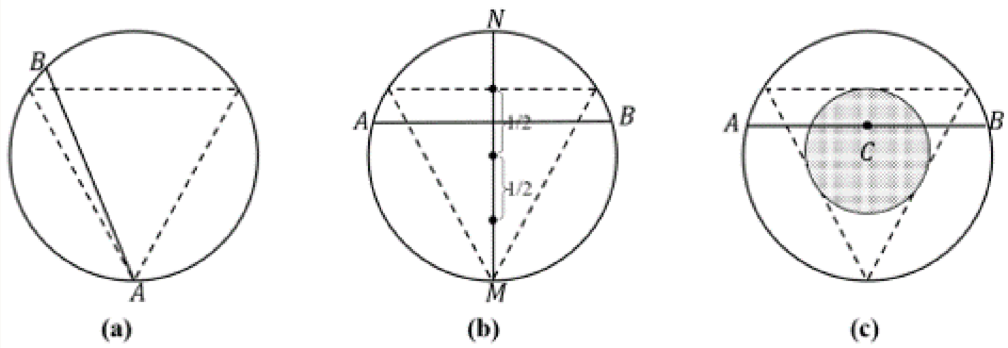


- **解法一:** 通过三角形任意一个顶点 A 做圆的切线, 由该顶点做一条弦, 弦的另一端在圆上任意一点 B. 此时概率为 $P = 1/3$.

- **解法二:** 在垂直于三角形任意一边的直径 MN 上随机取一个点, 并通过该点做一条垂直于该直径的弦 AB. 此时概率为 $P = 1/2$.

- **解法三:** 当弦的中点在阴影标记的圆内时, 弦 AB 的长度大于三角形的边长. 此时概率为 $P = 1/4$.

解法: 贝特朗 (Bertrand) 奇论



提示: 同一问题有三种不同答案, 究其原因在于圆内 “取弦” 时规定尚不够具体, 不同的 “等可能性假定” 导致了不同的样本空间.

- **解法一:** 概率为 $P = 1/3$ ——假设弦的端点在圆周上均匀分布.
- **解法二:** 概率为 $P = 1/2$ ——假设弦的中心在直径上均匀分布.
- **解法三:** 概率为 $P = 1/4$ ——假设弦的中心在圆内均匀分布.

Summary: 古典概型和几何概型的关系

本节课的几个概念:

- 古典概型——等可能性
- 超几何概型——有放回 vs 无放回
- 几何概型——样本空间与几何测度