第 1 章　随机事件与概率

对自然界和人类社会存在的各种现象进行观察, 会发现有一类现象在一定条件下是必然发生的, 常被称为 **必然现象**, 又称 **确定性现象**. 例如, 太阳从东边升起; 成熟的苹果会从树上掉下来; 在标准大气压下, 水在 0°C 以下会结冰, 加热到 100°C 以上会沸腾; 平面三角形两边之和大于第三边; 等等. 这些现象发生的条件与结果之间具有确定性关系, 可用确切的数学函数进行描述.

然而在自然界和人类社会也往往存在着另一类不确定的现象. 例如, 我们今晚能否观察到流星; 随意投掷一枚硬币, 可能正面朝上, 也可能反面朝上; 当你穿过马路时, 遇见的信号灯可能是绿色, 也可能是红色; 两位相恋的人最终能否走在一起; 等等. 这些现象在一定条件下可能出现这种结果, 也可能出现那种结果, 出现的结果并不唯一, 而事先不能确定哪种结果会出现, 常被称为 **随机现象**, 这类现象发生的条件与结果之间具有不确定性关系, 无法通过确切的数学函数进行刻画.

随机现象尽管在一次观察中无法确定哪种结果发生, 表现出不确定性或偶然性. 然而经过人们长期的研究后发现: 在大量重复的实验中, 随机现象的结果却表现出固有的规律性, 即 **统计规律性**. 例如多次重复投掷一枚硬币, 得到的正面朝上的次数和反面朝上的次数几乎总是差不多. 因此随机现象通常表现出二重属性:

- **偶然性**: 对随机现象进行一次观察, 其结果表现出不确定性;
- **必然性**: 对随机现象进行大量重复观察, 其结果呈现出固有的统计规律性.

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科, 应用几乎遍及所有的科学技术领域、行业生产、国民经济生活等, 如法国著名数学家拉普拉斯 (P. S. Laplace, 1794-1827) 所言: “对生活的大部分, 最重要的问题实际上都是概率问题”. 图灵奖得主 Y. LeCun 在其自传中指出: “历史上大多数重要成果的出现都是偶然事件... 所有的努力都是为了提高概率”. 而对现实生活中的每个人而言: 所有的努力都是为了提高成功的概率.

1.1 随机事件及其运算

为研究和揭示随机现象的规律, 通常需要在相同的条件下重复进行一系列实验和观察, 常被称为 **随机试验**, 或简称为 **试验**. 一般用 E 或 E_1, E_2, $E_3, \ldots$ 表示, 本书所提及的试验均是随机试验. 下面给出一些随机试验的例子:

E_1: 随意抛一枚硬币, 观察正面朝上还是反面朝上.

E_2: 随意抛一枚骰子, 观察出现的点数.

E_3: 统计某地区一年内出生的婴儿数量.

E_4: 随机选取一盏电灯, 测试其寿命.

这些试验具有一些共有的特点: 试验在相同的条件下可重复进行, 具有多种结果, 我们已知每次试验所有可能的结果, 但在每次试验之前不确定出现哪种结果. 例如抛硬币有正面/反面朝上两种结果, 在相同的条件下可以重复进行, 且每次试验前不确定正面/反面朝上. 概括而言, 随机试验具有以下三个特点:

- **可重复**: 在相同的条件下试验可重复进行;
- **多结果**: 试验结果不唯一, 所有可能发生的结果事先明确已知;
- **不确定**: 试验前无法预测或确定哪一种结果会发生.

1.1.1 样本空间与随机事件

随机试验尽管在每次试验前不能确定发生的结果, 但其所有可能发生的结果却是事先已知的. 将随机试验 E 所有可能的结果构成的集合称为试验 E 的 **样本空间**, 记为 Ω. 样本空间 Ω 中的每个元素, 即试验 E 的每种结果, 称为 **样本点**, 记为 ω.

例如前一页所述的四种试验, 其样本空间分别为:

试验 E_1 的样本空间为 $\Omega_1 = \{$正面, 反面$\}$, 样本点分别为 ω_1=正面, ω_2=反面.

试验 E_2 的样本空间为 $\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$, 样本点分别为 $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\ldots$, $\omega_6 = 6$.

试验 E_3 的样本空间为 $\Omega_3 = \{0,1,2,\ldots\}$, 样本点为任意非负整数.

试验 E_4 的样本空间为 $\Omega_4 = \{t\colon t \geqslant 0\}$, 样本点为任意非负数.

包含有限个样本点的样本空间称为 **有限样本空间**, 如样本空间 Ω_1 和 Ω_2. 包含无限但可列多个样本点的样本空间称为 **可列样本空间**, 如样本空间 Ω_3. 有限样本空间和无限可列样本空间统称为 **离散样本空间**. 包含无限不可列个样本点的样本空间称为 **不可列样本空间**, 如样本空间 Ω_4.

在随机试验中, 通常关心具有某些特性的样本点构成的集合, 称之为 **随机事件**, 简称为 **事件**, 一般用大写字母 $A,B,C,\ldots$ 表示. 随机事件的本质是集合, 由单个或某些样本点所构成的集合, 是样本空间 Ω 的子集. 如果随机试验的结果是事件 A 中包含的元素, 则称 **事件 A 发生**.

只包含一样本点的事件称为 **基本事件**, 包含两个或两个以上样本点的事件称为 **复合事件**. 样本空间 Ω 包含所有样本点, 是其自身的子集, 每次试验必然发生, 因而称 Ω 为 **必然事件**. 另一方面, 如果某事件在每次试验中都不发生, 则该事件不可能包含任何样本点, 我们用空集符号 $\emptyset$ 表示, 且称 $\emptyset$ 为 **不可能事件**.

例 1.1 随机试验 E: 抛一枚骰子观察其出现的点数, 其样本空间 $\Omega = \{1,2,\ldots,6\}$, 则:
事件 A 表示抛骰子的点数为 2, 则 $A = \{2\}$ 为基本事件;
事件 B 表示抛骰子的点数为偶数, 则 $B = \{2,4,6\}$;
事件 C 表示抛骰子的点数大于 7, 则 $C = \emptyset$ 为不可能事件;
事件 D 表示抛骰子的点数小于 7, 则 $D = \Omega$ 为必然事件.

1.1.2 随机事件的关系与运算

随机事件的本质是样本空间的子集, 因此随机事件的关系与运算可类比于集合论的关系与运算. 下面默认随机试验的样本空间为 Ω, 用 A, B, A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ 表示样本空间 Ω 中的随机事件.

1) **包含事件** 若事件 A 发生必将导致事件 B 发生, 则称 **B 包含 A**, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.
   若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称事件 A 与 B **相等**, 记为 $A = B$.

2) **事件的并/和** 若事件 A 和 B 中至少有一个发生所构成的事件称为 **事件 A 与 B 的并** (或 **和**) **事件**, 记为 $A \cup B$, 即
   $$A \cup B = \{\omega \colon \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$
   类似地, 事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 中至少有一个发生所构成的事件称为事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的并事件, 记为
   $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{\omega \colon \exists\, i \in [n] \text{ s.t. } \omega \in A_i\},$$
   称 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的并事件.

3) **事件的交/积** 若事件 A 和 B 同时发生所构成的事件称为 **事件 A 与 B 的交** (或 **积**) **事件**, 记为 $A \cap B$ 或 AB, 即
   $$AB = A \cap B = \{\omega \colon \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}.$$
   类似地, 事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 同时发生所构成的事件称为事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的交事件, 记为
   $$A_1 A_2 \cdots A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{\omega \colon \forall i \in [n] \text{ s.t. } \omega \in A_i\},$$
   称 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的交事件.

4) **事件的差** 若事件 A 发生但事件 B 不发生所构成的事件称为 **事件 A 与 B 的差**, 记 $A - B$,
   $$A - B = A - AB = A\bar{B} = \{\omega \colon \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}.$$

5) **对立/逆事件** 对事件 A 而言, 所有不属于事件 A 的基本事件所构成的事件称为 **事件 A 的对立事件** 或 **逆事件**, 记为 $\bar{A}$, 即 $\bar{A} = \Omega - A$.
   根据定义可知 $\bar{\bar{A}} = A$, $\bar{A} \cap A = \emptyset$ 和 $\Omega = A \cup \bar{A}$.

6) **互不相容/互斥事件** 若事件 A 和事件 B 不能同时发生, 即 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 和 B 是 **互不相容的** 或 **互斥的**.
   若事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 中任意两事件不可能同时发生, 即对任意 $i \neq j$ 有 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 成立, 则称 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 **互不相容的** 或 **互斥的**, 类似地定义可列个互不相容的事件.
   对立的事件是互不相容的, 但互不相容的事件并不一定是对立事件.

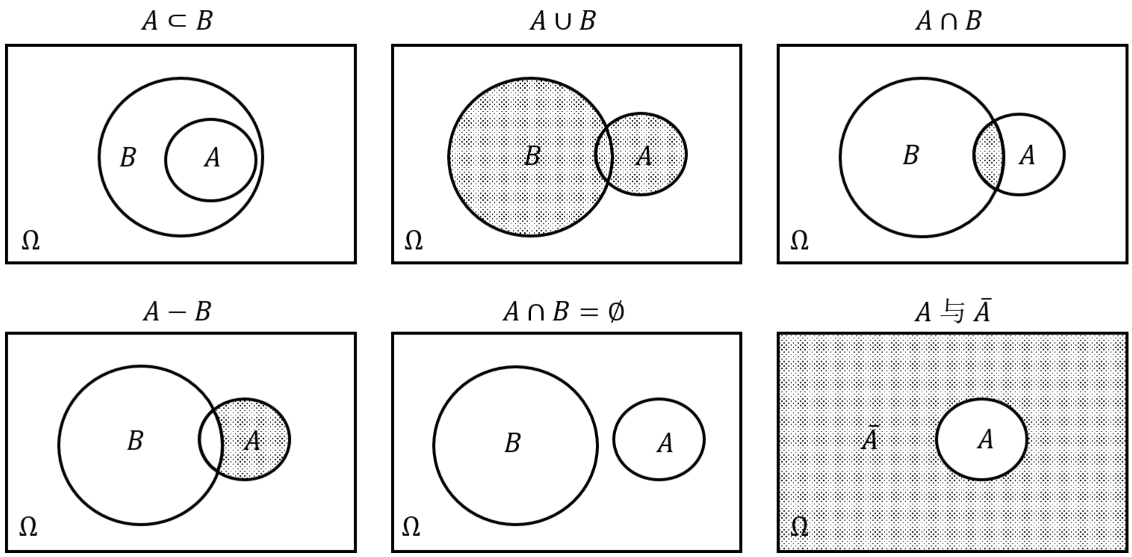


图 1.1 事件关系或运算通过韦恩图表示, $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $\bar{A}$ 分别为图中阴影部分所示

如图 1.1 所示, 借助集合论的韦恩图 (Venn Diagram) 可直观地表示事件之间的关系或运算. 例如, 在 $A \subset B$ 的图示中, 矩形表示样本空间 Ω, 椭圆 A 和 B 分别表示事件 A 和 B, 椭圆 B 包含椭圆 A 则表示事件 $A \subset B$; 在 $A \cup B$ 的图示中阴影部分表示并事件 $A \cup B$.

根据定义可知道事件还满足下面的规律, 相关证明读者可参考集合的运算规律.

- 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
- 德摩根 (De Morgen) 律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

上面的四条规律对有限个或可列个事件均成立, 例如对德摩根律有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}\ .$$

此外, 若事件 $A \subset B$, 有 $AB = A$ 和 $A \cup B = B$ 成立.

例 1.2 设 A, B, C 为三个随机事件, 则有

- 事件 A 与 B 同时发生, 而事件 C 不发生的事件可表示为 $AB\bar{C}$ 或 $AB - C$;
- 这三个事件中至少有一个发生的事件可表示为 $A \cup B \cup C$;
- 这三个事件中恰好有一个发生的事件可表示为 $(A\bar{B}\bar{C}) \cup (\bar{A}B\bar{C}) \cup (\bar{A}\bar{B}C)$;

- 这三个事件中至多有一个发生的事件可表示为 $(A\bar{B}\bar{C})\cup(\bar{A}B\bar{C})\cup(\bar{A}\bar{B}C)\cup(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$ 或 $\overline{AB\cup AC\cup BC}$;
- 这三个事件中至少有两个发生的事件可表示为 $AB\cup AC\cup BC$;
- 这三个事件中至多有两个发生的事件可表示为 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$;
- 这三个事件中恰好有两个发生的事件可表示为 $AB\bar{C}\cup AC\bar{B}\cup BC\bar{A}$.

例 1.3 设 A,B,C 为三个随机事件, 证明

$$(\bar{A}\cup B)(A\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})(A\cup\bar{B})=\emptyset \qquad \text{和} \qquad (A-B)\cup(B-C)=(A\cup B)-BC\ .$$

证明 根据事件的分配律有 $(\bar{A}\cup B)(A\cup B)=(A\cap\bar{A})\cup B=B$ 以及 $(\bar{A}\cup\bar{B})(A\cup\bar{B})=\bar{B}$, 由此可得 $(\bar{A}\cup B)(A\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})(A\cup\bar{B})=B\cap\bar{B}=\emptyset$.

根据事件的差 $A-B=A\bar{B}$ 可得 $(A-B)\cup(B-C)=(A\bar{B})\cup(B\bar{C})$. 根据事件的分配律和德摩根律有

$$\begin{aligned}(A\cup B)-BC &= (A\cup B)\overline{BC}=(A\cup B)\cap(\bar{B}\cup\bar{C})\\ &= (A\bar{B})\cup(A\bar{C})\cup(B\bar{B})\cup(B\bar{C})=(A\bar{B})\cup(A\bar{C})\cup(B\bar{C}).\end{aligned}$$

由此可知 $((A-B)\cup(B-C))\subset((A\cup B)-BC)$. 只需进一步证明 $A\bar{C}\subset(A\bar{B})\cup(B\bar{C})$, 对任意 $x\in A\bar{C}$, 有 $x\in A$ 且 $x\in\bar{C}$, 再根据 $x\in B$ 或 $x\in\bar{B}$ 有 $x\in A\bar{B}$ 或 $x\in B\bar{C}$ 成立.

事件的关系与运算可类比于集合的关系与运算, 表 1.1 简要地给出了概率论和集合论之间对应关系, 即概率统计中事件的关系与运算可通过集合的方式进行描述.

表 1.1 概率论与集合论之间相关概念的对应关系

符 号	概 率 论	集 合 论
Ω	必然事件, 样本空间	全集
$\emptyset$	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素
A	随机事件	子集
$\bar{A}$	事件 A 的对立事件	集合 A 的补集
$\omega\in A$	事件 A 发生	元素 ω 属于集合 A
$A\subset B$	事件 A 发生导致 B 发生	集合 B 包含集合 A
$A=B$	事件 A 与 B 相等	集合 A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与 B 的并	集合 A 与 B 的并集
$A\cap B$	事件 A 与 B 的交	集合 A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 与 B 的差	集合 A 与 B 的差集
$AB=\emptyset$	事件 A 与 B 互不相容	集合 A 与 B 无相同元素

1.1.3 可测空间*

设 Ω 是一个样本空间, 用 2^Ω 表示样本空间 Ω 所有子集所构成的集合, 称为 Ω 的 **幂集**, 即样本空间 Ω 上所有事件所构成的集合. 对可列的样本空间, 将幂集 2^Ω 中的元素都看作事件没任何不妥; 但对无限不可列样本空间, 一般情形下不将样本空间 Ω 的一切子集都作为事件, 这将对概率的计算带来不可克服的困难. 例如, 在几何概型 (见 1.3.2节) 中将不可测集作为事件则难以计算概率. 为了更好地刻画随机事件, 本节引入可测空间.

定义 1.1 设 Ω 是一个样本空间且 $\Sigma \subseteq 2^\Omega$, 若 Σ 满足以下三个条件:

- 必然事件 $\Omega \in \Sigma$;
- 若任意 $A \in \Sigma$, 则有补集 $\bar{A} \in \Sigma$;
- 若任意 $A_i \in \Sigma$ $(i = 1, 2, \cdots)$, 则有 $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \Sigma$,

则称 Σ 是样本空间 Ω 的 σ **代数** (又称 σ **域**), 称 Σ 中的元素 (一个子集) 是 **可测集**, 以及 (Ω, Σ) 是一个 **可测空间**.

σ 代数 Σ 本质上是一个集合, 其每一个元素也是集合, 即 Σ 是 Ω 一些子集所构成的集合. 若 Σ 是一个 σ 代数, 则 Σ 中每个元素都是可测集. 根据可测空间定义可知

$$\emptyset \in \Sigma, \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Sigma, \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \Sigma, \qquad \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \Sigma.$$

给定样本空间 Ω, 最小的 σ 代数为 $\Sigma = \{\emptyset, \Omega\}$, 最大的 σ 代数为 $\Sigma = 2^\Omega$.

所关注的非空事件集合 $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ 有时不一定满足 σ 代数, 此时可以构造包含 $\mathcal{F}$ 的最小 σ 代数:

定义 1.2 给定样本空间 Ω 和非空事件集合 $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$, 记 $\sigma(\mathcal{F})$ 为包含 $\mathcal{F}$ 的最小 σ 代数. 即若 Σ 是一个 σ 代数且 $\mathcal{F} \subset \Sigma$, 则有 $\sigma(\mathcal{F}) \subset \Sigma$.

例如当 $\mathcal{F} = \{A\}$ 时, 即集合 $\mathcal{F}$ 仅包含单一事件 A, 则最小 σ 代数为 $\sigma(\mathcal{F}) = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$. 对一般的事件集合 $\mathcal{F}$, 有最小 σ 代数 $\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap_{\mathcal{F} \subset \Sigma} \Sigma$.

对有限或可列的样本空间 Ω, 一般考虑 σ 代数 $\Sigma = 2^\Omega$; 而当样本空间 Ω 时实数集 $\mathbb{R}$ 时, 一般考虑博雷尔 σ 代数, 即由有限或可列个开区间 (或闭区间) 构成的 σ 代数, 记为 $\mathfrak{R}_1$, 即

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_1 &= \sigma\left(\{(a,b)\colon a < b \in \mathbb{R}\}\right) = \sigma\left(\{[a,b]\colon a < b \in \mathbb{R}\}\right) = \sigma\left(\{(-\infty, b), b \in \mathbb{R}\}\right) \\
&= \sigma\left(\{(-\infty, b], b \in \mathbb{R}\}\right) = \sigma\left(\{(a, +\infty), a \in \mathbb{R}\}\right) = \sigma\left(\{[a, +\infty), a \in \mathbb{R}\}\right).
\end{aligned}$$

上式成立的原因有 $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a + 1/n, b - 1/n)$, $(a,b) = [a,b] \setminus a \setminus b$, 以及可列次的逆、并、交等运算. 类似可定义 n 维博雷尔 σ 代数 $\mathfrak{R}_n$.

1.2 频率与概率公理化

随机事件在一次试验中可能发生、也可能不发生, 我们通常关心随机事件发生的可能性究竟有多大, 最好能用介于 0 和 1 之间的一个数来进行刻画. 为此首先引入频率, 用以描述随机事件发生的频繁程度, 在此基础上引入事件的概率.

1.2.1 频率

定义 1.3 随机事件 A 在相同条件下重复进行的 n 次试验中出现了 n_A 次, 则称 $f_n(A) = n_A/n$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的 **频率**, 并称 n_A 为事件 A 发生的 **频数**.

事件的频率在一定程度上反应了事件发生的可能性, 若事件发生的频率越大, 则事件 A 发生越频繁, 因而事件在一次试验中发生的可能性越大. 根据上面的定义可知频率具有如下性质:

1° 对任意事件 A 有 $f_n(A) \in [0, 1]$;

2° 对必然事件 Ω 有 $f_n(\Omega) = 1$;

3° 对互不相容的事件 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 有 $f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$.

性质 1° 和 2° 根据定义显然成立. 对互不相容的事件 $A_1, A_2, \ldots, A_k$, 并事件 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ 发生的频数等于每个事件 A_i 发生的频数之和, 由此可知性质 3° 成立.

频率在实际中通常表现出一定的随机性, 例如, 在相同条件下进行两轮 n 次试验, 每轮试验中事件 A 发生的频率往往不同. 其次, 随着试验次数 n 的增加, 事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 会发生一定的变化, 表现出一定的随机性.

尽管频率表现出一定的随机性, 但经过大量重复的试验, 事件的频率通常在一个确定的常数 p 附近摆动, 而且随着试验次数的增大, 摆幅越来越小, 频率也越来越稳定于常数 p, 将这种规律称为 **频率的稳定性**. 例如历史上有多人做过重复投掷硬币的试验, 下表列出了其中一些试验统计结果:

表 1.2 历史上多人重复投掷硬币的试验结果

实 验 者	投掷总数	正面朝上的频数	正面朝上的频率
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005

我们也可以利用计算机产生随机数对投掷硬币的试验进行仿真, 图 1.2 给出了相应的试验结果. 这些研究结果均表明: 尽管对不同的投掷总数, 正面朝上的频率不并相同, 但随着投掷次数的增加, 正面朝上的频率越来越接近常数 1/2, 即频率逐渐稳定于 1/2. 这种频率的稳定性即通常所说的统计规律性, 是随机事件本身所固有的客观属性, 可用于度量事件发生的可能性大小.

定义 1.4 随机事件 A 在大量重复试验中发生的频率总是稳定地在一个常数 p 附近摆动, 且随着试验次数的增加而摆幅逐渐越小, 则称常数 p 为事件 A 发生的 **概率**, 记为 $P(A) = p$.

图 1.2 任意投掷硬币, 正面朝上频率的趋势

该定义又称 **概率的统计定义**, 其概率称为 **统计概率**, 提供了计算随机事件概率的一种方法, 即当试验次数足够多时, 可用频率来给出事件概率的近似值.

另一方面, 概率的统计定义存在着数学上的不严谨性, 在实际中也不太可能每一个事件做大量重复试验来计算频率, 以此近似概率. 受到频率的稳定性及其性质的启发, 下面我们给出严谨的概率公理化定义.

1.2.2 概率公理化

20 世纪 30 年代, 前苏联数学家柯尔莫哥洛夫 (A. Kolmogorov) 提出了概率论的公理化体系, 通过基本的性质给出了概率的严格定义, 建立可媲美于欧氏几何公理化的理论体系.

定义 1.5 (概率公理化) 在可测空间 (Ω, Σ) 上, 若函数 $P : \Sigma \to R$ 满足以下条件:

1° **非负性**: 对任意 $A \in \Sigma$ 有 $P(A) \geqslant 0$;

2° **规范性**: 对样本空间 Ω 有 $P(\Omega) = 1$;

3° **可列可加性**: 若 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma$ 是可列个互不相容的事件, 即 $A_iA_j = \emptyset\ (i \neq j)$, 有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$,

则称 $P(A)$ 为随机事件 A 的 **概率**, 称 (Ω, Σ, P) 为 **概率测度空间** 或 **概率空间** (probability space).

概率 $P(A)$ 是定义在可测空间 (Ω, Σ) 上的实值函数, 满足非负性、规范性和可列可加性三条公理, 该定义简明扼要地刻画了概率的本质, 为现代概率论奠定了基础, 公理化体系是概率论发展历史上的一个里程碑, 从此概率论被公认为数学的一个分支.

根据概率公理化的定义, 可以推导出很多概率的性质.

性质 1.1 对不可能事件 $\emptyset$ 有 $P(\emptyset) = 0$.

证明 令 $A_i=\emptyset\ (i=1,2,\ldots)$, 则有 $\emptyset=\cup_{i=1}^{\infty}A_i$ 且 $A_i\cap A_j=\emptyset\ (i\neq j)$. 根据公理 3° 有

$$P(\emptyset)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\emptyset).$$

再根据公理 1° 可知 $P(\emptyset)=0$.

不可能事件 $\emptyset$ 的概率为 0, 但概率为 0 的事件并不一定是不可能事件; 同理, 必然事件 Ω 的概率为 1, 但概率为 1 的事件并不一定是必然事件. 反例参考后面所学的几何概型或连续随机变量.

性质 1.2 (有限可加性) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两不相容的事件, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

证明 令 $A_i=\emptyset\ (i>n)$, 则有 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$, 且 $A_1,A_2,\cdots,A_n,A_{n+1},\ldots$ 是两两互不相容事件. 根据公理 3° 可知

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+\sum_{i=n+1}^{\infty}P(\emptyset)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

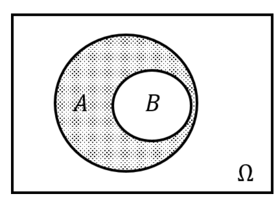
性质得证.

性质 1.3 对任意事件 A, 有 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

证明 由于 $\Omega=\bar{A}\cup A$, 以及事件 A 与 $\bar{A}$ 互不相容, 根据有限可加性有 $1=P(\Omega)=P(A)+P(\bar{A})$.

性质 1.4 若事件 $B\subset A$, 则有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$ 和 $P(B)\leqslant P(A)$.

证明 若 $B\subset A$, 如右图所示有 $A=B\cup(A-B)$, 根据定义可知 B 与 $A-B$ 互不相容. 由有限可加性有



$$P(A)=P(B)+P(A-B).$$

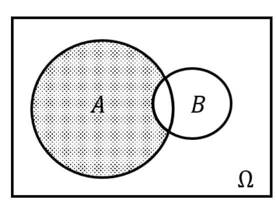
再根据公理 1° 有 $P(A-B)=P(A)-P(B)\geqslant 0$, 从而得到 $P(A)\geqslant P(B)$.

性质 1.5 对任意事件 A 和 B, 有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B).$$

证明 根据 $A=(A-B)\cup(AB)$, 以及 $A-B$ 与 AB 互斥, 有

$$P(A)=P(A-B)+P(AB).$$



再根据 $A\cup B=(A-B)\cup B$, 以及 $A-B$ 与 B 互斥, 有

$$P(A-B)=P(A\cup B)-P(B).$$

性质 1.6 (容斥原理) 对任意随机事件 A 和 B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证明 因 $A\cup B=(A-B)\cup(AB)\cup(B-A)$, 以及 $A-B$, $B-A$, AB两两互不相容, 由有限可加性可知

$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(B-A)+P(AB).$$

再将 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$ 和 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$ 代入上式即可完成证明.

类似地, 对三个随机事件 A,B,C 有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

对 n 个随机事件 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{i=1}^n P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n).$$

对 n 个随机事件 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 的容斥原理可进一步简写为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{r=1}^n(-1)^{r+1}\sum_{i_1<\cdots<i_r}P(A_{i_1}\cdots A_{i_r}).$$

性质 1.7 (Union Bound 或 布尔不等式) 对事件 $A_1,A_2,\ldots A_n$ 有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\leqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

证明 我们利用数学归纳法进行证明. 当 $n=2$ 时, 由容斥原理有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant P(A)+P(B). \tag{1.1}$$

假设当 $n=k$ 时性质成立, 对 $n=k+1$ 有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup\cdots\cup A_{k+1})&=P((A_1\cup\cdots\cup A_k)\cup A_{k+1})\\&\leqslant P(A_1\cup\cdots\cup A_k)+P(A_{k+1})\leqslant P(A_1)+\cdots+P(A_k)+P(A_{k+1}),\end{aligned}$$

这里第一个不等式成立是根据式 (1.1), 而第二个不等式成立是根据归纳假设. 完成证明.

根据数学归纳法可类似得到下列不等式:

推论 1.1 (Bonferroni 不等式) 对事件 $A_1, A_2, \dots A_n$ 有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &\leqslant \sum_{i=1}^n P(A_i); \\ P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &\geqslant \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j); \\ P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &\leqslant \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k); \\ \cdots \quad &\cdots \quad \cdots \end{aligned}$$

例 1.4 设 $P(A)=p$, $P(B)=q$, $P(AB)=r$, 用 p,q,r 分别表示事件的概率: 1) $P(\bar{A}\cup\bar{B})$, 2) $P(\bar{A}B)$; 3) $P(\bar{A}\cup B)$; 4) $P(\bar{A}\cap\bar{B})$.

解 对问题 1), 根据事件的德摩根律有

$$P(\bar{A}\cup\bar{B}) = P(\overline{AB}) = 1-r.$$

对问题 2), 根据差事件的定义

$$P(\bar{A}B) = P(B-A) = P(B) - P(AB) = q-r.$$

对问题 3), 根据容斥原理有

$$P(\bar{A}\cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A}B) = 1-p+q-(q-r) = 1-p+r.$$

对问题 4), 根据德摩根律与容斥原理有

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1+r-p-q.$$

例 1.5 设三个随机事件 A,B,C 满足 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$, $P(AB)=0$, $P(AC)=P(BC)=1/16$, 求事件 A,B,C 中至少有一个事件发生的概率.

解 首先根据三个事件的容斥原理有

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$= \quad 3/4 - 1/8 + P(ABC).$$

根据 $P(AB) = 0$ 和 $ABC \subset AB$ 可知

$$0 \leqslant P(ABC) \leqslant P(AB) = 0$$

由此可知事件 A, B, C 中至少有一个事件发生的概率为 5/8.

1.3 古典概型与几何概型

本节介绍两种历史较为久远的经典概率模型: 古典概型与几何概型.

1.3.1 古典概型

首先研究一类简单的随机现象, 它是概率论早期最重要的研究对象, 其发展在概率论中具有重要的意义, 并在产品质量抽样检测等问题中具有广泛的应用.

定义 1.6 (古典概型) 如果试验 E 满足:

- 试验的结果只有有限种可能, 即样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, 其中 w_i 为基本事件,
- 每种结果发生的可能性相同, 即 $P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\})$ $(i \neq j)$,

则称该类试验称为 **古典概型**, 又称 **等可能概型**.

根据上述定义以及 $P(\Omega) = 1$ 可知: 每个基本事件发生的概率为 $P(\{\omega_i\}) = 1/n$, 若事件 A 包含 k 个基本事件 $\{\omega_{i_1}, \omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, 则事件 A 发生的概率为

$$P(A) = k/n = |A|/|\Omega|,$$

这里 $|A|$ 表示事件 A 包含的事件的个数. 很显然古典概型的概率满足概率公理化体系的三条公理.

计算古典概率的本质是计数 (Counting), 计数是组合学研究的重要内容, 我们将在 1.4 节详细的介绍各种计数方法, 这里仅仅介绍一些基本原理和排列组合:

- **加法原理**: 若一项工作可以用两种不同的过程 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 完成, 且过程 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 分别有 n_1 和 n_2 种方法, 则完成该工作有 $n_1 + n_2$ 种方法.
- **乘法原理**: 若一项工作需要依次通过 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 两过程, 且过程 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 分别有 n_1 和 n_2 种方法, 则完成该工作有 $n_1 \times n_2$ 种方法.

上述两条原理可进一步推广到多个过程的情况.

排列: 从 n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素进行排列, 此时既要考虑取出的元素, 也要顾及其排列顺序, 则有 $(n)_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种不同的排列. 若 $r = n$ 时称全排列, 有 $n!$ 种.

组合: 从 n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素, 取出的元素之间无顺序关系, 共有 $\binom{n}{r}$ 种不同的取法, 其中

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{(n)_r}{r!}, \quad 且记 \quad \binom{n}{0} = 1.$$

这里 $\binom{n}{r}$ 称为 **组合数** 或 **二项系数**, 它是二项展开式 $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$ 中项 $a^r b^{n-r}$ 的系数.

很多经典的数学问题都可归纳为古典概型, 下面介绍一些典型的例子:

例 1.6 将 n 个不同的球随机放入 N $(N \geqslant n)$ 个不同的盒子中, 事件 A 表示恰有 n 个盒子且每盒一球; 事件 B 表示指定的 n 个盒子中各有一球; 事件 C 表示指定一盒子恰有 m 个球. 求事件 A, B, C 发生的概率. (盒子的容量不限, 放入同一个盒子内的球无顺序排列区别)

解 将 n 个不同的球随机放入 N 个不同的盒子中, 共有 N^n 种不同的放法. 而对事件 A, 有 $(N)_n = N!/n!$ 种不同的放法, 因此

$$P(A) = \frac{(N)_n}{N^n} = \frac{N!}{N^n n!}.$$

对事件 B, 有 $n!$ 种不同的放法, 因此

$$P(B) = \frac{n!}{N^n}.$$

对事件 C, 可分为两步: 第一步在指定的盒子内放入 m 个球, 有 $\binom{n}{m}$ 种不同的放法; 第二步将剩下的 $n-m$ 个球放入 $N-1$ 个盒子, 有 $(N-1)^{n-m}$ 种不同的放法. 因此

$$P(C) = \frac{\binom{n}{m}(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

生日问题是概率历史上有名的数学问题, 研究某次集会的 k 个人中至少有两人生日相同的概率, 或者有 k 人的班级中至少两人生日相同的概率.

例 1.7 (生日问题) 有 k 个人 $(k < 365)$, 每个人的生日等可能地出现于 365 天中的任意一天, 求至少两人生日相同的概率.

解 用 A 表示至少有两人生日相同的事件, 其对立事件 $\bar{A}$ 表示任意两人生日均不相同的事件. k 个人的生日共有 365^k 种可能, 而 k 个人的生日两两互不相同的有 $(365)_k$ 种可能. 因此

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{(365)_k}{365^k}.$$

易知当 $k = 30$ 时, $P(A) = 70.6\%$; 当 $k = 40$时, $P(A) = 89.1\%$; 当 $k = 50$时, $P(A) = 97\%$; 当 $k = 60$时, $P(A) = 99.4\%$; 当 $k = 100$时, $P(A) = 99.99\%$.

下面介绍古典概型计算中一类典型问题, 在产品质量检测等方面广泛应用.

例 1.8 设一批 N 件产品中有 M 件次品, 现从 N 件产品中不放回地任选 n 件, 求其中恰有 k 件次品的概率.

解 用 A 表示恰有 k 件次品的事件. 从 N 件产品中任选 n 件, 有 $\binom{N}{n}$ 种不同的选法; 在所选取的 n 件产品中, 有 k 件次品以及 $n-k$ 件正品, 即从 M 件次品中选出 k 件次品, 从 $N-M$ 件正品中选出 $n-k$ 件正品, 因此有 $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$ 种不同的取法. 由此可得

$$P(A)=\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}\bigg/\binom{N}{n}, \tag{1.2}$$

该概率 $P(A)$ 被称为 **超几何概率**.

在例 1.8 中若为有放回地任选 n 件, 则每次抽到一件非次品的概率为 $(N-M)/N$, 抽到一件次品的概率为 M/N, 因此 n 件中恰有 k 件次品的概率为

$$\binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k}.$$

抽签是人们引入随机性的一个简单例子, 广泛应用于各种体育赛事或日常生活中. 关于抽签的公平性, 即抽签结果虽然不同但出现这种结果的可能性相同, 需要通过计算概率来进行验证:

例 1.9 (抽签问题) 袋中有 a 个不同的白球, b 个不同的红球, 假设有 k 个人依次随机无放回地从袋中取一个球, 问第 i 个人 $(i\leqslant k)$ 取出红球的概率是多少?

解 用 A 表示第 i 个人取到红球的事件. 若 k 个人依次随机无放回地从袋中取一个球, 则有 $(a+b)_k$ 种不同的取法. 若事件 A 发生, 第 i 个人取到红球, 它可能是 b 个红球中的任意一个, 有 b 种取法; 其它剩余的 $k-1$ 个球可以从 $a+b-1$ 个球中取出, 有 $(a+b-1)_{k-1}$ 种不同的取法. 因此事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{b(a+b-1)_{k-1}}{(a+b)_k}=\frac{b}{a+b}.$$

由此可知第 i 个人取到红球的概率为 $b/(a+b)$, 与 i 的大小无关, 即抽签先后顺序对抽签的结果没有影响, 由此证明了抽签的公平性.

例 1.10 (匹配问题) 有 n 对夫妻参加一次聚会, 现将所有参会人员任意分成 n 组, 每组一男一女, 问至少有一对夫妻被分到同一组的概率是多少?

解 用 A 表示至少有一对夫妻被分到同一组的事件, 以及 A_i 表示第 i 对夫妻 $(i\in[n])$ 被分到同一组的事件, 于是有 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$. 根据容斥原理有

$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{r=1}^n(-1)^{r+1}\sum_{i_1<\cdots<i_r}P(A_{i_1}\cdots A_{i_r}).$$

对任意 $r\in[n]$, 考虑事件 $A_{i_1}\cdots A_{i_r}$ 概率, 若参会人员任意分成 n 组且每组一男一女, 共有 $n!$ 种不同的分法, 若将第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 对夫妻分别分组, 则有 $(n-r)!$ 种不同的分法. 根据等可能性原则有

$$P(A_{i_1}\cdots A_{i_r})=\frac{(n-r)!}{n!}.$$

而和式 $\sum_{i_1<\cdots<i_r} P(A_{i_1}\cdots A_{i_r})$ 中共有 $\binom{n}{r}$ 项, 由此可得

$$\sum_{i_1<\cdots<i_r} P(A_{i_1}\cdots A_{i_r}) = \binom{n}{r}\frac{(n-r)!}{n!} = \frac{1}{r!},$$

于是事件 A 发生的概率

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}.$$

当 n 较大时, 利用泰勒展式 $e^x = 1 + x + x^2/2! + \cdots + x^n/n! + \cdots$ 以及令 $x = -1$ 有

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!} + \cdots \approx \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!},$$

由此近似有 $P(A) = 1 - 1/e = 0.632$.

在概率计算的过程中, 有时可适当利用概率的性质来简化计算, 例如,

例 1.11 从 $\{1, 2, \ldots, 9\}$ 数中有放回取 n 个, 试求取出 n 个数的乘积被 10 整除的概率.

解 令 $A = \{$取出 n 个整数的乘积能被 10 整除$\}$, $B = \{$取出的 n 个数中有偶数$\}$, $C = \{$取出的 n 个数中至少有一个 5$\}$, 于是有 $A = BC$. 直接计算事件 B 发生的概率较难, 我们因此考虑 B 的对立事件的概率

$$P(\bar{B}) = P\big(\{\text{取出的 } n \text{ 个数中无偶数}\}\big) = P\big(\{\text{取出的 } n \text{ 个数只包括} 1, 3, 5, 7, 9\}\big) = 5^n/9^n.$$

同理可得

$$P(\bar{C}) = 8^n/9^n \qquad \text{和} \qquad P(\bar{B}\bar{C}) = 4^n/9^n.$$

根据概率的性质有

$$P(A) = 1 - P(\overline{BC}) = 1 - P(\bar{B}\cup\bar{C}) = 1 - P(\bar{B}) - P(\bar{C}) + P(\bar{B}\bar{C}) = 1 - \frac{5^n}{9^n} - \frac{8^n}{9^n} + \frac{4^n}{9^n}.$$

1.3.2 几何概型

古典概型考虑有限的样本空间, 即有限个等可能的基本事件, 然而在很多实际应用中受到了限制. 本节研究可能有无限多种结果的随机现象, 具有如下两个特点:

- **样本空间无限可测** 样本空间包含无限不可列个样本点, 但可以用几何图形 (如一维线段、二位平面区域、或三维空间区域等) 来表示, 其相应的几何测度 (如长度、面积、体积等) 是一个非零有限的实数,
- **基本事件等可能性** 每个基本事件发生的可能性大小相等, 从而使得每个事件发生的概率与该事件的几何测度相关, 与具体位置无关,

称为 **几何概型**. 其形式化定义如下:

定义 1.7 在一个测度有限的区域 Ω 内等可能性投点, 落入 Ω 内的任意子区域 A 的可能性与 A 的测度成正比, 与 A 的位置与形状无关, 这样的概率模型称之为**几何概型**. 事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

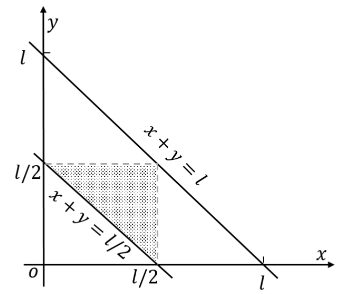
根据上述定义可验证几何概型的概率满足三条公理. 下面给出几何概型的案例.

例 1.12 将一根长度为 l 的木棍随意折成三段, 这三段能构成平面三角形的概率是多少?

解 在此例中将一根木棍折成三段有无穷种可能, 根据其随意性任何一种折法的可能性大小相等, 且木棍的长度可度量, 由此采用几何概型. 用 x, y 分别表示第一段、第二段木棍的长度, 第三段的长度为 $l-x-y$, 由此可得样本空间

$$\Omega=\{(x,y)\colon x>0, y>0, l-x-y>0\}.$$

用 A 表示折成的三段能构成平面三角形的事件, 而构成平面三角形的条件是任意两边之和大于第三边, 由此可得



$$\begin{aligned} A &= \{(x,y)\colon x+y>l-x-y, 1-y>y, l-x>x\} \\ &= \{(x,y)\colon x+y>l/2, y<l/2, x<l/2\}. \end{aligned}$$

如右图所示, 计算事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\frac{(l/2)^2/2}{l^2/2}=\frac{1}{4}.$$

例 1.13 假设一乘客到达汽车站的时间是任意的, 客车间隔一段时间发班, 请规划最长的间隔发车时间, 才能确保乘客候车等待时间不超过 20 分钟的概率大于 80%.

解 设客车的间隔时间为 l $(l>20)$, 选择特定的连续的 l 分钟为样本空间, 则乘客到达时间的样本空间为 $\Omega=\{x\colon 0<x\leqslant l\}$. 用 B 表示乘客的等待时间超过 20 分钟的事件, 而事件 B 发生则可知乘客到达车站的时间在 0 与 $l-20$ 之间, 即

$$B=\{x\colon 0<x<l-20\}.$$

可知事件 B 发生的概率小于或等于 20%, 即

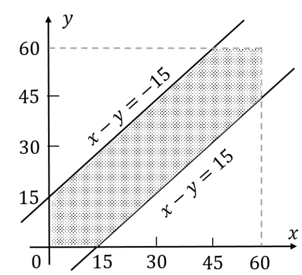
$$P(B)=\frac{l-20}{l}\leqslant 0.2,$$

求解可得 $l\leqslant 25$.

例 1.14 (会面问题) 两银行经理约定中午 12 : 00 − 13 : 00 到某地会面, 两人到达时间随机, 先到者等另一人 15 分钟后离开, 求两人见面的概率.

解 用 x, y 分别表示两人的到达时间 (分钟), 则样本空间 $\Omega = \{(x,y)\big|0 \leqslant x, y \leqslant 60\}$. 用 A 表示两人见面的事件, 则

$$A = \{(x,y)\big||x-y| \leqslant 15\} = \{(x,y)\big|x-y \leqslant 15 \text{ 且 } x-y \geqslant -15\}.$$



根据右图计算事件 A 发生的概率

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = \frac{7}{16}.$$

进一步思考: 若两银行经理非常聪明且都非常希望能促成此次见面, 但没有通讯方式进行联系, 能否找出一些策略来解决会面问题?

很多几何概型的概率可通过计算机模拟仿真来近似计算, 即 **统计模拟法** 或 **蒙特卡洛 (Monte Carlo) 法**. 先构造相应的概率模型, 再进行计算机模拟试验, 用统计的方法计算其估计值, 作为所求问题的近似值. 例如, 可利用蒙特卡洛法来近似计算例 1.14 的概率, 伪代码如下:

```
输入参数: 试验总次数 N.                       %% 取较大正整数 N, 更能精确计算两人见面的概率
初始化: 事件 A 最初始发生的次数 n_A ← 0.        %% 此处事件 A 表示两人见面的事件
For i = 1 : N
    x ← Random(0, 60), y ← Random(0, 60).      %% 在区间 (0, 60) 以随机任意选取两个数
    If |x − y| ⩽ 15 then
        n_A ← n_A + 1.                         %% 若两人见面则频数+1
    End
End
输出概率: n_A/N.
```

接下来介绍几何概型的一个经典问题, 由法国科学家蒲丰于 1777 年提出.

例 1.15 (投针问题) 平面上有两条平行线, 相距为 a, 向此平面任投一长度为 l ($l < a$) 的针, 求此针与任一平行线相交的概率.

解 用 x 表示针的中点到最近的一条平行线的距离, 用 θ 表示针与平行线的夹角. 针与平行线的位置关系图 1.3 所示.

容易知道 $x \in [0, a/2]$ 和 $\theta \in [0, \pi]$, 以 Ω 表示边长分别为 $a/2$ 和 π 的长方形, 用 A 表示针与平行线相交的事件, 若事件 A 发生则必有 $x \leqslant l\sin(\theta)/2$ 成立, 由此得到事件 A 的发生如图 1.3 中阴影部分所示. 求解可得

$$P(A) = \frac{A \text{ 的面积}}{\Omega \text{ 的面积}} = \frac{\int_0^\pi l\sin(\theta)/2d\theta}{a\pi/2} = \frac{2l}{a\pi}\ . \tag{1.3}$$

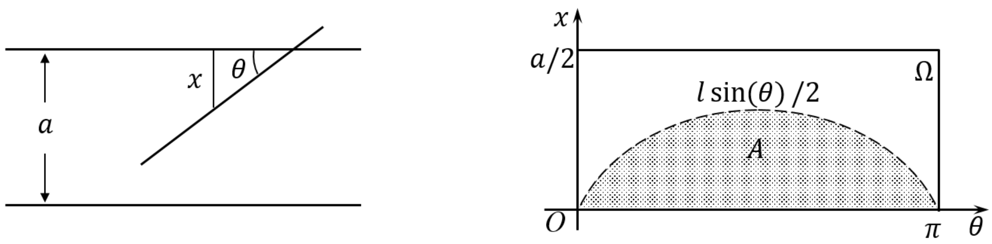


图 1.3 蒲丰投针问题

在上例中, 事件 A 发生的概率包含圆周率 π, 由此蒲丰设想出计算 π 的概率近似方法, 通过频率来近似计算事件 A 发生的概率, 再根据 (1.3) 计算圆周率 π, 即

$$\frac{n_A}{n} \approx P(A) = \frac{2l}{a\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \pi \approx \frac{2ln}{an_A} .$$

这里 n 表示试验的总次数, 而 n_A 表示事件 A 发生的次数. 历史上有多人根据蒲丰的设想还真做了试验来近似计算圆周率 π, 有兴趣的读者可查找相关文献.

在二十世纪之前, 很多人都相信只要找到合适的等可能性描述, 概率是可以被唯一定义的. 然而贝特朗 (Bertrand) 对这种观点提出了质疑, 他通过下面的一个具体例子说明: 几何概型的等可能性概率存在多种看似合理但相互矛盾的结果.

例 1.16 (贝特朗奇论) 在半径为 1 的圆内随机地取一条弦, 求其弦长超过该圆内接等边三角形边长 $\sqrt{3}$ 的概率.

解 对于“等可能性”或“随机性”含义的不同解释, 这个问题存在着多种不同答案的解决方法, 下面给出三种不同的方法:

(1) 任何与圆相交的弦一般有两个交点, 不妨在圆上先固定其中一点, 以此点为顶点作一个等边三角形, 只有落入此三角形内的弦才满足弦长超过 $\sqrt{3}$. 这种弦的另一端跑过的弧长为整个圆周的 1/3, 故所求概率等于 1/3 (如图 1.4-**a**).

(2) 弦长只跟到圆心的距离有关, 与方向无关, 因此可以假定它垂直于某一条直径. 当且仅当它与圆心的距离小于 1/2 时, 其弦长才会大于 1/3, 因此此时所求的概率为 1/2 (如图 1.4-**b**).

(3) 弦可被弦的中心点唯一确定, 当且仅当弦的中心点位于半径为 1/2 的同心圆内时, 弦长才会大于 1/3. 半径为 1/2 的小圆面积为 1/4, 大圆面积为 1, 故所求概率等于 1/4 (如图 1.4-**c**).

同一问题却有三种不同的答案, 其根本原因在于取弦时采用不同的等可能性假定. 第一种方法假定端点在圆周上均匀分布, 第二种方法假定弦的中点在直径上均匀分布, 第三种方法假定弦的中心点在小圆内均匀分布. 这三种方法采用三种不同的随机试验, 对于各自的随机试验而言, 它们都是正确的, 因此在概率的计算中一定要明确具体的试验.

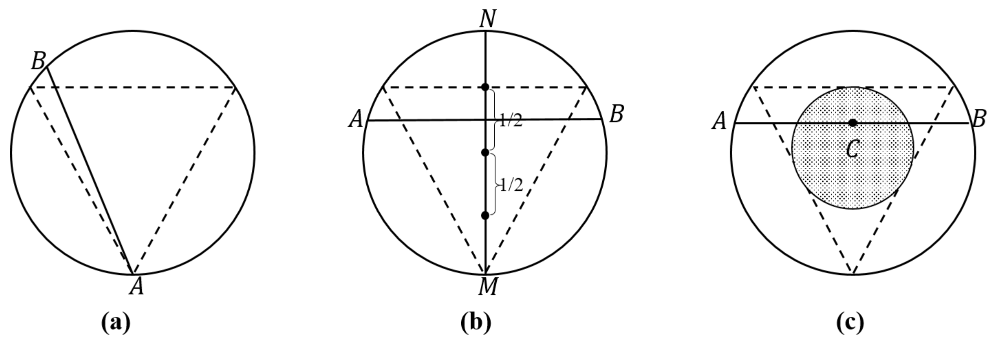


图 1.4 贝特朗奇论

贝特朗奇论在现代概率的发展中起到过重要作用, 上述例子由贝特朗于 1899 年提出, 以此反驳了“等可能性可完全定义概率”的观点. 从此概率论开始向公理化方面发展, 从应满足的基本性质来定义概率, 而不是某些具体事件的概率. 正因为如此, 希尔伯特于 1900 年在巴黎举行的第二届数学家大会上提出了著名的 23 个数学问题, 其中第六个问题就是概率公理化.

与古典概型一样, 几何概型的研究有助于发现概率的一些基本性质, 有助于对某些概率问题的直观理解和具体计算.

1.4 组合计数*

组合计数研究满足一定条件的计数对象的数目, 概率论中的很多问题都可以通过计算一个事件发生的数目来解决, 如古典概型. 此外, 组合计数在人工智能、计算机等领域具有广泛的应用, 本节将介绍经典的组合计数: 十二重计数 (The twelvefold way).

十二重计数由著名的组合学家 G.-C. Rota (1932-1999) 提出, 最初的问题表述为研究一定条件下两个集合之间映射的数目. 为了问题的可理解性, 我们采用《计算机程序设计艺术》中的表述: 将 n 个不同或相同的球, 放入 m 个不同或相同的箱子, 在无任何限制、或每个箱子至多或至少放一个球的条件, 研究在这十二种情形下分别有多少种不同的方法数. 我们首先给出十二重计数的结果, 如表 1.3 所示, 相关知识和符号说明将在后续小节逐一介绍.

表 1.3 十二重计数.

n 个球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多放一球	每个箱子至少放一球
不同	不同	m^n	$(m)_n$	$m!S(n,m)$
相同	不同	$\binom{n+m-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	$\sum\limits_{k=1}^{m} S(n,k)$	$\begin{cases}1 & n \leqslant m \\ 0 & n > m\end{cases}$	$S(n,m)$
相同	相同	$\sum\limits_{k=1}^{m} p(n,k)$	$\begin{cases}1 & n \leqslant m \\ 0 & n > m\end{cases}$	$p(n,m)$

1.4.1 排列、环排列、组合与多重组合

前面介绍了排列, 即从 n 个不同的元素中取出 r 个元素进行排列, 需考虑取出的元素以及其排列顺序, 有 $(n)_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种不同的排列方法. 若 $r=n$ 时称全排列, 有 $n!$ 种方法.

若从 n 个不同的元素中取出 r 个元素排成一个圆环, 称为 **环排列**.

如右图所示, 从顺时针看 a-b-c-a, b-c-a-b 和 c-a-b-c 是同一个环排列, 但 a-c-b-a 则不是. 因此从 n 个不同的元素中取出 r 个元素进行环排列, 每一个环排列对应于 r 种不同的直线排列, 而且不同的环排列对应的直线排列互不相同. 因此有

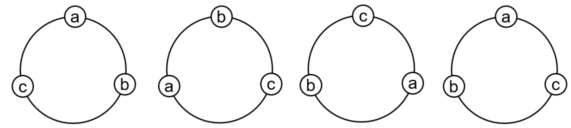


图 1.5 环排列.

定义 1.8 若从 n 个不同的元素中取出 r 个元素排成一个圆环, 有 $(n)_r/r$ 种不同的排法, 称 $(n)_r/r$ 为 **环排列数**. 特别地, n 个不同元素的环排列数为 $(n-1)!$.

例 1.17 将 n 对夫妇任意安排在一张圆桌, 求任何一对夫妻都被安排坐在一起的概率.

解 用 Ω 表示将 n 对夫妇任意安排在一张圆桌时所有可能的环排列, 以及用 A 表示任何一对夫妻都被安排坐在一起的事件. 则根据环排列可知

$$|\Omega| = (2n-1)! \qquad \text{和} \qquad |A| = 2^n(n-1)!.$$

由此可得任何一对夫妻都被安排坐在一起的概率 $2^n(n-1)!/(2n-1)!$.

前面介绍了组合数, 即从 n 不同的元素中选取 r 个元素, 取出的元素之间无顺序关系, 有 $\binom{n}{r}$ 种不同的方法, 称为组合数. 现将组合数的概念进行推广到多重组合数.

定义 1.9 将 n 个不同的元素分成 k 组, 每组分别有 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 个元素, 组内元素无顺序关系, 即满足 $n = r_1 + \cdots + r_k$ 且 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 为正整数, 则有

$$\binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k} = \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-1}}{r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$$

种不同的方法, 称 $\binom{n}{r_1,r_2,\ldots,r_k}$ 为 **多重组合数**.

对于一个 n 次多项式有:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = \sum_{n=r_1+r_2+\cdots+r_k} \binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k} \ ,$$

因此多重组合数又被称为多项式系数.

根据定义可知组合数本质上也属于多重组合数, 即 $\binom{n}{r} = \binom{n}{r, n-r}$.

以前研究集合的元素都是互不相同的, 我们引入多重集的概念.

定义 1.10 若集合中的元素是可以重复的, 且重复的元素是完全相同、不可分辨的, 则称该集合为 **多重集**. 例如多重集 $A = \{1,1,1,2,2,2,3,3,4\}$.

假设多重集 A 有 k 类不同的元素, 每类元素的个数分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_k$, 即 $n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$. 若将此多重集 A 中的所有元素排列成一排, 则相当于从 n 个位置中选取出 r_1 个位置放第一类元素, 再从剩下的从 $n - r_1$ 个位置中选取出 r_2 个位置放第二类元素, $\cdots$, 从最后 r_k 个位置放第 k 类元素. 因此该多重集 A 有

$$\binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k}$$

种不同的排列方法, 即多重组合数.

根据排列组合数有

n 个球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多放一球
不同	不同	m^n	$(m)_n$
相同	不同		$\binom{m}{n}$

1.4.2 整数的有序分解

本节研究将 n 个完全相同、不可分辨的球放入 m 个不同的箱子, 有多少种不同的方法数. 鉴于球完全相同且不可分辨, 可以对问题进行转化: 假设第一个箱子有 x_1 个球, 第二个箱子有 x_2 个球, $\cdots$, 第 m 个箱子有 x_m 个球, 这里 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是非负的整数, 并满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n.$$

因此将 n 个相同的球放入 m 个不同的箱子等价于上述方程的非负整数解, 有如下定理:

定理 1.1 方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 有 $\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$ 种不同的非负整数解.

证明 这里将通过构造一一对应关系给出组合证明. 将 n 个相同的球对应于 n 个圈 '$\circ$', 将 m 个箱子与 m 条竖线 '$|$' 进行关联. 现将 n 个圆圈和 $m-1$ 条竖线排列成一行, 最后在排列末尾再加入一条竖线, 如下所示:

$$\underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \circ}_{x_1}\ |\ |\ \cdots|\underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ}_{x_i}|\ \cdots\ |\underbrace{\circ\ \circ}_{x_m}|.$$

从左向右看, 用 x_1 表示第一条竖线之前圆圈的个数, 用 x_i 表示第 i 条竖线与第 $i-1$ 条竖线之间圆圈的个数 $(2 \leqslant i \leqslant m)$. 由此可知方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 的非负整数解与上述的排列之间存在一一对应关系, 而这种排列有

$$\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$$

种不同的方法, 即为所求方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 非负整数解的个数.

例如, 方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ 有 $\binom{12}{2} = 66$ 种不同的非负整数解, 因此将 10 个相同的球放入 3 个不同的箱子有 66 种不同的放法.

定理 1.1 给出了方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 非负整数解的个数, 根据该定理可以进一步研究该方程的正整数解的个数, 以及不等式 $x_1+x_2+\cdots+x_m<n$ 非负整数解或正整数解的个数. 例如,

推论 1.2 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ $(m\leqslant n)$ 有 $\binom{n-1}{m-1}=\binom{n-1}{n-m}$ 种不同的正整数解.

解 引入新变量 $x_1'=x_1-1, x_2'=x_2-1,\cdots,x_m'=x_m-1$, 则方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的正整数解等价于方程

$$x_1'+x_2'+\cdots+x_m'=n-m$$

的非负整数解. 根据定理 1.1 可知上述方程有

$$\binom{n-m+m-1}{m-1}=\binom{n-1}{m-1}=\binom{n-1}{n-m}$$

种不同的正整数解.

例 1.18 求多项式 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 的展开式中有多少种不同的展开项.

解 根据多项式的展开式有

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n=\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_m\ \text{非负整数且和为}\ n}\binom{n}{r_1,r_2,\cdots,r_m}x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_m^{r_m},$$

不同的展开项意味着各个变量不同的多项式次数, 此时与方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的非负整数解建立一一对应关系, 因此多项式 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 有 $\binom{n+m-1}{m-1}$ 种不同的展开项.

根据整数的有序分解有:

n 个球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至少放一球
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{n-1}{m-1}$

1.4.3 第二类 Stirling 数 (The Stirling number of the second kind)

本节研究将 n 个不同的球放入 m 个相同的箱子, 有多少种不同的放法, 这里箱子完全相同不可分辨, 可以通过箱子里放置的不同的球加以区分. 该问题在组合学中有另一种表述: 将 n 个不同的元素分成 m 个非空子集 (block) 的划分数, 即第二类 Stirling 数:

定义 1.11 将 n 个不同的元素分成 m 个非空子集的划分数, 称为 **第二类 Stirling 数**, 记为 $S(n,m)$.

例如考虑三个不同的元素 $\{1,2,3\}$, 分成 $m=1,2,3$ 个非空的子集, 不同的划分情况如下:

- 若分成 $m=1$ 个非空的子集, 则有 $\{1,2,3\}$, 因此 $S(3,1)=1$;
- 若分成 $m=2$ 个非空的子集, 则有 $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{2\},\{1,3\}\}$, $\{\{3\},\{1,2\}\}$, 因此 $S(3,2)=3$;

- 若分成 $m=3$ 个非空的子集, 则有 $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, 因此 $S(3,3)=1$.

根据第二类 Stirling 数的定义可知, 当 $n\geqslant 1$ 时有

$$S(n,n)=1, \qquad S(n,1)=1, \qquad S(n,0)=0\ .$$

当 $m>n\geqslant 1$ 时有 $S(n,m)=0$. 按惯例设 $S(0,0)=1$. 对第二类 Stirling 数有如下递推关系:

定理 1.2 对 $n\geqslant m\geqslant 1$ 有

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1).$$

证明 根据定义可知将 $\{1,2,\dots,n\}$ 划分成 m 个非空的子集, 有 $S(n,m)$ 种不同的划分数. 将这些不同的划分可分成两种情况考虑:

- 若元素 n 被划分为单独的子集 $\{n\}$, 则其它剩余的元素被划分成 $m-1$ 个非空的子集, 此时有 $S(n-1,m-1)$ 种不同的划分数;
- 若元素 n 未被划分为单独的子集, 其它剩余元素被划分成 m 个非空的子集, 有 $S(n-1,m)$ 种不同的划分数; 再将元素 n 放入已经划分好的 m 个子集之一, 共 $mS(n-1,m)$ 种划分数.

由此完成证明.

根据上面的递推关系, 利用归纳法证明可得

推论 1.3 第二类 Stirling 数满足

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n \quad 和 \quad \sum_{m=1}^{n}S(n,m)(x)_m=x^n,$$

这里 $(x)_m=x(x-1)\cdots(x-m+1)$.

根据第二类 Stirling 数有

n 个球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多放一球	每个箱子至少放一球
不同	不同			$m!S(n,m)$
不同	相同	$\sum_{k=1}^{m}S(n,k)$	$\begin{cases}1 & n\leqslant m\\ 0 & n>m\end{cases}$	$S(n,m)$

1.4.4 正整数的无序分拆 (Partition)

本节研究将 n 个相同的球放入 m 个相同的箱子, 球与箱子都是完全相同、不可分辨的, 只能通过箱子内不同的球的个数加以区别. 该问题在组合学中有另一种表述: 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和, 即 **正整数的无序分拆**.

定义 1.12 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和, 有多少种不同的划分数记为 $p(n,m)$.

例如考虑正整数 7 的无序划分, 相关分拆和划分数 $p(n,m)$ 如下表:

$m=1$	7	$p(7,1)=1$
$m=2$	$6+1,\ 5+2,\ 4+3$	$p(7,2)=3$
$m=3$	$5+1+1,\ 4+2+1,\ 3+3+1,\ 3+2+2$	$p(7,3)=4$
$m=4$	$4+1+1+1,\ 3+2+1+1,\ 2+2+2+1$	$p(7,4)=3$
$m=5$	$3+1+1+1+1,\ 2+2+1+1+1$	$p(7,5)=2$
$m=6$	$2+1+1+1+1+1$	$p(7,6)=1$
$m=7$	$1+1+1+1+1+1+1$	$p(7,7)=1$

通过上面的观察发现, 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数, 等价于下面方程的解

$$x_1+x_2+\cdots+x_m=n \quad \text{s.t.} \quad x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_m\geqslant 1.$$

根据定义可知, 当 $n\geqslant 1$ 时有

$$p(n,n)=1, \quad p(n,1)=1, \quad p(n,0)=0,$$

当 $m>n\geqslant 1$ 时有 $p(n,m)=0$, 按惯例设 $p(0,0)=1$. 对 $p(n,m)$ 有如下递推关系:

定理 1.3 对 $n\geqslant m\geqslant 1$ 有

$$p(n,m)=p(n-1,m-1)+p(n-m,m) \quad \text{和} \quad p(n,m)=\sum_{i=1}^{m}p(n-m,i).$$

证明 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和, 有 $p(n,m)$ 种不同的划分方法. 针对任意一种划分 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ $(x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_m\geqslant 1)$, 可以考虑两种情况:

- 若最小部分 $x_m=1$, 则 $x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}=n-1$ 是整数 $n-1$ 的 $m-1$ 部分的无序划分, 有 $p(n-1,m-1)$ 种不同的划分数;
- 若最小部分 $x_m>1$, 则 $x_1-1+x_2-1+\cdots+x_m-1=n-m$ 是整数 $n-m$ 的 m 部分的无序划分, 有 $p(n-m,m)$ 种不同的划分数.

由此证明 $p(n,m)=p(n-1,m-1)+p(n-m,m)$.

对第二个等式的证明, 考虑任何一种划分 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ $(x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_m\geqslant 1)$, 设 $y_j=x_j-1$, 则有

$$y_1+y_2+\cdots+y_m=n-m \quad \text{s. t.} \quad y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_m\geqslant 0.$$

考虑 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 非零元的个数, 假设恰好有 i 个非零元, 则有 $p(n-m,i)$ 种不同的解, 由此证明

$$p(n,m)=\sum_{i=1}^{m} p(n-m,i).$$

下面给出了 $p(n,m)$ 的有效估计, 相关证明超出了本书的范围.

定理 1.4　对整数 $n \geqslant m \geqslant 1$ 有

$$\frac{1}{m!}\binom{n-1}{m-1} \leqslant p(n,m) \leqslant \frac{1}{m!}\binom{n-1+m(m-1)/2}{m-1}.$$

给定整数 $m \geqslant 1$, 当 n 非常大或 $n \to \infty$ 有

$$p(n,m) \approx \frac{n^{m-1}}{m!(m-1)!}.$$

根据正整数的无序分拆有

n 个球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多放一球	每个箱子至少放一球
相同	相同	$\sum_{k=1}^{m} p(n,k)$	$\begin{cases} 1 & n \leqslant m \\ 0 & n > m \end{cases}$	$p(n,m)$

习题

1.1 简述: 频率与概率的关系, 随机现象中的二重性, 对立与互不相容事件的关系.

1.2 i) 对任意事件 A 和 B, 简化 $(A-AB)\cup B$ 和 $\overline{(\bar{A}\cup B)}$;
ii) 若事件 A,B,C 两两互不相容, 简化 $(A\cup B)-C$.

1.3 班级有 n 个同学参加考试, 用 A_i 表示第 i 个同学通过考试的事件, 用他们表示以下事件:
i) 只有第一位同学未通过考试; ii) 至少有一位同学未通过考试;
iii) 恰好有一位同学未通过考试; iv) 至少有两位同学未通过考试;
v) 至多有两位同学未通过考试; vi) 所有同学通过了考试.

1.4 证明 n 个事件的德摩根律, 即对任意 n 个事件 A_1,A_2,...,A_n 有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i} \qquad \text{和} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

1.5 已知事件 A,B,C 满足 $P(A)=1/3$, $P(B)=1/5$, $P(C)=1/6$, $P(AB)=1/20$, $P(AC)=1/20$, $P(BC)=1/60$ 和 $P(ABC)=1/100$, 求事件 $\bar{A}B$, $\bar{A}\cup\bar{B}$, $A\cup B\cup C$, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}\bar{B}C$ 和 $(\bar{A}\bar{B})\cup C$ 的概率.

1.6 若事件 A,B 的概率分别为 $P(A)=0.6$ 和 $P(B)=0.9$, 求 $P(AB)$ 的最大值和最小值, 并说明在怎么样的情形下取得.

1.7 若事件 A 和 B 满足 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$ 且概率 $P(B)=1/4$, 求概率 $P(A)$.

1.8 若事件 A 和 B 满足 $P(A)=0.1$ 和 $P(\bar{A}\bar{B})=0.7$, 求概率 $P(B-A)$.

1.9 证明: 对任意 n 个事件 A_1,A_2,...,A_n 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)+...+(-1)^{n-1}P(A_1,A_2,...,A_n).$$

1.10 已知 16 件产品中有 4 件是次品, 不放回地任取两次，每次任取一件产品, 求事件的概率: i) 两件均是次品; ii) 一件正品和一件次品; iii) 第二次取出正品.

1.11 将 n 个男生和两个女生任意排成一列, 两女生间恰有 k 个男生 $(2<k<n)$ 的概率是多少.

1.12 将 n 个男生和 m 个女生任意排成一列 $(m<n)$, 问任意两女生不相邻的概率是多少; 若排列成一圆环, 问任意两女生不相邻的概率又是多少.

1.13 从 1 到 1000 中随机取一个整数, 求取到的整数既不能被 6 整除又不能被 9 整除的概率.

1.14 两个不同的箱子中分别装有 n 个苹果, 若随机选一个箱子并拿走其中一个苹果, 求一个箱子里没有苹果时另一箱子还剩下 k 个苹果的概率 ($k \in [n]$).

1.15 有 m 个相同或不同的白球和 n 个相同或不同的红球, 随机取出依次排成一列, 求第 k 次取出红球的概率 (分四种情况讨论).

1.16 将 3 个不同的球放入 4 个不同的杯子, 求杯子中球的最大个数分别为 $1, 2, 3$ 的概率.

1.17 袋中有 a 个不同的白球, b 个不同的红球, 假设有 k 个人依次任意无放回地从袋中取一个球, 问第 i 个人 ($i \leqslant k$) 取出红球的概率是多少; 若为任意无放回地取球, 第 i 个人 ($i \leqslant k$) 取出红球的概率又是多少.

1.18 一张圆桌有 $2n$ 个位置, 将 n 对夫妻任意安排入座圆桌, 求任意一对夫妻不相邻的概率.

1.19 在区间 $[0, 1]$ 内随机取两数, 求两数之积小于 $1/4$ 的概率.

1.20 利用计算机编程计算: 在 $[0, 1]$ 区间内任意取 4 个数 a, b, c, d, 求事件

$$A = \{a^2 + \sin(b) + a \cdot e^c \leqslant d\}$$

发生的概率 (要求写出伪代码以及概率保留小数点后 5 位).

1.21 已知多重集 $A = \{a, a, a, b, b, b, b, c, c\}$, 求 A 有多少种不同的排列.

1.22 对正整数 m, n 以及 $r < n$, 证明:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}, \quad \binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i}, \quad \binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2.$$

1.23 从 m 个不同的元素中无放回/有放回地取出 r 个元素进行排列, 分别有多少种不同的排法; 若从 m 个不同的元素中无放回/有放回地取出 r 个元素, 分别有多少种不同的取法.

1.24 求方程 $x_1 + x_2 + ... + x_k \leqslant n$ 的正整数解、非负整数解的个数 (n 为正整数).

1.25 求方程 $x_1 + x_2 + ... + x_k < n$ 的正整数解、非负整数解的个数 (n 为正整数).

1.26 利用第二类 Stirling 数的递推关系证明:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$