多维随机变量的独立性及条件分布

一、作业 (提交时间：Oct. 19, 2026)

1. [76-3] 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布列为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立, 求 a、b 的值.

2. [75-1/81-1/88-1] 一个箱子中装有 100 件同类产品, 其中一、二、三等品分别有 70, 20, 10 件. 已知 (X_1,X_2) 的联合分布列, 以及 X_1,X_2 的边缘分布列如上次作业题的第 1 题所得. 试求:

(1) X_1,X_2 是否互相独立? 为什么?

(2) 给定条件 $\{X_1=1\}$ 下 X_2 的条件分布列;

(3) 给定条件 $\{X_2=0\}$ 下 X_1 的条件分布列;

(4) 给定条件 $\{X_2=0\}$ 下 X_1 的条件分布函数 $F_{X_1|X_2}(x_1\mid 0)$.

3.[86-9] 设 (X,Y) 的服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 由曲线 $y=x^{-1}$ 以及直线 $y=0$, $x=1$ 与 $x=e^2$ 所围成. 求:

(1) (X,Y) 的联合密度函数;

(2) X,Y 的边缘密度函数;

(3) X,Y 是否互相独立? 为什么?

4. [90-3] 设 (X,Y) 的服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 由直线 $y=-x$, $y=x$ 与 $x=2$ 所围成. 已知 (X,Y) 的联合密度函数, 以及 X,Y 的边缘密度函数如上次作业题的第 3 题所得. 求:

(1) 条件密度函数 $f_{X|Y}(x\mid 1)$ 和 $f_{X|Y}(x\mid y)$, 其中 $|y|<2$;

(2) 条件概率 $P(X\le\sqrt{2}\mid Y=1)$;

(3) 给定条件 $\{Y=1\}$ 下 X 的条件分布函数 $F_{X|Y}(x\mid 1)$;

(4) 给定条件 $\{Y=y\}$ 下 X 的条件分布函数 $F_{X|Y}(x\mid y)$, 其中 $|y|<2$.

5. [93-7] 设某班车起点站上客人数 X 服从 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为 p $(0<p<1)$, 且中途下车与否相互独立. 以 Y 表示中途下车的人数. 求:

(1) 发车时上车人数为 n 的条件下, 中途有 m 人下车的概率 $P(Y=m\mid X=n)$;

(2) 二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律;

(3) 证明 Y 服从 λp 的泊松分布. [提示: $P(Y=m)=\sum_{n=m}^{\infty}P(X=n)P(Y=m\mid X=n)$.]

6. [92-3.3] 设二维随机变量 $(X,Y)\sim U(D)$, 其中 $D=\{x^2+y^2\le 1\}$. 求条件概率

$$P\left\{X>\frac{1}{2}\mid Y=0\right\}.$$

7. [95-4.3] 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Axy^2, & (x,y)\in(0,1)\times(0,1)\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

求: X 和 Y 是否相互独立, 并证明.

8. [98-4.9] 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且服从 $U(0,3)$. 求 $P(\max\{X,Y\}\le 1)$.

9. [93-6] 设随机变量 $X\sim E(1)$, 当已知 $X=x$ 时, $Y\sim U(0,x)$, 其中 $x>0$. 试求 (X,Y) 的联合密度函数.

10. 求证定理 0.17。设二维随机变量 $(X,Y)\sim\mathcal{N}(\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2,\rho)$，则

- 在 $Y=y$ 条件下随机变量 X 的服从正态分布

$$\mathcal{N}\left(\mu_x+\rho(y-\mu_y)\frac{\sigma_x}{\sigma_y},(1-\rho^2)\sigma_x^2\right)\ ,$$

- 在 $X=x$ 条件下随机变量 Y 的服从正态分布

$$\mathcal{N}\left(\mu_y+\rho(x-\mu_x)\frac{\sigma_y}{\sigma_x},(1-\rho^2)\sigma_y^2\right)\ .$$

二、补充练习

1. [83-3] 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布列为

X \ Y	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	α	β

当 α 与 β 取何值时 X,Y 相互独立?

2. [76-2/82-2/89-2] 两名水平相当的棋手弈棋三盘. 设 X 表示某名棋手获胜的盘数, Y 表示他输赢盘数之差的绝对值. 假定没有和棋, 且每盘结果相互独立. 已知 (X,Y) 的联合分布列, 以及 X,Y 的边缘分布列如上次练习题的第 1 题所得. 试求:

(1) X,Y 是否互相独立? 为什么?

(2) 给定条件 $\{Y=1\}$ 下 X 的条件分布列;

(3) 给定条件 $\{X=1\}$ 下 Y 的条件分布列.

3. [84-5] 已知随机变量 X, Y 的概率函数如下, 且 $P(XY=0)=1$. 试求: (1) (X,Y) 的联合分布列; (2)X,Y 是否互相独立? 为什么?

X	-1	0	1
概率	1/4	1/2	1/4

Y	0	1
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

4. [92-4] 设 (X,Y) 的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求:

(1) 条件密度函数 $f_{X|Y}(x\mid 1)$ 和 $f_{X|Y}(x\mid y)$, 其中 $y>0$;

(2) (X,Y) 的联合分布函数;

(3) 概率 $P(X<1,Y>2)$.