

试验结果数值化

- 有些随机试验的结果本身就是数值
 - 抛一枚骰子的点数: $1, 2, \dots, 6$
 - 国家一年出生的婴儿数: $1, 2, \dots, n$
- 有些试验结果看起来与数值无关, 但可以用数值来表示
 - 抛硬币: 用 1 表示正面朝上, 用 0 表示正面朝下
 - 针对一般事件 A , 可以定义

$$X = \begin{cases} 1, & \text{事件 } A \text{ 发生,} \\ 0, & \text{事件 } A \text{ 不发生.} \end{cases}$$

- 事件驱动的 (event-driven)

随机变量

试验结果用数值表示, 引入变量来表示随机事件——随机变量。

定义 0.15 设 Ω 是一个样本空间, 如果对每个基本事件 $\omega \in \Omega$, 都对应于一个实数 $X(\omega)$, 称这样的单射实值函数 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为 **随机变量 (random variable)**, 一般简写为 X .

随机变量与普通函数存在着本质的不同:

- $X(\omega)$ 随样本点 ω 的不同而取不同的值, 具有一定的随机性
- 各试验结果的出现具有一定的概率, X 的取值具有统计规律性

通过随机变量来描述随机现象或随机事件, 可以利用各种数学分析工具, 通过对随机变量的研究来揭示随机现象.

随机变量

根据取值类型, 可以将随机变量进行分类:

- 离散型随机变量: X 的取值是有限的、无限可列的

- 抛一枚骰子的点数: $1, 2, \dots, 6$ —— 有限的

X	1	2	3	4	5	6
-----	---	---	---	---	---	---

- 国家一年出生的婴儿数: $1, 2, \dots, n$ —— 有限的或者无限可列的

X	1	2	...	n	...
-----	---	---	-----	-----	-----

- 非离散型随机变量: X 的取值是无限不可列的

提纲：离散型随机变量

- 分布列
- 数字特征
 - 期望
 - 函数期望 (Jensen 不等式)
 - 方差
- 常见的离散型随机变量和分布
 - 0-1 分布：伯努利试验、分布列、数字特征
 - 二项分布：分布列、数字特征
 - 泊松分布：分布列、数字特征
 - 几何分布：分布列、无记忆性、数字特征
 - 负二项分布：分布列、数字特征

Ch03: 离散型随机变量

Review of Discrete Random Variable - 1

October 8, 2024

离散型随机变量 – 分布列

分布列包含随机变量的取值和概率, 可以完全刻画其概率属性

X	x_1	x_2	\dots	x_n	\dots
P	p_1	p_2	\dots	p_n	\dots

- 分布列: 对于 X 所有的取值 x_k , 其概率为 $p_k = P(X = x_k)$
- 性质:
 - 对于任意的 k 都有 $p_k \geq 0$
 - $\sum_k p_k = 1$

分布列：例 0.64

例 0.64 设随机变量 X 的分布列为

$$P(X = k) = \frac{c}{4^k} \quad \text{且} \quad k \geq 0.$$

求概率 $P(X = 1)$.

解答：例 0.64

题目：设随机变量 X 的分布列为

$$P(X = k) = \frac{c}{4^k} \quad \text{且} \quad k \geq 0.$$

求概率 $P(X = 1)$.

解答：

- 根据概率的完备性有

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c}{4^k} = \frac{4}{3}c,$$

可得 $c = 3/4$, 从而得到 $P(X = 1) = 3/16$.

分布列：例 0.65

例 0.65 给定常数 $\lambda > 0$, 随机变量 X 的分布列为

$$P(X = k) = \frac{c\lambda^k}{k!} \quad \text{且} \quad k \geq 0.$$

- 求概率 $P(X = 1)$;
- 求概率 $P(X > 2)$.

解答：例 0.65

题目：给定常数 $\lambda > 0$ ，随机变量 X 的分布列为

$$P(X = k) = \frac{c\lambda^k}{k!} \quad \text{且} \quad k \geq 0.$$

求概率 $P(X = 1)$ 和 $P(X > 2)$ 。

解答：

- 根据概率的完备性有

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = c \cdot e^{\lambda},$$

可得 $c = e^{-\lambda}$ 。

- 进一步得到 $P(X = 1) = \lambda e^{-\lambda}$ ，及

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - p_0 - p_1 - p_2 = 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda + \lambda^2/2)$$

离散型随机变量 – 数字特征

分布列 能一目了然的看出离散型随机变量得取值及相应的概率.

- 例 0.64 及例 0.65

针对一个具体的问题, 完全求解出概率分布列可能不是一件容易的事.

- 统计某个区域的工资水平, 包括不同职业不同人群得收入——**不容易完全求解**
- 在例 0.65中, 求解 $P(X > 2)$ 不需要依赖于 $P(X = 3)$, $P(X = 4)$, ...
——**不需要完全求解**

通过一些指标来描述离散随机变量的总体特征, 或称为**统计量**.

- 期望、方差, 相关系数, 矩等.

离散型随机变量 – 期望

定义 0.16 设随机变量 X 的分布列为 $P(X = x_k) = p_k (k \geq 1)$. 若级数 $\sum_k p_k x_k$ 绝对收敛, 则称级数 $\sum_k x_k p_k$ 为随机变量 X 的**期望**, 记为 $\mathbb{E}(X)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k x_k p_k$$

备注:

- 期望是常量不是变量.
- 期望反映随机变量 X 的平均值.
- 期望的性质:
 1. 设 $c \in \mathbb{R}$, 若随机变量 $X \equiv c$, 则 $\mathbb{E}(X) = c$, 不考虑其分布列.
 2. 线性: 对随机变量 X 及常数 $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$
- 除非特别说明, 通常直接利用定义计算期望, 不考虑绝对收敛性。

期望：例 0.66

例 0.66 随意抛掷一枚骰子, X 为掷出的点数. 试求 $\mathbb{E}(X)$.

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

解答：例 0.66

题目：随意抛掷一枚骰子， X 为掷出的点数. 试求 $\mathbb{E}(X)$.

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

解答：

- 根据期望的定义有

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{7}{2}.$$

期望：例 0.67

例 0.67 设随机变量 X 的分布列为

$$P\left(X = \frac{(-2)^k}{k}\right) = \frac{1}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}^+,$$

求期望 $\mathbb{E}(X)$.

解答：例 0.67

题目：设随机变量 X 的分布列为 $P\left(X = \frac{(-2)^k}{k}\right) = \frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}^+$, 求期望 $\mathbb{E}(X)$.

解答：

- 根据期望的定义有

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(X = \frac{(-2)^k}{k}\right) \frac{(-2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2.$$

- 但是

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P\left(X = \frac{(-2)^k}{k}\right) \left|\frac{(-2)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \rightarrow +\infty.$$

该级数并非绝对收敛, 其级数和可能随着求和顺序的改变而改变, 级数和并非唯一的数值, 故该随机变量的期望 $\mathbb{E}(X)$ 不存在.

期望：例 0.68

例 0.68 有 n 把钥匙只有一把能打开门。随机选取一把试开门, 若打不开则除去, 求打开门次数的平均数.

解答：例 0.68

题目：有 n 把钥匙只有一把能打开门。随机选取一把试开门，若打不开则除去，求开门次数的平均数。

解答：

- 设随机变量 X 表示尝试开门的次数，其分布列为

$$P(X = k) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \cdot \frac{1}{n - k + 1} = \frac{1}{n} \quad k \in [n].$$

- 根据期望的定义有

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{k}{k-1}}{n} = \frac{(1+n)n}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

期望：例 0.69

例 0.69 有 4 个盒子编号分别为 1, 2, 3, 4。将 3 个不同的球随机放入 4 个盒子, 用 X 表示有球盒子的最小号码, 求 $\mathbb{E}(X)$.

解答：例 0.69

题目：有 4 个盒子编号分别为 1, 2, 3, 4。将 3 个不同的球随机放入 4 个盒子, 用 X 表示有球盒子的最小号码, 求 $\mathbb{E}(X)$.

解答:

• 分布列:

- $X = 1$ 时, 分 1 号盒子中有 1 个球、2 个球、3 个球三种情况讨论 $C_3^1 3^2 + C_3^2 C_3^1 + 1$
- $X = 2$ 时, 分 2 号盒子中有 1 个球、2 个球、3 个球三种情况讨论 $C_3^1 2^2 + C_3^2 C_2^1 + 1$
- $X = 3$ 时, 分 3 号盒子中有 1 个球、2 个球、3 个球三种情况讨论 $C_3^1 1^2 + C_3^2 C_1^1 + 1$
- $X = 4$ 时, 化简为子问题“三个球都放在编号为 4 的盒子里”

X	1	2	3	4
P	$\frac{37}{4^3}$	$\frac{19}{4^3}$	$\frac{7}{4^3}$	$\frac{1}{4^3}$

• 期望: $\mathbb{E}(X) = \frac{100}{64} = \frac{25}{16}$

期望：不放回-例 0.70

例 0.70 一个口袋中有 5 个球, 在这 5 个球上分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5. 从袋中**不放回**任取 3 个球, 每个球被取到的可能性相同, 求取到的球上标明的最大数字 X 的分布列及其期望.

解答：例 0.70

题目：一个口袋中有 5 个球，在这 5 个球上分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5. 从袋中不放回任取 3 个球，每个球被取到的可能性相同，求取到的球上标明的最大数字 X 的分布列及其期望.

X	3	4	5
P	$\frac{1}{C_5^3}$	$\frac{C_3^2}{C_5^3}$	$\frac{C_4^2}{C_5^3}$

$$\mathbb{E}(X) = 3 \cdot \frac{1}{C_5^3} + 4 \cdot \frac{1}{C_5^3} + 5 \cdot \frac{1}{C_5^3} = \frac{9}{2}.$$

计算: 函数期望

定理 0.6 设离散型随机变量 X 的分布列是 $P(X = x_k) = p_k > 0 (k \geq 1)$.

对任意的实值函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. 若级数 $\sum_k g(x_k)p_k$ 绝对收敛, 则有

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_k g(x_k)p_k$$

Remarks:

- 求 $Y = g(X)$ 的期望, 无需知道 Y 的分布列. 使用 X 的分布列即可计算 $\mathbb{E}(Y)$.
- 定理 0.6 及期望的线性性.

计算: 函数期望

设离散型随机变量 X 的分布列是 $P(X = x_k) = p_k > 0 (k \geq 1)$, 以及 $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是实值函数 ($i \in [n]$). 若级数 $\sum_k g_i(x_k)p_k$ 绝对收敛, 则对任意常数 c_1, c_2, \dots, c_n , 有

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n c_i g_i(X) \right] = \sum_i c_i \mathbb{E}[g(x_k)] = \sum_i \sum_k c_i g_i(x_k) p_k$$

举例: $\mathbb{E}[X^2 + X + \sin X + 4] = ?$

函数期望：例 0.71

例 0.71 随意抛掷一枚骰子, X 为掷出的点数. 试求

- 期望 $\mathbb{E}(X)$
- 函数期望 $\mathbb{E}[g(X)]$, 其中 $g(x) = x^2$
- 函数期望 $\mathbb{E}[f(X)]$, 其中 $f(x) = x^2 + 3x + 1$

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

解答：例 0.71

根据题干求解新的分布列

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$g(x) = X^2$	1	4	9	16	25	36
$3X$	3	6	9	12	15	18
$f(x) = x^2 + 3x + 1$	5	11	19	29	41	55

或者

$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[X^2 + 3X + 1] = \mathbb{E}[X^2] + 3\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[1]$$

凸函数和凹函数

定义 0.17 (凸函数) 设函数 $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 和 $\lambda \in [0, 1]$. 若

$$g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2),$$

则称 g 是定义在 $[a, b]$ 的凸函数 或者下凸函数.

定义 0.18 (凹函数) 设函数 $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 和 $\lambda \in [0, 1]$. 若

$$g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2),$$

则称 g 是定义在 $[a, b]$ 的凹函数 或者上凸函数.

Jensen 不等式

定理 0.7 对随机变量 $X \in [a, b]$ 和若实值函数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是凸函数, 实值函数 $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是凹函数, 则有

$$f[\mathbb{E}(X)] \leq \mathbb{E}[f(X)]$$

和

$$g[\mathbb{E}(X)] \geq \mathbb{E}[g(X)]$$

结论:

$$(\mathbb{E}(X))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$$

$$e^{\mathbb{E}(X)} \leq \mathbb{E}[e^X]$$

$$\ln \mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}[\ln X]$$

离散型随机变量 – 方差

定义 0.19 设随机变量 X 的分布列为 $P(X = x_k) = p_k > 0 (k \geq 1)$. 若期望 $\mathbb{E}(X)$ 和

$$\mathbb{E} \left[(X - \mathbb{E}(X))^2 \right] = \sum_{k \geq 1} p_k \left(x_k - \sum_k p_k x_k \right)^2,$$

存在, 则称 $\mathbb{E} (X - \mathbb{E}(X))^2$ 为随机变量 X 的**方差**, 记为 $\text{VAR}(X)$. 称

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{VAR}(X)} \quad \text{或} \quad \mathbb{D}(X) = \sqrt{\text{VAR}(X)}$$

为**标准差**.

Remarks:

- 方差是常量而不是变量.
- 方差反映随机变量 X 与其期望 $\mathbb{E}(X)$ 的偏离程度.

离散型随机变量方差的性质

1. $\text{VAR}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$
2. 设 $c \in \mathbb{R}$ 是常数, 若随机变量 $X \equiv c$, 则 $\text{VAR}(X) = 0$
3. 对随机变量 X 和常数 $a, b \in \mathbb{R}$, 有 $\text{VAR}(aX + b) = a^2 \text{VAR}(X)$
4. 方差不具有线性性:

$$\text{VAR}(f(X) + g(X)) \neq \text{VAR}(f(X)) + \text{VAR}(g(X)), \text{ for } f, g \in \mathcal{C}$$

5. 对随机变量 X 和常数 a , 有 $\text{VAR}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 \leq \mathbb{E}(X - a)^2$
6. Bhatia-Davis 不等式: 对随机变量 $X \in [a, b]$, 有

$$\text{VAR}(X) \leq (b - \mathbb{E}(X))(\mathbb{E}(X) - a) \leq \frac{(b - a)^2}{4}$$

数字特征：例 0.72

例 0.72 某人有一笔资金，可投入两个项目：住房地产和商铺地产，其收益都与市场状态相关。若把未来市场划分为好、中、差三个等级，其发生的概率分别为 0.2, 0.7, 0.1。通过调查，该投资者认为投资于住房地产的收益 X 和投资商铺地产的收益 Y 的分布列如下表所示，请问投资者该如何投资？

X	11	3	-3
Y	11	3	-3
P	0.2	0.7	0.1

数字特征：例 0.72

问题：

X	11	3	-3
Y	11	3	-3
P	0.2	0.7	0.1

解答：

- 这个问题要综合考察两个投资项目收益的期望和方差
- 先考察期望

$$\mathbb{E}(X) = 11 \times 0.2 + 3 \times 0.7 + (-3) \times 0.1 = 4$$

$$\mathbb{E}(Y) = 6 \times 0.2 + 4 \times 0.7 + (-1) \times 0.1 = 3.9$$

- 再来考察方差

$$\text{VAR}(X) = (11 - 4)^2 \times 0.2 + (3 - 4)^2 \times 0.7 + (-3 - 4)^2 \times 0.1 = 15.4$$

$$\text{VAR}(Y) = (6 - 3.9)^2 \times 0.2 + (4 - 3.9)^2 \times 0.7 + (-1 - 3.9)^2 \times 0.1 = 3.29$$

- 如何抉择呢？

数字特征：例 0.73

例 0.73 假设有 10 只同种电器元件，其中有两只不合格品。装配仪器的时候，从这批原件中任取一只，如果是不合格的产品，则扔掉重新任取一只；如果仍是不合格的产品，则继续扔掉再任取一支。求取得合格品之前，已取到的不合格品数的方差。

数字特征：例 0.73

题干：假设有 10 只同种电器元件，其中有两只不合格品。装配仪器的时候，从这批原件中任取一只，如果是不合格的产品，则扔掉重新任取一只；如果仍是不合格的产品，则继续扔掉再任取一支。求取得合格品之前，已取到的不合格品数的方差。

解答：

- 已知 $P(X = 0) = 4/5, P(X = 1) = 8/45, P(X = 2) = 1/45$
- 则 $\mathbb{E}(X) = 2/9, \mathbb{E}(X^2) = 4/15$
- 所以方差 $\text{VAR} = 88/405 \approx 0.2173$