条件概率与独立性

一、作业 (提交时间：Sept. 16, 2025)

1. [18-1] 设 A 、B 为两个随机事件, 若 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.6$, $P(B|A)=0.8$, 求 $P(AB)$ 及 $P(\bar{A}\bar{B})$.
2. [19-5] 某地一名研究人员在“夫妇看电视习惯”的研究中发现: 有 25% 的丈夫和 30% 的妻子定期收看周六晚播出的某个电视栏目. 研究还表明, 在一对夫妇中如果丈夫定期收看这一栏目, 则会有 80% 的妻子也会定期收看这一栏目. 现从该地随机抽一对夫妇, 求

(1) 这对夫妇中丈夫和妻子都收看该栏目的概率

(2) 这对夫妇中至少有一个人定期收看该栏目的概率

3. [19-6] 已知一个袋子中有 4 个白球和 6 个黑球. 现依次不放回逐个取出, 直到 4 个白球都取出为止. 求恰好取了 6 次的概率.
4. [20-10] 抛掷 3 枚均匀的骰子, 已知掷出点数各不相同, 求至少有 1 个是 1 点的概率.
5. [23-20] 设 A 、B 为两个随机事件, 且 $0<P(A)<1$, $0<P(B)<1$, $P(B|A)+P(\bar{B}|\bar{A})=1$, 证明事件 A 与 B 相互独立.
6. [22-16] 设事件 A 与 B 独立, 且 $P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{9}$, $P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$, 求 $P(A)$, $P(B)$.
7. [33-6] 设 n 件产品中有 m 件不合格品，从中任取两件. 已知两件中有一件是合格品，求另一件也是合格品的概率.
8. [22-19] 有 $2n$ 个元件, 每个元件的可靠度都是 p . 试求下列两个系统的可靠度, 假定每个元件是否正常工作是相互独立的:

(1) 每 n 个元件串联成一个子系统, 再把两个子系统并联

(2) 每两个元件并联成一个子系统, 再把 n 个子系统串联

9. 证明: n 个事件的相互独立性共有 2^n-n-1 个等式.
10. [37-20] 口袋中有一个球，不知其颜色为黑还是白. 现在往口袋中放一个白球，然后任取出一个球，发现取出来的为白球，试问：口袋中原来那个球为白球的概率是多少?

二、补充练习

1. [18-2] 设 A 、B 为两个随机事件, $P(AB)=0.25$, $P(B)=0.3$, $P(A\cup B)=0.6$, 求 $P(A-B)$ 及 $P(A|\bar{B})$.
2. [19-4] 一考试题库中共有 100 道考题, 其中有 60 道基本题和 40 道难题, 每次考试机器从 100 道题中随即选题, 依次出题, 求第三次才遇到难题的概率.
3. [19-8] 罐中有 m 个白球和 n 个黑球, 从中随机抽取两个, 发现它们是同色的, 求同为黑色的概率.
4. [20-9] 假设生男孩或生女孩是等可能的, 在一个有 3 个孩子的家庭里, 已知有 1 个是男孩, 求至少有 1 个是女孩的概率.
5. [20-11] 设 A 、B 、C 是任意 3 个事件, 且 $P(C)>0$, 证明:

(1) $P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$

(2) $P(A-B|C)=P(A|C)-P(AB|C)$

(3) $P(\bar{A}|C)=1-P(A|C)$

6. [22-17] 设事件 A 、B 、C 两两相互独立, 且 $P(A)=P(B)=P(C)=0.4$, $P(ABC)=0.1$, 求 $P(A\cup B\cup C)$, $P(A|\bar{C})$, $P(C|AB)$.
7. [21-12] 设情报员能破译一份密码的概率为 0.6, 假定各情报员能否破译这份密码是相互独立的.

(1) 若共有 4 名情报员, 求密码被破译的概率

(2) 至少要使用多少名情报员才能使破译一份密码的概率大于 95%

8. [21-14]

(1) 设事件 A 、B 相互独立. 证明: A 、$\bar{B}$ 相互独立, $\bar{A}$ 、$\bar{B}$ 相互独立;

(2) 设事件 $P(A)=0$ 时, 证明事件 A 与任意事件独立;

(3) 设 A 、B 、C 是 3 个相互独立的随机事件, 证明 $A\cup B$ 与 C 也独立.