
概率计算与组合计数

一、作业 (提交时间: Sept. 9, 2025)

1. [4-2.3] 有 n 个人, 每个人都有同等机会被分配到 $N(n \leq N)$ 个房间中, 试求以下各事件的概率:
 - (1) A = 某个指定的 n 各房间中各有一人;
 - (2) B = 恰好有 n 个房间中各有一人;
 - (3) C = 某一个指定的房间中恰好有 $m(m \leq n)$ 个人。
2. [5-6] 在 5 双不同的鞋子 (颜色、大小各不相同) 中任取 4 只, 则这 4 只鞋子中至少有 2 只配对成功 (组成一双鞋) 的概率是多少?
3. [6-2.6] 设一个袋子中有红、白、黑球各 1 个, 从中有放回地取球, 每次取一个, 直到三种颜色的球都取到时停止, 则取球次数恰好为 4 的概率是多少?
4. [6-1] 完成以下证明:
 - (1) $C_n^r = C_n^{n-r}$;
 - (2) $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$;
 - (3) $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$;
 - (4) $C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = n2^{n-1}$;
 - (5) $C_a^0 C_b^n + C_a^1 C_b^{n-1} + \cdots + C_a^n C_b^0 = C_{a+b}^n$, 其中 $n = \min\{a, b\}$;
5. [16-22] 将 n 个完全相同的球随即放入 N 个不同的盒子中, 求以下概率:
 - (1) 某个指定的盒子中恰好有 k 个球;
 - (2) 恰好有 m 个空盒子的概率;
 - (3) 某指定的 m 个盒子中恰好有 j 个球的概率。
6. [19-32] 一个球从平面直角坐标系的原点开始运动, 运动方向只有四个 (x^+, x^-, y^+, y^-) , 每次运动的距离为 1 个单位。经过 $2n$ 次运动之后, 小球回到原点的概率。
7. 在多项式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ 的展开式中, 一共有多少种不同的展开项?
8. 在问题“求方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq n$ 非负整数解、正整数解的个数”中, 根据隔板法的思路, 尝试形式化课件定理 0.1 和定理 0.2 的证明。
9. [25-9] 口袋中有 $n-1$ 个黑球和 1 个白球, 每次从口袋中随机地摸出一个球, 并换入一个黑球. 求第 k 次时, 摸到黑球的概率。
10. [28-25] 甲和乙分别投掷硬币 $n+1$ 和 n 次. 求甲投掷正面次数比乙投掷正面次数多的概率。