案例分析: 组合计数

(十二重计数)

September 12, 2024

十二重计数

概率的计算往往与组合计数密切相关, 且组合计数在人工智能、计算机等领域具有广泛的应用。

十二重计数 (the twelvefold way), by G.- C.Rota (1932-1999).

- **问题简述:** 将 n 只球放入 m 个箱子, 有多少种不同的放法?

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 1 球 $(m \geq n)$	每个箱子至少 1 球 $(n \geq m)$
不同	不同	?	?	?
相同	不同	?	?	?
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

进展: 十二重计数

问题 1: 将 n 只不同的球放入 m 个不同的箱子: ?

问题 2: 将 n 只相同的球放入 m 个不同的箱子, 每个箱子至多 1 球 $(m \geq n)$: ?

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 **1** 球 $(m \geq n)$	每个箱子至少 **1** 球 $(n \geq m)$
不同	不同	?		
相同	不同		?	
不同	相同		?	?
相同	相同			

进展: 十二重计数

问题 1: 将 n 只不同的球放入 m 个不同的箱子: m^n

问题 2: 将 n 只相同的球放入 m 个不同的箱子, 每个箱子至多 1 球 $(m \geq n)$:

- **解答 2:** 从 m 个箱子里挑 n 个箱子装球, 每个箱子装一个球: $\binom{m}{n}$

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 **1** 球 $(m \geq n)$	每个箱子至少 **1** 球 $(n \geq m)$
不同	不同	m^n	?	?
相同	不同	?	$\binom{m}{n}$	?
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

进展: 十二重计数

问题 3: 将 n 只不同的球放入 m 个不同的箱子, 每个箱子至多 1 球 $(m \geq n)$

进展: 十二重计数

问题 3: 将 n 只不同的球放入 m 个不同的箱子, 每个箱子至多 1 球 $(m \geq n)$

解析 3:

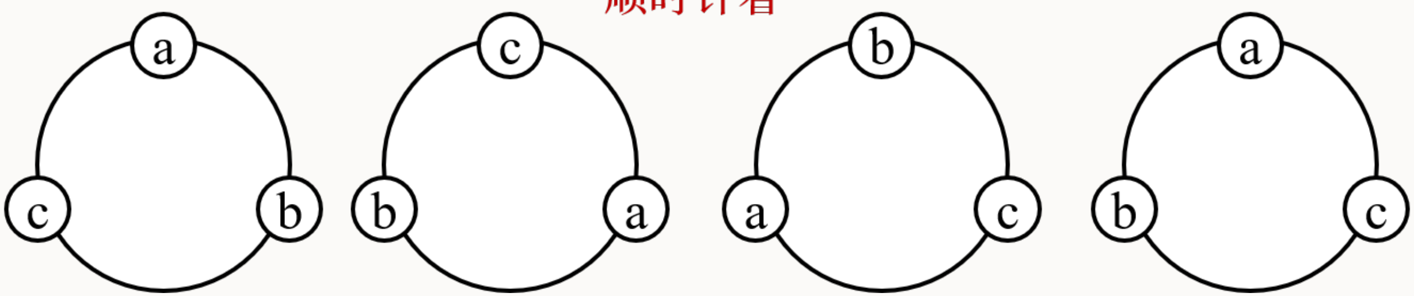
- 因为球和箱子都不相同，所以放法依赖于球、球的数量、箱子
- 从 m 个箱子里挑 n 个箱子进行排列装球, 每个箱子装一个球；其他的 $m-n$ 个箱子没有球所以不用区分
- 因此，计数为：

$$C_m^n\, n! = (m)_n$$

环排列

- **(直线) 排列:** n 个不同的元素中无放回取出 r 个元素进行排列;
  有 $(n)_r = n(n-1)\dots(n-r+1)$ 种不同的排法
- **全排列:** 若 $r = n$ 时; 有 $n!$ 种不同的排法
- **环排列:** n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素排成一个圆环

顺时针看



- 每一个环排列对应于 r 种不同的直线排列
- 不同的环排列的直线排列互不相同

环排列

定义 0.5 (环排列数) 从 n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素排成一个圆环, 有

$$\frac{(n)_r}{r}$$

种不同的排法, 称为 环排列数。这里， 记号 $(n)_r$ 表示 $C_n^r\, r!$

特别地, n 个不同元素的环排列数为 $(n-1)!$

例 0.22 将 n 对夫妻安排在一张圆桌, 任何夫妻两人需安排在一起, 有多少种不同的安排方法。

解法: 例 0.22

问题: 将 n 对夫妻安排在一张圆桌, 任何夫妻两人需安排在一起, 有多少种不同的安排方法?

- 基本事件的个数 $(2n-1)!$
- 考虑 "n 对夫妻排在一起" 的情况: $(n-1)!$
- 考虑 "每一对夫妻的座位顺序可以调换" 的情况: 2^n
- 因此, $|A|_{\#} = 2^n(n-1)!$

进展: 十二重计数

问题 3: 将 n 只不同的球放入 m 个不同的箱子, 每个箱子至多 1 球 $(m \geq n)$

解答 3:

- 从 m 个箱子里挑 n 个箱子进行排列装球, 每个箱子装一个球: $(m)_n$

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 1 球 $(m \geq n)$	每个箱子至少 1 球 $(n \geq m)$
不同	不同	m^n	$(m)_n$	?
相同	不同	?	$\binom{m}{n}$	?
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

进展: 十二重计数

问题 4: 将 n 只相同的球放入 m 个不同的箱子, 有多少种不同的放法?

考虑一个简单的子问题:

例 0.23 将 10 只相同的球放入 3 个不同的箱子, 有多少种不同的放法?

解析：例 0.23

问题: 将 10 只相同的球放入 3 个不同的箱子, 有多少种不同的放法?

解答:

- 该题目中，箱子是不同的，球是相同的，所以区别不同放法主要凭靠箱子中球的数量、箱子
- 设 3 个不同的箱子中依次有 x_1，x_2，x_3
- 条件：$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ 且 $x_1 + x_2 + x_3 = 10$
- 隔板法：在 $10 + 3 - 1$ 个空 (需要考虑箱子的顺序) 中插入 $3 - 1$ 个隔板即可

整数的有序分解

问题 4: 考虑将 n 只完全相同的球放入 m 个不同的箱子 $(n \geq m)$

解析 4:

- **转化:** 第一个箱子有 x_1 个球, 第二个箱子有 x_2 个球, $\ldots$, 第 m 个箱子有 x_m 个球, 其中 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 为非负的整数, 并满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

- n 只相同的球放入 m 个不同的箱子等价于上述方程的非负整数解

定理 0.1 (整数的有序分解: 非负解) 方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \quad \textbf{s.t.} \quad x_i \in \mathbb{N}, \quad i \in [m]$$

解的个数为 $\binom{n+m-1}{m-1}$。

进展: 十二重计数

问题 4: 将 n 只相同的球放入 m 个不同的箱子: 隔板法 $\binom{n+m-1}{m-1}$

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 **1** 球 $(m \geq n)$	每个箱子至少 **1** 球 $(n \geq m)$
不同	不同	m^n	$(m)_n$	?
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{m}{n}$	?
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

整数的有序分解: 例 0.24

问题 5: 考虑将 n 只完全相同的球放入 m 个不同的箱子 $(n \geq m)$，每个箱子至少有一个球

例 0.24 将 10 只相同的球放入 3 个不同的箱子, 每个箱子至少有一个球，有多少种不同的放法?

解析：例 0.24

问题: 将 10 只相同的球放入 3 个不同的箱子, 每个箱子至少有一个球，有多少种不同的放法?

解答:

- 该题目中，箱子是不同的，球是相同的，所以区别不同放法主要凭靠箱子中球的数量、箱子
- 设 3 个不同的箱子中依次有 x_1，x_2，x_3
- 条件：$x_1, x_2, x_3 \geq 1$ 且 $x_1 + x_2 + x_3 = 10$
- 转化：$y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 1, y_3 = x_3 - 1 \geq 0$ 且 $y_1 + y_2 + y_3 = 7$
- 隔板法：在 $7 + 3 - 1$ 个空中插入 $3 - 1$ 个隔板即可

整数的有序分解

问题 5: 考虑将 n 只完全相同的球放入 m 个不同的箱子 $(n \geq m)$，每个箱子至少有一个球

解析 5:

- **转化:** 第一个箱子有 x_1 个球, 第二个箱子有 x_2 个球, $\ldots$, 第 m 个箱子有 x_m 个球, 其中 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 为正整数, 并满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

- n 只相同的球放入 m 个不同的箱子等价于上述方程的正整数解

定理 0.2 (正整数解) 方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \quad \text{s.t.} \quad x_i \in \mathbb{Z}^+, \quad i \in [m]$$

解的个数为 $\binom{n-1}{m-1}$。

进展: 十二重计数

问题 5: 将 n 只相同的球放入 m 个不同的箱子, 每个箱子至少 1 球 $(n \geq m)$: 隔板法 $\binom{n-1}{m-1}$

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 **1** 球 $(m \geq n)$	每个箱子至少 **1** 球 $(n \geq m)$
不同	不同	m^n	$(m)_n$	?
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

整数的有序分解: 例 0.25

例 0.25 思考题 to 作业

- 推论: 求方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq n$ 非负整数解、正整数解的个数
- 问题: 在多项式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ 的展开式中, 一共有多少种不同的展开项?
- 证明: 根据隔板法的思路，尝试形式化定理 0.1 和定理 0.2 的证明

多重组合

- **组合:** n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素; 有 $\binom{n}{r}$ 种.
- **多重组合:** 将 n 个不同的元素分成 k 组, 组内元素无顺序关系; 假设每组分别有 $r_1, r_2, \ldots, r_k$ 个元素, 即 $n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$, 则有
$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} = \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\ldots\binom{r_k}{r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}$$
种不同的分组方法, 称为 $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$ 多重组合数.

Remark:

- 多组合数又称多项式系数, 因为
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n=r_1+r_2+\cdots+r_k} \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_k^{r_k}$$
- 组合数本质上也属于多重组合数.

多重排列

多重集: 假设集合中的元素可以重复, 且重复的元素之间不可分辨。

- 例如, 多重集 $A = \{1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4\}$.
- 多重集 A 有 k 类不同的元素, 每类元素的个数分别为 $r_1, r_2, \ldots, r_k$, 即 $n = r_1 + \cdots + r_k$。将多重集 A 中的所有元素排列成一排, 然后
  - 从 n 个位置中选取出 r_1 个位置放第一类元素
  - 再从剩下的从 $n - r_1$ 个位置中选取出 r_2 个位置放第二类元素
  - $\ldots$
  - 最后 r_k 个位置放第 k 类元素

  因此, A 有 $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$ 种不同的排列方法, 即多重组合数。

进展: 十二重计数

问题 6: n 只不同的球放入 m 个完全相同的箱子, 且每个箱子至少 1 球, 有多少种不同的放法?

考虑一个简单的子问题:

例 0.26 集合 $\{1,2,3\}$ 不同的划分数.

解答: 例 0.26

问题: 集合 $\{1, 2, 3\}$ 不同的划分数.

解答:

- 分成 1 个集合 $(m = 1)$: $\{1, 2, 3\}$, 1 种
- 分成 2 个集合 $(m = 2)$: $\{A\} \oplus \{B, C\}$, 3 种
- 分成 3 个集合 $(m = 3)$: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$, 1 种

总共 5 种情况.

进展: 十二重计数

问题 6: n 只不同的球放入 m 个完全相同的箱子, 且每个箱子至少 1 球, 有多少种不同的放法?

解答 6:

- 该题目中，球是不同的，箱子是相同的，所以区别不同放法主要凭靠球的不同和数量
- 递归法

进展: 十二重计数

问题 6: n 只不同的球放入 m 个完全相同的箱子, 且每个箱子至少 1 球, 有多少种不同的放法?

解答 6:

- 该题目中，球是不同的，箱子是相同的，所以区别不同放法主要凭靠球的不同和数量
- 递归法

定义 0.6 (第二类 Stirling 数) 将 n 个不同的元素分成 m 个非空的子集, 不同的划分数称为 第二类 Stirling 数, 记为 $S(n, m)$.

第二类 Stirling 数

$S(n,m)$: 将 n 个不同的元素分成 m 个非空的子集.

- 记 $S(0,0)=1$, $S(n,1)=1$, $S(n,n)=1$
- 当 $m>n\geq 1$ 时, 有 $S(n,m)=0$

定理 0.3 对 $n\geq m\geq 1$, 有

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1)$$

进而, 有

$$\begin{cases} S(n,k)=\dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}S(n,k)(x)_k=x^n\,, \quad (x)_k=x(x-1)\dots(x-k+1) \end{cases}$$

第二类 Stirling 数: 证明思路

对 $n \geq m \geq 1$, 有 $S(n,m) = mS(n-1,m) + S(n-1,m-1)$.

- 如果指定元素 A 单独占用一个集合, 那么有子问题 $S(n-1,m-1)$.
- 如果指定元素 A 并未单独占用一个格子, 将其分到 m 个集合中 $\binom{m}{1}$, 那么有子问题 $S(n-1,m)$.

$S(1,1)=1$	0	0	$\dots$	0
$S(2,1)=1$	$S(2,2)$	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	0
$S(n-1,1)=1$	$S(n-1,2)$	$\dots$	$S(n-1,m-1)$	0
$S(n,1)=1$	$S(n,2)$	$\dots$	$S(n,m-1)$	$S(n,m)$

进展: 十二重计数

问题 6: 将 n 只不同的球放入 m 个相同箱子

解答 6: 通过箱子中球、球的数量来识别箱子

- 每个箱子至少 1 球 $(n \geq m)$: $S(n, m)$
- 每个箱子至多 1 球 $(m \geq n)$: 有箱子有 1 个球, 有箱子没有球, 有球的箱子通过球来识别箱子: 1
- 无任何限制: 可以分解为 m 个子问题, $\sum_{k=1}^{m} S(n, k)$

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 1 球 $(m \geq n)$	每个箱子至少 1 球 $(n \geq m)$
不同	不同	m^n	$(m)_n$	?
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	$\sum_{k=1}^{m} S(n, k)$	1	$S(n, m)$
相同	相同	?	?	?

进展: 十二重计数

问题 7: 将 n 只相同的球放入 m 个相同的箱子，有多少种不同的放法?

考虑一个简单的子问题:

例 0.27 考虑整数 7 的各种无序划分.

解答: 例 0.27

问题: 考虑整数 7 的各种无序划分.

解答:

$m=1$	7	$p(7,1)=1$
$m=2$	$6+1,\ 5+2,\ 4+3$	$p(7,2)=3$
$m=3$	$5+1+1,\ 4+2+1,\ 3+3+1,\ 3+2+2$	$p(7,3)=4$
$m=4$	$4+1+1+1,\ 3+2+1+1,\ 2+2+2+1$	$p(7,4)=3$
$m=5$	$3+1+1+1+1,\ 2+2+1+1+1$	$p(7,5)=2$
$m=6$	$2+1+1+1+1+1$	$p(7,6)=1$
$m=7$	$1+1+1+1+1+1+1$	$p(7,7)=1$

进展: 十二重计数

问题 7: 将 n 只相同的球放入 m 个相同的箱子，有多少种不同的放法?

解答 7:

- 该题目中，球和箱子都是相同的，所以区别不同放法主要凭靠球的数量
- 无序拆分

整数的无序分拆

- **问题:** 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和
- **转化:** 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和, 等价于

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \quad \textbf{s.t.} \quad x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_m \geq 1$$

- **形式化:** 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和, 不同的划分数记为 $p(n, m)$
  - 记 $p(0, 0) = 1$, $p(n, 1) = 1$, $p(n, n) = 1$
  - 当 $m > n \geq 1$ 时, 有 $p(n, m) = 0$

定理 0.4 (递推关系) 对 $n \geq m \geq 1$, 有

$$\begin{cases} p(n, m) = p(n-1, m-1) + p(n-m, m) \\ p(n, m) = \sum_{i=1}^{m} p(n-m, i) \end{cases}$$

整数的无序分拆: 证明思路

对 $n \geq m \geq 1$, 有 $p(n,m) = p(n-1,m-1) + p(n-m,m)$.

- 如果有单元素的划分, 那么有子问题 “$n-1$ 个球装 $m-1$ 个箱子”:
- $p(n-1,m-1)$.
- 如果无单元素的划分, 默认所有箱子都有一个球了, 则所有划分子集内元素数量减 1, 那么有子问题 “把剩下的 $n-m$ 个球装 m 个箱子”:
- $p(n-m,m)$.

$p(1,1)=1$	0	0	$\ldots$	0
$p(2,1)=1$	$p(2,2)$	0	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	0
$p(n-1,1)=1$	$p(n-1,2)$	$\ldots$	$p(n-1,m-1)$	0
$p(n,1)=1$	$p(n,2)$	$\ldots$	$p(n,m-1)$	$p(n,m)$

整数的无序分拆

对正整数 $n \geq 1$ 和 $m \geq 1$, 有

$$\frac{1}{m!}\binom{n-1}{m-1} \leq p(n,m) \leq \frac{1}{m!}\binom{n-1+m(m-1)/2}{m-1}$$

给定 $m \geq 1$, 当 n 非常大或趋于无穷的极限中有

$$p(n,m) \approx \frac{n^{(m-1)}}{m!(m-1)!}$$

进展：十二重计数

问题 7: 将 n 只相同的球放入 m 个相同箱子

解答 7: 只能通过箱子中球的数量来识别箱子

- 每个箱子至少 1 球 $(n \geq m)$: $p(n, m)$
- 每个箱子至多 1 球 $(m \geq n)$: 有箱子有 1 个球, 有箱子没有球, 通过有无球来识别箱子: 1
- 无任何限制: 可以分解为 m 个子问题, $\sum_{k=1}^{m} p(n, k)$

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 1 球 $(m \geq n)$	每个箱子至少 1 球 $(n \geq m)$
不同	不同	m^n	$(m)_n$	$m!S(n, m)$
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{n}{m}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	$\sum_{k=1}^{m} S(n, k)$	1	$S(n, m)$
相同	相同	$\sum_{k=1}^{m} p(n, k)$	1	$p(n, m)$

总结：十二重计数

- 不同球 - 不同箱子：球、球数量、箱子——排列
- 相同球 - 不同箱子：球数量、箱子——组合
- 不同球 - 相同箱子：球、球数量——第二类 Stirling 数 S
- 相同球 - 相同箱子：球数量——无序分解 p

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 **1** 球 $(m \geq n)$	每个箱子至少 **1** 球 $(n \geq m)$
不同	不同	m^n	$(m)_n$	$m!S(n,m)$
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{n}{m}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	$\sum_{k=1}^{m} S(n,k)$	$\begin{cases} 1 & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}$	$S(n,m)$
相同	相同	$\sum_{k=1}^{m} p(n,k)$	$\begin{cases} 1 & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}$	$p(n,m)$