Independence of Random Variables

September 22, 2025

随机变量的独立性

回顾: 对于随机事件的独立性有 $P(AB) = P(A)P(B)$. 而对于多维随机变量，各个分量的取值也可能是互不影响的, 这时称它们的相互独立的, 具体定义如下.

定义 0.45 设 X, Y 为二维随机变量, 对任意实数 x, y, 若事件 $X \leq x$ 和 $Y \leq y$ 相互独立, 即 $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$, 等价于

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称随机变量 X 与 Y 相互独立.

Remarks:

- 随机变量 X 与 Y 相互独立等价于随机事件 $\{X \leq x\}$ 和 $\{Y \leq y\}$ 对任意实数 x, y 都相互独立
- 对于任意的常数 c 也与任意随机变量相互独立

离散型随机变量的独立性

定义 0.46 设二维离散型随机向量 (X,Y) 的分布列为

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)(i,j=1,2,\dots),$$

以及 X 和 Y 的边缘分布列为 $p_{i\cdot}$ 和 $p_{\cdot j}$.

则 X 与 Y 相互独立的充要条件是

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}\ .$$

简而言之，分布列独立

- 某点处的概率等于所在“行”边缘分布列和“列”边缘分布列的乘积。

离散型随机变量的独立性：例 0.101

例 0.101 设离散型随机变量 X 和 Y 相互独立且它们的取值均为 $\{1,2,3\}$. 已知

- $P(Y=1)=1/3$
- $P(X=1,Y=1)=P(X=2,Y=1)=1/8$
- $P(X=1,Y=3)=1/16$

求 X 和 Y 的联合和边缘分布列.

解答：

- 由边缘分布列的定义有

$$P(X=3,Y=1)=P(Y=1)-P(X=1,Y=1)-P(X=2,Y=1)=1/12$$

- 由离散型随机向量的独立性的定义，可得 $P(X=1)=P(X=2)=$

$3/8$ 和 $P(X=3)=1/4$, 同理计算其他概率后可得分布列为

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	1/8	3/16	1/16	3/8
2	1/8	3/16	1/16	3/8
3	1/12	1/8	1/24	1/4
$p_{\cdot j}$	1/3	1/2	1/6	

离散型随机变量的独立性：例 0.102

例 0.102 设离散型随机变量 X 和 Y 相互独立且它们的取值均为 $\{-1, 0, 1\}$. 已知

- $P(XY = 0) = 3/4, P(XY = 1) = 1/8$
- $P(X = 0, Y = 0) = 1/4$
- $P(X = -1) = P(X = 1) = 1/4$

求 $P(X = -1, Y = 1)$ 和 $P(Y = 0)$ 的值.

离散型随机变量的独立性：例 0.102

题干: 设离散型随机变量 X 和 Y 相互独立且它们的取值均为 $\{-1,0,1\}$. 已知

- $P(XY=0)=3/4, P(XY=1)=1/8$
- $P(X=0,Y=0)=1/4$
- $P(X=-1)=P(X=1)=1/4$

求 $P(X=-1,Y=1)$ 和 $P(Y=0)$ 的值.

解答:

- $P(X=-1)=1/4, P(X=0)=1/2, P(X=1)=1/4$
- $P(Y=-1)=1/3, P(Y=0)=1/2, P(Y=1)=1/6$

连续型随机变量的独立性

定义 0.47 设二维连续型随机向量 (X, Y) 的密度函数为 $f(x, y)$, 以及 X 和 Y 的边缘密度函数分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 则 X 与 Y 相互独立的充要条件是

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)\ .$$

<u>Remarks:</u>

- 注意: 在离散型的独立性定义中, 我们关心的是分布函数

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

- 在连续型中, 积分独立

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \Leftrightarrow \quad F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

连续型随机变量独立性的性质

- 若随机变量 X 和 Y 相互独立, 则对任意集合 $A, B \subseteq \mathbb{R}$, 事件 $\{X \in A\}$ 和事件 $\{Y \in B\}$ 相互独立.
- 若随机变量 X 和 Y 相互独立, 则 $f(X)$ 与 $g(Y)$ 相互独立 (其中 $f(x)$ 和 $g(y)$ 是连续或分段连续函数).
- 若存在两个 $h(x)$ 和 $g(y)$ 函数, 使得 X 和 Y 的联合密度函数 $f(x, y)$ 对任意实数 x, y 均有

$$f(x, y) = h(x)g(y)$$

则随机变量 X 和 Y 相互独立. (注意: 定义域、存在性)

正态分布的独立性

定理 0.16 设二维随机向量 $(X,Y)\sim\mathcal{N}(\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2,\rho)$, 则 X 和 Y 相互独立的充要条件是 $\rho=0$.

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\exp\left(-\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\\
&= f_X(x)\cdot f_Y(y)
\end{aligned}
$$

换言之，当 $\rho\neq 0$ 时，$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，进而 X 和 Y 不独立。

连续随机变量独立性：例 0.103

例 0.103 设二维随机向量 (X,Y) 的密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases} cxe^{-y}, & 0<x<y<+\infty \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

问随机变量 X 和 Y 是否相互独立?

解答：例 0.103

题目: 如上所述.

解答:

- 由密度函数的规范性求解常数 c 的值为 1.
- 利用分部积分可得, 当 $x > 0$ 时随机变量 X 的边缘密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{x}^{+\infty} xe^{-y}dy = xe^{-x}$$

  当 $y > 0$ 时随机变量 Y 的边缘密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{y}^{0} xe^{-y}dx = \frac{1}{2}y^2e^{-y}$$

  因为 $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ 可得随机变量 X 和 Y 不独立.

连续随机变量独立性：例 0.104

例 0.104 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 X 服从 $[-1,1]$ 均匀分布, Y 服从参数为 $\lambda=2$ 的指数分布, 求 $P(X+Y\leq 1)$.

解答：例 0.104

题目: 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 X 服从 $[-1,1]$ 均匀分布, Y 服从参数为 $\lambda=2$ 的指数分布, 求 $P(X+Y\leq 1)$.

解答:

- 列出 X 和 Y 的边缘密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in[-1,1]\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \qquad \text{和} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y\geq 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

- 利用独立性求 X 和 Y 的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-2y}, & -1\leq x\leq 1, y\geq 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

- 利用联合密度函数有

$$P(X+Y\leq 1)=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x}e^{-2y}dy=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-4}$$